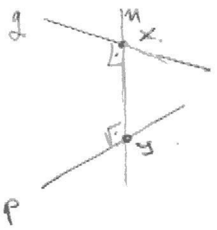
4.17. Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних правих

$p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1} = t \Longrightarrow X(t+4,\ 2t-3,\ -t+12) \in p$

$q: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} = s \Longrightarrow Y(-7s+3,\ 2s+1,\ 3s+1) \in q$

вектор који почиње у некој тачки праве p а завршава се у некој тачки праве q

$\overrightarrow{XY} = (-7s-t-1,\ 2s-2t+4,\ 3s+t-11)$



$n \perp p \Rightarrow \vec{v}_n \perp \vec{v}_p = (1,2,-1)$ $\qquad \overrightarrow{XY} \circ \vec{v}_q = 0$

$n \perp q \Rightarrow \vec{v}_n \perp \vec{v}_q = (-7,2,3)$ $\qquad \overrightarrow{XY} \circ \vec{v}_p = 0$

$-7s-t-1+2(2s-2t+4)-(3s+t-11)=0$

$-6s-6t+18=0$

$\boxed{s+t-3=0} \Rightarrow t = 3-s$

$-7(-7s-t-1)+2(2s-2t+4)+3(3s+t-11)=0$

$62s+6t-18=0$

$\boxed{31s+3t-9=0}$

$31s+9-3s-9=0 \Rightarrow \boxed{s=0}$, $\boxed{t=3}$

$\Rightarrow X(7,3,9)$

$Y(3,1,1)$

$\overrightarrow{XY} = (-4,-2,-8) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_l = (2,1,4)}$

$$\boxed{l: \frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4}}$$

$d(p,q) = |\overrightarrow{XY}| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-8)^2} = \sqrt{84} = \boxed{2\sqrt{21}}$

4.20 Одредити раван α која са равни $\beta: x-4y-8z+12=0$ гради угао од $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву

а) $\left.\begin{aligned} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{aligned}\right\} p$

б) → јединствено реш. ако $\measuredangle(p,\beta) = \frac{\pi}{4}$

да је $\measuredangle(p,\beta) > \frac{\pi}{4}$, не би било решења

ПИТАЊЕ → колико има равни α ако је $p \perp \beta$?

$\alpha: ax+by+cz+d=0,\quad \vec{n}_\alpha = (a,b,c)$

$\cos\measuredangle(\alpha,\beta) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow |\cos\measuredangle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow |\vec{n}_\alpha \circ \vec{n}_\beta| = |\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|\cos\frac{\pi}{4}$

$|(a,b,c)\circ(1,-4,-8)| = \sqrt{1+16+64}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\frac{\sqrt2}{2} \quad /^2$

$$\boxed{(a-4b-8c)^2 = \frac{81}{2}(a^2+b^2+c^2)}$$

$\measuredangle(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1^\circ\ \measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta) \\ 2^\circ\ \pi - \measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta) \end{cases}$

$\cos\measuredangle(\alpha,\beta) = \cos(\pi - \measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)) = -\cos\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)$

$\Rightarrow \cos\measuredangle(\alpha,\beta) = |\cos\measuredangle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)|$

$p: \begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$

$x=t \Rightarrow z=t+4$

$y = -\frac{1}{5}(x+z) = -\frac{1}{5}(2t+4)$

$p: \quad x=t,\quad y=-\frac{2}{5}t-\frac{4}{5},\quad z=t+4 \Rightarrow P(0,-\frac{4}{5},4)\in p$

$\vec{v}_p = (1,-\frac{2}{5},1) \sim (5,-2,5)$

$\alpha \supset p \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_p \Leftrightarrow (a,b,c)\circ(5,-2,5)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{5a-2b+5c=0} \Rightarrow b = \frac{5}{2}a+\frac{5}{2}c$

$P \in p \subset \alpha \Rightarrow a\cdot 0 - b\frac{4}{5} + c\cdot 4 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = \frac{4}{5}b - 4c}$

$\Leftrightarrow \boxed{4b+20c+5d=0}$

$(a-4(\frac{5}{2}a+\frac{5}{2}c)-8c)^2 = \frac{81}{2}(a^2+\frac{25}{4}(a+c)^2+c^2)$

$(-9a-18c)^2 = \frac{81}{2}(\frac{29}{4}a^2+\frac{29}{4}c^2+\frac{50}{4}ac)$

$81(a+2c)^2 = \frac{81}{2}(\frac{29}{4}a^2+\frac{29}{4}c^2+\frac{25}{4}ac) \quad \cdot 8$

$8a^2+32ac+32c^2 = 29a^2+29c^2+50ac$

$21a^2+18ac-3c^2=0 \quad /:3c^2\neq0$ ($c=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow b=0=d=0$, а $0=0$ није ј-на равни $\Rightarrow c\neq0$)

$7(\frac{a}{c})^2+6\frac{a}{c}-1=0 \quad t=\frac{a}{c} \Rightarrow 7t^2+6t-1=0 \Rightarrow (7t-1)(t+1)=0 \Rightarrow t_1=-1 \vee t_2=\frac{1}{7}$

