103Б, практикум, 5.10.

Monday, October 5, 2020 12:05 PM

Практикум 1

- Подсетање на средњошколске задатке

1)
$$\frac{6-x}{x-1} \geq \frac{6-x}{2x+3}$$

$$\frac{6-x}{x-1} - \frac{6-x}{2x+3} \geq 0$$

$$\frac{(6-x)(2x+3)-(6-x)(x-1)}{(x-1)(2x+3)} \geq 0$$

$$\frac{(6-x)(2x+3-x+1)}{(x-1)(2x+3)} \geq 0$$

$$\frac{\underset{6}{(6-x)}\ \underset{-4}{(x+4)}}{\underset{1}{(x-1)}\ \underset{-\frac{3}{2}}{(2x+3)}} \geq 0$$

	$-\infty$ … -4	-4 … $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ … 1	1 … 6	6 … $+\infty$
$6-x$	+	+	+	+ 0	−
$x+4$	− 0	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	+	+
$2x+3$	−	−	+	+	+
израз	− 0	+	−	+ 0	−

$$x \in \left[-4, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, 6]$$

2)
$$\sqrt{\frac{x}{\underset{\geq 0}{x^2-4}}} + \sqrt{\underset{\geq 0}{25-x^2}} \geq 0$$

Ово је задовољено за све x из домена

Домен:
$$\frac{x}{\underbrace{x^2-4}_{(x-2)(x+2)}} \geq 0, \quad x^2-4 \neq 0, \quad 25-x^2 \geq 0$$

$x \neq 2$ $\qquad x^2 \leq 25$

$x \neq -2$ $\qquad x \in [-5, 5]$

	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
x	−	− 0	+	+
$x-2$	−	−	−	+

x	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
израз	$-$	$+$ 0	$-$	$+$

$x+2$ $\qquad$ $x \in (-5,5]$

$x \in (-2,0] \cup (2,+\infty)$

Домен за пресек: $x \in (-2,0] \cup (2,5]$

скуп решења

(3) $\sqrt{x^2-2x} > \sqrt{(x+1)(x-1)} - 1$

Услови: $x^2-2x \geq 0$

$x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0] \cup [2,+\infty)$

$(x+1)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ $\qquad$ D: $x \in (-\infty,-1] \cup [2,+\infty)$

$\underbrace{\sqrt{x^2-2x}+1}_{>0} > \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\geq 0} \quad /^2$ знак остаје исти

$\cancel{x^2}-2x+1+2\sqrt{x^2-2x} > \cancel{x^2}-1$

$2\sqrt{x^2-2x} > 2x-2 \quad /:2$

$\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{\geq 0} > x-1 \quad /^2$

I Ако је $x-1<0$, онда неједнакост важи

$x<1$

$\hookrightarrow x \in (-\infty,-1]$ неједнакост важи

II $x \in [2,+\infty)$ (Домен $\cap$ $x-1 \geq 0$)

Обе стране су позитивне и можемо квадрирати!

$x^2-2x > x^2-2x+1$

$6 > 1 \Rightarrow$ овде нема решења

Коначно, решење је $x \in (-\infty, -1]$

$\boxed{4}$ $2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} \geq 6 \ / \ln$

Покушај студента

$2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 3$

$2^{x-1} \geq 3^{1-\frac{1}{x}}$ немамо исту основу

$3^{\frac{1}{x}} \neq 3^{-x} = \frac{1}{3^x}$

D: $x \neq 0$

Треба нам свуда иста основа!

