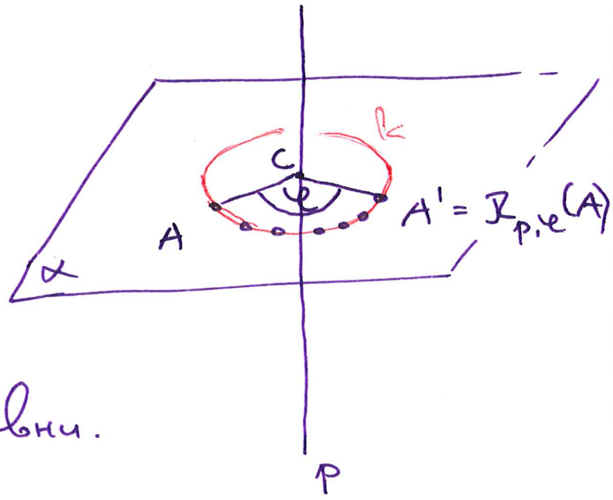
7.1. $k: \; A(1,2,3), \quad p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1} = t$

круг k настаје ротацијом тачке A око праве p.

а) Приметимо најпре да се та ротација тачке одвија у једној равни, тј. цео траг-крива коју тачка описује при ротацији (црвена кружница на слици) припада једној равни.



Нека је то раван α. Шта знамо о равни α? Најпре, садржи тачку A. Такође, $\alpha \perp p$.

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{v}_p = (1,1,1)$$

$$\Rightarrow \alpha: \; x + y + z + D = 0$$

$$A \in \alpha \leadsto 1+2+3+D = 0 \Rightarrow D = -6$$

$$\Rightarrow \alpha: \; x+y+z-6 = 0$$

Одредимо још сферу $S(C,r)$ којој ова ~~крива~~ кружница припада.

$$\alpha \cap p = \{C\}: \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t+1 \\ y = t+2 \\ z = t+1 \\ x+y+z-6 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right] \text{из услова } C \in p \\ \left.\right] \; C \in \alpha \end{array}$$

$$t+1+t+2+t+1-6 = 0$$

$$3t - 2 = 0$$

$$t = 2/3 \Rightarrow x = 5/3, \; y = 8/3, \; z = 5/3$$

$$S: \; C\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

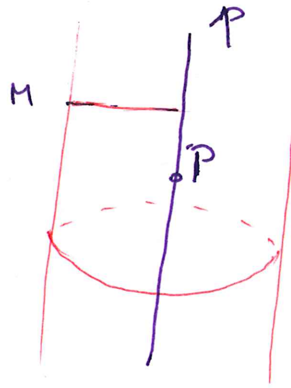
$$r = \|\overrightarrow{AC}\| = \|(2/3,\ 2/3,\ -4/3)\| = \sqrt{4/9 + 4/9 + 16/9} = \sqrt{8/3}$$

$$\Rightarrow \varsigma : \quad \|\overrightarrow{CX}\| = r \quad /^2$$

$$(x - 2/3)^2 + (y - 8/3)^2 + (z - 5/3)^2 = 8/3$$

$$\{k\} = \alpha \cap \varsigma$$

б) свака тачка цилиндра $\mathcal{C}$ је на истом растојању од праве p, осе симетрије.

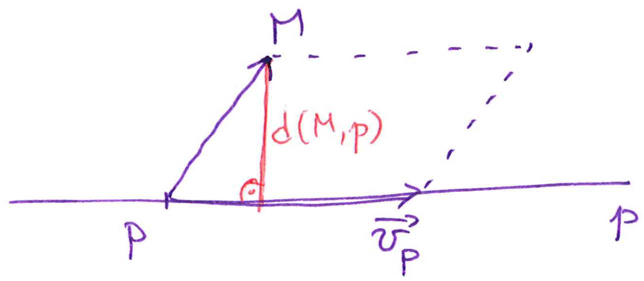


$M(x, y, z) \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{C}: \quad d(M, p) = \frac{\|\overrightarrow{PM} \times \vec{v}_p\|}{\|\vec{v}_p\|}$$