$7t^2+7t-t-1$

• ако се добије комп. ⇒ нема равни

• ако се добије 1 решење ⇒ 1 раван

1° $t_1=-1$

$\frac{a}{c}=-1 \Rightarrow \underline{a=-c}$

$b=\frac{5}{2}(a+c)=0$

$d=\frac{4b}{5}+4c=-4c$

$\Rightarrow \alpha_1: -cx+0\cdot y+cz-4c=0 \quad /:c$

$\boxed{\alpha_1: -x+z-4=0}$

2° $t_2=\frac{1}{7}$

$\frac{a}{c}=\frac{1}{7} \Rightarrow \underline{c=7a}$

$b=\frac{5}{2}(a+c)=\frac{5}{2}(a+7a)=\underline{20a}$

$d=\frac{4b}{5}-4c=16a-28a=\underline{-12a}$

$\Rightarrow \alpha_2: ax+20ay+7az-12a=0 \quad /:a$

$\boxed{\alpha_2: x+20y+7z-12=0}$

4.13. Кроз тачку $T(-3,1,2)$ одредити праву e која је паралелна равни $\alpha: 4x-y+2z-5=0$ и која сече праву $p: \frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$

$T(-3,1,2)\in e$

$e \parallel \alpha \quad \alpha: 4x-y+2z-5=0$

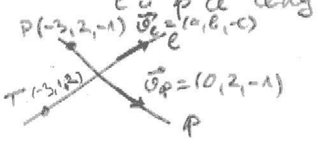
$e\cap p\neq\emptyset \quad p: \frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-1}$

$e\ ?$

$\vec{v}_e=(a,b,c)$

$e\parallel\alpha \Rightarrow \vec{v}_e\perp\vec{n}_\alpha=(4,-1,2) \Rightarrow (a,b,c)\circ(4,-1,2)=0$

$\boxed{4a-b+2c=0}$



e и p се секу $\Leftrightarrow [\vec{TP},\vec{v}_e,\vec{v}_p]=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3\\ a & b & c\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow -5a=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$

$-b+2c=0 \Rightarrow \boxed{b=2c}$

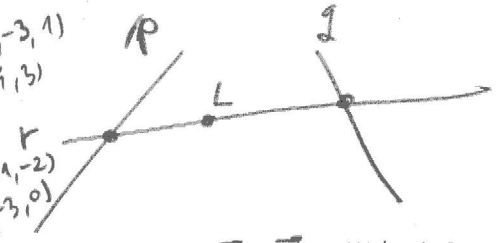
$\vec{v}_e=(0,2c,c)=c(0,2,1)$

$\Rightarrow \boxed{e: \frac{x+3}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}}$

4.18. $L(2,-1,7)$

$p: \frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{1} \rightarrow \vec{v}_p=(2,-3,1)$, $P(1,4,3)$

$g: \frac{x-7}{-1}=\frac{y-11}{-3}=\frac{z+2}{0} \rightarrow Q(7,11,-2)$, $\vec{v}_g=(-1,-3,0)$



r: $r\ni L$

r сече p и g

• r сече p $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_r,\vec{v}_p$ - лин. нез.

$[\vec{LP},\vec{v}_p,\vec{v}_r]=0$

• r сече g $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_r,\vec{v}_g$ - лин. нез.

$[\vec{LQ},\vec{v}_g,\vec{v}_r]=0$

решити $\rightarrow$ $\boxed{\vec{v}_r}$

r - фали нам још вектор правца да имамо ј-ну праве

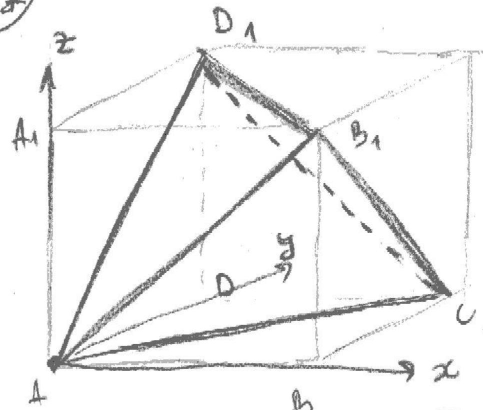
$\vec{v}_r=(a,b,c)$

$\boxed{r: \frac{x-2}{a}=\frac{y+1}{b}=\frac{z-7}{c}}$

ОДНОС 2 ПРАВЕ

	$p\equiv g$	$p\parallel g$	p сече g	мимоилазне	
$p(P,\vec{v}_p)$ $g(Q,\vec{v}_g)$	$\vec{v}_p,\vec{v}_g$ - лин. зав. $P\in g$	$\vec{v}_p,\vec{v}_g$ - лин. зав. $P\notin g$	$\vec{v}_p,\vec{v}_g$ - лин. нез. $[\vec{PQ},\vec{v}_p,\vec{v}_g]=0$	$\vec{v}_p,\vec{v}_g$ - лин. нез. $[\vec{PQ},\vec{v}_p,\vec{v}_g]\neq0$	ИДЕНТИФИКАЦИЈА I НАЧИН
	$p\cap g \cong \infty$	$p\cap g=\emptyset$ $\vec{v}_p,\vec{v}_g$ - лин. зав.	$p\cap g=\{S\}$	$p\cap g=\emptyset$ $\vec{v}_p,\vec{v}_g$ - лин. нез.	II НАЧИН

