Увод у математичку логику
– вежбе –

Славко Моцоња

10.05.2017

Садржај

1 Исказна логика (1)

1.1 Мотивација: Острво Истинозбораца и Лажова (1)

На неком острву становништво се дели у две групе: Истинозборце и Лажове. Сваки сатновник тог острва је припаданик тачно једне од тих група: или је Истинозборац или Лажов. Знамо да Истинозборци увек говоре истину, док Лажови увек лажу. Становници острва међусобно знају ко је Истинозборац, а ко Лажов, док било ком странцу то није познато. Такође, странац не може на основу физичког изгледа становника да закључи ко је Истинозборац, а ко Лажов.

Приметимо да на овом острву важи следећа теорема.

Теорема. Ниједан становник острва не може да изјави: "Ја сам Лажов.".

Доказ. Ако је становник Истинозборац, он говори истину, па не може да изјави да је Лажов. Са друге стране, ако је становник Лажов, он лаже, па такође не може да изјави да је Лажов. ⊣

$\boxed{\textbf{1.}}$ Странац долази на острво, среће особе A и B и поставља им питање: "Ко је од вас Истинозборац, а ко Лажов?". Особа A одговара: "Обоје смо Лажови.". Шта странац може да закључи о особама A и B.

Решење. Није могуће да је A Истинозборац, јер би у том случају изјава "Обоје смо Лажови." била нетачна, што је у супротности са чињеницом да A говори истину.

Дакле, A мора бити Лажов. Одатле закључујемо да је у својој изјави слагао, па није тачно да су обоје Лажови. Како A јесте Лажов, одавде закључујемо да B мора бити Истинозборац.

Дакле, можемо закључити да је A Лажов, а B Истинозборац. $\dashv$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Странац долази на острво, среће особе A и B и пита их: "Да ли сте обоје Лажови?". Особа A одговара: "Бар једно од нас јесте." Шта странац може да закључи о особама A и B.

Решење. Приметимо да није могуће да је A Лажов, јер би у том случају његова изјава "Бар један од нас је Лажов." била тачна, што је у супротности са чињеницом да A лаже.

Дакле, A мора бити Истинозборац, па је његова изјава истинити, тј. бар један од њих је Лажов. Но како, A није Лажов, закључујемо да је B Лажов.

Дакле, можемо закључити да је A Истинозборац, а B Лажов. $\dashv$

$\boxed{\textbf{3.}}$ Странац долази на острво, среће особе A и B и нешто их пита. Особа A одговара: "Ако сам ја Истинозборац, онда је и B Истинозборац". Шта странац може да закључи о A и B.

Решење. Ако је A Истинозборац, тада је он рекао истину, тј. изјава "Ако сам ја Истинозборац, онда је и B Истинозборац." је тачна, па пошто је он Истинозборац закључујемо и да је B Истинозборац.

Приметимо да смо тиме доказали да је изјава "Ако је A Истинозборац, онда је и B Истинозборац." тачна. Међутим, како је A изјавио баш то, закључујемо да је он Истинозборац, па према првом пасусу и да је B Истинозборац.

Дакле, A и B су Истинозборци. $\dashv$

У вези са претходним задатком имамо следећу теорему.

Теорема. Означимо са p било који исказ (нпр. p може бити "особа B је Истинозборац", или "на острву постоји рудник злата"). Нека особа A каже: "Ако сам ја Истинозборац, онда је p тачно." Тада A јесте Истинозборац и p јесте тачно.

Доказ. Ако је A Истинозборац, он говори истину, па из његове изјаве "Ако сам ја Истинозборац, онда је p тачно." закључујемо да је p тачно, јер он јесте Истинозборац.

Приметимо да смо тиме доказали да је исказ "Ако је A Истинозборац, онда је p тачно." истинит. Међутим, како је A баш ово изјавио, закључујемо да је говорио истину, тј. да је Истинозборац, па је према првом пасусу и p тачно. $\dashv$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Странац долази на острво, среће особе A и B и нешто их пита. Особа A одговара: "Ја и B смо 'истог типа', тј. или смо обоје Истинозборци или смо обоје Лажови". Шта је странац могао да закључи о особама A и B.

Решење. Ако је A Истинозборац, он је рекао истину, па закључујемо да је и B Истинозборац. Ако је A Лажов, он је слагао, па опет закључујемо да је B Истинозборац.

Дакле, можемо да закључимо да је B Истинозборац, али приметите да не можемо да закључимо да ли је A Истинозборац или Лажов. $\dashv$

У вези са овим задатком имамо следећу теорему.

Теорема. Означимо са p било који исказ. Нека особа A каже: "Ја сам Истинозборац ако и само ако је p тачно." (ово значи да су искази "Ја сам Истинозборац" и "П је тачно" имају исту истинитосну вредност). Тада p јесте тачно, а не можемо да закључимо да ли је A Истинозборац или Лажов.

Доказ. Ако је A Истинозборац, он је рекао истину, па је p тачно. Ако је A Лажов, он је слагао, па опет закључујемо да је p тачно. Дакле, у сваком случају p јесте тачно. $\dashv$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Странац долази на острво, среће особе A, B и C и пита их нешто. A одговара "B и C су Истинозборци.", а B одговара "A је Лажов, а C је Истинозборац.". Шта је странац могао да зкључи о A, B и C.

Решење. Ако је A Истинозборац, тада је његова изјава тачна, па су и B и C Истинозборци. Међутим, како је B Истинозборац, онда је и његова изјава тачна, специјално A је Лажов. Како ово није могуће, закључујемо да је A Лажов.

Дакле, A је слагао, па закључујемо да нису обоје B и C Истинозборци, тј. међу њима је бар један Лажов.

Ако је B Истинозборац, тада је он рекао истину, па је специјално C Истинозборац. Но то није могуће, јер смо већ закључили да међу њима мора бити бар један Лажов. Дакле, B је Лажов.

Како је B слагао, тада имамо да "A је Лажов и C је Истинозборац" не важи, па како A јесте Лажов, закључујемо да и C мора бити.

Дакле, A, B и C су Лажови. $\dashv$

1.2 Исказна формуле

Исказни језик чине следећи симболи:

1. везници: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar$;
2. скуп исказних слова P (ако се не каже другачије, претпостављамо да је P пребројив; исказна слова обично означавамо са $p, q, r, s, \ldots, p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$);
3. помоћни симболи: ( ).

Исказна формула се гради на следећи начин:

1. исказно слово је исказна формула;
2. ако су F и G исказне формуле, тада су и $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, $(F \Leftrightarrow G)$, $(F \veebar G)$ исказне формуле;
3. свака исказна формула се добија коначном применом корака 1. и 2.

Скуп изказних формула означавамо са For.

1.3 Валуације, тачност исказне формуле и таутологије

Са 2 означавамо скуп $\{0, 1\}$.

