Афина пресликавања

Деф Нека је $\mathbb{V}^n$ n-димензиони векторски простор над $\mathbb{F}$ (поље) и $\mathbb{A}^n$ скуп чије елементе називамо тачкама. Тројку $(\mathbb{A}^n, \mathbb{V}^n, \mu)$ називамо афиним простором ако је $\mu: \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{V}^n$ пресликавање за које важе сл. аксиоме:

a1) $(\forall A \in \mathbb{A}^n)(\forall \vec{v} \in \mathbb{V}^n)\ \exists!\, B \in \mathbb{A}^n$ т.д. $\mu(A,B) = \vec{v}$

a2) $\forall A, B, C \in \mathbb{A}^n$ важи $\mu(A,B) + \mu(B,C) = \mu(A,C)$

Деф $\bar{f}: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ линеарно пресликавање

$f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ је афино $\Longleftrightarrow \left(f(M) = M',\ f(N) = N' \overset{\Longleftrightarrow}{} \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} \right)$

Напомена:

Изаберимо $O \in \mathbb{A}^n$ и базу e за $\mathbb{V}^n$.
Oe називамо репер.

$$X \longmapsto \overrightarrow{OX} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n} \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$[X]_{Oe} = [\overrightarrow{OX}]_e = (x_1, \dots, x_n)$$

Теорема Свако афино пресликавање f у фиксираном реперу Oe има облик:

$$x' = Ax + b$$

Теорема Постоји јединствено афино пресликавање које пресликава 3 неколинеарне тачке у три неколинеарне. (у $\mathbb{R}^2$, тј. простору димензије 2)

У простору димензије n, потребна је n+1 тачка стеу. колоне матрице A из прве теореме су слике базних вектора при пресл. f

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ [f(\vec{e_1})] & [f(\vec{e_2})] \end{pmatrix} \leftarrow$$

у простору димензије 2

Колона b је слика координатног почетка $b = [f(0)]$.

Дакле, свако афино пресл. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ је облика

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

нове координате

старе

претходном запису еквивалентан је и следећи

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

На први поглед, "вештачки" смо додали трећу врсту са јединицом, али овакав запис афиних пресликавања олакшава рачун када имамо композицију више афиних пресликавања (па самим тим и множење матрица)

Код трансформација координата, видели смо да се координате тачке мењају уколико променимо репер (базу и/или координатни почетак). У таквом "виђењу ствари" тачке у простору су фиксиране, не померају се, мења се репер и то производи промену у координатама.

Међутим, ту појаву - промену координата, можемо гледати и на други начин. Репер остаје фиксиран, а тачке се пресликавају - трансформишу. Тако долазимо до афиних трансформација.

Особине афиних пресликавања:

- пресликавају праве у праве
- чувају размеру колинеарних дужи
- чувају паралелност правих
- однос површина слике и оригинала је $|\det(A)|$ (A - матрица из теореме)
- пресликавања код којих је $\det A > 0$ чувају оријентацију, а она код којих је $\det A < 0$ не чувају.

афина пресл. не чувају
- дужине
- углове
...

Афино пресликавање је изометрија акко је матрица A ортогонална.

За афине трансформације простора имамо представљање

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

или у проширеном запису:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.1.

$A_0(0,0) \xrightarrow{f} A_1(5,3)$

$B_0(1,0) \xrightarrow{f} B_1(6,2)$ f ?

$C_0(0,1) \xrightarrow{f} C_1(4,5)$

a) Знамо да се свако афино пресликавање у $\mathbb{R}^2$, па и пресликавање f, може представити у облику:

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

нове координате старе координате

Дакле, да би одредили пресликавање f, потребно је одредити 6 непознатих: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$.

Такође, знамо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$[f(\vec{e}_1)]$ $[f(\vec{e}_2)]$

тј. колоне матрице A су ~~слике~~ координате слика базних вектора.

Потражимо те слике

$$f(\vec{e}_1) = f(\overrightarrow{A_0B_0}) = \overrightarrow{f(A_0)f(B_0)} = \overrightarrow{A_1B_1} = (1,-1)$$

$\overrightarrow{A_0B_0} = B_0 - A_0 = (1,0) = e_1$

јер је пресл. f афино

услов задатка: $f(A_0)=A_1$, $f(B_0)=B_1$

Слично:

$$f(\vec{e}_2) = f(\overrightarrow{A_0C_0}) = \overrightarrow{f(A_0)f(C_0)} = \overrightarrow{A_1C_1} = (-1,2)$$

Дакле, за сада знамо:

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$[f(\vec{e}_1)]$ $\quad$ $[f(\vec{e}_2)]$

Потребно је још наћи колону $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

За то можемо искористити слику неке тачке, нпр. $A_0 \xmapsto{f} A_1$

тј. $(0,0) \longmapsto (5,3)$

Дакле $(*)$ постаје

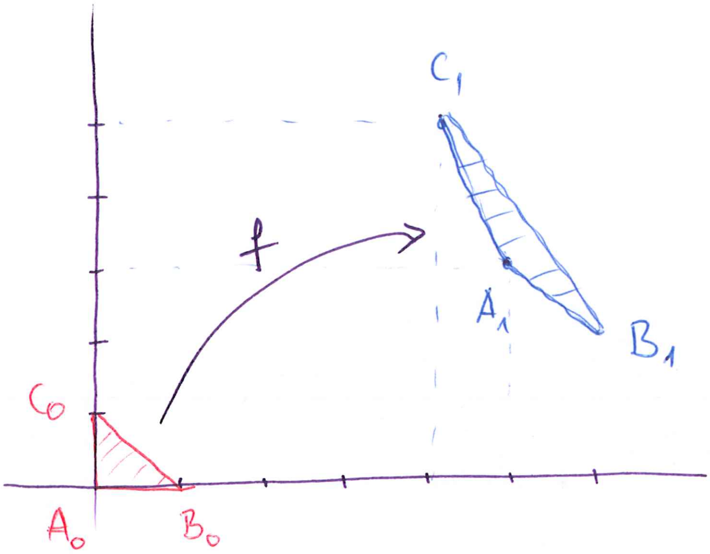
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

слика тачке, тј. $[A_1]$ $\quad$ $[A_0]$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5 = 1\cdot 0 - 1\cdot 0 + b_1 \\ 3 = -1\cdot 0 + 2\cdot 0 + b_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{matrix} b_1 = 5 \\ b_2 = 3 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

скица: $\Delta A_0B_0C_0 \longmapsto \Delta A_1B_1C_1$



Напомена:

Приметимо да нам је у претходном алгоритму згодно дошла чињеница да је $\vec{e_1} = \overrightarrow{A_0B_0}$.