4.21. **(3.8)** Поставимо правилни тетраедар у „леп" координатни систем:



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – коцка ивице d

ACB_1D_1 – правилни тетраедар ивице $d\sqrt{2}$

(Генерално, добар део задатака из прве области може да се реши као овај → увођењем координатног система)

$Axyz$ – Декартов координатни систем

$x \to \overrightarrow{AB}$, $y \to \overrightarrow{AD}$, $z \to \overrightarrow{AA_1}$

ф-ла за ∢ између равни

$$\cos\measuredangle((AB_1D_1),(CB_1D_1)) = |\cos\measuredangle(\vec{n}_{AB_1D_1}, \vec{n}_{CB_1D_1})|$$

$$= \frac{|\vec{n}_{AB_1D_1} \circ \vec{n}_{CB_1D_1}|}{\|\vec{n}_{AB_1D_1}\| \, \|\vec{n}_{CB_1D_1}\|} = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$A(0,0,0)$

$C(d,d,0)$

$B_1(d,0,d)$

$D_1(0,d,d)$

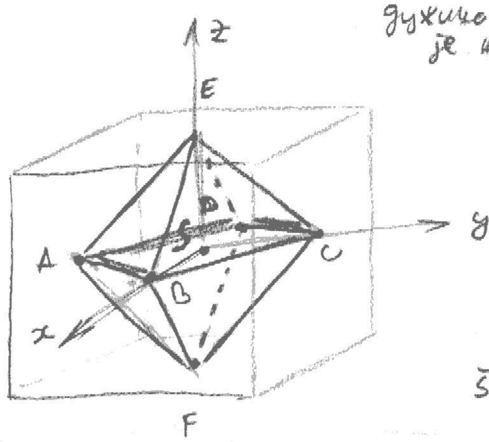
$$\overrightarrow{D_1B_1} \times \overrightarrow{D_1A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ d & -d & 0 \\ 0 & -d & -d \end{vmatrix} = (d^2, d^2, -d^2) = d^2(1,1,-1)$$

$$\overrightarrow{D_1B_1} \times \overrightarrow{D_1C} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ d & -d & 0 \\ d & 0 & -d \end{vmatrix} = (d^2, d^2, d^2) = d^2(1,1,1)$$

дужина ивице је небитна

$$\Rightarrow \boxed{\arccos\frac{1}{3}}$$

4.22. **(3.9)**



S – центар коцке ивице 2

A, B, C, D, E, F – центри страна коцке

$A(0,-1,0)$

$B(1,0,0)$

$C(0,1,0)$

...

$Sxyz$ – Декартов координатни систем

$x \to \overrightarrow{SB}$, $y \to \overrightarrow{SC}$, $z \to \overrightarrow{SE}$

+Угао између равни 2 суседне стране је исти

(на горњој слици је E у врху; узети да је C у врху, и видеће се да су се темена пермутовала)

РЕЗУЛТАТ

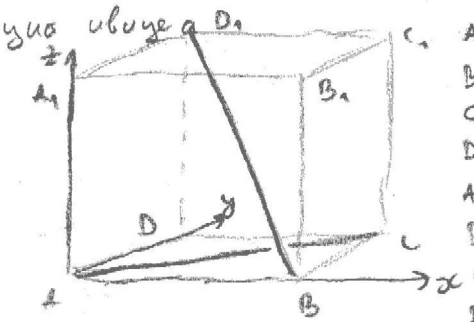
$$\boxed{\arccos\frac{1}{3}}$$

3.7 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – коцка ивице a

а) $\measuredangle(AC, BD_1) = ?$

б) $d(AC, BD_1) = ?$

в) $\measuredangle(AC, BCD_1) = ?$



$A(0,0,0)$

$B(a,0,0)$

$C(a,a,0)$

$D(0,a,0)$

$A_1(0,0,a)$

$B_1(a,0,a)$

$C_1(a,a,a)$

$D_1(0,a,a)$

а) $\cos\measuredangle(AC, BD_1) = |\cos\measuredangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD_1})|$

$$= \frac{|\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD_1}|}{\|\overrightarrow{AC}\| \, \|\overrightarrow{BD_1}\|} = \frac{|(a,a,0)\circ(-a,a,a)|}{\sqrt{2a^2}\,\sqrt{3a^2}} = 0$$

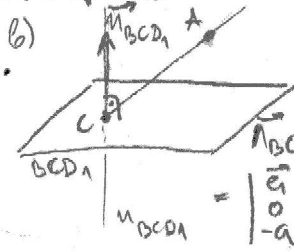
$$\Rightarrow \boxed{AC \perp BD_1}$$

б) $(A, \overrightarrow{AC})$ } мимоилазне
$(B, \overrightarrow{BD_1})$ } праве

$$d(AC, BD_1) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD_1}]|}{\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD_1}\|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix}\right|}{\left\|\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix}\right\|} = \frac{a^3}{\|(a^2, -a^2, 2a^2)\|} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{1+1+4}} = \boxed{\frac{a}{\sqrt{6}}}$$