Валуација је било које пресликавање $v : P \longrightarrow 2$. Дакле, то је пресликавање које сваком исказном слову додељује вредност 0 (тада кажемо да је то слово у валуацији v нетачно) или 1 (тада кажемо да је то слово у валуацији v тачно).

Проширење валуације Фиксирана валуација v се шири до пресликавања $\hat{v} : \mathsf{For} \longrightarrow 2$ по следећим правилима:

Исказно слово $\hat{v}(p) = v(p)$, за све $p \in P$;

Негација Ако смо већ израчунали вредност формуле A при валуацији v, тада вредност формуле $\neg A$ при валуацији v рачунамо по следећој таблици:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Дакле, кажемо да је формула $\neg A$ тачна при валуацији v ако и само ако је A нетачна при валуацији v. Формулу $\neg A$ читамо "не A".

Коњункција Ако смо већ израчунали вредност формула A и B при валуацији v, тада вредност формуле $A \wedge B$ при валуацији v рачунамо по следећој таблици:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дакле, кажемо да је формула $A \wedge B$ тачна при валуацији v ако и само ако су обе формуле A и B тачне при валуацији v. Формулу $A \wedge B$ читамо "A и B".

Дисјункција Ако смо већ израчунали вредност формула A и B при валуацији v, тада вредност формуле $A \vee B$ при валуацији v рачунамо по следећој таблици:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дакле, кажемо да је формула $A \vee B$ тачна при валуацији v ако и само ако је бар једна од формула A и B тачна при валуацији v. Формулу $A \vee B$ читамо "A или B".

Импликација Ако смо већ израчунали вредност формула A и B при валуацији v, тада вредност формуле $A \Rightarrow B$ при валуацији v рачунамо по следећој таблици:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Дакле, кажемо да је формула $A \Rightarrow B$ нетачна при валуацији v ако и само ако је A тачна и B нетачна при валуацији v. Формулу $A \Rightarrow B$ читамо "A повлачи B" или "ако A, онда B" или "из A, следи B".

Еквиваленција Ако смо већ израчунали вредност формула A и B при валуацији v, тада вредност формуле $A \Leftrightarrow B$ при валуацији v рачунамо по следећој таблици:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дакле, кажемо да је формула $A \Leftrightarrow B$ тачна при валуацији v ако и само ако су A и B једнаке тачности при валуацији v. Формулу $A \Leftrightarrow B$ читамо "A еквивалентно B" или "A ако и само ако B".

Ексклузивна дисјункција Ако смо већ израчунали вредност формула A и B при валуацији v, тада вредност формуле $A \veebar B$ при валуацији v рачунамо по следећој таблици:

A	B	$A \veebar B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Дакле, кажемо да је формула $A \veebar B$ тачна при валуацији v ако и само ако су A и B различите тачности при валуацији v, тј. ако и само ако је тачно једна од формула A и B тачна при валуацији v. Формулу $A \veebar B$ читамо "A ексклузивно или B" или "или A или B".

Овако дефинисано проширење валуације v, $\hat{v} : \mathsf{For} \longrightarrow 2$, се зове интерпретација формула при валуацији v.

6. Израчунати вредности датих формула у свим валуацијама.

1) $(p \Leftrightarrow (q \wedge p)) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$;

2) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$;

3) $(p \wedge (q \Rightarrow r)) \wedge (r \wedge \neg p)$.

Решење. Прве две формуле имају два слова, а трећа има три, па нас у прва два случаја занимају четири различите валуације, а у трећем осам различитих валуација. Вредност формула у валуацијама одједном рачунамо у таблицама.

1)

p	q	$q \wedge p$	$A = p \Leftrightarrow (q \wedge p)$	$\neg p$	$B = \neg p \Rightarrow q$	$A \Rightarrow B$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Дакле, формула је нетачна једино у валуацији у којој су оба слова p и q нетачна. У свим осталим валуацијама је тачна.

2)

p	q	$A = p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$B = \neg q \Rightarrow \neg p$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

Дакле, формула је тачна у свим валуацијама слова.

3)

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$A = p \wedge (q \Rightarrow r)$	$\neg p$	$B = r \wedge \neg p$	$A \wedge B$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Дакле, формула је нетачна у свим валуацијама. ⊣

Таутологије и контрадикције Кажемо да је формула таутологија, ако је тачна при свим валуацијама слова. Кажемо да је формула контрадикција, ако је нетачна при свим валуацијама слова.

Формула 2) из претходног задатка је таутологија, формула 3) из претходног задатака је контрадикција.

7. Доказати да су следеће формуле таутологије:

1) $p \Rightarrow p$ и $p \vee \neg p$;

2) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$;

3) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ и $(p \vee p) \Leftrightarrow p$;

4) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$;

5) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;

6) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$;

7) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p$;

8) $((\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow p$;

9) $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$;

10) $((p \vee q) \wedge ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))) \Rightarrow r$;

11) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$;

12) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$;

13) $(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$;

14) $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$;

15) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$;

16) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$;

17) $(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$;

18) $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$;

19) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$;

20) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$;

21) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;

22) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;

23) $(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$.

Решење. Вежба. ⊣

8. Испитати да ли су следеће формуле таутологије:

1. $\neg(p \Rightarrow \neg p)$;
2. $\neg(p \Leftrightarrow \neg p)$;
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;
4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$;
5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$;
6. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$;
7. $\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;
8. $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg \vee \neg q)$;

9. $(q \Leftrightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r))$;

10. $(p \Leftrightarrow (p \wedge q)) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow (p \vee q))$.

Решење. Вежба. $\dashv$

1.4 Острво Истинозбораца и Лажова (2)

Претпоставимо да смо на острву Истинозбораца и Лажова. Ако је A становник острва, означимо са a исказ: "A је Истинозборац." Тиме смо сваком становнику острва доделили једно исказно слово. Чињеница да је сваки становник острва или Истинозборац или Лажов одређује једну валуацију на овим словима: ако је A Истинозборац, тада је слову a доделимо вредност тачно, а ако је A Лажов, тада слову a доделимо вредност нетачно.

Теорема. Нека је A становник острва, a је исказ "A је Истинозборац." и нека је p било који исказ. Познато је да је A изјавио: "p је тачно." Тада је исказ $a \Leftrightarrow p$ тачан.

Доказ. Ако је A Истинозборац, он говори истину, па закључујемо да је исказ p тачан. Према томе имамо да је $a = p = 1$, одакле је $a \Leftrightarrow p = 1$.

Ако је A Лажов, знамо да он лаже, па закључујемо да је исказ p нетачан. Према томе имамо да је $a = p = 0$, одакле је опет $a \Leftrightarrow p = 1$.

У сваком случају је $a \Leftrightarrow p = 1$. $\dashv$

Вратимо се сада на задатке из првог одељка.