То не мора увек бити случај (када имамо произвољан троугао $A_0B_0C_0 \longmapsto$ произвољан $\Delta A_1B_1C_1$). Међутим, увек можемо наћи скаларе α и β такве да је $\vec{e_1} = \alpha \overrightarrow{A_0B_0} + \beta \overrightarrow{A_0C_0}$. ($\overrightarrow{A_0B_0}$ и $\overrightarrow{A_0C_0}$ су лин. нез. јер је $A_0B_0C_0$ троугао)

Надаље:

f је афино па и линеарно

$$f(\vec{e_1}) = f(\alpha \overrightarrow{A_0B_0} + \beta \overrightarrow{A_0C_0}) = \alpha f(\overrightarrow{A_0B_0}) + \beta f(\overrightarrow{A_0C_0})$$

$$= \cancel{\alpha \overrightarrow{A_1B_1}}$$

$$= \alpha \overrightarrow{f(A_0)f(B_0)} + \beta \overrightarrow{f(A_0)f(C_0)}$$

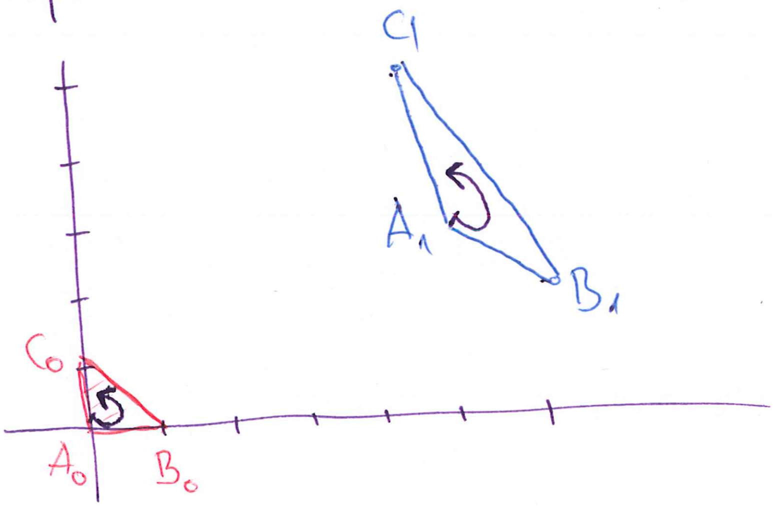
$$= \alpha \overrightarrow{A_1B_1} + \beta \overrightarrow{A_1C_1}$$

ове знамо, па смо нашли и слику $f(\vec{e_1})$

б) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ f чува оријентацију

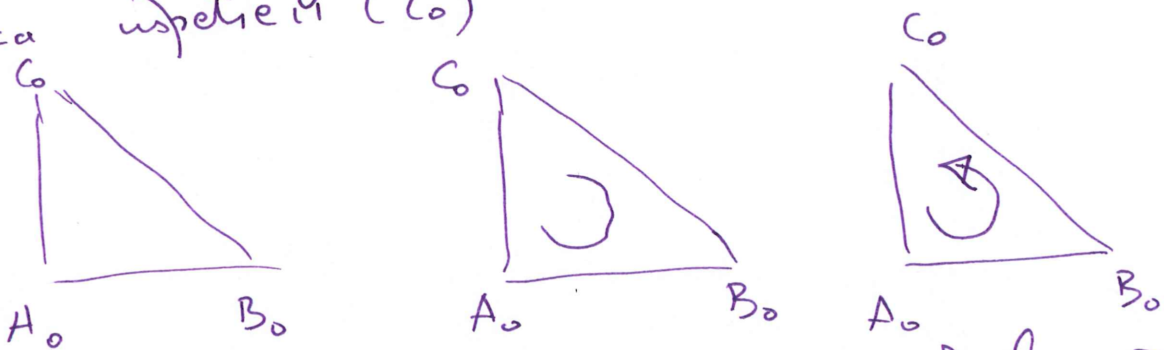
Провера:



$\Leftarrow$ исте оријентације

$\Rightarrow$ f чува оријентацију

Како ~~—~~ "цртамо" оријентацију $\triangle A_0B_0C_0$ нпр.?
Кренемо од првог темена (A_0) ка другом (B_0), па ка трећем (C_0)



Размислити о другом начину да проверите оријентације (hint: векторски производ)

f није изометрија јер дуж A_0B_0 дужине 1 слика у дуж A_1B_1 дужине $\sqrt{2}$.

$$\frac{P(\triangle A_1B_1C_1)}{P(\triangle A_0B_0C_0)} = |\det(A)| = |1| = 1 \Rightarrow P(\triangle A_1B_1C_1) = P(\triangle A_0B_0C_0)$$

$\Rightarrow$ f чува површину

ц) f^{-1} инверзно пресликавање ?

$$f: \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \backslash \quad X' = A \cdot X + b$$

$$A^{-1} \cdot X' = X + A^{-1} \cdot b$$

$$f^{-1}: \quad X = A^{-1} \cdot X' - A^{-1} \cdot b$$ ← ф-ле инверзног

Дакле, потребно је наћи A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

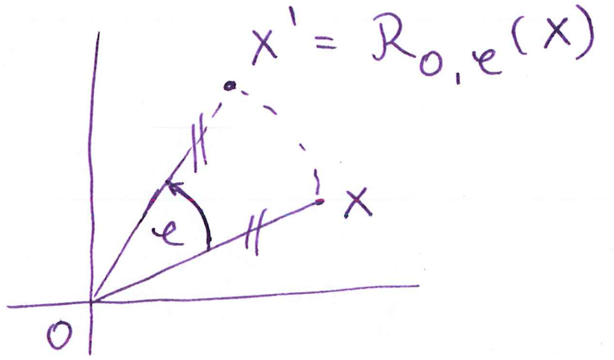
$$\Rightarrow f^{-1}: \quad X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X' - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X' - \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(6.3.)

