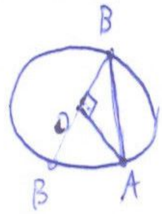
5.8. 

Нека је координатни систем постављен тако да елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Нека је $A(x_0,y_0)$ произвољна тачка са елипсе. Тада је $\overrightarrow{OA}=(x_0,y_0)$ вектор нормале праве OB (јер је $OA\perp OB$), па пошто је $O(0,0)$ центар елипсе следи да је OB: $x_0(x-0)+y_0(y-0)=0$, тј. $x_0(x-0)=-y_0(y-0)$. Дакле, OB: $\frac{x-0}{-y_0}=\frac{y-0}{x_0}=t$, па тачка $B(x_1,y_1)$ задовољава $\frac{x_1-0}{-y_0}=\frac{y_1-0}{x_0}=t$, тј. $x_1=-y_0t$, $y_1=x_0t$. Тачка B припада и елипси, па важи $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, тј. $\frac{(-y_0t)^2}{a^2}+\frac{(x_0t)^2}{b^2}=1$. Дакле, $\left(\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}\right)t^2=1$, тј. $t^2=\frac{1}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}$. Следи да постоје две могућности за B, но, због симетрије, довољно је проверити тврђење за једну од две могуће тачке B. Без умањења општости, одаберимо $t=\frac{1}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}$. Тада је $x_1=-\frac{y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}$, $y_1=\frac{x_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}$. Једначина праве AB је AB: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$, тј. у имплицитном облику $(y_1-y_0)(x-x_0)-(x_1-x_0)(y-y_0)=0$. Растојање тачке $O(0,0)$ од праве AB је

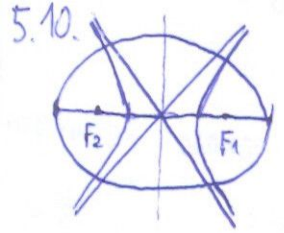
$$\frac{|(y_1-y_0)(0-x_0)-(x_1-x_0)(0-y_0)|}{\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2}}=\frac{|-x_0(y_1-y_0)+y_0(x_1-x_0)|}{\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2}}=\frac{|-x_0y_1+\cancel{x_0y_0}+y_0x_1-\cancel{x_0y_0}|}{\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2}}=$$

$$=\frac{|-x_0y_1+y_0x_1|}{\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2}}=\frac{\left|-x_0\cdot\frac{x_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}+y_0\cdot\frac{-y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}\right|}{\sqrt{y_1^2-2y_1y_0+y_0^2+x_1^2-2x_1x_0+x_0^2}}=\frac{\frac{|-x_0^2-y_0|^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}-2\frac{x_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}y_0+y_0^2+\frac{y_0^2}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}-2\frac{-y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}x_0+x_0^2}}=$$

$$=\frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}+x_0^2+y_0^2-\cancel{2\frac{x_0y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}+\cancel{2\frac{x_0y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}}}=\frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)\left(\frac{1}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}+1\right)}}=\frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)\left(\frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}+\frac{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}\right)}}=$$

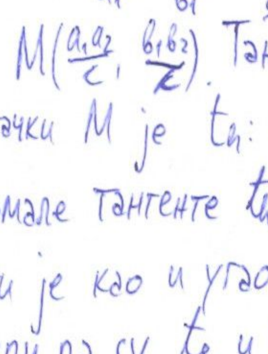
$$=\frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)\cdot\frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2+y_0^2}{b^2}}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}=\frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\cancel{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}}{\frac{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}{\cancel{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}}=\frac{\cancel{x_0^2+y_0^2}}{\cancel{(x_0^2+y_0^2)}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}},$$

што не зависи од избора тачке A, а самим тим ни од полудијаметара OA и OB.

5.10. 