ф-ла за растојање мим. правих

в)



$$\cos\measuredangle(AC, n_{BCD_1}) = \cos\measuredangle(\overrightarrow{AC}, \vec{n}_{BCD_1}) = \frac{|\overrightarrow{AC} \circ \vec{n}_{BCD_1}|}{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\vec{n}_{BCD_1}\|} = \frac{|(1,1,0)\circ(1,0,1)|}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\vec{n}_{BCD_1} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD_1}$

$$n_{BCD_1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & a & 0 \\ -a & a & a \end{vmatrix} = (a^2, 0, a^2)$$

$$\Rightarrow \measuredangle(AC, n_{BCD_1}) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \measuredangle(AC, BCD_1) = \frac{\pi}{6}$$

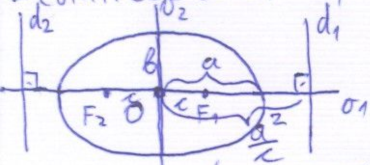
5 Криве другог реда

<u>Деф</u>: Крива другог реда је скуп тачака (x,y) у равни Oxy такав да је

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,$$ за неке $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$, при чему је бар један од бројева a_{11}, a_{12}, a_{22} различит од нуле.

Постоје дегенерисане и недегенерисане криве другог реда. О дегенерисаним кривима другог реда погледајте предавања. Надаље разматрамо само недегенерисане криве другог реда. Постоје три врсте недегенерисаних кривих другог реда и то су:

- елипса (спец. случај круг)



O - центар (центар симетрије)

F_1, F_2 - жиже (фокуси), d_1, d_2 - директрисе

a - велика полуоса $(a>b)$

b - мала полуоса

две осе симетрије (једна садржи велику, а друга малу полуосу)

$c^2=a^2-b^2$, $e=\frac{c}{a}$ - ексцентрицитет $(0<e<1)$

O је средиште F_1F_2

$OF_1=OF_2=c$, $d(O,d_1)=d(O,d_2)=\frac{a^2}{c}$

F_1, F_2 припадају оси која садржи велику полуосу елипсе, а d_1, d_2 су нормалне на њој.

Постоји Декартов правоугли координатни систем, у коме елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$. Тада је $O(0,0)$ центар и $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ су жиже $(c^2=a^2-b^2)$. Ако тачка $M(x_0,y_0)$ припада елипси, једначина тангенте на елипси у тачки M је $t: \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

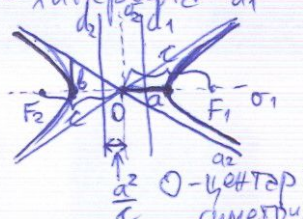
Једначине директриса су: $d_1: x=\frac{a^2}{c}$, $d_2: x=-\frac{a^2}{c}$

Једначине оса су: $o_1: y=0$, $o_2: x=0$

Спец. случај је круг, тј. када је $a=b=r$. Тада је r полупречник круга, жиже се поклапају с центром, а директрисе нису дефинисане. Постоји бесконачно много оса симетрије. Сматра се да је ексцентрицитет једнак нули.

За сваку тачку елипсе (и круга) важи да је збир растојања од ње до једне и друге жиже елипсе једнак $2a$, тј. $MF_1+MF_2=2a$, за све M са елипсе.

- хипербола



O - центар (центар симетрије)

F_1, F_2 - жиже (фокуси), d_1, d_2 - директрисе

a је растојање од центра до темена

b је висина од темена до правих a_1, a_2

$c^2=a^2+b^2$

$e=\frac{c}{a}$ - ексцентрицитет $(e>1)$

две осе симетрије (једна садржи темена хиперболе, друга је нормална на њој у центру хиперболе)

O је средиште F_1F_2

$OF_1=OF_2=c$, $d(O,d_1)=d(O,d_2)=\frac{a^2}{c}$

F_1, F_2 припадају оси која садржи темена, а d_1, d_2 су нормалне на њој

a_1, a_2 - асимптоте (косе)

Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме хипербола има једначину $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Тада је $O(0,0)$ центар и $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ су жиже $(c^2=a^2+b^2)$. Ако тачка $M(x_0,y_0)$ припада хиперболи, једначина тангенте на хиперболи у тачки M је $t: \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Једначине директриса су: $d_1: x=\frac{a^2}{c}$, $d_2: x=-\frac{a^2}{c}$

Једначине оса су: $o_1: y=0$, $o_2: x=0$

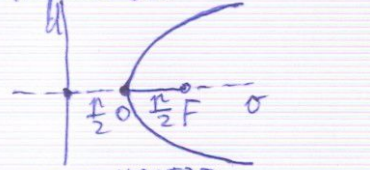
Једначине ~~врсте~~ асимптота су:

$a_1: \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, $a_2: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,

тј. $a_1: y=\frac{b}{a}x$, $a_2: y=-\frac{b}{a}x$.

За сваку тачку хиперболе важи да је разлика растојања од ње до једне и друге жиже хиперболе једнака $2a$, тј. $|MF_1-MF_2|=2a$, за све M са хиперболе.

- парабола



нема центар

F - жижа (фокус) (једна!)

d - директриса (једна!)