9. Странац долази на острво, среће особе A и B и поставља им питање: "Ко је од вас Истинозборац, а ко Лажов?". Особа A одговара: "Обоје смо Лажови.". Шта странац може да закључи о особама A и B.

Решење. Ако са a означимо исказ "A је Истинозборац.", а са b исказ "B је Истинозборац.", тада видимо да је A заправо изјавио: $\neg a \wedge \neg b$. Према теореми закључујемо да је $a \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b) = 1$.

Записимо таблицу формуле $a \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$:

a	b	a	$\Leftrightarrow$	$(\neg a$	$\wedge$	$\neg b)$
0	0		0	1	1	1
0	1		1	1	0	0
1	0		0	0	0	1
1	1		0	0	0	0

Из таблице видимо да је $a \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b) = 1$ акко $a = 0$ и $b = 1$, па закључујемо да је A Лажов, а B Истинозборац. $\dashv$

10. Странац долази на острво, среће особе A и B и пита их: "Да ли сте обоје Лажови?". Особа A одговара: "Бар једно од нас јесте." Шта странац може да закључи о особама A и B.

Решење. Ако са a означимо исказ "A је Истинозборац.", а са b исказ "B је Истинозборац.", тада видимо да је A заправо изјавио: $\neg a \vee \neg b$. Према теореми закључујемо да је $a \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b) = 1$.

Записимо таблицу формуле $a \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$:

a	b	a	$\Leftrightarrow$	$(\neg a$	$\vee$	$\neg b)$
0	0		0	1	1	1
0	1		0	1	1	0
1	0		1	0	1	1
1	1		0	0	0	0

Из таблице видимо да је $a \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b) = 1$ акко $a = 1$ и $b = 0$, па закључујемо да је A Истинозборац, а B Лажов. $\dashv$

11. Странац долази на острво, среће особе A и B и нешто их пита. Особа A одговара: "Ако сам ја Истинозборац, онда је и B Истинозборац". Шта странац може да закључи о A и B.

Решење. Ако са a означимо исказ "A је Истинозборац.", а са b исказ "B је Истинозборац.", тада видимо да је A заправо изјавио: $a \Rightarrow b$. Према теореми закључујемо да је $a \Leftrightarrow (a \Rightarrow b) = 1$.

Записимо таблицу формуле $a \Leftrightarrow (a \Rightarrow b)$:

a	b	a	$\Leftrightarrow$	$(a$	$\Rightarrow$	$b)$
0	0		0		1	
0	1		0		1	
1	0		0		0	
1	1		1		1	

Из таблице видимо да је $a \Leftrightarrow (a \Rightarrow b) = 1$ акко $a = 1$ и $b = 1$, па закључујемо да су и A и B Истинозборци. $\dashv$

12. Странац долази на острво, среће особе A и B и нешто их пита. Особа A одговара: "Ја и B смо 'истог типа', тј. или смо обоје Истинозборци или смо обоје Лажови". Шта је странац могао да закључи о особама A и B.

Решење. Ако са a означимо исказ "A је Истинозборац.", а са b исказ "B је Истинозборац.", тада видимо да је A заправо изјавио: $a \Leftrightarrow b$. Према теореми закључујемо да је $a \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow b) = 1$.

Записимо таблицу формуле $a \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow b)$:

a	b	a	$\Leftrightarrow$	$(a$	$\Leftrightarrow$	$b)$
0	0		0		1	
0	1		1		0	
1	0		0		0	
1	1		1		1	

Из таблице видимо да је $a \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow b) = 1$ акко $a = 0$ и $b = 1$, или $a = 1$ и $b = 1$. Дакле са сигурношћу можемо да закључумо да је B Истинозборац, док без додатних информација не можемо да кажемо да ли је A Истинозборац или Лажов. $\dashv$

13. Странац долази на острво, среће особе A, B и C и пита их нешто. A одговара "B и C су Истинозборци.", а B одговара "A је Лажов, а C је Истинозборац.". Шта је странац могао да зкључи о A, B и C.

Решење. Ако са a означимо исказ "A је Истинозборац.", са b исказ "B је Истинозборац.", а са c исказ "C је Истинозборац.", тада видимо да је A заправо изјавио: $b \wedge c$, а B је изјавио: $\neg a \wedge c$. Према теореми закључујемо да је $a \Leftrightarrow (b \wedge c) = 1$ и $b \Leftrightarrow (\neg a \wedge c) = 1$. Одатле је $(a \Leftrightarrow (b \wedge c)) \wedge (b \Leftrightarrow (\neg a \wedge c)) = 1$.

Записимо таблицу формуле $(a \Leftrightarrow (b \wedge c)) \wedge (b \Leftrightarrow (\neg a \wedge c))$:

a	b	c	$(a$	$\Leftrightarrow$	$(b$	$\wedge$	$c))$	$\wedge$	$(b$	$\Leftrightarrow$	$(\neg a$	$\wedge$	$c))$
0	0	0		1		0		1		1	1	0	
0	0	1		1		0		0		0	1	1	
0	1	0		1		0		0		0	1	0	
0	1	1		0		1		0		1	1	1	
1	0	0		0		0		0		1	0	0	
1	0	1		0		0		0		1	0	0	
1	1	0		0		0		0		0	0	0	
1	1	1		1		1		0		0	0	0	

Из таблице видимо да је $(a \Leftrightarrow (b \wedge c)) \wedge (b \Leftrightarrow (\neg a \wedge c)) = 1$ акко $a = b = c = 0$, одакле закључујемо да су A, B, C Лажови. $\dashv$

14. Особе A, B, C дају следеће изјаве:

A : Тачно једно од нас је Лажов.

B : Тачно двоје од нас су Лажови.

C : Сво троје смо Лажови.

Шта можемо да закључимо.

Решење. Слова a, b, c имају уобичајено значење. Приметимо да је C изјавио: $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c$, одакле закључујемо:

$$c \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) = 1. \qquad (*).$$

Реченица: "Само A је Лажов" се записује као: $\neg a \wedge b \wedge c$, и слично реченице "Само B је Лажов" и "Само C је Лажов" се записују као: $a \wedge \neg b \wedge c$ и $a \wedge b \wedge \neg c$. Посматрајмо формулу $(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$. Она је тачна акко је бар један дисјункт тачан. Међутим приметимо да више од једног дисјунктна у тој формули не могу бити тачни: нпр. прва два не могу заједно бити тачни, јер први повлачи $a = 0$, а други $a = 1$. Према томе, дата формула је тачна акко је тачно један њен дисјункт тачан, па она говори: "Тачно један од A, B, C је Лажов". Како је то изјавио A, закључујемо:

$$a \Leftrightarrow ((\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)) = 1. \qquad (\#)$$

Слично претходном пасусу закључујемо:

$$b \Leftrightarrow ((\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)) = 1. \qquad (\$)$$

<u>1. случај</u>: Ако је $c = 1$, тада из $(*)$ имамо $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c = 1$, па је специјално $c = 0$, што је контрадикција.