Ако елипса и хипербола имају заједничке жиже F_1 и F_2, онда имају и заједнички центар (средиште F_1F_2). Одаберимо Декартов правоугли координатни систем тако да координатни почетак јесте средиште F_1F_2 и x-оса садржи тачке F_1, F_2, O и расте у смеру од O ка F_1 (наравно, y-оса је нормална на x-оси у O и одаберимо да оријентација координатног система буде позитивна). Нека је $OF_1=c$. Тада тачке F_1 и F_2 имају редом координате $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$. Нека су a_1, b_1 редом велика и мала полуоса елипсе и a_2, b_2 редом одговарајући параметри хиперболе. Тада је $c^2=a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2$, а једначине елипсе и хиперболе су, редом, $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ и $\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1$.

Угао између двеју кривих јесте угао између њихових тангенти у пресечној тачки. Због симетрије (елипса и хипербола имају исте осе симетрије) угао ће бити исти у свим тачкама пресека, па потражимо угао у пресечној тачки која има позитивну x-координату и y-координату. Нека је то тачка $M(x_0,y_0)$. Тада је $\frac{x_0^2}{a_1^2}+\frac{y_0^2}{b_1^2}=\frac{x_0^2}{a_2^2}-\frac{y_0^2}{b_2^2}=1$. Из $c^2=a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2$ имамо да је $b_1^2=a_1^2-c^2$ и $b_2^2=c^2-a_2^2$, па је $\frac{x_0^2}{a_1^2}+\frac{y_0^2}{a_1^2-c^2}=\frac{x_0^2}{a_2^2}-\frac{y_0^2}{c^2-a_2^2}=1$. Следи да је $\frac{y_0^2}{a_1^2-c^2}+\frac{y_0^2}{c^2-a_2^2}=\frac{x_0^2}{a_2^2}-\frac{x_0^2}{a_1^2}$, тј. $\frac{y_0^2}{(a_1^2-c^2)(c^2-a_2^2)}\cancel{(c^2-a_2^2+a_1^2-c^2)}=\frac{x_0^2}{a_2^2a_1^2}\cancel{(a_1^2-a_2^2)}$. Дакле, $\frac{y_0^2}{b_1^2b_2^2}=\frac{x_0^2}{a_1^2a_2^2}$, тј. $\frac{y_0^2}{x_0^2}=\frac{b_1^2b_2^2}{a_1^2a_2^2}$. Због претпоставке $x_0>0$, $y_0>0$ важи $\frac{y_0}{x_0}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$, па је $y_0=b_1b_2t$ и $x_0=a_1a_2t$, за неко $t>0$. Заменом у једначину елипсе (или хиперболе, свеједно) добијамо $1=\frac{x_0^2}{a_1^2}+\frac{y_0^2}{b_1^2}=\frac{\cancel{a_1^2}a_2^2t^2}{\cancel{a_1^2}}+\frac{\cancel{b_1^2}b_2^2t^2}{\cancel{b_1^2}}=(a_2^2+b_2^2)t^2=c^2t^2$, па је $t^2=\frac{1}{c^2}$, тј. $t=\frac{1}{c}$. Дакле, тачка пресека је $M(\frac{a_1a_2}{c},\frac{b_1b_2}{c})$. Тангента на елипси у тачки M је $t_e: \frac{x\frac{a_1a_2}{c}}{a_1^2}+\frac{y\frac{b_1b_2}{c}}{b_1^2}=1$, а тангента на хиперболи у тачки M је $t_h: \frac{x\frac{a_1a_2}{c}}{a_2^2}-\frac{y\frac{b_1b_2}{c}}{b_2^2}=1$. Вектор нормале тангенте t_e је $\vec{n}_{t_e}=(\frac{a_2}{ca_1},\frac{b_2}{cb_1})$, а вектор нормале тангенте t_h је $\vec{n}_{t_h}=(\frac{a_1}{ca_2},-\frac{b_1}{cb_2})$. Због углова с нормалним крацима, угао између правих исти је као и угао између њихових нормала. Како је $\langle\vec{n}_{t_e},\vec{n}_{t_h}\rangle=\frac{a_2}{ca_1}\cdot\frac{a_1}{ca_2}+\frac{b_2}{cb_1}\cdot(-\frac{b_1}{cb_2})=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c^2}$ следи да су t_e и t_h међусобно нормалне, па су и елипса и хипербола међусобно нормалне.

5.11. 

