Геометрија 1 — вежбе

Димитрије Шпадијер

27. март 2020.

4.4. Тангента t садржи тачку $M(1,2)$, па је њена једначина $t : \frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{b}$. Тангента је нормална на полупречнику круга, што значи да је растојање центра круга од тангенте једнако полупречнику круга. За растојање тачке од праве, потребна је једначина праве у имплицитном облику. Једначина праве се једноставно трансформише у $b(x-1) = a(y-2)$, односно $bx - ay + 2a - b = 0$. Дакле, растојање од центра $C(1,7)$ до тангенте t једнако је полупречнику круга $r = \sqrt{9} = 3$. Добија се

$$3 = \frac{|b \cdot 1 + (-a) \cdot 7 + 2a - b|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} = \frac{|b - 7a + 2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Без умањења општости можемо претпоставити да је вектор правца $\overrightarrow{u_t} = (a,b)$ тангенте t јединични, односно да је $a^2 + b^2 = 1$. Дакле, добијамо $\frac{5|a|}{1} = 3$, односно $|a| = \frac{3}{5}$. Следи да је $b^2 = 1 - a^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, па је $|b| = \frac{4}{5}$. Дакле, могући вектори правца су $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. Приметимо да су вектори $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ супротног смера, као и вектори $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Пошто вектори супротног смера, имају исти правац, па је довољно посматрати само један од њих. Дакле, постоје две тангенте, и то су $t_1 : \frac{x-1}{\frac{3}{5}} = \frac{y-2}{\frac{4}{5}}$ и $t_2 : \frac{x-1}{\frac{3}{5}} = \frac{y-2}{-\frac{4}{5}}$. Скраћивањем са 5 добијају се решења $t_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4}$ и $t_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4}$.

4.7. (а) Заменом $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ добија се једначина праве $p : \frac{r\cos\varphi}{m} + \frac{r\sin\varphi}{n} = 1$.
(б) Пронаћи ћемо једначину у Декартовим координатама, а затим је пребацити у поларне, као у претходном делу задатка.

Угао који права $q : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ гради са x–осом је $\varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Дакле, вектор правца $\overrightarrow{u_q} = (a,b)$ праве q мора бити $\overrightarrow{u_q} = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$. Дакле, $q : \frac{x-x_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y-y_0}{\sin\varphi_0}$.

Дато је растојање од координатног почетка. Зато пребацимо једначину праве у имплицитни облик. Добијамо $\sin\varphi_0 \cdot (x - x_0) = \cos\varphi_0 \cdot (y - y_0)$, односно $\sin\varphi_0 \cdot x - \cos\varphi_0 \cdot y + \cos\varphi_0 \cdot y_0 - \sin\varphi_0 \cdot x_0 = 0$. Како је довољно пронаћи $\cos\varphi_0 \cdot y_0 - \sin\varphi_0 \cdot x_0$, означимо то са c. Растојање од тачке $O(0,0)$ до праве q је r_0, па је $r_0 = \frac{|\sin\varphi_0 \cdot 0 - \cos\varphi_0 \cdot 0 + c|}{\sqrt{\sin^2\varphi_0 + (-\cos\varphi_0)^2}} = \frac{|c|}{1} = |c|$. Следи да су решења $q_1 : \sin\varphi_0 \cdot x - \cos\varphi_0 \cdot y + r_0 = 0$ и $q_2 : \sin\varphi_0 \cdot x - \cos\varphi_0 \cdot y - r_0 = 0$.

Пређимо сада у поларне координате. Заменом $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ добијамо једначине правих $q_1 : \sin\varphi_0 \cdot r\cos\varphi - \cos\varphi_0 \cdot r\sin\varphi + r_0 = 0$ и $q_1 : \sin\varphi_0 \cdot r\cos\varphi - \cos\varphi_0 \cdot r\sin\varphi - r_0 = 0$. Једноставним сређивањем се добија $q_1 : r\sin(\varphi_0 - \varphi) + r_0 = 0$ и $q_2 : r\sin(\varphi_0 - \varphi) - r_0 = 0$.

Двоструки векторски производ: $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$

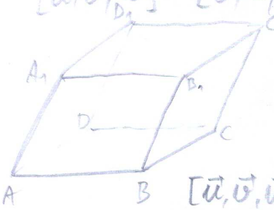
Мешовити производ: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

Циклично померање вектора $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ не мења мешовити производ.