<u>2. случај</u>: Ако је $c = 0$, из $(*)$ имамо $\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c = 0$. Како је $\neg c = 1$, закључујемо да је $\neg a \wedge \neg b = 0$, одакле је бар једно од $\neg a, \neg b$ нетачно, тј. бар једно од a, b је тачно.

Приметимо да је $(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) = (\neg a \wedge b \wedge 0) \vee (a \wedge \neg b \wedge 0) \vee (a \wedge b \wedge 1) = 0 \vee 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$, па $(\#)$ постаје:

$$a \Leftrightarrow (a \wedge b) = 1. \qquad (\#)$$

Слично, $(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) = (\neg a \wedge \neg b \wedge 0) \vee (\neg a \wedge b \wedge 1) \vee (a \wedge \neg b \wedge 1) = 0 \vee (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) = (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$, па $(\$)$ постаје:

$$b \Leftrightarrow ((\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)). \qquad (\$)$$

1. подслучај: Ако је $a = 1$, тада из (#) имамо $a \wedge b = 1$, па је $b = 1$. Онда је из ($) $(\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) = 1$, што заменом $a = b = 1$ видимо да није могуће.

2. подслучај: Ако је $a = 0$, тада је $b = 1$ (јер смо закључили да је бар једно од a, b тачно). Потребно је још проверити да ли је $a = 0, b = 1, c = 0$ сагласно са формулама (#), ($). Директним рачуном се види да јесте.

Дакле, добили смо да је $a = 0, b = 1, c = 0$ једино решење проблема, што значи да су A и C Лажови, док је B Истинозборац. $\dashv$

15. Становнику A је постављено неко питање. Постоје две верзије шта је A одговорио:

1) По првој верзији A је дао две изјаве: "На острву има злата." и "Ако на острву има злата, онда има и сребра.".

2) По другој верзији A је изјавио: "На острву има злата, и ако на острву има злата, онда на острву има и сребра.".

Шта можемо закључити у оба случаја?

Решење. Са a уобичајено означавамо исказ "A је Истинозборац.". Са z ћемо означити исказ: "На острву има злата.", а са s ћемо означити исказ: "На острву има сребра.".

1) У првој верзији A је дао изјаве: z и $z \Rightarrow s$, па закључујемо:

$$a \Leftrightarrow z = 1 \qquad (*)$$

$$a \Leftrightarrow (z \Rightarrow s) = 1 \qquad (\#)$$

1. случај: Ако је $a = 0$, из $(*)$ имамо да је $z = 0$. Тада је $z \Rightarrow s = 0 \Rightarrow z = 1$, што је у контрадикцији са $a = 0$ и (#).

2. случај: Ако је $a = 1$, из $(*)$ имамо да је $z = 1$, а из (#) имамо да је $z \Rightarrow s = 1$. Из $z = 1, z \Rightarrow s = 1$ закључујемо $s = 1$.

Дакле, имамо једно решење, $a = z = s = 1$, тј. A је Истинозборац и на острву има и злата и сребра.

2) У другој верзији A је дао изјаву: $z \wedge (z \Rightarrow s)$, па закључујемо:

$$a \Leftrightarrow (z \wedge (z \Rightarrow s)) = 1. \qquad (\$)$$

1. случај: Ако је $a = 0$, из ($) имамо $z \wedge (z \Rightarrow s) = 0$, одакле је $z = 0$ или $z \Rightarrow s = 0$. Ако је $z = 0$ имамо два решења: $(a, z, s) = (0, 0, 0)$ и $(a, z, s) = (0, 0, 1)$. Ако је $z \Rightarrow s = 0$ имамо још једно решење: $(a, z, s) = (0, 1, 0)$.

2. случај: Ако је $a = 1$, из ($) имамо $z \wedge (z \Rightarrow s) = 1$, одакле је $z = 1$ и $z \Rightarrow s = 1$, па је коначни и $s = 1$. Према томе имамо решење: $(a, z, s) = (1, 1, 1)$.

Дакле, имамо четири решења и видимо да не можемо ништа засигурно да закључимо. $\dashv$

16. Особе A и B су сведоци на суђењу. Према различитим верзијама дали су следеће изјаве:

1) A: "Ако смо и B и ја Лажови, тада је оптужени крив."
B: "A је Лажов."

2) A: "Ако је B Истинозборац, онда је оптужени невин."
B: "Ако је A Лажов, онда је оптужени невин."

3) A: "Ако је неко од нас двоје Истинозборац, онда је оптужени крив."
B: "Ако је неко од нас двоје Лажов, онда је оптужени крив."

4) A: "Ако сам ја Истинозборац а B Лажов, онда је оптужени крив."
B: "A лаже."

Шта можемо да закључимо.

Решење. Нека слова a, b имају уобичајено значење, а са k означимо исказ: "Оптужени је крив.".

1) У првом случају имамо:

$$a \Leftrightarrow ((\neg a \wedge \neg b) \Rightarrow k) = 1, \qquad (*)$$

$$b \Leftrightarrow \neg a = 1. \qquad (\#)$$

1. случај: Ако је $b = 1$, из $(\#)$ имамо $a = 0$. Тада је $\neg a \wedge \neg b = 0$, па је $(\neg a \wedge \neg b) \Rightarrow k = 1$, и из $(*)$ је $a = 1$. Контрадикција.

2. случај: Ако је $b = 0$, из $(\#)$ имамо $a = 1$. Тада је $\neg a \wedge \neg b = 0$, па је $(\neg a \wedge \neg b) \Rightarrow k = 1$, што сагласно са $(*)$. Приметимо да не можемо да израчунамо k.

Дакле, можемо да закључимо да је A Истинозборац и B Лажов, док не можемо да закључимо да ли је оптужени крив или не.

2) У другом случају имамо:

$$a \Leftrightarrow (b \Rightarrow \neg k) = 1, \qquad (*)$$

$$b \Leftrightarrow (\neg a \Rightarrow \neg k) = 1. \qquad (\#)$$

1. случај: Ако је $a = 0$, из $(*)$ имамо $b \Rightarrow \neg k = 0$, па је $b = 1$ и $k = 1$. Како је сада $\neg a \Rightarrow \neg k = 1 \Rightarrow 0 = 0$, ово није сагласно са $(\#)$. Контрадикција.

2. случај: Ако је $a = 1$, из $(*)$ имамо $b \Rightarrow \neg k = 1$. Како је $\neg a \Rightarrow \neg k = 0 \Rightarrow \neg k = 1$, из $(\#)$ имамо $b = 1$. Из $b = 1$ и $b \Rightarrow \neg k = 1$ закључујемо да је $k = 0$. Према томе $(a, b, k) = (1, 1, 0)$ је решење.

Дакле, можемо да закључимо да су A и B Истинозборци и да је оптужени невин.