Одаберимо други координатни систем $O'x'y'$ коме је права $x-y+1=0$ x'-оса и права $x+y+1=0$ y'-оса.

$x-y+1=0$ | $x+y+1=0$
$x+1=y$ | $x+1=-y$
$\frac{x+1}{1}=\frac{y-0}{1}$ | $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-0}{1}$

Вектор x'-осе треба да буде јединични вектор истог смера као вектор правца $(1,1)$ праве $x-y+1=0$, а то је вектор $\vec{f_1}=\frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. Вектор y'-осе треба да буде јединични вектор истог смера као вектор правца $(-1,1)$ праве $x+y+1=0$, а то је вектор $\vec{f_2}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. Такође, можемо приметити да обе праве садрже тачку $O'(-1,0)$, што је координатни почетак новог координатног система $O'x'y'$. Из области Трансформација координата знамо да су формуле трансформације

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Како је $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (матрице преласка из ортонормираног афиног репера у ортонормирани афини репер (Декартовог правоуглог координатног система у Декартов правоугли координатни систем) имају особину да је $A^{-1}=A^T$), следи да је

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$ тј. да је

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Тада тачка $A(-2,-1)$ из Oxy координатног система постаје тачка чије су координате

$$A: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$ у $O'x'y'$ координатном систему, а тачка $B(0,-2)$ из координатног система Oxy постаје тачка чије су координате

$$B: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ у $O'x'y'$ координатном систему. Крива коју тражимо има две осе симетрије (x'-оса и y'-оса), па мора бити елипса или хипербола. Трансформацијом координата постигли смо да у $O'x'y'$ координатном систему крива има једначину у канонском облику, тј. да је једначина криве $\frac{x'^2}{a^2}+\beta\frac{y'^2}{b^2}=1$, где је $\beta\in\{-1,1\}$. Заменом координата тачака A и B добијамо

$$\frac{(-\sqrt{2})^2}{a^2}+\beta\cdot\frac{0^2}{b^2}=1 \qquad \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{a^2}+\beta\cdot\frac{\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{2}{a^2}+0=1 \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{2}+\beta\cdot\frac{\frac{9}{2}}{b^2}=1$$

$$a^2=2 \qquad \frac{1}{4}+\beta\cdot\frac{9}{2b^2}=1$$

Очигледно мора бити $\beta=1$, јер је $\beta\cdot\frac{9}{2b^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>0$, и $\frac{\cancel{9}^{3}}{2b^2}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_{2}}$, па је $b^2=6$.

Дакле, једначина криве (која је елипса) је $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{6}=1$. Међутим, тражило се да се одреди једначина криве у почетном координатном систему Oxy. Како је $x'=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $y'=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}$, заменом у добијену једначину у $O'x'y'$ координатном систему добијамо

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{6}=1,$$ тј. $\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+1)\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+1)\right)^2}{6}=1$. Дакле, једначина тражене елипсе у Oxy координатном систему је $\frac{(x+y+1)^2}{4}+\frac{(x-y+1)^2}{12}=1$.

5.13. Крива има две жиже, па је у питању елипса или хипербола. Центар криве је средиште дужи F_1F_2, па су његове координате $O\left(\frac{1-2}{2},\frac{1-2}{2}\right)$, тј. $O\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Растојање од центра до жиже (било које) је $c=OF_1=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, а растојање од центра до директрисе је $\frac{a^2}{c}=d(O,l)=\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Следи да је $a^2=c\sqrt{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=3$, па је $a=\sqrt{3}$. Како је $e=\frac{c}{a}$, следи да је $e=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Да бисмо искористили особину да је количник растојања произвољне тачке криве другог реда од жиже и од директрисе једнак ексцентрицитету, морамо утврдити која од ових жижа је у пару с директрисом. У пару с њом биће она жижа чије је растојање од ње мање. Како је $d(F_1,l)=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $d(F_2,l)=\frac{|-2-2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$, следи да су жижа F_1 и директриса l у пару. Дакле, једначина тражене криве (која је хипербола, јер је $e>1$) је дата са

$$\frac{d(M,F_1)}{d(M,\ell)}=\frac{\sqrt6}{2}$$, где је $M(x,y)$ произвољна тачка криве.