O - теме параболе

$d(O,F)=d(O,d)=\frac{p}{2}$

$e=1$ (увек)

једна оса симетрије (садржи теме и жижу)

директриса је нормална на оси

Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме парабола има једначину $y^2=2px$, $p>0$. Тада је $O(0,0)$ теме, $F(\frac{p}{2},0)$ је жижа, $d: x=-\frac{p}{2}$ је једначина директрисе, $o: y=0$ је једначина осе. (*)

За сваку тачку параболе важи да је растојање од ње до жиже исто као растојање од ње до директрисе.

(*) Ако је $M(x_0,y_0)$ тачка са параболе, онда је једначина тангенте на параболи у тачки M

$t: yy_0=p(x+x_0)$

<u>Теорема</u>: За сваку тачку M са недегенерисане криве другог реда важи $\frac{d(M,F)}{d(M,d)}=e$ (F и d се узимају са истим индексом)

5.1. (а) Дијаметар елипсе, односно хиперболе, јесте ~~њена~~ њена тетива (дуж чији су крајеви тачке са елипсе, односно хиперболе) која садржи њен центар.

Постоји Декартов правоугли координатни систем такав да је једначина дате криве $\frac{x^2}{a^2}+\beta\frac{y^2}{b^2}=1$, при чему је $\beta=1$ ако је у питању елипса, односно $\beta=-1$ ако је у питању хипербола. Тада је $O(0,0)$ центар криве и једначина датог дијаметра p је $p: \frac{x-0}{u}=\frac{y-0}{v}$, где је $(u,v)\neq(0,0)$ неки ненула вектор у равни криве. Нека је MN произвољна тетива криве, где су координате тачака M и N редом $M(x_0,y_0)$ и $N(x_1,y_1)$. Тада је $\frac{x_0^2}{a^2}+\beta\frac{y_0^2}{b^2}=1$, $\frac{x_1^2}{a^2}+\beta\frac{y_1^2}{b^2}=1$ и $x_1=x_0+\lambda u$, $y_1=y_0+\lambda v$ (бирамо тетиву MN која је паралелна дијаметру p). Дакле

$$\frac{(x_0+\lambda u)^2}{a^2}+\beta\frac{(y_0+\lambda v)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\cancel{x_0^2}+2\lambda x_0u+\lambda^2u^2}{a^2}+\beta\frac{\cancel{y_0^2}+2\lambda y_0v+\lambda^2v^2}{b^2}=\cancel{\frac{x_0^2}{a^2}+\beta\frac{y_0^2}{b^2}}$$

$$\lambda\left(\frac{2x_0u}{a^2}+\frac{2\beta y_0v}{b^2}+\lambda\left(\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}\right)\right)=0$$

$$\lambda=0 \text{ или } 2\left(\frac{x_0u}{a^2}+\beta\frac{y_0v}{b^2}\right)+\lambda\left(\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}\right)=0$$

$$\lambda=0 \text{ или } \lambda=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}+\beta\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}$$

$\lambda=0$ није решење, јер желимо да се тачке M и N разликују. Према томе, $\lambda=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}+\beta\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}$. Средиште S тетиве MN има координате $S\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}\right)$.

$$\frac{x_0+x_1}{2}=\frac{x_0+x_0+\lambda u}{2}=\frac{2x_0}{2}+\frac{\lambda}{2}u=x_0+\frac{\lambda}{2}u=x_0-\frac{\frac{x_0u}{a^2}+\beta\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}u=\frac{\cancel{\frac{x_0u^2}{a^2}}+\beta\frac{x_0v^2}{b^2}-\cancel{\frac{x_0u^2}{a^2}}-\beta\frac{y_0uv}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}=\frac{\beta\frac{v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}(x_0v-y_0u)$$

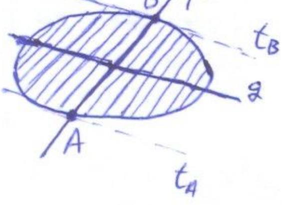
$$\frac{y_0+y_1}{2}=\frac{y_0+y_0+\lambda v}{2}=\frac{2y_0}{2}+\frac{\lambda}{2}v=y_0+\frac{\lambda}{2}v=y_0-\frac{\frac{x_0u}{a^2}-\beta\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}v=\frac{\frac{y_0u^2}{a^2}+\cancel{\beta\frac{y_0v^2}{b^2}}-\frac{x_0uv}{a^2}-\cancel{\beta\frac{y_0v^2}{b^2}}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}=\frac{\frac{u}{a^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}(y_0u-x_0v)=\frac{-\frac{u}{a^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}(x_0v-y_0u)$$

Можемо уочити да је количник x-координате и y-координате тачке S једнак:

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{\beta\frac{v}{b^2}}{\cancel{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}\cancel{(x_0v-y_0u)}}{\frac{-\frac{u}{a^2}}{\cancel{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}\cancel{(x_0v-y_0u)}}=\frac{\beta\frac{v}{b^2}}{-\frac{u}{a^2}},$$

па следи да све тачке S припадају правој $g: \frac{x}{-\beta\frac{v}{b^2}}=\frac{y}{\frac{u}{a^2}}$, која садржи центар криве.