3) У трећем случају имамо:

$$a \Leftrightarrow ((a \vee b) \Rightarrow k) = 1, \qquad (*)$$

$$b \Leftrightarrow ((\neg a \vee \neg b) \Rightarrow k) = 1. \qquad (\#)$$

1. случај: Ако је $a = 0$, из $(*)$ имамо $(a \vee b) \Rightarrow k = 0$. Одавде је $a \vee b = 1$ и $k = 0$. Из $a = 0$ и $a \vee b = 1$ закључујемо $b = 1$. Сада је $(\neg a \vee \neg b) \Rightarrow k = (1 \vee 0) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$, што према $(\#)$ није сагласно са $b = 1$. Контрадикција.

2. случај: Ако је $a = 1$, из $(*)$ имамо $(a \vee b) \Rightarrow k = 1$. Како је $a \vee b = 1$, закључујемо да је $k = 1$. Сада је $(\neg a \vee \neg b) \Rightarrow k = (\neg a \vee \neg b) \Rightarrow 1 = 1$, па је према $(\#)$ $b = 1$. Према томе решење је $(a, b, k) = (1, 1, 1)$.

Дакле, можемо да закључимо да су A и B Истинозборци и да је оптужени крив.

4) У четвртом случају имамо:

$$a \Leftrightarrow ((a \wedge \neg b) \Rightarrow k) = 1, \qquad (*)$$

$$b \Leftrightarrow \neg a = 1. \qquad (\#)$$

(Приметимо да је исказ "A лаже."еквивалентан исказу "A је Лажов.".)

1. случај: Ако је $b = 0$, према $(\#)$ је $a = 1$, па према $(*)$ имамо $(a \wedge \neg b) \Rightarrow k = 1$. Како је $a \wedge \neg b = 1 \wedge 1 = 1$, закљцухујемо да је $k = 1$. Дакле, $(a, b, k) = (1, 1, 1)$ је решење.

2. случај: Ако је $b = 1$, према $(\#)$ је $a = 0$, па према $(*)$ имамо $(a \wedge \neg b) \Rightarrow k = 0$. Како је $a \wedge \neg b = 0 \wedge 0 = 0$, то је контрадикција.

Дакле, можемо да закључимо да су A и B Истинозборци и да је оптужени крив. $\dashv$

$\boxed{\textbf{17.}}$ Странац среће A, B и C. A и C изјављују:

A: B је изјавио да је неко од нас троје Лажов.

C: B је Истинозборац.

Шта можемо да закључимо.

Решење. Из поставке закључујемо да:

$$a \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)) = 1, \qquad (*)$$

$$c \Leftrightarrow b = 1 \qquad (\#)$$

1. случај: Ако је $c = 1$, тада из (#) имамо $b = 1$. Тада је $\neg a \vee \neg b \vee \neg c = \neg a \vee 0 \vee 0 = \neg a$, па је $b \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) = b \Leftrightarrow \neg a = 1 \Leftrightarrow \neg a = \neg a$. Према $(*)$ имамо $a \Leftrightarrow \neg a = 1$, што није могуће.

2. случај: Ако је $c = 0$, тада из (#) имамо $b = 0$. Тада је $\neg a \vee \neg b \vee \neg c = \neg a \vee 1 \vee 1 = 1$, па је $b \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$. Из $(*)$ онда имамо $a = 0$. Према томе, решење је $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Дакле, A, B, C су сви Лажови. $\dashv$

$\boxed{\textbf{18.}}$ Странац среће A, B, C, D и E, и добија следеће изјаве:

A: Ако је B Истинозборац, онда је и C Истинозборац.

B: E је Лажов.

C: D је изјавио да је E Лажов.

D: A и E су Истинозборци.

Шта можемо да закључимо.

Решење. Из поставке закључујемо да:

$$a \Leftrightarrow (b \Rightarrow c), \qquad (*)$$

$$b \Leftrightarrow \neg e \qquad (\#),$$

$$c \Leftrightarrow (d \Leftrightarrow \neg e), \qquad (\$)$$

$$d \Leftrightarrow (a \wedge e). \qquad (€)$$

1. случај: Ако је $b = 0$, тада из (#) имамо $e = 1$. Тада је $b \Rightarrow c = 0 \Rightarrow c = 1$, па из $(*)$ имамо $a = 1$. Како је $a \wedge e = 1 \wedge 1 = 1$, из (€) закључујемо $d = 1$. Коначно $d \Leftrightarrow \neg e = 1 \Leftrightarrow 0 = 0$, па је из (\$) $c = 0$. Према томе решење је $(a, b, c, d, e) = (1, 0, 0, 1, 1)$.

2. случај: Ако је $b = 1$, тада из (#) имамо $e = 0$. тада је $a \wedge e = a \wedge 0 = 0$, па из (€) закључујемо $d = 0$. Сада је $d \Leftrightarrow \neg e = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, одакле је према (\$) $c = 0$. Коначно је $b \Rightarrow c = 1 \Rightarrow 0 = 0$, па је из $(*)$ $a = 0$. ПРема томе, решење је $(a, b, c, d, e) = (0, 1, 0, 0, 0)$.

Дакле, имамо два решење. Оно што сигурно можемо да закључимо је да је C Лажов. $\dashv$

1.5 Планета Марс

На планети Марс живе две расе Марсоваца: зелена и плава, и два пола: мушки и женски. Сваки Марсовац је или зелен или плав, и сваки Марсовац је или мушкарац или жена. Странац на Марсу не уме да препозна разлику између мушкарца и жене, као ни разлику између зелене и плаве расе. Познато је да зелени мушкарци и плаве жене увек говоре истину, док зелене жене и плави мушкарци увек лажу.

Ако је A Марсовац, означимо са m_A исказ: "A је мушко.", а са z_A исказ "A је зелен.". Тиме смо сваком Марсовцу доделили два исказна слова. Чињеница да је сваки Марсовац или мушко или женско, тј. или зелен или плав, одређује једну валуацију на овим словима: ако је A зелени мушкарац, тада је слову m_A додељена вредност тачно и слову z_A додељена вредност тачно; ако је A зелена жена, тада је слову m_A додељена вредност нетачно и слову z_A додељена вредност тачно; ако је A плави мушкарац, тада је слову m_A додељена вредност тачно и слову z_A додељена вредност нетачно; ако је A плава жена, тада је слову m_A додељена вредност нетачно и слову z_A додељена вредност нетачно.

Према томе Марс је једна валуација на словима m_A, z_A, где је A произвољан Марсовац.

Теорема. Ако је Марсовац A дао изјаву "p је тачно.", тада је $(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow p$ тачно.

Доказ. Ако је $m_A \Leftrightarrow z_A$ тачно, тада је A зелени мушкарац или плава жена. У оба случаја A говори истину, па је p тачно. Дакле и $(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow p$ је тачно, јер су и $m_A \Leftrightarrow z_A$ и p тачни.