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt2}}=\frac{\sqrt6}{2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\frac{\sqrt6}{2}\cdot\frac{|x+y-1|}{\sqrt2}=\frac{\sqrt3}{2}|x+y-1| \;/^2$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac34(x+y-1)^2$$

5.14. Права t која садржи тачку $A(3,4)$ има ~~координате~~ једначину $t:\ \frac{x-3}{u}=\frac{y-4}{v}$. Да би она додиривала криву, неопходно је да постоји само једна тачка у пресеку праве t и криве.

$$t:\ \frac{x-3}{u}=\frac{y-4}{v}=\lambda$$

$$x=3+\lambda u$$
$$y=4+\lambda v$$

$$2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$$

$$2\cdot(3+\lambda u)^2-4(3+\lambda u)(4+\lambda v)+(4+\lambda v)^2-2(3+\lambda u)+6(4+\lambda v)-3=0$$

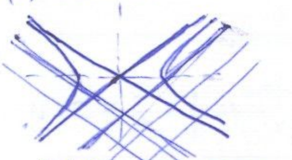
$$2\cdot(9+6u\lambda+u^2\lambda^2)-4(12+3v\lambda+4u\lambda+uv\lambda^2)+(16+8v\lambda+v^2\lambda^2)-6-2u\lambda+24+6v\lambda-3=0$$

$$(2u^2-4uv+v^2)\lambda^2+(12u-12v-16u+8v-2u+6v)\lambda+\cancel{18}-\cancel{48}+\underset{10}{\cancel{16}}-6+\cancel{24}-3=0$$

$$(2u^2-4uv+v^2)\lambda^2+(-6u+2v)\lambda+1=0$$

Постоје две могућности да се добије само једно λ, односно само једна тачка која припада и правој t и кривој. Једна од њих је да је $2u^2-4uv+v^2=0$, јер тада имамо линеарну једначину. Међутим, тада се неће добити тангента, већ ће добити права паралелна оси параболе (ако је крива парабола), односно права паралелна асимптоти хиперболе (ако је крива хипербола). Заиста, ово су специјални случајеви када права и крива другог реда имају једну заједничку тачку, а права није тангента дате криве. Код елипсе се оваквав специјалан случај не може догодити.

праве паралелне оси параболе



праве паралелне асимптоти хиперболе

Дакле, мора бити $2u^2-4uv+v^2\neq0$, а да би квадратна једначина имала јединствено решење, мора јој дискриминанта бити једнака нули (тада се добија двострука нула). Према томе

$$(-6u+2v)^2-4(2u^2-4uv+v^2)\cdot1=0$$

$$(-2(3u-v))^2-4(2u^2-4uv+v^2)=0$$

$$\cancel{4}(3u-v)^2-\cancel{4}(2u^2-4uv+v^2)=0$$

$$9u^2-6uv+\cancel{v^2}-2u^2+4uv-\cancel{v^2}=0$$

$$7u^2-2uv=0$$

$$u(7u-2v)=0$$

Дакле, $u=0$ или $7u-2v=0$. Ова решења дају два вектора правца праве t да би она била тангента. Прво решење је $u=0$, па је $t_1:\ \frac{x-3}{0}=\frac{y-4}{v}$. Скраћивањем са $v\neq0$ добијамо $t_1:\ \frac{x-3}{0}=\frac{y-4}{1}$. Јасно је да $2\cdot0^2-4\cdot0\cdot1+1^2=1$ није једнако 0, па ово заиста јесте тангента. Друго решење је $7u-2v=0$ тј. $7u=2v$, односно $u:v=2:7$. Следи да је $u=2k$ и $v=7k$, за неко $k\in\mathbb{R}$, па је $t_2:\ \frac{x-3}{2k}=\frac{y-4}{7k}$. Скраћивањем са k добијамо $t_2:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{7}$. Пошто је $2\cdot2^2-4\cdot2\cdot7+7^2=2\cdot4-8\cdot7+7^2=8-56+49\neq0$, следи да је и ово тангента.