растојање тачке M од праве p

зашто можемо овако рачунати растојање тачке од праве



$$\|\vec{v}_p\| \cdot d(M, p) = \|\overrightarrow{PM} \times \vec{v}_p\|$$

површина паралелограма

површина паралелограма

$P(1,2,1) \in p$

$\overrightarrow{PM} = (x-1,\ y-2,\ z-1)$

$$\overrightarrow{PM} \times \vec{v}_p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-z-1,\ z-x,\ x-y+1)$$

$$\| \overrightarrow{PM} \times \vec{v}_p \| = \sqrt{(y-z-1)^2 + (z-x)^2 + (x-y+1)^2}$$

$$\mathcal{C}: \quad \| \overrightarrow{PM} \times \vec{v}_p \| = \underbrace{d(M,p)}_{} \cdot \| \vec{v}_p \|$$

$= d(A,p)$

$= d(A,C)$

$= \sqrt{8/3}$

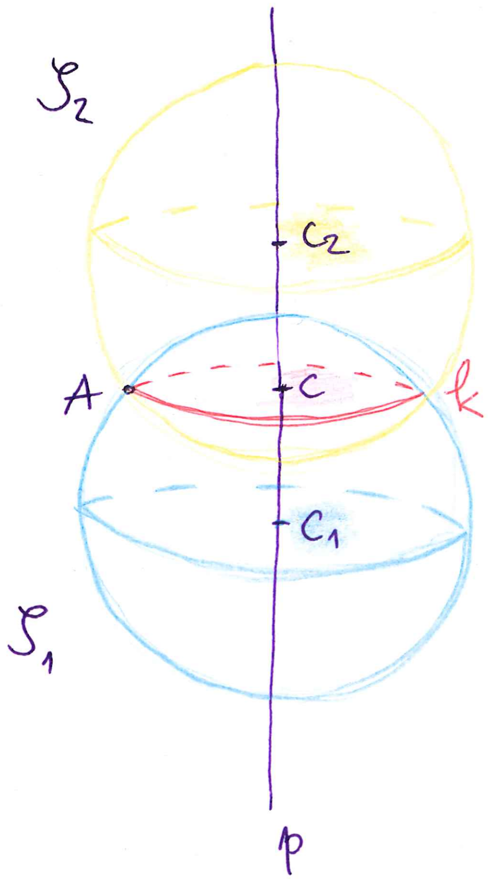
// свака тачка цилиндра је подједнако удаљена од праве p, ~~[illegible]~~ тј. колико и тачка $A \in \mathcal{C}$ //

$$\mathcal{C}: \sqrt{(y-z-1)^2 + (z-x)^2 + (x-y+1)^2} = \sqrt{8/3} \cdot \sqrt{3} \quad /^2$$

$$\mathcal{C}: (y-z-1)^2 + (z-x)^2 + (x-y+1)^2 = 8$$

$\{k\} = \mathcal{C} \cap \alpha$

б)



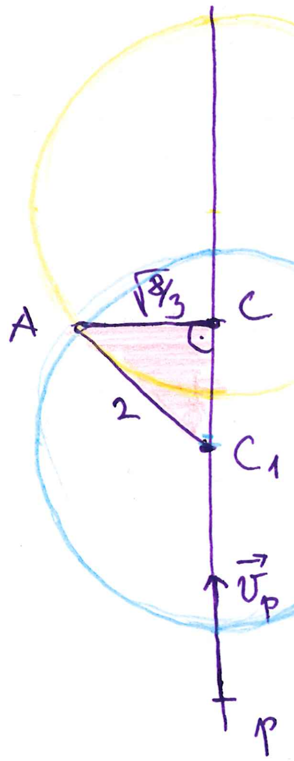
$k = S_1 \cap S_2$

$S_1 = S_1(C_1, 2)$

$S_2 = S_2(C_2, 2)$

$C_1, C_2 = ?$

Издвојимо потребни пресек који садржи тачку A и праву p.



$$\|\vec{CC_1}\|^2 = \|\vec{AC_1}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2$$

$$= 2^2 - 8/3 = 4/3$$

$$\Rightarrow \|\vec{CC_1}\| = 2/\sqrt{3}$$

$$\rightarrow C_1 = C - \frac{\|\vec{v}_p\|}{\|\vec{v}_p\|}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= (5/3, 8/3, 5/3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$= (1, 2, 1)$$