Можемо да логаритмујемо обе стране ($\ln$ је растућа ф-ја $\Rightarrow$ знак се не мења)

$\log_2(2^x \cdot 3^{\frac{1}{x}}) \geq \log_2 6$ (можемо узети основу 2) нпр. (предлог студента)

$\log_2 2^x + \log_2 3^{\frac{1}{x}} \geq \log_2 2 + \log_2 3$

$x + \frac{1}{x}\log_2 3 \geq 1 + \log_2 3$

$x - 1 \geq \log_2 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$x - 1 \geq \log_2 3 \cdot \frac{x-1}{x}$

$(x-1) - \log_2 3 \cdot \frac{x-1}{x} \geq 0$

$(x-1) \cdot \left(1 - \frac{\log_2 3}{x}\right) \geq 0$

$\frac{\log_2 3}{x} \leq 1 \ / \cdot x$ $\rightarrow x < 0$ ✓ $\rightarrow x > 0$ $x \geq \log_2 3$

$\left(x - 1 \geq 0 \ \wedge \ 1 - \frac{\log_2 3}{x} \geq 0\right) \vee \left(x - 1 \leq 0 \ \wedge \ 1 - \frac{\log_2 3}{x} \leq 0\right)$

$\left(x \geq 1 \ \wedge \ x \in (-\infty, 0) \cup [\log_2 3, +\infty)\right) \vee \left(x \leq 1 \ \wedge \ x \in (0, \log_2 3]\right)$

$x \in [\log_2 3, +\infty)$ $\qquad\qquad$ $x \in (0,1]$

$x \in (0,1] \cup [\log_2 3, +\infty)$ ← скуп решења

(5) $\log_{\sqrt5}(4^x-6) - \log_{\sqrt5}(2^x-2) = 2$

$$\cancel{\log_{\sqrt5}} \frac{4^x-6}{2^x-2} = \cancel{\log_{\sqrt5}} 5$$

$$\frac{4^x-6}{2^x-2} = 5$$

$$4^x - 6 = 5\cdot 2^x - 10$$

$$\boxed{4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0}$$

Смена $2^x = t$, $t > 0$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-1)(t-4) = 0 \Rightarrow t = 1 \ \vee \ t = 4$$

$$2^x = 1 = 2^0 \ \vee \ 2^x = 4 = 2^2$$

$$\cancel{x = 0} \ \vee \ \boxed{x = 2}$$

је једино решење

Домен:

$4^x - 6 > 0$

$2^x - 2 > 0$

$4^x > 6 \ / \log_2$

$\log_2 4^x > \log_2 6$

$2x > \log_2 6 \Rightarrow \boxed{x > \frac{\log_2 6}{2}}$

$2^x > 2 \Rightarrow \boxed{x > 1}$

Домен: $x \in \left(\frac{\log_2 6}{2}, +\infty\right)$

---

(6) $(0{,}5)^{\frac{2x}{1-x}} \geq \sqrt{(0{,}25)^{x-6}} \ \ /^2$

$1-x \neq 0$

(6) $(0,5)^{1-x} \geq \sqrt{(0,25)^{x-6}}$ $\quad$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

$\underline{\text{услови}}$: $1-x \neq 0$, $x \neq 1$

$$\left(2^{\frac{2x}{x-1}}\right)^2 \geq 2^{-2(x-6)}$$

$$2^{\frac{4x}{x-1}} \geq 2^{-2x+12}$$ знак се не менува $(2>1)$

$$\frac{4x}{x-1} \geq -2x+12 \quad / :2$$

$$\frac{2x}{x-1} \geq -x+6$$

$$\frac{2x}{x-1} + x - 6 \geq 0$$

$$\frac{2x + x^2 - x - 6x + 6}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{\overbrace{x^2-5x+6}^{(x-2)(x-3)}}{x-1} \geq 0 \iff \boxed{x \in (1,2] \cup [3,+\infty)}$$

сите решенија

	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$+$		$+$		$+$
израз	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$

(7) $2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 x^2} = 2$ $\quad$ услов $x > 0$

$$2^{\log_3 x} + 2^{2\cdot\log_3 x} = 2$$

Смена: $t = 2^{\log_3 x}, \ t > 0$

$$t + t^2 = 2, \quad t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t+2)(t-1) = 0$$

$$\cancel{t = -2} \ \vee \ t = 1$$

$$2^{\log_3 x} = 1 = 2^0$$

$$\log_3 x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

једино решение