Ако је $m_A \Leftrightarrow z_A$ нетачно, тада је A плави мушкарац или зелена жена. У оба случаја A лаже, па је p нетачно. Али и сада је $(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow p$ тачно, јер су и $m_A \Leftrightarrow z_A$ и p нетачни. $\dashv$

$\boxed{\textbf{19.}}$ Странац среће два Марсовца A и B. Постоје две верзије догађаја.

1) A је дао две изјаве: "B је зелен." и "Ја сам женско.".

2) A је дао једну изјаву: "B је зелен, а ја сам женско.".

Да ли у оба случаја странац долази до истог закључка?

Решење. 1) Из поставке имамо да је:

$$(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow z_B = 1, \qquad (*)$$
$$(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow \neg m_A = 1. \qquad (\#)$$

<ins>1. случај</ins>: Ако је $m_A = 0$, тада је $m_A \Leftrightarrow z_A = \neg z_A$, па $(*)$ постаје $\neg z_A \Leftrightarrow z_B = 1$, а из $(\#)$ имамо $\neg z_A \Leftrightarrow 1 = 1$, тј. $z_A = 0$. Сада је и $z_B = 1$. Дакле, A је плава жена, а о B-у знамо само да је зелен.

<ins>2. случај</ins>: Ако је $m_A = 1$, тада је $m_A \Leftrightarrow z_A = z_A$, па $(*)$ постаје $z_A \Leftrightarrow z_B = 1$, а из $(\#)$ имамо $z_A \Leftrightarrow 0 = 1$, тј. $z_A = 0$. Сада је и $z_B = 0$. Дакле, A је плави мушкарац, а о B-у знамо само да је плав.

Према томе, једино што са сигурношћу можемо рећи је да је A плав.

2) Из поставке имамо да је:

$$(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow (z_B \wedge \neg m_A) = 1. \qquad (*)$$

<ins>1. случај</ins>: Ако је $m_A = 0$, тада је $m_A \Leftrightarrow z_A = \neg z_A$ и $z_B \wedge \neg m_A = z_B$, па према томе из $(*)$ можемо закључити да је $\neg z_A \Leftrightarrow z_B = 1$. Дакле, ако је A жена, онда можемо да закључимо само да су A и B различите расе.

<ins>2. случај</ins>: Ако је $m_A = 1$, тада је $m_A \Leftrightarrow z_A = z_A$ и $z_B \wedge \neg m_A = 0$, па према томе из $(*)$ можемо закључити да је $z_A \Leftrightarrow 0 = 1$, тј. $z_A = 0$. Дакле, A је плави мушкарац, а о B-у не можемо рећи ништа.

Приметите да из дате изјаве особе A не можемо ништа са сигурношћу закључити. $\dashv$

20. Странац среће два Марсовца A и B и они дају следеће изјаве:

1) A: "Обоје смо плави." B: "То није истина."

2) A: "B је зелен." B: "Обоје смо зелени."

Шта је странац могао да закључи?

Решење. 1) Према поставци задатка имамо:

$$(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow (\neg z_A \wedge \neg z_B) = 1, \qquad (*)$$

$$(m_B \Leftrightarrow z_B) \Leftrightarrow \neg(m_A \Leftrightarrow z_A) = 1, \qquad (\#)$$

где смо (#) добили из B-ове изјаве, јер је она еквивалентна са чињеницом да A лаже, тј. да није зелени мушкарац или плава жена.

1. случај: Ако је $z_A = 0$, тада је $m_A \Leftrightarrow z_A = \neg m_A$, и $\neg z_A \wedge \neg z_B = \neg z_B$, па $(*)$ и (#) постају:

$$\neg m_A \Leftrightarrow \neg z_B = 1, \qquad (*_1)$$

$$(m_B \Leftrightarrow z_B) \Leftrightarrow m_A = 1. \qquad (\#_1)$$

Из $(*_1)$ имамо $m_A \Leftrightarrow z_B = 1$, а због асоцијативности еквиваленције из $(\#_1)$ добијамо $m_B \Leftrightarrow (z_B \Leftrightarrow m_A) = 1$, одакле је $m_B = 1$. Приметимо да ништа више не можемо закључити, тј. решења у овом случају су $(m_A, z_A, m_B, z_B) \in \{(0,0,1,0), (1,0,1,1)\}$.

2. случај: Ако је $z_A = 1$, тада је $m_A \Leftrightarrow z_A = m_A$, и $\neg z_A \wedge \neg z_B = 0$, па $(*)$ и (#) постају:

$$m_A \Leftrightarrow 0 = 1, \qquad (*_2)$$

$$(m_B \Leftrightarrow z_B) \Leftrightarrow \neg m_A = 1. \qquad (\#_2)$$

Из $(*_2)$ имамо $m_A = 0$, па из $(\#_2)$ добијамо $m_B \Leftrightarrow z_B = 1$. Приметимо да ништа више не можемо закључити, тј. решења у овом случају су $(m_A, z_A, m_B, z_B) \in \{(0,1,0,0), (0,1,1,1)\}$.

Дакле, имамо четири решења, али видимо да ништа са сигурношћу не можемо рећи.

2) Према поставци задатка имамо:

$$(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow z_B = 1, \qquad (*)$$

$$(m_B \Leftrightarrow z_B) \Leftrightarrow (z_A \wedge z_B) = 1. \qquad (\#)$$

1. случај: Ако је $z_B = 0$, тада је из $(*)$ $m_A \Leftrightarrow z_A = 0$, а из (#) $m_B = 1$ (јер $m_B \Leftrightarrow z_B = \neg m_B$, а $z_A \wedge z_B = 0$). Приметимо да нам ово каже да је B плави мушкарац, док о A-у можемо само рећи да лаже. Тачније имамо два решења: $(m_A, z_A, m_B, z_B) \in \{(0,1,1,0), (1,0,1,0)\}$.

2. случај: Ако је $z_B = 1$, тада је из $(*)$ $m_A \Leftrightarrow z_A = 1$, а из (#) $m_B \Leftrightarrow z_A = 1$ (јер $m_B \Leftrightarrow z_B = m_B$, а $z_A \wedge z_B = z_A$). Према томе m_A, z_A, m_B имају једнаке вредности. Имамо два решења: $(m_A, z_A, m_B, z_B) \in \{(0,0,0,1), (1,1,1,1)\}$.

Дакле, имамо четири решења, али видимо да ништа са сигурношћу не можемо рећи. $\dashv$

21. Странац испитује три Марсовца A, B и C. Знало се да је тачно један од њих лопов. A и B су дали по две изјаве:

A: "Лопов је мушко." и "Лопов је плав."

B: "A је женско." и "A је плав."

Из овога странац није могао да закључи које лопов, па је питао C да ли је он лопов. C му је одговорио и странац је закључио ко је лопов. Шта је C одговорио? И ко је лопов?