ф-ле ротације око координатног почетка за угао φ

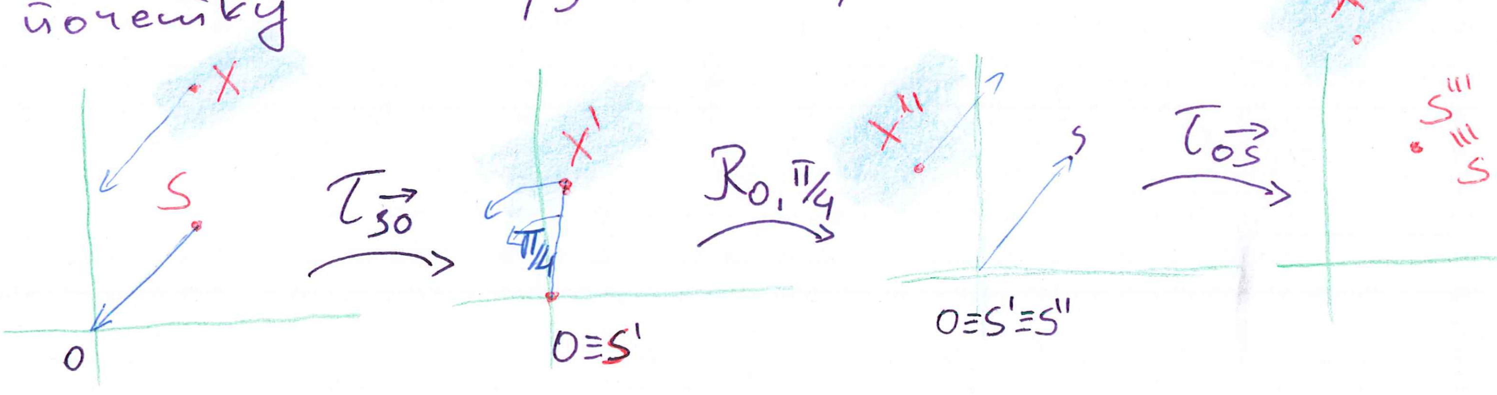
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



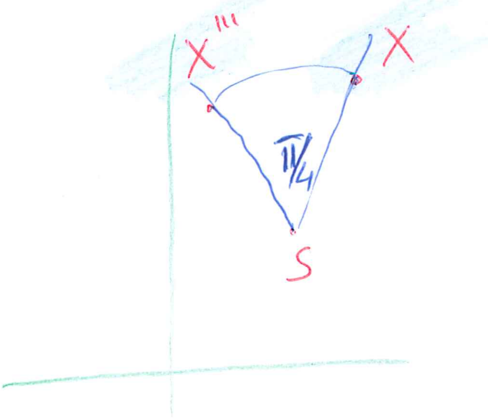
a) $R_{S,\phi} = ?$ $S(2,2)$, $\phi = \pi/4$

Ф-ле ротације око произвољне тачке не знамо. Знамо око координатног почетка. Свешћемо на оно што знамо.

Најпре ћемо транслацијом тачку S довести у координатни почетак. Ту ћемо извршити ротацију, и на крају ћемо тачку S вратити где је била на почетку инверзном транслацијом.



Пратимо како се трансформише произвољна X тј. укупно:



Дакле $$R_{S,\pi/4} = T_{\vec{OS}} \circ R_{O,\pi/4} \circ T_{\vec{SO}} \qquad (*)$$

транслација
за вектор $\vec{OS}$

~~За~~ Ротацију $R_{S,\pi/4}$ видимо као композицију ова три пресликавања

$$\left.\begin{aligned} T_{\vec{SO}}(X) &= X' \\ R_{O,\pi/4}(X') &= X'' \\ T_{\vec{OS}}(X'') &= X''' \end{aligned}\right\} \text{ ознаке}$$

Одредимо ф-ле за свако од ова три пресликавања

I ф-ле транслације за вектор $\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{SO} = (-2, -2)$$

- па су ф-ле за $\tau_{\overrightarrow{SO}}$:

$$\tau_{\overrightarrow{SO}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

тј. $$\tau_{\overrightarrow{SO}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= [\tau_{\overrightarrow{SO}}]} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ф-ле за $R_{O, \pi/4}$:

$$R_{O, \pi/4}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

тј. $$R_{O, \pi/4}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

тј. $$R_{O, \pi/4}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= [R_{O, \pi/4}]} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\overrightarrow{OS} = (2, 2)$

$$\tau_{\overrightarrow{OS}} : \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

тј. $$\tau_{\overrightarrow{OS}} : \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= [\tau_{\overrightarrow{OS}}]} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Релација ⊛ важи и за матрице, тј.

$$[\mathcal{R}_{S, \pi/4}] = [\tau_{\overrightarrow{OS}}] \cdot [\mathcal{R}_{O, \pi/4}] \cdot [\tau_{\overrightarrow{SO}}]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

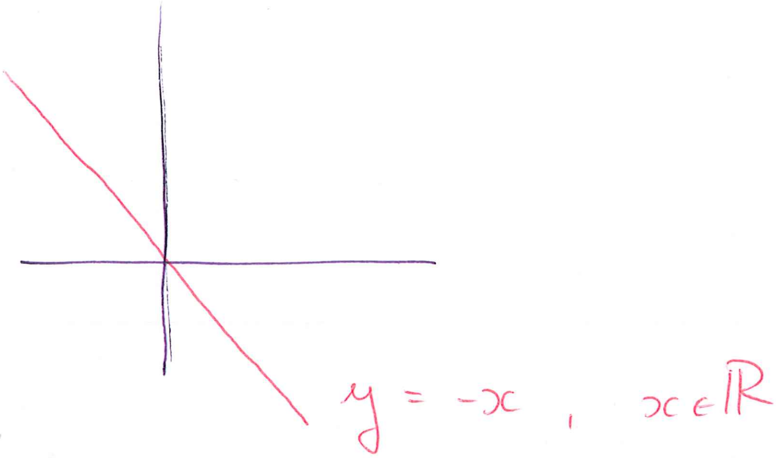
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2-2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тј. $$\mathcal{R}_{S, \pi/4} : \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 2-2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

тј. $$\mathcal{R}_{S, \pi/4} : \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

веза између крајње тачке (X''') и почетне (X)

б) слика праве $y = -x$?



