103 A, 15.10.

Thursday, October 15, 2020 11:22 AM

Још мало значајних неједнакости

① [Лема о пермутацијама] Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ такви да је $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ и $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Затим, нека је π произвољна пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ (тј. бијекција $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$). Тада је

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \le a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} + \dots + a_n b_{\pi(n)} \le a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

[Нпр. за $2 < 3 < 4$ и $5 < 6 < 7$

$$52 = 2\cdot 7 + 3\cdot 6 + 4\cdot 5 \le \quad \le 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + 4\cdot 7 = 56$$]

Доказ: идемо индукцијом (тривијално за $n=1$ немамо шта да се гледа)

$n=2$ → $a_1 b_2 + a_2 b_1 \le a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} \le a_1 b_1 + a_2 b_2$

Овде заправо имамо само два могућа збира

Суштински, треба доказати да је

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 \le a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\iff a_1 b_2 - a_1 b_1 + a_2 b_1 - a_2 b_2 \overset{?}{\le} 0$$

$$\iff a_1 (b_2 - b_1) + a_2 (b_1 - b_2) \overset{?}{\le} 0$$

$$\iff \underbrace{(a_1 - a_2)}_{<0} \underbrace{(b_2 - b_1)}_{>0} < 0 \checkmark$$

Хипотеза: претпостављамо да је тврђење тачно за n

$$a_1 b_n + \dots + a_n b_1 \le a_1 b_{\pi(1)} + \dots + a_n b_{\pi(n)} \le a_1 b_1 + \dots + a_n b_n,$$ π произвољна пермутација

Корак: Докажимо да је тада

$$a_1 b_{n+1} + \dots + a_n b_2 + a_{n+1} b_1 \le a_1 b_{\pi(1)} + \dots + a_n b_{\pi(n)} + a_{n+1} b_{\pi(n+1)} \le a_1 b_1 + \dots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1}$$

Докажимо десну страну, лева онда аналогно важи. Суштински, хипотеза нам говори да је највећа могућа вредност пермутованог збира у случају када је $\pi \equiv id$ ($\pi(i) = i$ за све $1 \le i \le n$)

проширеног збира у случају када је $\pi \equiv id$ ($\pi(i)=i$ за све $1\le i\le n$)

То треба доказати и за $n+1$. ПП да $\pi(n+1)\neq n+1$. Нека је $\pi(n+1)=j$, где је $1\le j\le n$.

Како је π пермутација, то постоји $k\in[1,n]$ такво да је $\pi(k)=n+1$. Како су почетни бројеви претходно растући, то је $a_k < a_{n+1}$ и $b_k < b_{n+1}$ и $a_j < a_{n+1}$ и $a_k \le a_{n+1}$

$$(b_{n+1}-b_k)(a_{n+1}-a_j)>0$$

$$a_{n+1}b_{n+1}-a_jb_{n+1}-b_ka_{n+1}+a_jb_k>0$$

$$a_{n+1}b_{n+1}+a_jb_k>a_jb_{n+1}+b_ka_{n+1}$$

$$a_{n+1}b_{n+1}+a_{\underbrace{\pi(n+1)}_{j}}b_k>a_{\underbrace{\pi(n+1)}_{j}}b_{n+1}+a_{n+1}b_k$$

Уколико узмем пермутацију π_1 такву да се π_1 и π поклапају на свим местима осим на k и $n+1$

$\pi_1(k)=j$, $\pi_1(n+1)=n+1$

$$+\begin{cases} a_{n+1}b_{\pi_1(n+1)}+a_{\pi_1(k)}b_k > a_{\pi(n+1)}b_{n+1}+a_{n+1}b_k \\ a_1b_{\pi_1(1)}+a_2b_{\pi_1(2)}+a_3b_{\pi_1(3)}+\dots+a_{j-1}b_{\pi_1(j-1)}+a_{j+1}b_{\pi_1(j-1)}+\dots+a_nb_{\pi_1(n)} \end{cases}$$

$$=a_1b_{\pi(1)}+a_2b_{\pi(2)}+a_3b_{\pi(3)}+\dots+a_{j-1}b_{\pi(j)}+a_{j+1}b_{\pi(j-1)}+\dots+a_nb_{\pi(n)}$$

Саберимо леву и десну страну

На овај начин смо нашли пермутацију π_1 која даје боље резултате и за коју је $\pi_1(n+1)=n+1$ (што није било за π) [illegible] $\pi(n+1)=n+1$

добре резултати и за који је $\sigma_1(n+1) = n+1$ (што није било за π). Самим тим, треба узети $\pi(n+1)=n+1$, а надаље применимо индуктивну хипотезу на преостале n места.