(б)



Нека је $A(x_0,y_0)$ једна од крајњих тачака дијаметра p. Тада је $\frac{x_0}{u}=\frac{y_0}{v}$ и $\frac{x_0^2}{a^2}+\beta\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Нека је $\frac{x_0}{u}=\frac{y_0}{v}=t$. Тада је $x_0=ut$, $y_0=vt$ и $\frac{(ut)^2}{a^2}+\beta\frac{(vt)^2}{b^2}=1$, па је $\left(\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}\right)t^2=1$. Следи да је $t^2=\frac{1}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}$, па ако је $\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}>0$, онда је $t_{1/2}=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}$. Једно од ових решења одговара тачки A, а друго одговара тачки $B(x_1,y_1)$, која је друга крајња тачка дијаметра p. Нека је $x_0=\frac{u}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}$ и $y_0=\frac{v}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}$. Тангента t_A у тачки A има једначину $t_A: \frac{xx_0}{a^2}+\beta\frac{yy_0}{b^2}=1$. Дакле,

$$\frac{xx_0}{a^2}+\beta\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\beta\frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)=-\beta\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)$$

$$\frac{x-x_0}{-\beta\frac{y_0}{b^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{x_0}{a^2}}$$

$$\frac{x-x_0}{-\frac{\beta}{b^2}\cancel{\frac{v}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}}}=\frac{y-y_0}{\frac{1}{a^2}\cancel{\frac{u}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}}}$$

$$t_A: \frac{x-x_0}{-\beta\frac{v}{b^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{u}{a^2}}$$

Пошто права t_A има исти вектор правца као и права g, следи да су у питању паралелне праве. Заменом $t=-\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}$ добијамо $t_B: \frac{x-x_1}{-\beta\frac{v}{b^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{u}{a^2}}$, што је такође паралелно правој g.

(B) Нека је крива $\frac{x^2}{a^2}+\beta\frac{y^2}{b^2}=1$ елипса, тј. нека је $\beta=1$. Права q има једначину $q: \frac{x}{-\frac{v}{b^2}}=\frac{y}{\frac{u}{a^2}}$. Нека су $C(x_0,y_0)$ и $D(x_1,y_1)$ тачке пресека праве q и елипсе. Тада је, за тачку C, $\frac{x_0}{-\frac{v}{b^2}}=\frac{y_0}{\frac{u}{a^2}}=t$, па је $x_0=-\frac{v}{b^2}t$ и $y_0=\frac{u}{a^2}t$, и $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, па је $\frac{1}{a^2}\left(-\frac{v}{b^2}t\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{u}{a^2}t\right)^2=1$.

$$\frac{1}{a^2}\frac{v^2}{b^4}t^2+\frac{1}{b^2}\frac{u^2}{a^4}t^2=1 \,/\cdot a^2b^2$$

$$\frac{v^2}{b^2}t^2+\frac{u^2}{a^2}t^2=a^2b^2$$

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)t^2=a^2b^2$$

$$t^2=\frac{a^2b^2}{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}$$

$$t_{1/2}=\pm\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$$ ← једно решење даје C, друго решење даје D

Тангента у тачки C има једначину $t_C: \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Нека је $x_0=-\frac{v}{b^2}\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$ и $y_0=\frac{u}{a^2}\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$.

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)=-\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)$$

$$\frac{x-x_0}{-\frac{y_0}{b^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{x_0}{a^2}}$$

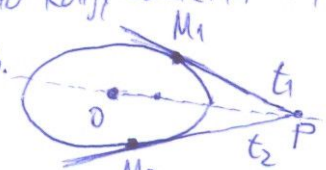
$$\frac{x-x_0}{-\frac{1}{b^2}\cdot\frac{u}{a^2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}}=\frac{y-y_0}{\frac{1}{a^2}\cdot\left(-\frac{v}{b^2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}\right)}$$

$$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}$$

Дакле, тангента t_C има исти вектор правца као дијаметар p, па су паралелни. Тангенту t_D добијамо заменом $t=-\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$ и добијамо $t_D: \frac{x-x_1}{u}=\frac{y-y_1}{v}$, што је паралелно дијаметру p.

Деф: За правце одређене дијаметром p и правом q (која је дијаметар ако је крива елипса, јер ако је хипербола, онда q не сече хиперболу, па не садржи ниједну тетиву) кажемо да су међусобно конјуговане. Дакле, правци (u,v) и $\left(-\beta\frac{v}{b^2}, \frac{u}{a^2}\right)$ су међусобно конјуговани правци.

5.3.



Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме дата елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Нека је $M_1(x_1,y_1)$ и нека је $M_2(x_2,y_2)$. Тада су тангенте t_1 и t_2 у тачкама M_1 и M_2 редом дате једначинама $t_1: \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ и $t_2: \frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$. Нека је $P(x_0,y_0)$ пресечна тачка ових тангенти. Тада P припада t_1 и t_2, па је $\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=1$ и $\frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0y_2}{b^2}=1$. Одузимањем ових једначина добијамо $\frac{x_0}{a^2}(x_1-x_2)=-\frac{y_0}{b^2}(y_1-y_2)$, па ако овај израз изједначимо са t, добијамо $x_0=\frac{a^2t}{x_1-x_2}$ и $y_0=\frac{-b^2t}{y_1-y_2}$. Требало би заменом у неку од полазних једначина добити колико је t у зависности од параметара елипсе и тачака M_1 и M_2, али то је сувишно овде, јер ако само на основу датих података посматрамо праву p која садржи тачке $O(0,0)$ (центар елипсе) и $P(x_0,y_0)$, добијамо њену једначину $p: \frac{x-0}{x_0-0}=\frac{y-0}{y_0-0}$, тј. $p: \frac{x}{\frac{a^2t}{x_1-x_2}}=\frac{y}{\frac{-b^2t}{y_1-y_2}}$, те видимо да се t скраћује. Дакле, знамо да је права p која садржи O и P дата једначином $p: \frac{x}{\frac{a^2}{x_1-x_2}}=\frac{y}{\frac{-b^2}{y_1-y_2}}$. Проверимо да ли средиште S тетиве M_1M_2 припада правој p. Координате средишта S су $S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, па је

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{a^2}{x_1-x_2}} = \frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{-b^2}{y_1-y_2}}$$

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2} = -\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}$$

$$1=1 \quad \checkmark$$

Дакле, истој правој (p) припадају центар елипсе, средиште тетиве M_1M_2 и тачка P, те заиста P припада правој која садржи дијаметар елипсе, који садржи средиште тетиве M_1M_2 (DS), што је и требало доказати.

5.4. Тачка $M(x_0,y_0)$ задовољава својство да се елипса из ње види под правим углом ако две тангенте из тачке M на датој елипси граде прав угао. Нека је координатни систем одабран тако да елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Нека је $t_1: \frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}$ права која садржи тачку $M(x_0,y_0)$. Тада је она тангента ако и само ако има само једну пресечну тачку са елипсом и та једна пресечна тачка добија се као двострука нула квадратне једначине. Нека је $\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=t$. Тада је $x=x_0+ut$ и $y=y_0+vt$, па заменом у једначину елипсе добијамо $\frac{(x_0+ut)^2}{a^2}+\frac{(y_0+vt)^2}{b^2}=1$. Дакле,

$$\frac{x_0^2}{a^2}+2\frac{x_0u}{a^2}t+\frac{u^2}{a^2}t^2+\frac{y_0^2}{b^2}+2\frac{y_0v}{b^2}t+\frac{v^2}{b^2}t^2=1$$

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0u}{a^2}+\frac{y_0v}{b^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0$$

Дакле, да бисмо добили тангенту, ово мора бити квадратна једначина, што значи $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\neq 0$, и дискриминанта ове квадратне једначине мора бити нула да би њено решење (нула) било двоструко. Дакле,

$$\cancel{4}\left(\frac{x_0u}{a^2}+\frac{y_0v}{b^2}\right)^2-\cancel{4}\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0 \qquad (*)$$

Нека је $t_2: \frac{x-x_0}{-v}=\frac{y-y_0}{u}$ права која садржи $M(x_0,y_0)$ и нормална је на t_1 (вектор правца $(-v,u)$ праве t_2 нормалан је на вектору правца (u,v) праве t_1, јер је $\langle(-v,u),(u,v)\rangle=-uv+uv=0$). Пошто желимо да се из тачке M елипса види под правим углом, неопходно је да и t_2 буде тангента елипсе. Претходни поступак је универзалан, што значи да се може применити и на праву t_2, уз замену $u\mapsto -v$ и $v\mapsto u$.

Дакле, t_2 је тангента ако и само ако важи

$$\cancel{4}\left(\frac{x_0(-v)}{a^2}+\frac{y_0u}{b^2}\right)^2-\cancel{4}\left(\frac{(-v)^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0 \qquad (**)$$

Сређивањем израза $(*)$ и $(**)$ добијамо:

$$(*):\ \cancel{\frac{x_0^2u^2}{a^4}}+2\frac{x_0y_0uv}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_0^2v^2}{b^4}}-\left(\cancel{\frac{x_0^2u^2}{a^4}}+\frac{y_0^2u^2}{a^2b^2}-\frac{u^2}{a^2}+\frac{x_0^2v^2}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_0^2v^2}{b^4}}-\frac{v^2}{b^2}\right)=0$$

$$2\frac{x_0y_0uv}{a^2b^2}-\frac{x_0^2v^2}{a^2b^2}-\frac{y_0^2u^2}{a^2b^2}+\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=0$$

$$(**):\ \cancel{\frac{x_0^2v^2}{a^4}}-2\frac{x_0y_0uv}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_0^2u^2}{b^4}}-\left(\cancel{\frac{x_0^2v^2}{a^4}}+\frac{y_0^2v^2}{a^2b^2}-\frac{v^2}{a^2}+\frac{x_0^2u^2}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_0^2u^2}{b^4}}-\frac{u^2}{b^2}\right)=0$$

$$-2\frac{x_0y_0uv}{a^2b^2}-\frac{x_0^2u^2}{a^2b^2}-\frac{y_0^2v^2}{a^2b^2}+\frac{v^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}=0$$

Сабирањем добијених израза добијамо:

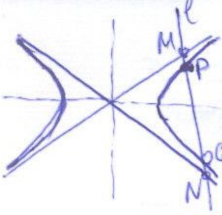
$$-\frac{x_0^2}{a^2b^2}(v^2+u^2)-\frac{y_0^2}{a^2b^2}(u^2+v^2)+\frac{u^2+v^2}{a^2}+\frac{v^2+u^2}{b^2}=0$$

Скраћивањем са $\frac{u^2+v^2}{a^2b^2}\neq 0$ добијамо

$$-x_0^2-y_0^2+b^2+a^2=0$$

$$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$$

Дакле, добијамо да тачка $M(x_0,y_0)$ припада кругу чији је центар $(0,0)$ (исти као центар елипсе) и полупречник је $\sqrt{a^2+b^2}$, односно да је тражено геометријско тачака, из којих се елипса с великом полуосом a и малом полуосом b види под правим углом, круг чији је центар исто што и центар елипсе и полупречник $\sqrt{a^2+b^2}$.