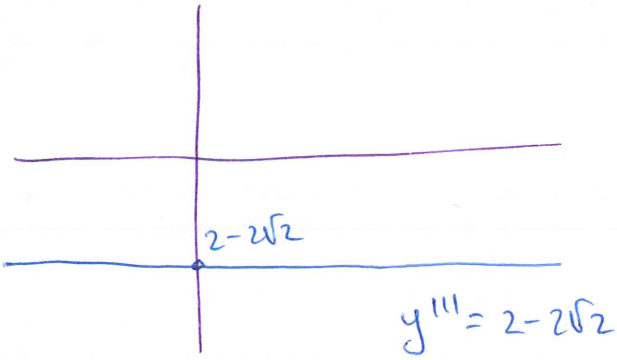
погледајмо ф-ле са краја дела под а), можемо их записати као:

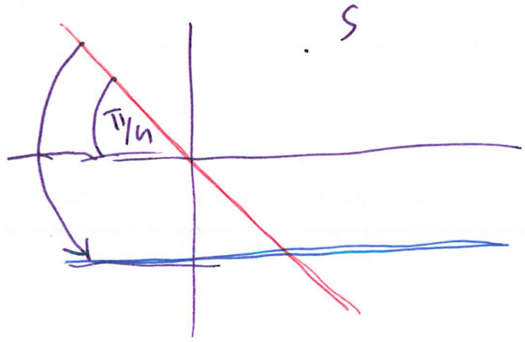
$$\begin{cases} x''' = \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y + 2 \\ y''' = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y + 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Заменимо ли услов $y = -x, \; x \in \mathbb{R}$

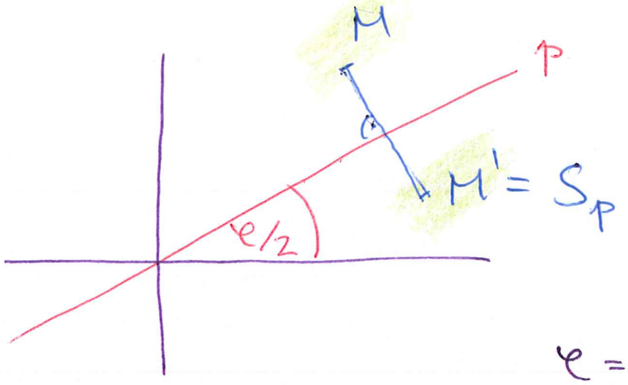
$$\rightsquigarrow \begin{cases} x''' = \sqrt{2} x + 2 \\ y''' = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Када $x \in \mathbb{R}$ и $x''' \in \mathbb{R}$, па је претходно једначина праве $y''' = 2 - 2\sqrt{2}$. (и то је слика праве $y=-x$)





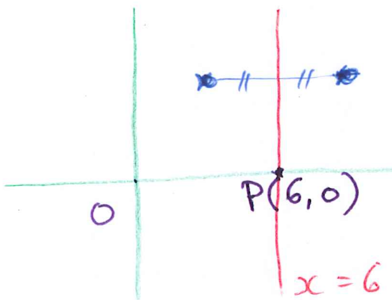
6.5. Рефлексија у односу на праву кроз координатни почетак



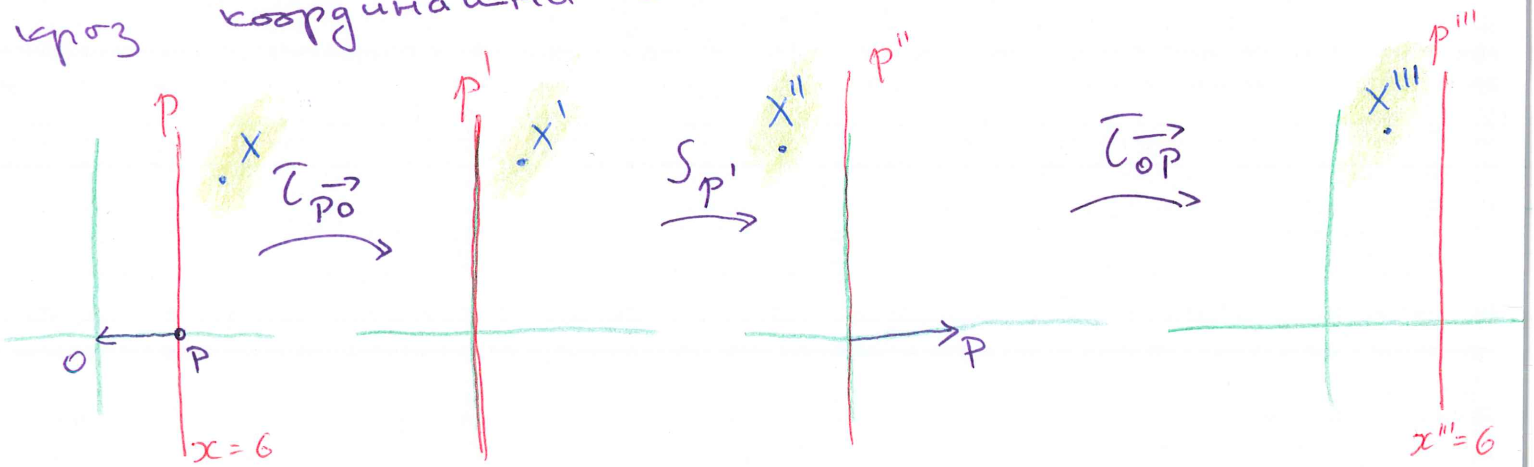
$\varphi = 2 \cdot \measuredangle(p, x\text{-осе})$

$$S_p : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$S_p = ?$ $\quad p: x = 6$



Транслирајмо праву p тако да пролази кроз координатни почетак



$$X \xmapsto{\tau_{\overrightarrow{PO}}} X' \xmapsto{S_{p'}} X'' \xmapsto{\tau_{\overrightarrow{OP}}} X'''$$

$$S_P(X) = \tau_{\vec{OP}} \circ S_{P'} \circ \tau_{\vec{PO}}(X)$$

- $\tau_{\vec{PO}}$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{PO} = (-6,0)$

- $S_{P'}$: $\varphi = 2 \cdot \measuredangle(x\text{-axe}, p') = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & -\cos\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$S_{P'}$: $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\tau_{\vec{OP}}$: $\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [S_P] = [\tau_{\vec{OP}}] \cdot [S_{P'}] \cdot [\tau_{\vec{PO}}]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

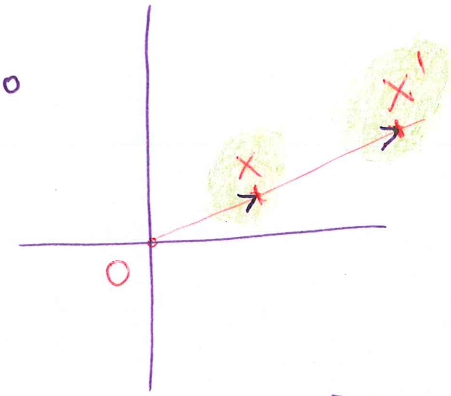
$\Rightarrow S_P$: $\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

6.6.