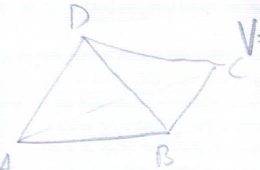
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$$

Замена места двама векторима мења знак мешовитог производа.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$$



$$V=\left|[\vec{AB},\vec{AD},\vec{AA_1}]\right|$$



$$V=\frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AD},\vec{AA_1}]\right|$$

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ акко су $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ компланарни

Ако је $\vec{u}=u_1\vec{e_1}+u_2\vec{e_2}+u_3\vec{e_3}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=v_1\vec{e_1}+v_2\vec{e_2}+v_3\vec{e_3}=(v_1,v_2,v_3)$ и $\vec{w}=w_1\vec{e_1}+w_2\vec{e_2}+w_3\vec{e_3}=(w_1,w_2,w_3)$, где је $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ позитивно оријентисан ОН систем вектора, онда је

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Једначина праве (у простору): $P(x_0,y_0,z_0)$ – произвољна тачка са праве

$\vec{u_p}=(a,b,c)\neq\vec{0}$ – вектор правца

$$p:\ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\ (=t)$$

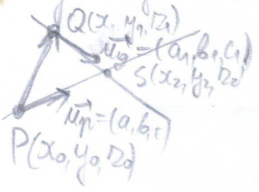
Ово потиче од следећих једначина: $x=at+x_0$, $y=bt+y_0$, $z=ct+z_0$ – параметарске једначине (t – параметар)

Није проблем да нека два од a,b,c буду једнаки 0. Тада су одговарајуће координате константе. Рецимо, ако је $c=0$, онда је $z=0\cdot t+z_0=z_0$.

Оваква једначина праве није јединствена. Рецимо, уместо вектора $\vec{u_p}=(a,b,c)$ можемо узети вектор $\vec{u_p}=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)=\lambda\cdot\vec{u_p}$, $\lambda\neq0$. Такође, уместо тачке P можемо узети тачку $Q(x_1,y_1,z_1)$ која је такође на правој p. Тада је $\vec{PQ}=\lambda\vec{u_p}$ за неко λ, а важи и $x_1=at+x_0$, $y_1=bt+y_0$, $z_1=ct+z_0$.

Да бисмо имали јединствено решење, морамо фиксирати једну од координата x_0,y_0,z_0, као и једну од координата a,b,c.

Услов да се праве $p: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ и
$q: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ секу јесте да постоји тачка $S(x_2, y_2, z_2)$
која задовољава једначине и једне и друге праве.

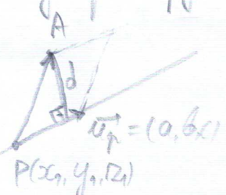


Такође, тада постоји раван која их садржи,
па следи да су вектори $\vec{PQ}, \vec{u_p}, \vec{u_q}$ компла-
нарни, тј. да је $[\vec{PQ}, \vec{u_p}, \vec{u_q}] = 0$.

Растојање тачке од праве (у простору)

$A(x_0, y_0, z_0)$

$p: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$



$$d(A, p) = \frac{|\vec{u_p} \times \vec{PA}|}{|\vec{u_p}|}$$

Једначина равни: $P(x_0, y_0, z_0)$ – произвољна тачка из равни
$\vec{n_\alpha} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ – вектор нормале

$$\alpha: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Углавном је једначина равни написана у облику $ax+by+cz+d=0$,
па из тог облика одмах закључујемо да је $\vec{n_\alpha} = (a, b, c)$ вектор
нормале, док се тачка из равни не види директно из једначине,
већ се мора пронаћи узимањем две координате произвољно и до-
бијањем треће из једначине.

Ако су дата два неколинеарна вектора $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
из равни, онда је $\vec{n_\alpha} = \vec{u} \times \vec{v}$ један вектор нормале (наравно, и би-
ло који вектор $\vec{n_\alpha'} = \lambda \vec{n_\alpha}, \lambda \neq 0$, такође је вектор нормале). Такође,
постоје и параметарске једначине равни:

$$x = x_0 + tu_1 + sv_1$$
$$y = y_0 + tu_2 + sv_2$$
$$z = z_0 + tu_3 + sv_3$$

t, s – параметри

Права p је нормална на равни α ако је $\vec{u_p}$ колинеаран са $\vec{n_\alpha}$.
Права q је паралелна равни α ако је $\vec{u_p}$ нормалан на $\vec{n_\alpha}$.

