$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1)+\dots+\lambda_n f(x_n), \quad \lambda_1+\dots+\lambda_n=1$$

корак: Доказујемо да је

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_n x_n+\lambda_{n+1}x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\dots+\lambda_n f(x_n)+\lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

где је $\lambda_1+\dots+\lambda_n+\lambda_{n+1}=1$

$$f(\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n+\lambda_{n+1}x_{n+1}) = f\left((1-\lambda_{n+1})\cdot\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}x_1+\dots+\frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}x_n\right)+\lambda_{n+1}x_{n+1}\right)$$

$\lambda_{n+1}\neq 1$

случај $\lambda_{n+1}=1$ је тривијалан јер је онда $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$

$$\leq (1-\lambda_{n+1})\, f\Big(\underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}x_1+\dots+\frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}x_n}\Big)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

конвексности

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}+\dots+\frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}=\frac{\overbrace{\lambda_1+\dots+\lambda_n}^{1-\lambda_{n+1}}}{1-\lambda_{n+1}}=1,$$ па можемо применити индуктивну хипотезу. (за n сабирака)

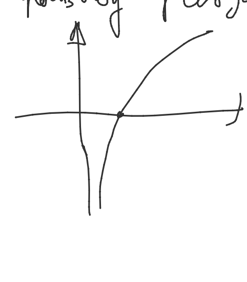
$$\leq \cancel{(1-\lambda_{n+1})}\cdot\left[\frac{\lambda_1}{\cancel{1-\lambda_{n+1}}}f(x_1)+\dots+\frac{\lambda_n}{\cancel{1-\lambda_{n+1}}}f(x_n)\right]+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

$$=\lambda_1 f(x_1)+\dots+\lambda_n f(x_n)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1}),$$ што је и био циљ.

(4) Јангова неједнакост: Нека су $x,y\geq 0$. Нека су $p,q>1$ такви да је $\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$. Тада важи:

$$xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$

Решење: Узмимо ф-ју $f(x)=\ln x$ (природно ф-ју која производ преводи у збир)



$$f''(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}<0 \Rightarrow \ln x \text{ је конкавна}$$

Јенсен

$$\Rightarrow f(\lambda\tilde{x}+(1-\lambda)\tilde{y}) \geq \lambda f(\tilde{x})+(1-\lambda)f(\tilde{y})$$

$$\ln(\lambda\tilde{x}+(1-\lambda)\tilde{y}) \geq \lambda\ln\tilde{x}+(1-\lambda)\ln\tilde{y}$$

Шта узети као λ? $\lambda=\frac{1}{p} \Rightarrow 1-\lambda=\frac{1}{q}$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\tilde{x}}{p}+\frac{\tilde{y}}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln\tilde{x}+\frac{1}{q}\ln\tilde{y}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\tilde{x}}{p} + \frac{\tilde{y}}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln \tilde{x} + \frac{1}{q}\ln \tilde{y}$$

Ставимо $\tilde{x} = x^p \quad \tilde{y} = y^q$

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{\ln x^{p}}{\cancel{p}} + \frac{\ln y^{q}}{\cancel{q}}$$

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \ln x + \ln y \quad / e^{\wedge}$$, при томе се знак не мења јер је e^x растућа ф-ја

$$\boxed{e^{\ln a} = a}$$

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = xy,$$

а то је и био циљ.

(5) <u>Хелдерова неједнакост</u>: Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n > 0$ и p и $q > 1$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада је:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leq (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

<u>Доказ:</u> за домаћи (погледај у збирци Кртинић)

<u>Идеја:</u> За $p = q = 2$ $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\right)$ ова неједнакост је Коши-Шварцова неједнакост па треба почети од наше идеје као у том задатку, са тим што нећемо користити неједнакост између средина, већ Јангову.

Доказ урађен на часу!

$$\Leftrightarrow \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n}{(x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (y_1^q + \dots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

$$\frac{x_1y_1}{(x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}}(y_1^q + \dots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \overset{\text{Јангова}}{\leq} \frac{\frac{x_1^p}{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}}{p} + \frac{\boxed{\frac{y_1^q}{y_1^q + \dots + y_n^q}}}{q}$$

$$\frac{[illegible]}{(x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}\,(y_1^q+\dots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{[illegible]}{p} + \frac{[illegible]}{q}$$

$$\vdots$$

$$+\ \frac{x_n y_n}{(x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (y_1^q+\dots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{\frac{x_n^p}{x_1^p+x_2^p+\dots+x_n^p}}{p} + \frac{\frac{y_n^q}{y_1^q+\dots+y_n^q}}{q}$$

$$\frac{x_1y_1+\dots+x_ny_n}{(x_1^p+\dots+x_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (y_1^q+\dots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$, што је и био циљ