П хомотетија са центром у координатном почетку и коефицијентом k : $H_{O,k}$

$$H_{O,k}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$k>0$



$$\|\vec{OX'}\| = k \cdot \|\vec{OX}\|$$

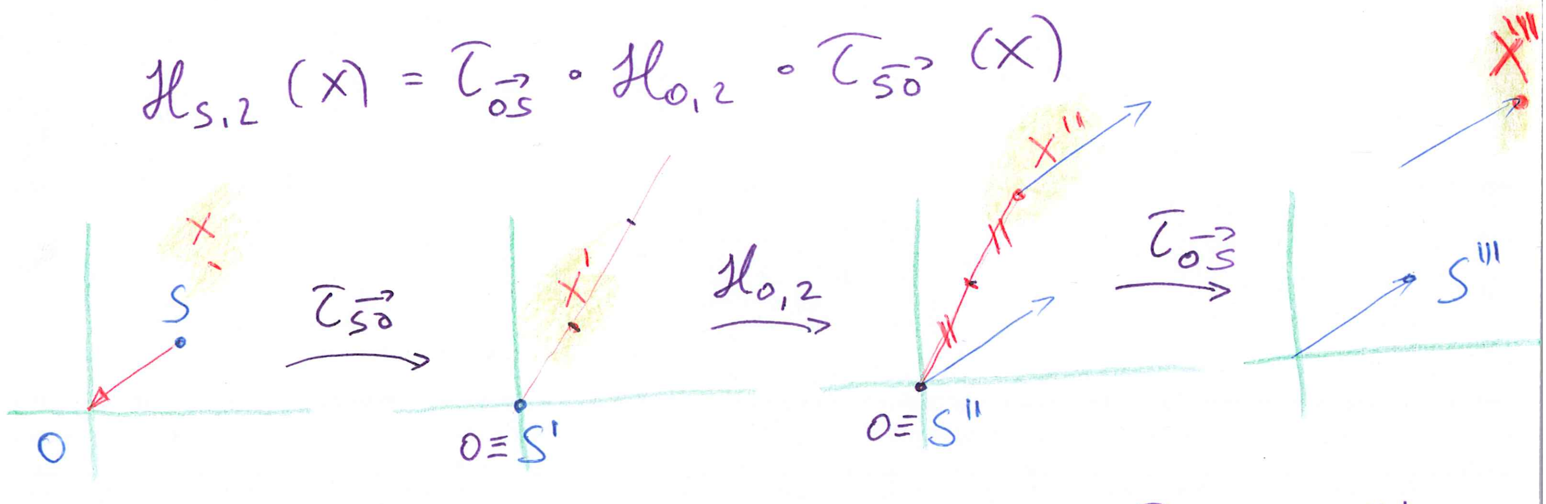
$\cancel{H_{S,k}(X) = kX}$

$$H_{S,k}(X) = X' \iff \vec{SX'} = k\vec{SX}$$

хомотетија са центром у S и коефицијентом k

$S(4,3)$, $k=2$ $\quad H_{S,2} = ?$

$$H_{S,2}(X) = \tau_{\vec{OS}} \circ H_{O,2} \circ \tau_{\vec{SO}}(X)$$



$$X \xmapsto{\tau_{\vec{SO}}} X' \xmapsto{H_{O,2}} X'' \xmapsto{\tau_{\vec{OS}}} X'''$$

$$\tau_{\vec{SO}} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{O,2} : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad // k = 2)$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{\vec{OS}} : \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow [\mathcal{H}_{S,2}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

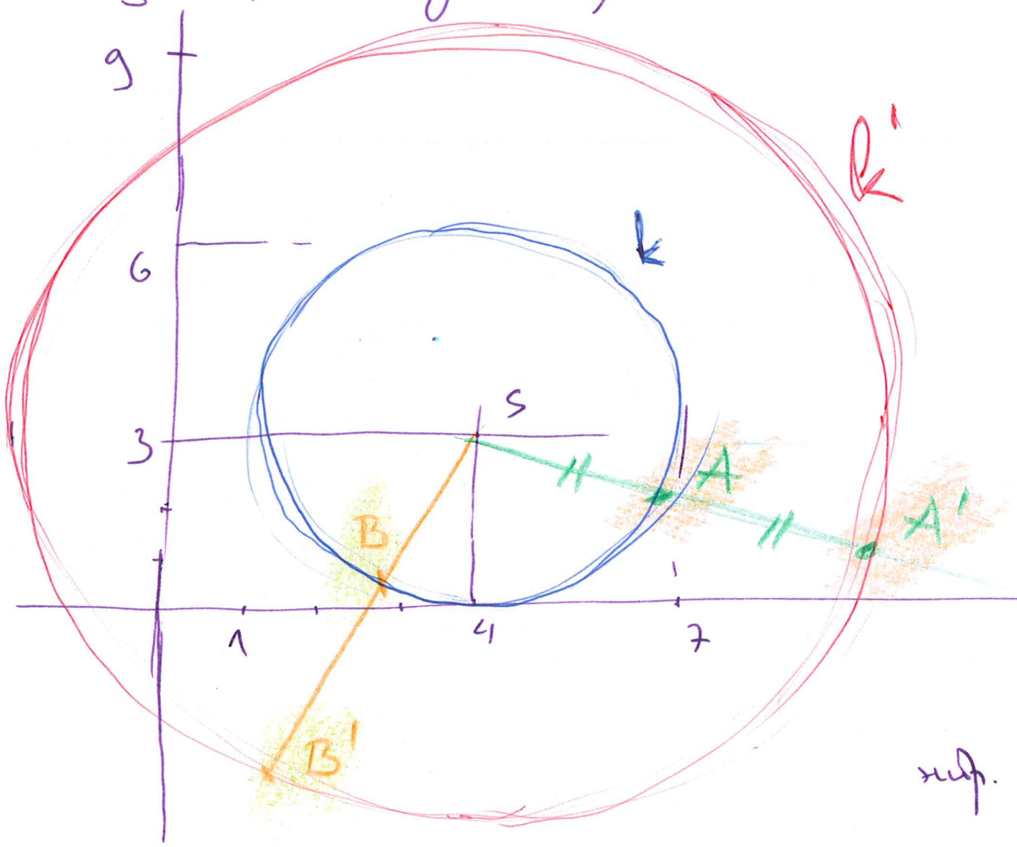
$$\mathcal{H}_{S,2} : \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$k: \quad (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$