Равни α и β су паралелне ако је $\vec{n_\alpha}$ колинеаран са $\vec{n_\beta}$.

<u>Растојање тачке од равни</u>: $A(x_0, y_0, z_0)$

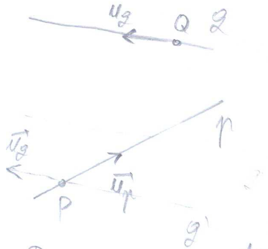
$\alpha: ax+by+cz+d=0$

$$d(A,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

<u>Угао између две праве</u>:

$$p: \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$q: \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$$



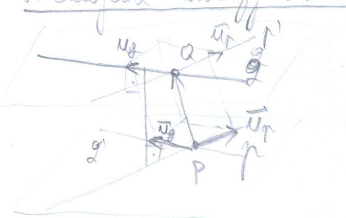
$$\cos\measuredangle(p,q)=\frac{|\vec{u_p}\cdot\vec{u_q}|}{|\vec{u_p}|\cdot|\vec{u_q}|}$$

(пошто вектори могу градити и тупи угао, а за праве се сматра да граде оштар угао (прав ако су нормалне))

<u>Растојање између мимоилазних правих</u>:

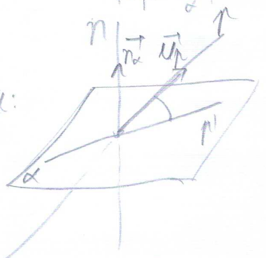
$$p: \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$q: \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$$



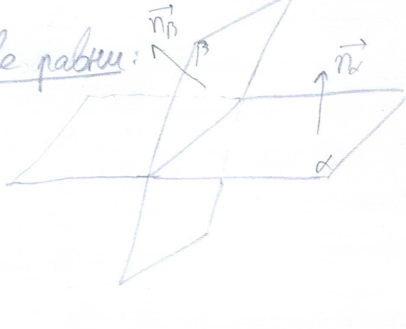
$$d(p,q)=\frac{|[\vec{PQ},\vec{u_p},\vec{u_q}]|}{|\vec{u_p}\times\vec{u_q}|}$$

<u>Угао између праве и равни</u>:



$$\sin\measuredangle(p,\alpha)=\frac{|\vec{u_p}\cdot\vec{n_\alpha}|}{|\vec{u_p}|\cdot|\vec{n_\alpha}|}$$

<u>Угао између две равни</u>:



$$\cos\measuredangle(\alpha,\beta)=\frac{|\vec{n_\alpha}\cdot\vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}|\cdot|\vec{n_\beta}|}$$

(пошто вектори могу градити и тупи угао, а за равни се сматра да граде оштар угао (прав ако су нормалне))

4.10. Нека је n права која се тражи. Права n је нормална на равни $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$, па следи да је вектор нормале $\overrightarrow{n_\alpha}$ равни α заправо вектор правца $\overrightarrow{u_n}$ праве n (један од). Дакле, можемо узети да је $\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{n_\alpha} = (2, 1, -4)$. Такође, права n садржи тачку $A(2, 3, -1)$, па је њена једначина

$$n : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-(-1)}{-4}.$$

4.12. (а) Паралелне равни имају исту нормалу. Дакле, вектор нормале Oxz равни исти је као вектор нормале тражене равни α. Како је y–оса нормална на Oxz равни, следи да је вектор нормале ове равни једнак $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$, те је и вектор нормале равни α једнак $\overrightarrow{n_\alpha} = (0, 1, 0)$. Како раван α садржи тачку $P(2, 3, 5)$, следи да је њена једначина

$$\alpha : 0 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-3) + 0 \cdot (z-5) = 0,$$