2) Чебишевљеве неједнакости: Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ и $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ и $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Тада важи:

$$\frac{a_1b_n+\dots+a_nb_1}{n} \le \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\dots+b_n}{n} \le \frac{a_1b_1+\dots+a_nb_n}{n}$$

Доказ: Помножимо са n^2

$$n(a_1b_n+\dots+a_nb_1) \le \underbrace{(a_1+a_2+\dots+a_n)\cdot(b_1+b_2+\dots+b_n)}_{S} \le (a_1b_1+\dots+a_nb_n)\cdot n$$

$$\begin{aligned} S = {} & a_1b_1 + \boxed{a_1b_2} + \dots + a_1b_n \\ & a_2b_1 + a_2b_2 + \dots + a_2b_n \\ & \vdots \\ & a_nb_1 + a_nb_2 + \dots + a_nb_n \end{aligned}$$

Правимо одговарајуће пермутације тако што узмемо нпр. a_1b_1 и не узимамо ниједан број из њене врсте и колоне. Одатле узимамо неки број из друге врсте, али опет прецртавамо његову врсту и колону. На овај начин добијемо једну пермутацију. На исти начин као малопре, не узимајући већ одабране бројеве, правимо нову пермутацију. Тако добијамо n пермутација. Свака је $\ge a_1b_n+\dots+a_nb_1$ и $\le a_1b_1+\dots+a_nb_n$

$\Rightarrow \quad n\cdot(a_1b_n+\dots+a_nb_1) \le S \le n\cdot(a_1b_1+\dots+a_nb_n)$

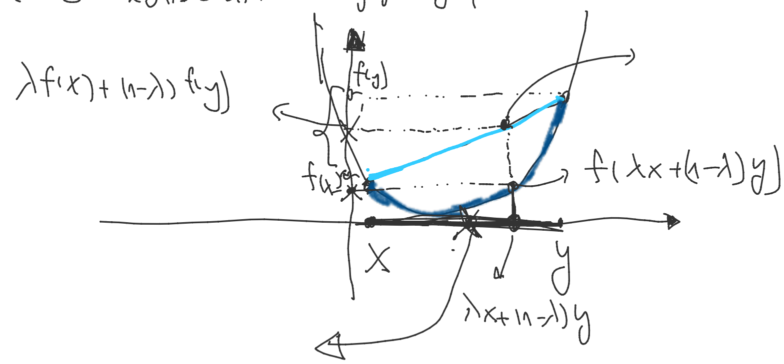
што нам је и био циљ!

(3) <u>Јенсенова неједнакост</u>: Нека су $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in[0,1]$ такви да је $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$ и $x_1,x_2,\dots,x_n\in(a,b)$. Тада је:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n)\le \lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\dots+\lambda_nf(x_n),$$

при чему је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ конвексна функција.

Пар речи о конвексним функцијама.



дуж између тачака x и y је задата са $\lambda x+(1-\lambda)y$, где је $\lambda\in[0,1]$

$\lambda=0\to y$, $\lambda=1\to x$

$\lambda=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}(x+y)$

<u>Деф</u>: Функција $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ је конвексна (конкавна) ако за све $x,y\in(a,b)$ и $\lambda\in[0,1]$ важи да је

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$(\ge)$$

Пређимо на доказ Јенсенове неједнакости. Индукција:

$n=1\to\lambda_1=1$, $f(1\cdot x_1)\le 1\cdot f(x_1)$ ✓

$n=2\to\lambda_1+\lambda_2=1$, $\boxed{f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)}$

Зашто ово важи? Па ово је заправо дефиниција конвексности ф-је.

$\lambda=\lambda_1$, $\lambda_2=1-\lambda$ ✓

<u>Хипотеза</u>: Претпоставимо да тврђење важи за n