Слично $C_2 = C + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\|\vec{v}_p\|}{\|\vec{v}_p\|} = (7/3, 10/3, 7/3)$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_1: \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$$

$$\mathcal{S}_2: \quad (x-7/3)^2 + (y-10/3)^2 + (z-7/3)^2 = 4$$

$$\{k\} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$$

(7.2.) $\alpha = ?$ $\quad \alpha \ni l : \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$

$|\alpha \cap S| = 1$, $S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 81$

$S(C, 9)$, $C(1,2,3)$

$\alpha: \; Ax + By + Cz + D = 0$

- $\alpha \ni l \Rightarrow \vec{v}_p \perp \vec{n}_\alpha = (A, B, C)$

$\Rightarrow \cancel{-1,1,4} \; \vec{v}_p \circ \vec{n}_\alpha = 0$

$(-1, 1, 4) \circ (A, B, C) = 0$

$-A + B + 4C = 0$

$B = A - 4C$

- $P(13, -1, 0) \in \alpha \Rightarrow 13A - B + D = 0$

$D = -13A + B$

$= -13A + (A - 4C)$

$= -12A - 4C$

- α dotyka sfery $\rightsquigarrow d(C, \alpha) = r$

$$\frac{|A\cdot 1 + B \cdot 2 + C \cdot 3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = r \quad /^2$$

$(A + 2B + 3C + D)^2 = 81(A^2+B^2+C^2)$

$(A + 2(A-4C) \cancel{-12A} + 3C - 12A - 4C)^2 = 81(A^2+B^2+C^2)$

$(-9A - 9C)^2 = 81(A^2+B^2+C^2)$

$\cancel{81}(A^2 + 2AC + C^2) = \cancel{81}(A^2+B^2+C^2)$

$2AC = B^2$

$2AC = (A-4C)^2$

$A^2 - 10AC + 16C^2 = 0 \quad /: C^2 \neq 0$

$\left(\frac{A}{C}\right)^2 - 10\frac{A}{C} + 16 = 0$ $\quad \frac{A}{C} = t$

$C = 0$
$\Rightarrow A = 0$
$\Rightarrow B = D = 0$
$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (0,0,0)$
↯

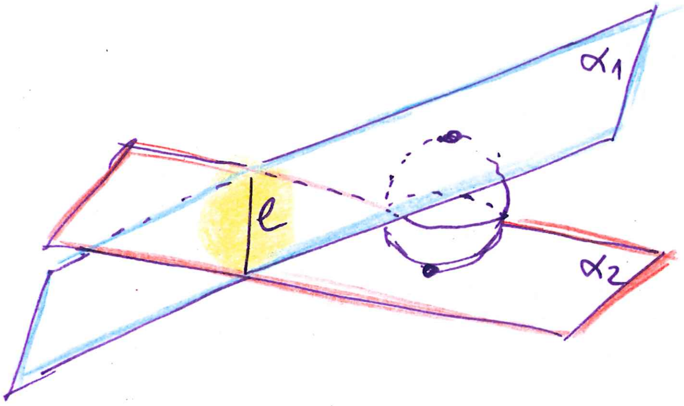
$t^2 - 10t + 16 = 0$

$t_{1/2} = \dfrac{10 \pm 6}{2}$ $\nearrow t_1 = 8$ ~~$\frac{A}{C} = 8$~~ $\searrow t_2 = 2$

$t_1 = 8 \rightsquigarrow \frac{A}{C} = 8 \to A = 8C, \; B = 4C, \; D = -100C$

$t_2 = 2 \rightsquigarrow A = 2C, \; B = -2C, \; D = -28C$

2 решења $\Rightarrow$ $\begin{cases} \alpha_1: & 8x - 4y + z - 100 = 0 \\ \alpha_2: & 2x - 2y + z - 28 = 0 \end{cases}$



σ_1, σ_2 - симетралне равни за равни α_1 и α_2

$\sigma_1 \ni l, C$ - садржи праву l и центар сфере

$L(13, -1, 0) \in l$

$\vec{LC} \times \vec{v_l} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 4 \\ 12 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 9i + 45j - 9k$

$\Rightarrow \vec{n}_{\sigma_1} = (1, 5, -1) \rightsquigarrow \sigma_1: \; x + 5y - z + D_1 = 0$