Свођење криве другог реда на канонски облик

Нека је дата крива другог реда $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$. Нека је матрица A дата са $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Можемо приметити да важи

$$(x \;\; y \;\; 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=(x \;\; y \;\; 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\left(a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \quad a_{12}x+a_{22}y+a_{23} \quad a_{13}x+a_{23}y+a_{33}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$=(a_{11}x^2+\underline{a_{12}xy}+\underline{a_{13}x})+(\underline{a_{12}xy}+a_{22}y^2+a_{23}y)+(\underline{a_{13}x}+a_{23}y+a_{33})=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33},$$ па се једначина криве може написати као $(x \;\; y \;\; 1)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$.

Свођење криве на канонски облик представља тражење новог Декартовог правоуглог координатног система у којем ће та крива имати једначину облика $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ако је крива елипса, облика $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ако је крива хипербола, односно облика $y^2=2px$, ако је крива парабола. Не мора унапред да се зна која је крива у питању, штавише, током поступка ће се утврдити тип криве.

Приметимо да ниједна крива у канонском облику нема члан xy. Дакле, из подматрице $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ треба прећи у матрицу $B'=\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix}$. Такође, ако претпоставимо да је трансформација координата $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=R_1\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, онда уместо $(x \;\; y)B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ имамо

$$(x \;\; y)B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\left(R_1\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)^T B\left(R_1\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^T R_1^T B R_1\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=(x' \;\; y')R_1^T B R_1\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

па је пожељно да матрица R_1 буде таква да је $R_1^T B R_1=B'=\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix}$, односно да $R_1^T B R_1$ буде дијагонална матрица. Такође, иако то још нисмо доказали, за матрицу преласка R_1 из ортонормираног репера у ортонормирани репер важи да је $R_1^T=R_1^{-1}$, према томе, тражимо матрицу R_1 са својством $R_1^T=R_1^{-1}$ такву да је $R_1^{-1}BR_1$ дијагонална матрица. Из Линеарне алгебре нам је познато да до те матрице дођемо поступком дијагонализације. Погледајмо на примеру како се то ради.

5.16. $4x^2-4xy+y^2+x+12y+6=0$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Потражимо сопствене вредности матрице B.

$$\det(B-\lambda E)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)-4=\cancel{4}-4\lambda-\lambda+\lambda^2-\cancel{4}=\lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5)=0$$

Дакле, сопствене вредности су $\lambda=0$ и $\lambda=5$. Потражимо сопствене векторе.

$1^\circ\ \lambda=0$ $\quad B\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4u-2v=0 \;/:2$

$-2u+v=0$

$2u=v$

$2u=v$

Сопствени вектори који одговарају овој сопственој вредности су $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ 2u \end{pmatrix}=u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Можемо, за поступак дијагонализације, узети сопствени вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Међутим, да бисмо обезбедили својство $R_1^T=R_1^{-1}$, потребно је узети јединични вектор, тј. треба узети вектор дужине 1. Дакле, пошто је $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, следи да ћемо узети вектор $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

2° $\lambda=5$

$B\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5u\\5v\end{pmatrix}$

$4u-2v=5u$

$-2u+v=5v$

$u=-2v$

$-2u=4v \; (:(-2))$

$u=-2v$

$u=-2v$

Сопствени вектори који одговарају сопственој вредности $\lambda=5$ су $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2v\\v\end{pmatrix}=v\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Поново, треба узети јединични сопствени вектор, па пошто је $\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$, следи да можемо узети вектор $\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$.

При томе, можемо приметити да смо овај сопствени вектор добили од сопственог вектора $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ који смо добили за претходну сопствену вредност, следећом трансформацијом: $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}$. Ово можемо урадити одмах, тј. не морамо тражити сопствени вектор за другу сопствену вредност.