односно $\alpha : y - 3 = 0$.
(б) Раван β, која се тражи, садржи z–осу, што значи да садржи тачку $O(0, 0, 0)$ која јој припада и њен вектор правца $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$. Такође, раван β садржи и тачку $M(-3, 1, 2)$, што значи да садржи и вектор $\overrightarrow{OM} = (-3, 1, 2)$. Вектор нормале $\overrightarrow{n_\beta}$ равни β нормалан је на свим векторима те равни, па је нормалан и на векторима $\overrightarrow{e_3}$ и $\overrightarrow{OM}$. Пошто за вектор нормале равни дужина и смер нису битни (битан је само правац), можемо за вектор нормале $\overrightarrow{n_\beta}$ равни β узети вектор $\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -3, 0)$. Пошто раван β садржи тачку $O(0, 0, 0)$, њена једначина је

$$\beta : -1 \cdot (x-0) + (-3) \cdot (y-0) + 0 \cdot (z-0) = 0,$$

односно $\beta : -x - 3y = 0$ или $\beta : x + 3y = 0$.
(в) Раван γ, која се тражи, паралелна је x–оси, што значи да постоји представник вектора $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$ који припада равни γ. Такође, раван γ садржи тачке $A(4, 0, -2)$ и $B(5, 1, 7)$, па садржи и вектор $\overrightarrow{AB} = B - A = (5-4, 1-0, 7-(-2)) = (1, 1, 9)$. Вектор нормале $\overrightarrow{n_\gamma}$ равни γ нормалан је на сваком вектору равни γ, па и на векторима $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{AB}$. Следи да $\overrightarrow{n_\gamma}$ има исти правац као и векторски производ вектора $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{AB}$, а како је вектор нормале равни довољно наћи било који вектор који има правац нормале, можемо узети $\overrightarrow{n_\gamma} = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (0, -9, 1)$. Пошто раван γ садржи тачку $A(4, 0, -2)$, следи да је њена једначина

$$\gamma : 0 \cdot (x-4) + (-9) \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-(-2)) = 0,$$

односно $\gamma : -9y + z + 2 = 0$.

4.13. Потражимо прво координате тачке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ која представља нормалну пројекцију тачке $P(3, -2, -4)$ на равни $\alpha : 6x+2y-3z-75 = 0$. Тачка P_0 припада равни α, што значи да је $6x_0+2y_0-3z_0-75 = 0$. Такође, вектор $\overrightarrow{PP_0}$ је нормалан на равни α, односно има исти правац као вектор нормале $\overrightarrow{n_\alpha} = (6, 2, -3)$ равни α. Дакле, постоји неко $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\overrightarrow{PP_0} = \lambda\overrightarrow{n_\alpha}$. Дакле, добијамо да је

$$(x_0 - 3, y_0 - (-2), z_0 - (-4)) = \lambda(6, 2, -3) = (6\lambda, 2\lambda, -3\lambda),$$

односно $x_0 - 3 = 6\lambda$, $y_0 - (-2) = 2\lambda$ и $z_0 - (-4) = -3\lambda$. Након сређивања добијамо $x_0 = 3 + 6\lambda$, $y_0 = -2 + 2\lambda$ и $z_0 = -4 - 3\lambda$, па важи

$$6(3 + 6\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) - 3(-4 - 3\lambda) - 75 = 0.$$

Дакле, $18 + 36\lambda - 4 + 4\lambda + 12 + 9\lambda - 75 = 0$, односно $49\lambda - 49 = 0$. Дакле, $\lambda = 1$, што значи да је $x_0 = 3 + 6 \cdot 1 = 9$, $y_0 = -2 + 2 \cdot 1 = 0$ и $z_0 = -4 - 3 \cdot 1 = -7$, тј. координате нормалне пројекције су $P_0(9, 0, -7)$.

Тачка $Q(x_1, y_1, z_1)$ је симетрична тачки P у односу на раван α. То значи да је PQ нормално на α, а пошто је P_0 нормална пројекција тачке P на равни α, следи да тачка P_0 припада правој PQ. Штавише, услов симетричности тачака P и Q означава да је P_0 средиште дужи PQ. Дакле, $9 = \frac{3+x_1}{2}$, $0 = \frac{-2+y_1}{2}$ и $-7 = \frac{-4+z_1}{2}$, па одавде добијамо $x_1 = 2 \cdot 9 - 3 = 15$, $y_1 = 2\cdot 0-(-2) = 2$, $z_1 = 2\cdot(-7)-(-4) = -14+4 = -10$. Према томе, координате тачке симетричне тачки P у односу на раван α су $Q(15, 2, -10)$.