$k' = \mathcal{H}_{S,2}(k)$

слика круга k при хомотетији $\mathcal{H}_{S,2}$

то је нови круг са истим центром, два пута већег полупречника

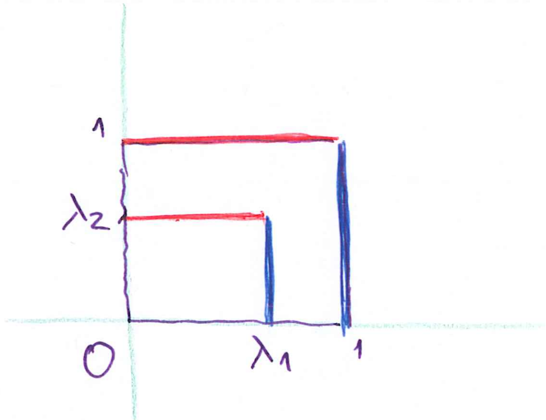


нпр. $\overrightarrow{SA'} = 2 \cdot \overrightarrow{SA}$

$\overrightarrow{SB'} = 2 \cdot \overrightarrow{SB}$

Γ са $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ означавамо скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку.

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}: \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}$$



- плава дуж се слика у плаву, црвена у црвену

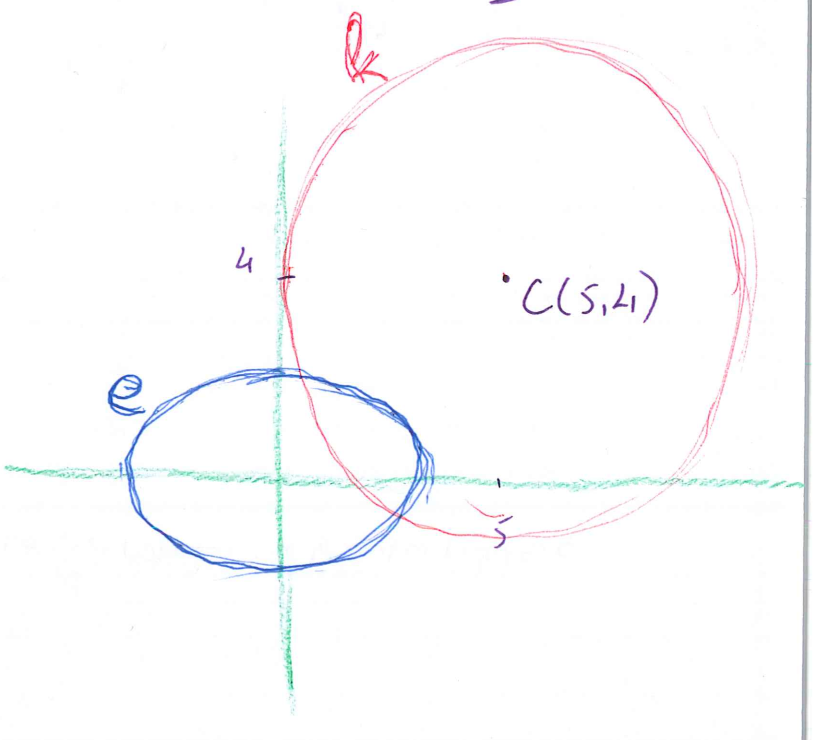
- хомотетија је спец. случај скалирања ($\lambda_1 = \lambda_2$)

6.8.

