$$\leq (1-\lambda_{n+1})\, f\Big(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}x_n\Big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

конвексност

(сетимо се да је $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n+1}=1$

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}$$

$$= \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$$

па можемо применити индуктивну хипотезу!

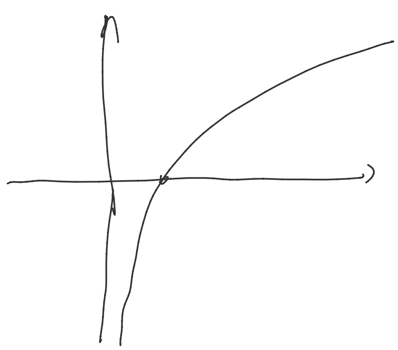
$$\text{и.х.} \leq \cancel{(1-\lambda_{n+1})}\Big(\frac{\lambda_1}{\cancel{1-\lambda_{n+1}}} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{\cancel{1-\lambda_{n+1}}} f(x_n)\Big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$, што је и био циљ!

Јангова неједнакост: Нека су $x, y > 0$ $(\neq 1)$ и $p, q > 0$ такви да је $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тада важи:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Решење:



$\ln x$ је конкавна

$$(\ln x)'' = \Big(\frac{1}{x}\Big)' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2, \quad \lambda_1+\lambda_2=1$$

Узмимо $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$

$$\ln\Big(\frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2\Big) \geq \frac{1}{p}\ln x_1 + \frac{1}{q}\ln x_2$$

Шта узети за x_1, тј. x_2?

Узмимо $x_1 = x^p$, $x_2 = y^q$

$$\ln\left(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{\cancel{p}}\ln x^{\cancel{p}} + \frac{1}{\cancel{q}}\ln y^{\cancel{q}}$$

$$\ln\left(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right) \geq \ln x + \ln y = \ln xy \;/e^{\wedge}$$

$$\boxed{\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \geq xy}$$

5) Хелдерове неједнакости:

Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$ и $p, q > 1$ такви да је $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тада важи:

$$x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n \leq \left(x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(y_1^q+y_2^q+\dots+y_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Решење: Приметимо да у специјалном случају $p=q=2$ добијамо $\to \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$$x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n \leq \left(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

а ово је $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ Коши-Шварцова неједнакост.

$\iff$

$$\frac{(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)}{(x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(y_1^q+y_2^q+\dots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

$$\frac{x_1y_1}{(x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}\,(y_1^q+y_2^q+\dots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\frac{x_1^p}{x_1^p+\dots+x_n^p}}{p} + \frac{\frac{y_1^q}{y_1^q+y_2^q+\dots+y_n^q}}{q}$$

$$A = \frac{x_1}{(x_1^p+\dots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad B = \frac{y_1}{(y_1^q+\dots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$ Знамо: $AB \leq \frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}$

$$A = \frac{1}{(x_1^p+\ldots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad B = \frac{1}{(y_1^q+\ldots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \quad \text{заш. } A \text{ и } B, \ p \ \ q$$

$\vdots$ – слично

$$\frac{x_n y_n}{(x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(y_1^q+y_2^q+\ldots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\frac{x_n^p}{x_1^p+\ldots+x_n^p}}{p} + \frac{\boxed{\frac{y_n^q}{y_1^q+y_2^q+\ldots+y_n^q}}}{q}$$

$$\frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{(x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(y_1^q+y_2^q+\ldots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$, што је и био циљ!

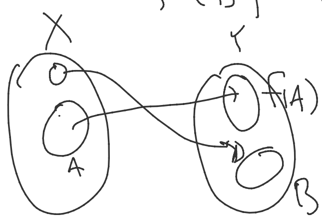
Директна и инверзна слика ф-је

Деф: $f: X \to Y$ је задата ф-ја и $A \subseteq X$. Тада је директна слика скупа A ф-јом f скуп

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

Деф: $f: X \to Y$ је задата ф-ја и $B \subseteq Y$. Тада је инверзна слика скупа B ф-јом f скуп

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$$



Коментар: Инверзна слика постоји за било које ф-је! (Она не мора имати инверзну)

Уколико је ф-ја бијекција и $f(A)=B$, тада је $f^{-1}(B)=A$.

(6) Слагање директне слике са $\cap, \cup, \setminus$

Доказати да за $f: X \to Y$, $A_1, A_2 \subseteq X$ важи

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ и навести ...

(2) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ и навести пример када важи строга инклузија

(3) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ и навести пример када важи строга инклузија

---

(1) Узмимо $y \in f(A_1 \cup A_2)$ тј. $y = f(x)$ за $x \in A_1 \cup A_2$

$\Leftrightarrow$ $y = f(x)$ за $x \in A_1$ $\vee$ $y = f(x)$ за $x \in A_2$

$\Leftrightarrow$ $y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$

по дефиницији директне слике

$\Leftrightarrow$ $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$

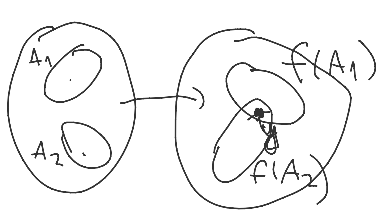
(2) Узмимо $y \in f(A_1 \cap A_2)$

$\Rightarrow$ $y = f(x)$ за $x \in A_1 \cap A_2$

$\Rightarrow$ $y = f(x)$ за $x \in A_1$ $\wedge$ $y = f(x)$ за $x \in A_2$

??? $\Leftarrow$ $y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2)$

Не мора да важи ($\Leftarrow$) $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$



$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$

али $y \in f(A_1 \cap A_2)$

јер је ово празан скуп

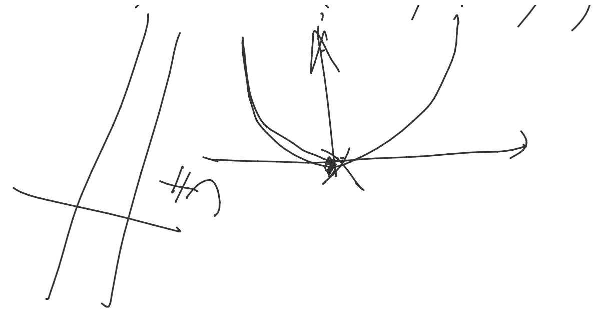
$A_1 = (-\infty, 0)$

$A_2 = (0, +\infty)$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$ $\quad (f(\emptyset) = \emptyset)$

Узмимо $f(x) = x^2$

узмимо $f(x) = x^2$



$\Rightarrow f(A_1) = (0, +\infty)$

$f(A_2) = (0, +\infty)$

$\Rightarrow f(A_1) \cap f(A_2) = (0, +\infty)$

За (3) пролази исти контрапример

јер је $A_1 \setminus A_2 = (-\infty, 0) \Rightarrow f(A_1 \setminus A_2) = (0, +\infty)$

$f(A_1) \setminus f(A_2) = \emptyset$ $\quad \subsetneq$

$y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$

$y \in f(A_1 \setminus A_2)$

$\Rightarrow y \in f(A_1) \wedge \neg\, y \in f(A_2)$

$\Rightarrow y = f(x)$ за неко $x \in A_1 \wedge \neg(y = f(x)$ за неко $x \in A_2)$

$\Rightarrow y = f(x)$ за неко $\underline{x \in A_1} \wedge y \neq f(x)$ за свако $\underline{x \in A_2}$

$\Rightarrow y = f(x)$ за неко $A_1 \setminus A_2$

Где овде не важи еквиваленција?

Домаћи!