4.15. Раван β, која се тражи, садржи праву $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$, што значи да садржи тачку $L(1, -2, 3)$ са праве l и вектор правца $\overrightarrow{u_l} = (2, 1, 3)$ праве l припада равни β. Такође, имамо да је раван β нормална на равни $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$, што значи да је вектор нормале $\overrightarrow{n_\beta}$ нормалан на вектору нормале $\overrightarrow{n_\alpha} = (2, -4, 1)$ равни α. Пошто је вектор нормале $\overrightarrow{n_\beta}$ равни β нормалан на свим векторима равни β, следи да је нормалан на вектору $\overrightarrow{u_l}$. Дакле, $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{u_l}$ и $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$, што значи да вектор $\overrightarrow{n_\beta}$ има исти правац као $\overrightarrow{u_l} \times \overrightarrow{n_\alpha}$. Пошто дужина и смер вектора $\overrightarrow{n_\beta}$ нису битни, можемо узети да је $\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{u_l} \times \overrightarrow{n_\alpha} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (13, 4, -10)$. Дакле, једначина равни β је

$$\beta : 13 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y + 2) + (-10) \cdot (z - 3) = 0,$$

односно $\beta : 13x - 13 + 4y + 8 - 10z + 30 = 0$. Након сређивања, добија се $\beta : 13x + 4y - 10z + 25 = 0$.

4.16. Познато је да две праве које се секу припадају једној равни. Ако је права a одређена тачком A и вектором $\overrightarrow{u_a}$ и ако је права b одређена тачком B и вектором $\overrightarrow{u_b}$, онда оне припадају једној равни ако и само ако вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{u_b}$ припадају једној равни, односно ако и само ако су компланарни. Из особина мешовитог производа познато нам је да три вектора припадају једној равни ако и само ако је њихов мешовити производ једнак нули, што значи да праве a и b припадају једној равни ако и само ако $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{u_b}] = 0$.

Ако праве a и b припадају једној равни, а не секу се, онда су паралелне, а тада су њихови вектори правца u_a и u_b колинеарни. Дакле, услов да се праве a и b секу јесте да њихови вектори правца $\overrightarrow{u_a}$ и $\overrightarrow{u_b}$ нису колинеарни и да је $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{u_b}] = 0$.

Права $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ садржи тачку $P(2,-4,1)$ и има вектор правца $\overrightarrow{u_p} = (3,5,-2)$, док права $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ садржи тачку $Q(\lambda,3,-5)$ и има вектор правца $\overrightarrow{u_q} = (2,1,0)$. Пошто вектори $\overrightarrow{u_p}$ и $\overrightarrow{u_q}$ нису колинеарни (не може се ниједан од њих помножити неким бројем и добити други), следи да се p и q секу ако и само ако је $[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}] = 0$. Како је $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (\lambda-2, 3-(-4), -5-1) = (\lambda-2, 7, -6)$, следи да је

$$0 = [\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}] = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 7 & -6 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -28 - 18 + 60 + 2(\lambda-2),$$

тј. $14 + 2\lambda - 4 = 0$. Дакле, $2\lambda = -10$, односно $\lambda = -5$.

Нека је $S(x_0, y_0, z_0)$ пресечна тачка правих p и q. Тада тачка S припада правој p, што значи да је $\frac{x_0-2}{3} = \frac{y_0+4}{5} = \frac{z_0-1}{-2} = t$, односно $x_0 - 2 = 3t$, $y_0 + 4 = 5t$ и $z_0 - 1 = -2t$. Такође, тачка S припада и правој q, што значи да је $\frac{x_0-(-5)}{2} = \frac{y_0-3}{1} = \frac{z_0+5}{0} = s$, па је $x_0 - (-5) = 2s$, $y_0 - 3 = s$ и $z_0 + 5 = 0$. Према томе, важи $z_0 = -5$, па заменом у $z_0 - 1 = -2t$ добијамо $-5 - 1 = -2t$, тј. $-6 = -2t$. Дакле, $t = 3$. Одавде је $x_0 - 2 = 3 \cdot 3 = 9$, тј. $x_0 = 11$ и $y_0 + 4 = 5 \cdot 3 = 15$, тј. $y_0 = 11$. Треба још проверити да ли заменом у једначине $x_0 - (-5) = 2s$ и $y_0 - 3 = s$ не добијамо контрадикцију (то би значило да се праве p и q заправо не секу). Међутим, $s = 11 - 3 = 8$ и $11 - (-5) = 16 = 2 \cdot 8$, што значи да је пресечна тачка има координате $S(11, 11, -5)$.