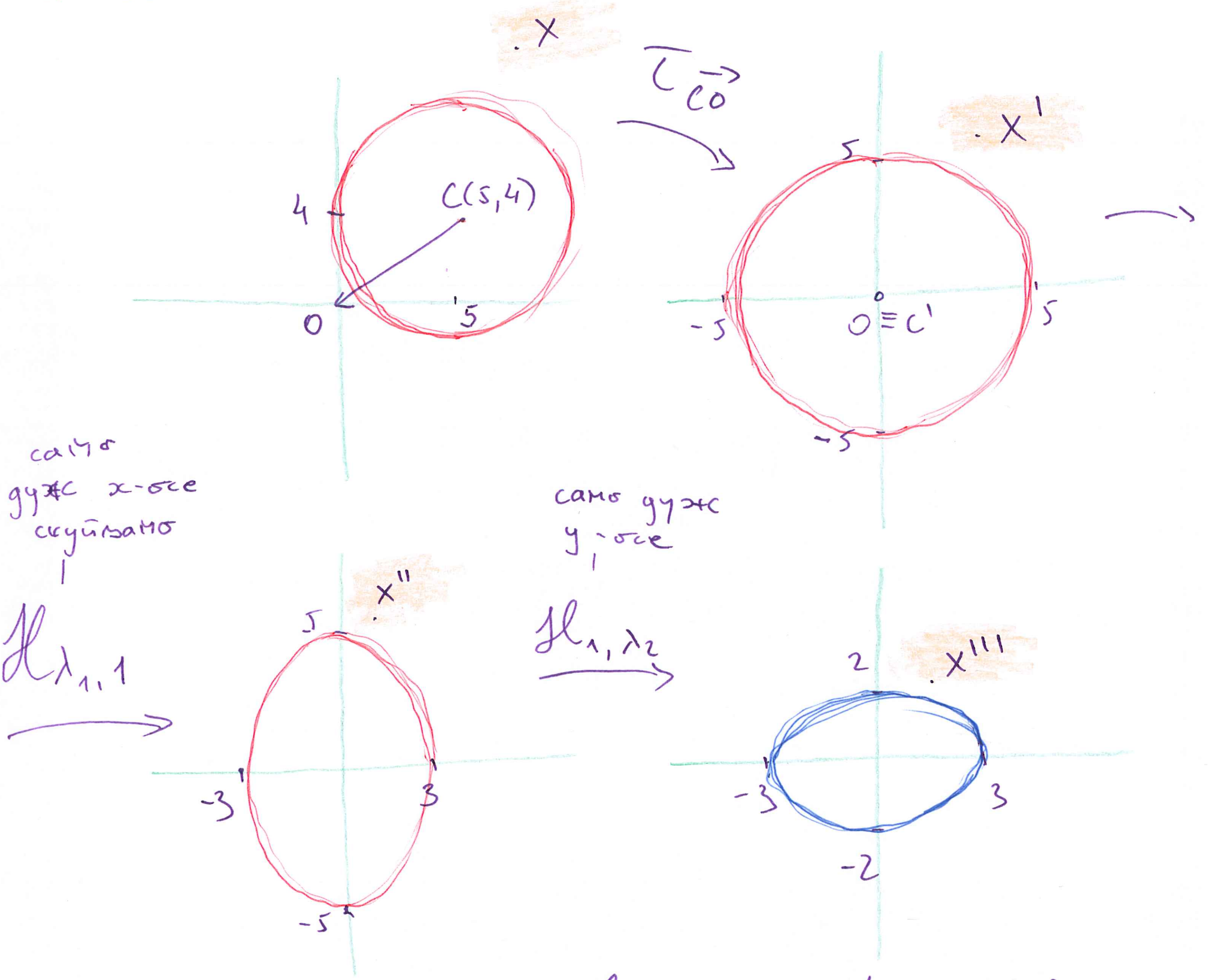
$k: x^2+y^2-8x-10y+16=0$

$(x-4)^2+(y-5)^2=5^2$

$e: \dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$



Најпре ћемо круг транслацијом довести у координатни почетак. Затим са два скалирања од полупречника направити полуосе елипсе.



Испратимо како ове трансформације делују на произвољну тачку X

$$X \xmapsto{\tau_{\vec{CO}}} X' \xmapsto{\mathcal{H}_{\lambda_1,1}} X'' \xmapsto{\mathcal{H}_{1,\lambda_2}} X'''$$

и опишимо њен крајњи положај у зависности од почетног

$$T_{\vec{CO}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{\lambda_1, 1}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(са слике видимо $(5,0) \xmapsto{\mathcal{H}_{\lambda_1,1}} (3,0)$, дакле

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{\lambda_1, 1}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{\lambda_1, 1}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}_{1, \lambda_2}$: аналогно претходном $\lambda_2 = 2/5$

(јер тачка $(0,5) \longmapsto (0,2)$)

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{1, \lambda_2}: \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Све скупа: $\quad f: k \longmapsto e$

$$f = \mathcal{H}_{1,2/5} \circ \mathcal{H}_{3/5,1} \circ \tau_{\overrightarrow{CO}}$$

$\Downarrow$

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -3 \\ 0 & 2/5 & -8/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

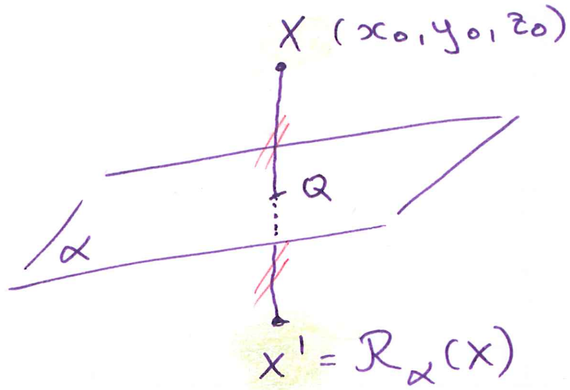
$$f: \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -8/5 \end{pmatrix}$$

Просторне трансформације

6.7.

$\alpha: 2x + 2y - z + 1 = 0$

$R_\alpha = ?$



I начин: (коришћењем знања из аналитичке)

Нађимо најпре нормалу n на α кроз $X(x_0,y_0,z_0)$

$$\vec{v}_n = \vec{n}_\alpha = (2,2,-1)$$

$$\Rightarrow \quad n: \frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{2} = \frac{z-z_0}{-1} = t \Rightarrow n: \begin{cases} x = 2t + x_0 \\ y = 2t + y_0 \\ z = -t + z_0 \end{cases}$$

$n \cap \alpha = \{Q\}$:

$$\begin{cases} x = 2t + x_0 \\ y = 2t + y_0 \\ z = -t + z_0 \\ 2x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$2(2t+x_0) + 2(2t+y_0) - (-t+z_0) + 1 = 0$$

$$4t + 2x_0 + 4t + 2y_0 + t - z_0 + 1 = 0$$

$$9t = z_0 - 2x_0 - 2y_0 - 1$$

$$t = \frac{1}{9}(z_0 - 2x_0 - 2y_0 - 1)$$

$Q(x_q, y_q, z_q) \rightarrow$

$$x_q = 2 \cdot \frac{1}{9}(z_0 - 2x_0 - 2y_0 - 1) + x_0$$
$$= \frac{1}{9}(2z_0 + 5x_0 - 4y_0 - 2)$$

$$y_q = 2 \cdot \frac{1}{9}(z_0 - 2x_0 - 2y_0 - 1) + y_0$$
$$= \frac{1}{9}(2z_0 - 4x_0 + 5y_0 - 2)$$

$$z_q = -\frac{1}{9}(z_0 - 2x_0 - 2y_0 - 1) + z_0$$

$$= \frac{1}{9}(8z_0 + 2x_0 + 2y_0 + 1)$$

(координате тачке Q можемо овако рачунати јер $Q \in \pi$)

Q је средиште дужи XX' па:

$$[Q] = \frac{[X] + [X']}{2}$$

тј. $2Q = X + X'$

$$X' = -X + 2Q$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2z_0 + 5x_0 - 4y_0 - 2 \\ 2z_0 - 4x_0 + 5y_0 - 2 \\ 8z_0 + 2x_0 + 2y_0 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} x_0 - 8y_0 + 4z_0 \\ -8x_0 + y_0 + 4z_0 \\ 4x_0 + 4y_0 + 7z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/9 \\ -4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/9 \\ -4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

тј. R_α: $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & -8/9 & 4/9 \\ -8/9 & 1/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 7/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/9 \\ -4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$