Дакле, добијамо $R_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$. Проширимо је до матрице $R_{3\times3}$ на следећи начин:

$R=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}&0\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Тада добијамо трансформацију координата $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=R_1\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$,

тј. $\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}&0\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}$ и једначину криве у новом координатном систему $O'x'y'$:

$$(x\ y\ 1)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^TA\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\left(R\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}\right)^TA\left(R\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}^TR^TAR\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=(x'\ y'\ 1)R^TAR\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix},$$

односно нова матрица коефицијената је $A'=R^TAR$.

$$A'=R^TAR=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}&0\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2&\frac12\\-2&1&6\\\frac12&6&6\end{pmatrix}R=\begin{pmatrix}0&0&\frac{25}{2\sqrt5}\\-\frac{10}{\sqrt5}&\frac{5}{\sqrt5}&\frac{5}{\sqrt5}\\\frac12&6&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}&0\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{5\sqrt5}{2}\\0&5&\sqrt5\\\frac{5\sqrt5}{2}&\sqrt5&6\end{pmatrix}$$

Дакле, у новом координатном систему $O'x'y'$ крива има једначину $0\cdot x'^2+2\cdot0\cdot x'y'+5\cdot y'^2+2\cdot\frac{5\sqrt5}{2}x'+2\sqrt5y'+6=0$

тј. $5y'^2+5\sqrt5x'+2\sqrt5y'+6=0$. Приметимо да овде нема x'^2. Да има, извршили бисмо следећу трансформацију, коју ћемо извршити над y'.

$5\left(y'^2+\frac{2}{\sqrt5}y'+\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2\right)+5\sqrt5x'+6=0$

$5\left(y'^2+\frac{2}{\sqrt5}y'+\frac15-\frac15\right)+5\sqrt5x'+6=0$

$5\left(y'^2+\frac{2}{\sqrt5}y'+\frac15\right)-1+5\sqrt5x'+6=0$

$5\left(y'+\frac{1}{\sqrt5}\right)^2+5\sqrt5x'+5=0$

Дакле, правимо потпун квадрат од y'^2 и y', а ако имамо и x'^2, онда и од x'^2 и x'. При томе, у загради коју подижемо на квадрат коеф. уз x', односно y' треба бити 1 и та заграда постаје ново x'', односно y''.

Овде вршимо следећу трансформацију:

$5\left(y'+\frac{1}{\sqrt5}\right)^2+5\sqrt5\left(x'+\frac{1}{\sqrt5}\right)=0$

$y''=y'+\frac{1}{\sqrt5}$, $x''=x'+\frac{1}{\sqrt5}$

$5y''^2+5\sqrt5x''=0 \,/:5$

$y''^2+\sqrt5x''=0$

$y''^2=-\sqrt5x''$ $\quad p=\frac{\sqrt5}{2}$, јер је $y''^2=-2\frac{\sqrt5}{2}x''$

Приметимо да смо добили параболу.

Ексцентрицитет је једнак 1, јер је ексцентрицитет параболе једнак 1. У канонском облику одмах видимо да је теме параболе $O(0,0)$, да је оса $o: y''=0$, да је жижа $F\left(\frac{\sqrt{5}}{4}; 0\right)$ и директриса $d: x''=\frac{\sqrt{5}}{4}$ (јер је $y''^2=-2px''$, $p>0$, па је симетрична стандардној канонској параболи $y''^2=2px''$, $p>0$, у односу на y''-осу). Како су формуле трансформације $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{pmatrix}$ и како је $x'=x''-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $y'=y''-\frac{1}{\sqrt{5}}$, добијамо: $x=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x''-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-\frac{2}{\sqrt{5}}\left(y''-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}x''-\frac{1}{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}y''+\frac{2}{5}=$
$=\frac{1}{\sqrt{5}}x''-\frac{2}{\sqrt{5}}y''+\frac{1}{5}$, $y=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x''-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(y''-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}x''-\frac{2}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}y''-\frac{1}{5}=\frac{2}{\sqrt{5}}x''+\frac{1}{\sqrt{5}}y''-\frac{3}{5}$.

Једноставном заменом x'' и y'' координата темена, жиже добијамо:

$O: x=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$, $y=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0-\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}$, $F: x=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot 0+\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=-\frac{1}{20}$,
$y=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0-\frac{3}{5}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=-\frac{11}{10}$.