Решење. Означићемо са l_A, l_B, l_C редом исказе "A је лопов.", "B је лопов." и "C је лопов.". Према услову задатка тачно један од њих је лопов, тј. важи:

$$(l_A \wedge \neg l_B \wedge \neg l_C) \vee (\neg l_A \wedge l_B \wedge \neg l_C) \vee (\neg l_A \wedge \neg l_B \wedge l_C) = 1. \qquad (*)$$

Из изјава које је дао B имамо:

$$(m_B \Leftrightarrow z_B) \Leftrightarrow \neg m_A = 1, \qquad (\#)$$

$$(m_B \Leftrightarrow z_B) \Leftrightarrow \neg z_A = 1. \qquad (\$)$$

Треба да запишемо исказ "Лопов је мушко.". Тврдимо да је тај исказ еквивалентан са $(l_A \Rightarrow m_A) \wedge (l_B \Rightarrow m_B) \wedge (l_C \Rightarrow m_C) = 1$.

Претпоставимо да је лопов мушко. Према $(*)$ тачно једно од l_A, l_B, l_C је тачно, нпр. l_A, па како је лопов мушко, тачно је и m_A, одакле је тачна и импликација $l_A \Rightarrow m_A$. Импликације $l_B \Rightarrow m_B$ и $l_C \Rightarrow m_C$ су тачне јер $l_B = l_C = 0$. Према томе, тачна је и коњункција $(l_A \Rightarrow m_A) \wedge (l_B \Rightarrow m_B) \wedge (l_C \Rightarrow m_C)$.

Претпоставимо да је коњункција $(l_A \Rightarrow m_A) \wedge (l_B \Rightarrow m_B) \wedge (l_C \Rightarrow m_C)$ тачна. Тада су све импликације тачне, али према $(*)$ је и неки, нпр. l_A, тачан. Како је $l_A \Rightarrow m_A = 1$, то је и $m_A = 1$. Дакле, лопов је мушко.

Слично можемо записати исказ "Лопов је плав.", па из изјава које је дао A имамо:

$$(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow [(l_A \Rightarrow m_A) \wedge (l_B \Rightarrow m_B) \wedge (l_C \Rightarrow m_C)] = 1, \qquad (€)$$

$$(m_A \Leftrightarrow z_A) \Leftrightarrow [(l_A \Rightarrow \neg z_A) \wedge (l_B \Rightarrow \neg z_B) \wedge (l_C \Rightarrow \neg z_C)] = 1. \qquad (£)$$

Из $(\#)$ и $(\$)$ закључујемо да је $m_A \Leftrightarrow z_A = 1$, па (€) и (£) постају:

$$(l_A \Rightarrow m_A) \wedge (l_B \Rightarrow m_B) \wedge (l_C \Rightarrow m_C) = 1, \qquad (€_1)$$

$$(l_A \Rightarrow \neg z_A) \wedge (l_B \Rightarrow \neg z_B) \wedge (l_C \Rightarrow \neg z_C) = 1. \qquad (£_1)$$

Одатле имамо $l_A \Rightarrow m_A = 1$, $l_B \Rightarrow m_B = 1$, $l_C \Rightarrow m_C = 1$, $l_A \Rightarrow \neg z_A = 1$, $l_B \Rightarrow \neg z_B = 1$, $l_C \Rightarrow \neg z_C = 1$.

Из $l_A \Rightarrow m_A = 1$, $l_A \Rightarrow \neg z_A = 1$ и $m_A \Leftrightarrow z_A = 1$ закључујемо да је $l_A = 0$, тј. A сигурно није лопов.

Из задатих информација ништа више не можемо закључити. Странац је питао C да ли је он лопов, из из његовог одговора је закључио ко је лопов. C је могао да одговори "Да." или "Не.", па размотримо оба случаја.

<u>1. случај</u>: Претпоставимо да је C рекао "Не.", тј.

$$(m_C \Leftrightarrow z_C) \Leftrightarrow \neg l_C = 1.$$

Расмотрићемо подслучајеве: $l_C = 0$ и $l_C = 1$.

<u>1. подслучај</u>: Ако је $l_C = 0$, тада је из $(*)$ $l_B = 1$, одакле можемо израчунати $m_B = 1$, $z_B = 0$, па и $m_A = 1$, $z_A = 1$. Враћајући у поставку задатка можемо уверити да је овај подслучај сагласан, тј. могуће је да је B лопов.

<u>2. подслучај</u>: Ако је $l_C = 1$, тада је из $(*)$ $l_B = 0$, одакле можемо израчунати $m_C = 1$, $z_C = 0$. Враћајући у поставку задатка можемо уверити да је и овај подслучај сагласан, тј. могуће је да је C лопов.

Како знамо из задатка да је странац из C-овог одговора закључио ко је лопов, то закључујемо да се није десио овај случај, тј. C није одговорио "Не.".

<u>2. случај</u>: Дакле, знамо да је C рекао "Да.", тј.

$$(m_C \Leftrightarrow z_C) \Leftrightarrow l_C = 1.$$

Приметимо, ако је $l_C = 1$, тада је $m_C \Leftrightarrow z_C = 1$, што је у контрадикцији са $l_C \Rightarrow m_C = 1$ и $l_C \Rightarrow \neg z_C = 1$. Дакле, мора бити $l_C = 0$, па из $(*)$ имамо $l_B = 1$. Враћајући се у назад, добијамо $m_B = 1$, $z_B = 0$, и даље $m_A = 1$, $z_A = 1$. m_C и z_C не можемо израчунати, али знамо да мора бити $m_C \Leftrightarrow z_C = 0$.

Дакле, A је зелени мушкарац, B је плави мушкарац, C знамо само да лаже, и B је лопов. $\dashv$

1.6 Непознати искази

22. Коју изјаву треба да направи особа A са Острва Истинозбораца и Лажова, па да са сигурношћу можемо да кажемо:

1) да је A Истинозборац;

2) да је A Лажов;

3) да на острву има злата.

Решење. $\dashv$

23. Коју изјаву треба да направи Марсовац A па да са сигурношћу можемо да кажемо:

1) да је A мушкарац;

2) да је A зелен;

3) да је A зелени мушкарац;

4) да A није зелени мушкарац.

Решење. $\dashv$

24. Које изјаве треба да направе особе A и B са Острава Истинозбораца и Лажова, па да са сигурношћу можемо да закључимо да је особа C Истинозборац.