$C(1,2,3) \in \sigma_1 \Rightarrow D_1 = -8$

$\sigma_1: \; x + 5y - z - 8 = 0$

сече сферу

• $\sigma_2 : \quad \sigma_2 \perp \sigma_1 \quad , \quad \ell \subseteq \sigma_2$

$$\vec{n}_{\sigma_2} = \vec{n}_{\sigma_1} \times \vec{v}_{\ell} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (21, -3, 6)$$

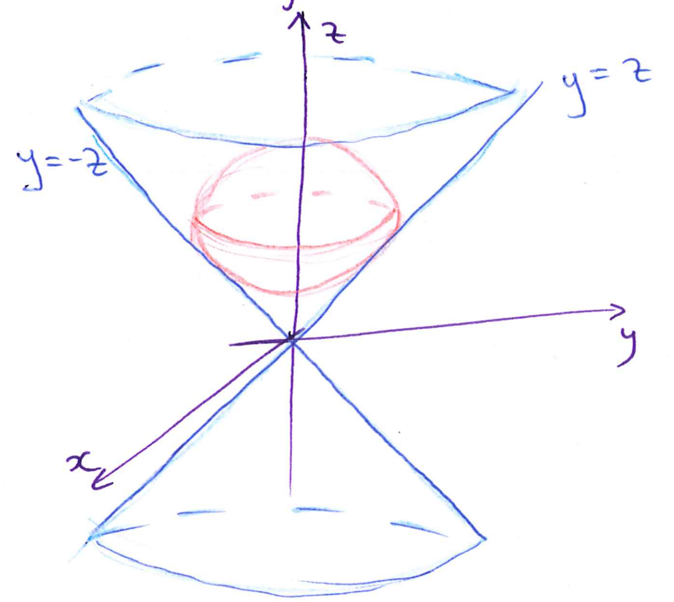
$$\Rightarrow \vec{n}_{\sigma_2} = (7, -1, 2)$$

$$\sigma_2 : 7x - y + 2z + D_2 = 0$$

$C(1,2,3) \in \sigma_2 \Rightarrow D_2 = -11$

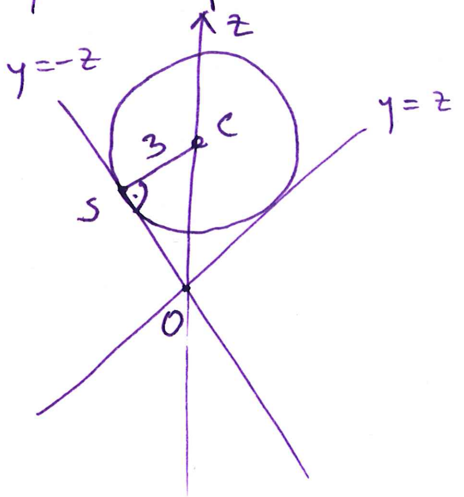
7.3. $\mathcal{S} = ?$ $\quad \mathcal{S} = \mathcal{S}(C, 3)$

$\mathcal{S}$ уписана у конус $\mathcal{C}: x^2+y^2-z^2=0$



Приметимо да је z-оса оса конуса $\mathcal{C}$. На њој се налази и центар сфере $\mathcal{S}$, дакле центар C има координате $C(0,0,t)$

Издвојимо пресек конуса и сфере са равни Oyz



Како је у питању права $y=-z$, знамо да је угао $\measuredangle SOC = \pi/4$

$\Rightarrow \measuredangle OCS = \pi/4$

$$\xrightarrow{\text{Питагорина т.}} \|\vec{CO}\|^2 = \|\vec{SC}\|^2 + \|\vec{SO}\|^2 = 3^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{OC}\| = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow C(0,0,3\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}: \quad x^2+y^2+(z-3\sqrt{2})^2 = 9$$

7.4.