5.6. 

Нека је координатни систем постављен тако да је једначина хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Нека је $P(x_0,y_0)$ произвољна тачка са хиперболе и нека је права l дата са $l: \frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}$. Одредимо координате друге пресечне тачке $Q(x_1,y_1)$ праве l и хиперболе, као и координате тачака $M(x_2,y_2)$ и $N(x_3,y_3)$ у којима l сече асимптоте хиперболе.

Напишимо параметарски облик једначине праве l: $x=x_0+ut$, $y=y_0+vt$. Тада је $x_1=x_0+ut_1$, $y_1=y_0+vt_1$, $x_2=x_0+ut_2$, $y_2=y_0+vt_2$ и $x_3=x_0+ut_3$, $y_3=y_0+vt_3$, за неке $t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}$. За тачку $Q(x_1,y_1)$ имамо да припада хиперболи, па је $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$. Дакле, $\frac{(x_0+ut_1)^2}{a^2}-\frac{(y_0+vt_1)^2}{b^2}=1$, тј. $\cancel{\frac{x_0^2}{a^2}}+2\frac{x_0u}{a^2}t_1+\frac{u^2}{a^2}t_1^2-\left(\cancel{\frac{y_0^2}{b^2}}+2\frac{y_0v}{b^2}t_1+\frac{v^2}{b^2}t_1^2\right)=\cancel{\frac{x_0^2}{a^2}}-\cancel{\frac{y_0^2}{b^2}}$.

Дакле, $t_1\left(2\frac{x_0u}{a^2}-2\frac{y_0v}{b^2}+\left(\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right)t_1\right)=0$, па је $t_1=0$ или $2\left(\frac{x_0u}{a^2}-\frac{y_0v}{b^2}\right)+\left(\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right)t_1=0$. Како вредност $t_1=0$ одговара тачки P, следи да је $t_1=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}-\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}$.

Једначине асимптота су $a_1: y=\frac{b}{a}x$ и $a_2: y=-\frac{b}{a}x$. Нека тачка $M(x_2,y_2)$ припада асимптоти a_1. Тада је $y_2=\frac{b}{a}x_2$, тј. $y_0+vt_2=\frac{b}{a}(x_0+ut_2)$. Дељењем са b добијамо $\frac{y_0}{b}+\frac{v}{b}t_2=\frac{x_0}{a}+\frac{u}{a}t_2$, па је $\left(\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)t_2=-\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)$, тј. $t_2=-\frac{\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}$. Нека тачка $N(x_3,y_3)$ припада асимптоти a_2. Тада је $y_3=-\frac{b}{a}x_3$, тј. $y_0+vt_3=-\frac{b}{a}(x_0+ut_3)$. Дељењем са b добијамо $\frac{y_0}{b}+\frac{v}{b}t_3=-\frac{x_0}{a}-\frac{u}{a}t_3$, па је $\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)t_3=-\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)$, тј. $t_3=-\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}+\frac{v}{b}}$.

Дужина дужи MP је $\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}$, а дужина дужи NQ је $\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$, па је довољно доказати да је $(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2=(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2$.

$$(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2=(x_0-(x_0+ut_2))^2+(y_0-(y_0+vt_2))^2=(-ut_2)^2+(-vt_2)^2=(u^2+v^2)t_2^2$$

$$(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2=(x_0+ut_1-(x_0+ut_3))^2+(y_0+vt_1-(y_0+vt_3))^2=(u(t_1-t_3))^2+(v(t_1-t_3))^2=(u^2+v^2)(t_1-t_3)^2.$$

Дакле, довољно је доказати да је $t_2^2=(t_1-t_3)^2$, односно да је $t_2=t_1-t_3$ или $t_2=t_3-t_1$.

$$t_1-t_3=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}-\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}-\left(-\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}+\frac{v}{b}}\right)=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}-\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}+\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}+\frac{v}{b}}\cdot\frac{\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}{\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}=-\frac{2\frac{x_0u}{a^2}-2\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}+\frac{\frac{x_0u}{a^2}-\frac{x_0v}{ab}+\frac{y_0u}{ab}-\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}=$$

$$=\frac{-\frac{x_0u}{a^2}-\frac{x_0v}{ab}+\frac{y_0u}{ab}+\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}=\frac{-\frac{x_0}{a}\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)+\frac{y_0}{b}\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}=\frac{-\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}=-\frac{\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}=t_2$$

Према томе, важи $MP=NQ$, што се и тражило.