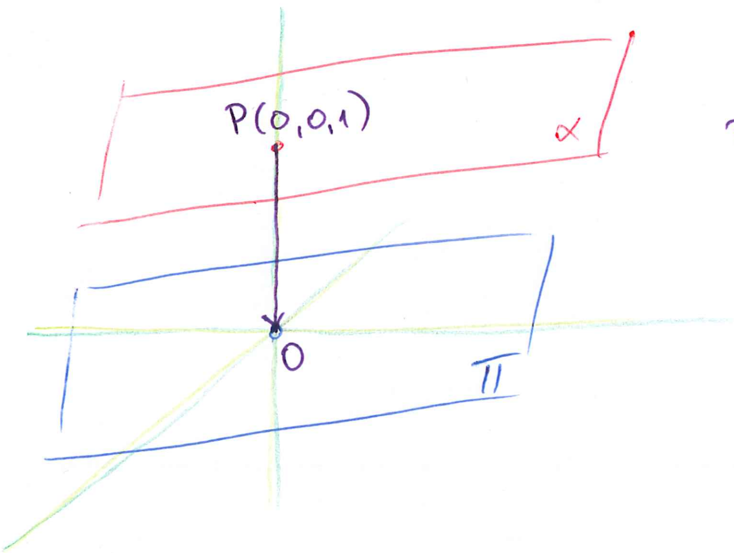
<u>II начин</u> ‖ (коришћење ф-ле за рефлексију у односу на раван <u>кроз</u> координатни почетак)

$$[R_\alpha] = E - 2 n_\alpha n_\alpha^T$$

α - ~~ф~~ раван кроз координатни почетак
n_α њена ~~нормала~~ <u>јединична</u> нормала ‖

Наша раван α у задатку не пролази кроз координатни почетак тако да је морамо прво довести у коорд. почетак

$\Pi: 2x+2y-z=0$ – раван паралелна са α која пролази кроз координатни почетак (садржи (0,0,0))



$P \in \alpha$

$$R_\alpha = \tau_{\vec{OP}} \circ R_\Pi \circ \tau_{\vec{PO}}$$

умемо да нађемо преко ф-ле

ДОМАЋИ : пробајте да завршите 6.7.а) на овај други ~~задатак~~ начин

урадићемо неки од наредних преко ф-ле

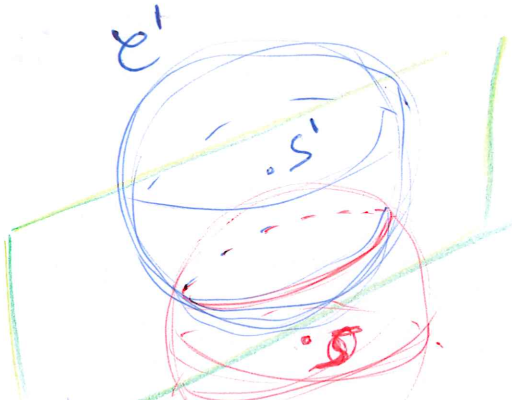
б) $\mathcal{C}: x^2+y^2+z^2=1 \qquad \mathcal{C}'? \qquad \mathcal{C}'=\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{C})$

рефлексија је изометрија (индиректна) па сферу слика у сферу истог полупречника

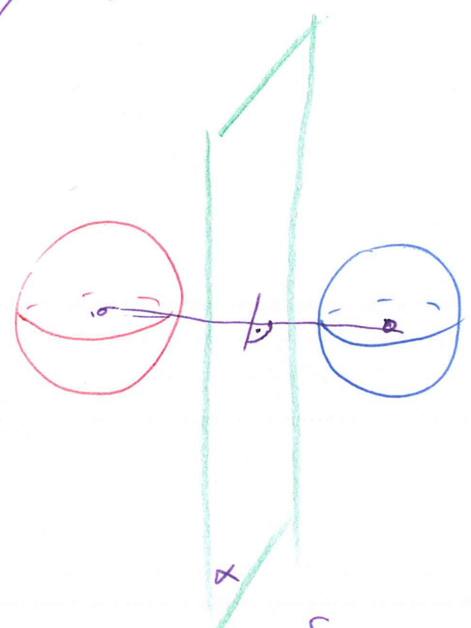
Потребно је наћи нови центар

$$S(0,0,0) \longmapsto S'?$$

$$S'=\mathcal{R}_\alpha(S)=\begin{pmatrix} 1/9 & -8/9 & 4/9 \\ -8/9 & 1/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 7/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4/9 \\ -4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4/9 \\ -4/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$$



долази до "преклапања" сфере и њене слике јер раван око које вршимо рефлексију сече сферу



иначе би било овако (када раван не сече почетну сферу)

~~6.10.~~

П централну симетрију у односу на координатни почетак можемо видети као композицију 3 рефлексије у односу на равни Oxy, Oxz, Oyz

$$C_O = S_{Oyz} \circ S_{Oxz} \circ S_{Oxy}$$

$$[S_{Oyz}] = E - 2\vec{n}_{Oyz} \cdot \vec{n}^{\,T}_{Oyz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ 0\ 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{Oyz}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

тј. проширена $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

Слично $[S_{Oxz}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[S_{Oxy}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

~~па $[C_O] =$~~

па $[C_O] = [S_{Oyz}] \cdot [S_{Oxz}] \cdot [S_{Oxy}]$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{проширена}$$

6.10. $S(-1,1,3)$ – није координатни почетак

зато $C_S = \tau_{\vec{OS}} \circ C_O \circ \tau_{\vec{SO}}$

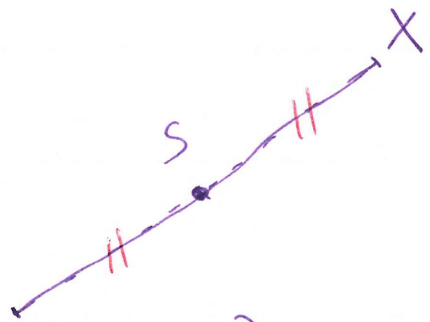
$$[C_S] = [\tau_{\vec{OS}}]\cdot[C_O]\cdot[\tau_{\vec{SO}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тј. $C_S: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Како је централна симетрија композиција 3 рефлексије које су индиректне изометрије, то је и централна симетрија индиректна, тј. мења оријентацију.

дужине, површине чува



ДЗ пробајте да решите овај задатак преко аналитичке геом.

6.12.

$\mathcal{C}: \; x^2+y^2+z^2=1$

$\mathcal{C}': \; (x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=3$

Како сликамо (хомотетијом) сферу полупречника 1 на сферу полупречника $\sqrt{3}$, то коефицијент хомотетије мора бити $\pm\sqrt{3}$. Дакле имамо два решења

$$\mathcal{H}_{S,\sqrt{3}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

како центар иде у центар

$$C(0,0,0) \longmapsto C(3,1,3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cancel{a=0} \quad a=3, \; b=1, \; c=3$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{S,\sqrt{3}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

друго решење, тј друга хомотетија:

$$\mathcal{H}_{S',-\sqrt{3}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$