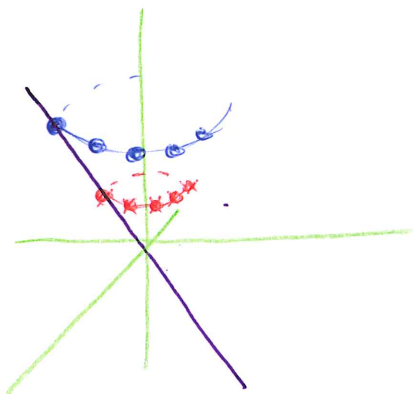
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$ Матрица ротације око z-осе за угао α

а) $p: \; x=0, \; y=z$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -t\sin\alpha \\ t\cos\alpha \\ t \end{pmatrix}} \begin{matrix} \leftarrow x \text{ коорд} \\ \leftarrow y \text{ коорд} \\ \leftarrow z \text{ коорд} \end{matrix}$$

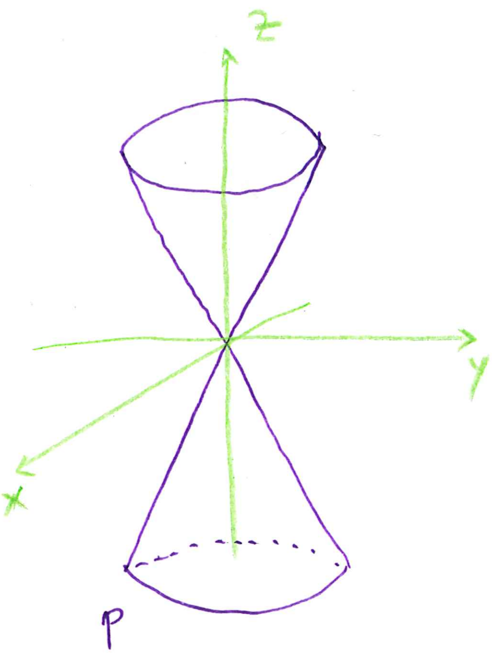
произвољна тачка са праве p (за различито t добијамо различите тачке са p) и сваку од њих ротирамо.

заротирана тачка за угао α



Траг сваке од њих тачака је кружница (када α прође од 0 до 2π)

А траг целе праве је конус



Проверимо то и аналитички.
Проверимо коју везу задовољавају координате слике

$$x^2+y^2 = (-t\sin\alpha)^2 + (t\cos\alpha)^2$$
$$= t^2 = z^2$$

$$\rightsquigarrow x^2+y^2-z^2=0$$

$\uparrow$ јед. конуса

б) $p:\ y = 0,\ x = 1$

нова, заротирана тачка (тј. њене коорд.)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ t \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x \text{ коорд.} \\ \leftarrow y \text{ коорд} \\ \leftarrow z \text{ коорд} \end{array}$$

произвољна тачка са праве p

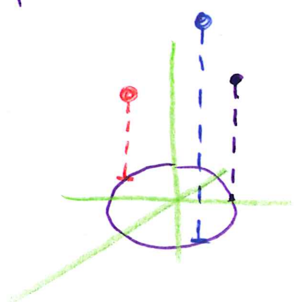
~~(за [illegible])~~

Какве везе важе за координате $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ t \end{pmatrix} =: M_\alpha(t)$ произвољне заротиране тачке?

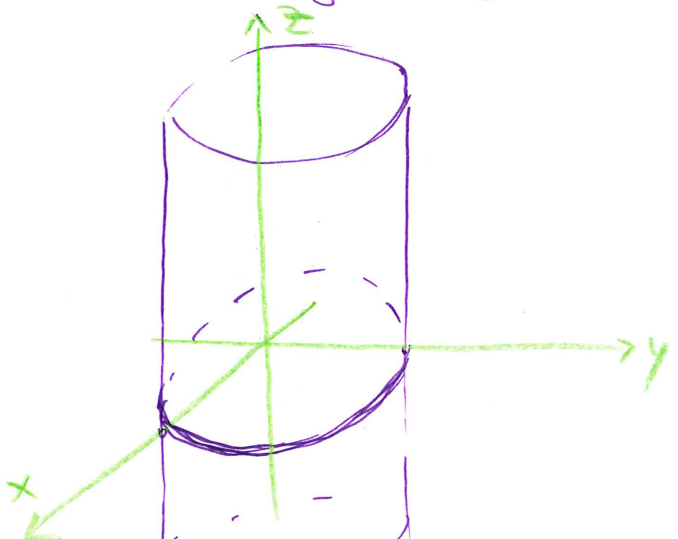
$x^2 + y^2 = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ ← ~~[illegible]~~ одавде видимо да пројекција сваке тачке $M_\alpha(t)$ на раван Oxy припада кружници $x^2+y^2=1$

$z = t$

а одавде да z може бити било шта



$\Rightarrow \{(\cos\alpha, \sin\alpha, t) \mid \alpha \in [0, 2\pi],\ t \in \mathbb{R}\}$ је цилиндар над јединичном кружницом у Oxy.



← интуитивно, што и добијамо када око z-осе ротирамо праву паралелну са z-осом (права p је баш таква) в) $p: \ z=0, \ x=y$

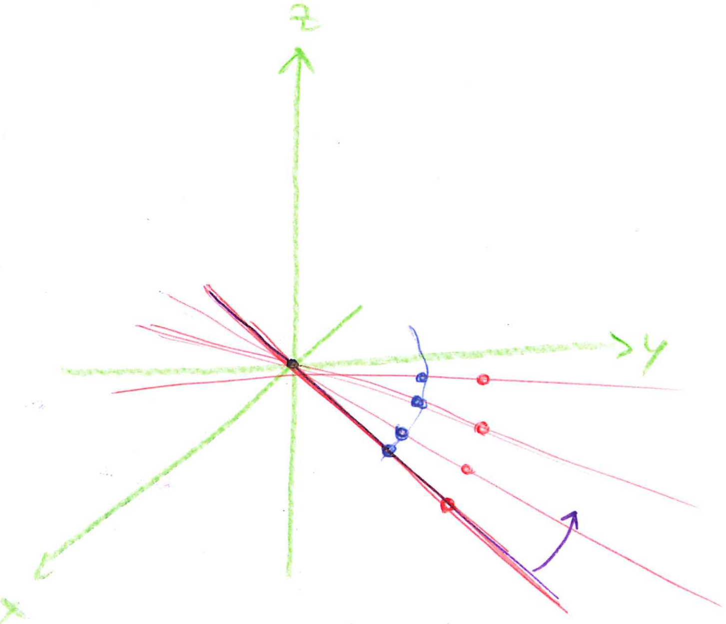
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} t\cos\alpha - t\sin\alpha \\ t\sin\alpha + t\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{array}$$

$z=0$ ← све се дешава у Oxy равни

$$x^2+y^2 = (t\cos\alpha - t\sin\alpha)^2 + (t\sin\alpha + t\cos\alpha)^2 = 2t^2$$

за различите t добијамо различите кружнице (у Oxy равни)

⇒ слика је цела Oxy раван



– ротацијом око z осе праве из равни $z=0$ (Oxy) која пролази кроз координатни почетак добијамо целу $z=0$ раван (Oxy раван) г)

$p: \ z=0 \ , \ x=2$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2\cos\alpha - t\sin\alpha \\ 2\sin\alpha + t\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{array} \end{array}$$

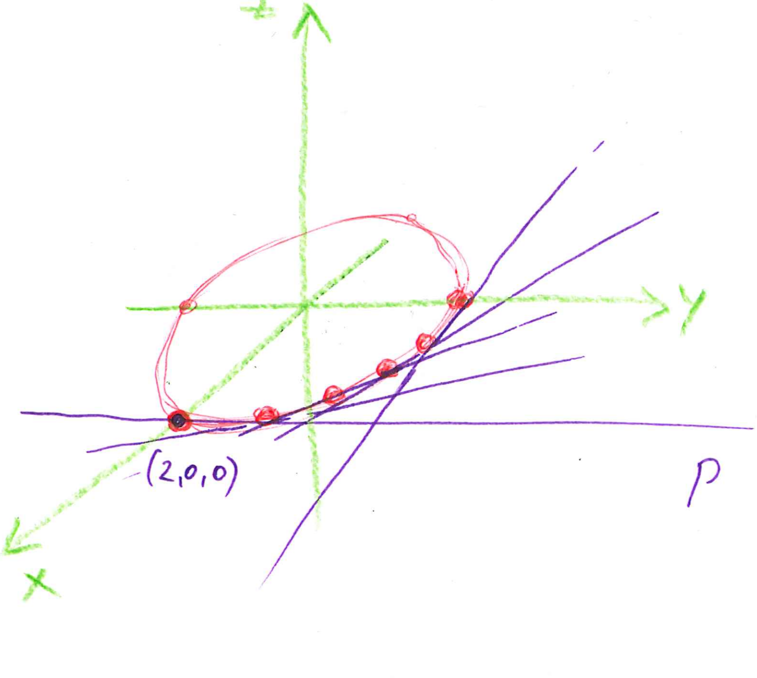
$z=0 \ \leftarrow$ све слике при ротацији су у $z=0$ равни

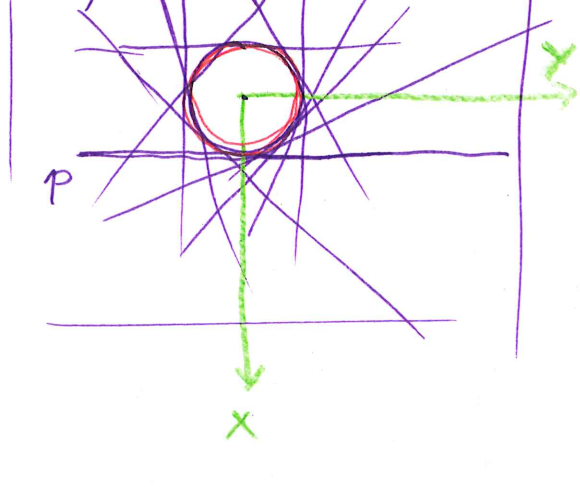
$$x^2+y^2 = (2\cos\alpha - t\sin\alpha)^2 + (2\sin\alpha + t\cos\alpha)^2 = 4 + \underbrace{t^2}_{\geq 0}$$

$$x^2+y^2 = 4+t^2 \geq 4$$

Ротација тачке $(2,0,0) \in p$ (за $t=0$) даје кружницу полупречника 2 у равни $z=0$. А за остале тачке са p ($t \neq 0 \Rightarrow t^2 > 0$) добијамо кружнице у истој равни већег полупречника.

Дакле слика при ротацији је раван Oxy без унутрашњости круга $x^2+y^2=4$.



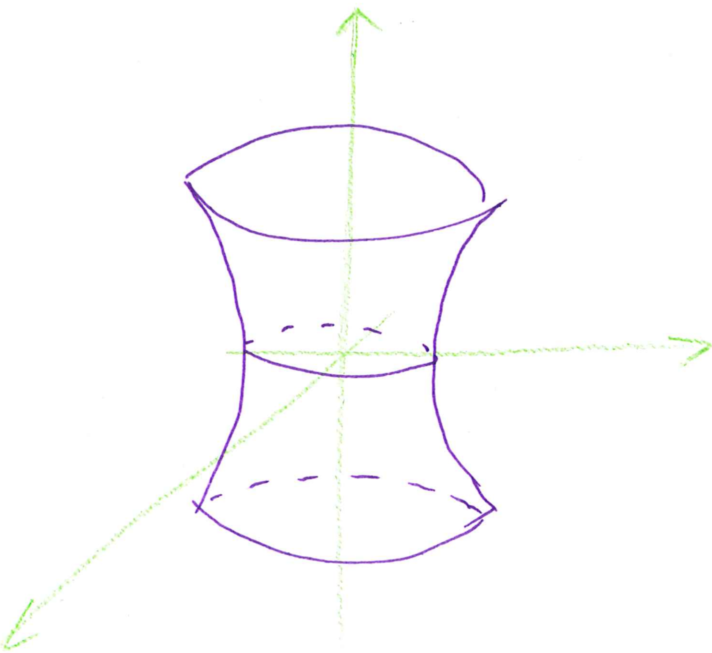


д) $p: \; x = 1 \; , \; y = z$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha - t\sin\alpha \\ \sin\alpha + t\cos\alpha \\ t \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y^2 = (\cos\alpha - t\sin\alpha)^2 + (\sin\alpha + t\cos\alpha)^2$$
$$= 1 + t^2 = 1 + z^2$$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \leftarrow$ једнограни хиперболоид



- када пресецате са равнима паралелним равни Oxy тј. равнима $z = z_0 = const$ добијате кружнице $x^2 + y^2 = 1 + z_0^2$
- када пресецате са $y = y_0 = const$ $\rightsquigarrow$ хиперболе
- са $x = x_0 = const$

$\rightsquigarrow$ хиперболе