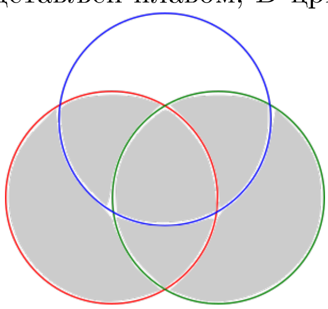
Решење. $\dashv$

2 Скупови

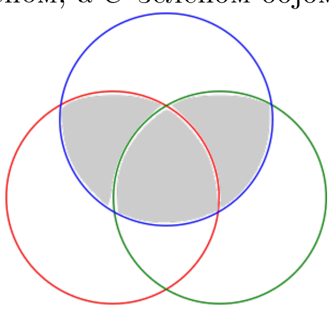
2.1 Скуповни идентитети

25. Доказати скуповни идентитет: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

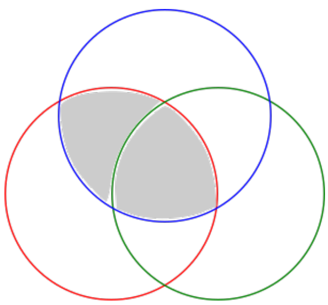
Решење. Пре него што докажемо дати идентитет по дефиницији, проверимо га на Веновом дијаграму (скуп A је представљен плавом, B црвеном, а C зеленом бојом):



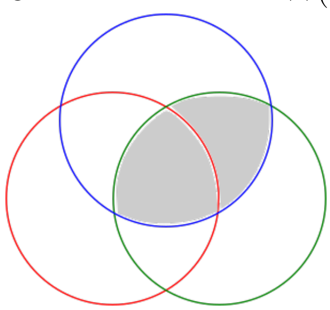
$B \cup C$



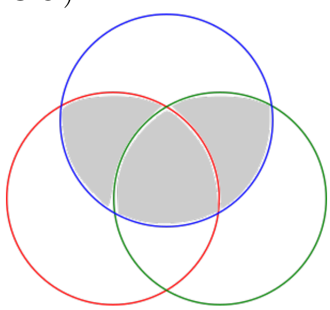
$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$



$A \cap C$

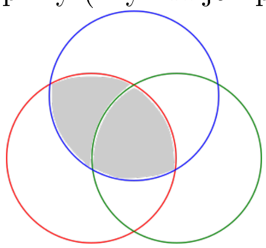


$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

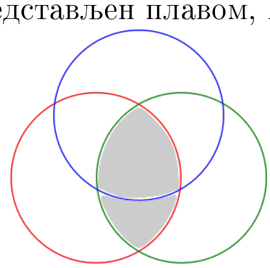
$\dashv$

26. Доказати скуповни идентитет: $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A) = (A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$.

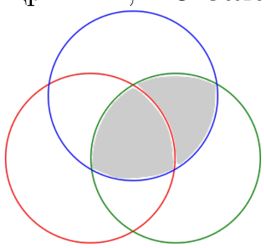
Решење. Пре него што докажемо дати идентитет по дефиницији, проверимо га на Веновом дијаграму (скуп A је представљен плавом, B црвеном, а C зеленом бојом):



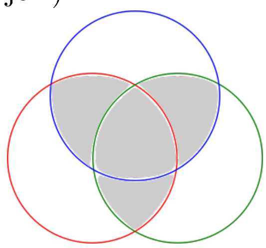
$A \cap B$



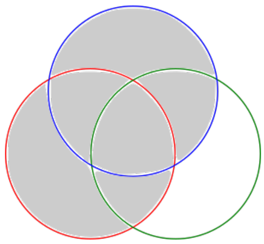
$B \cap C$



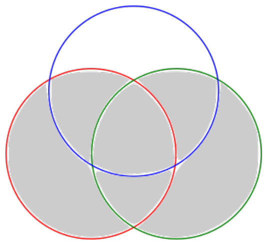
$C \cap A$



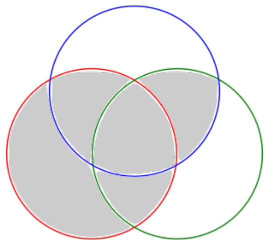
$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$



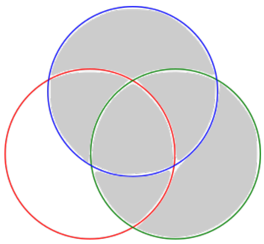
$A \cup B$



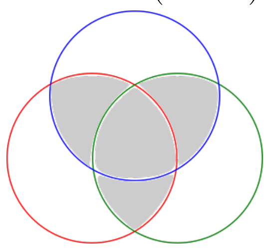
$B \cup C$



$(A \cup B) \cap (B \cup C)$



$C \cup A$

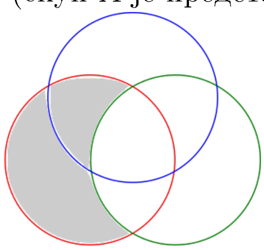


$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$

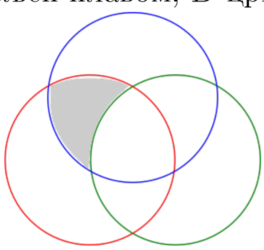
$\dashv$

27. Доказати скуповни идентитет: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

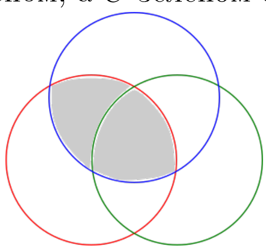
Решење. Пре него што докажемо дати идентитет по дефиницији, проверимо га на Веновом дијаграму (скуп A је представљен плавом, B црвеном, а C зеленом бојом):



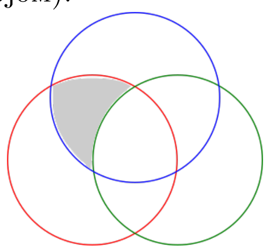
$B \setminus C$



$A \cap (B \setminus C)$



$A \cap B$



$(A \cap B) \setminus C$

$\dashv$

2.2 Директан производ скупова и партитивни скуп

2.3 Релације

Бинарна релација између A и B За било који подскуп $\rho \subseteq A \times B$ кажемо да је бинарна релација између скупа A и скупа B.

Бинарна релација на скупу A За било који подскуп $\rho \subseteq A \times A$ кажемо да је бинарна релација на скупу A.

Коментар Када кажемо релација, мислимо бинарна релација на неком скупу A, који је наглашен, или је јасан из контекста, или је произвољан. Ако посматрамо више релација, подразумевамо да су оне дате на истом скупу.

Нотација Ако је ρ релација, тада уместо $(x, y) \in \rho$ пишемо $x\ \rho\ y$. (Ово није ништа чудно, за релацију $\leq$ на скупу $\mathbb{R}$ пишемо $1 \leq 2$, а не $(1,2) \in \leq$.)

Скуповне операције Како су релације скупови, то су на уобичајен начин дефинисане скуповне операције на њима. Примера ради, ако су ρ, σ две релације, пресек и унија су дати са:

$$x\ \rho \cap \sigma\ y \quad \Leftrightarrow \quad x\ \rho\ y \quad \wedge \quad x\ \sigma\ y,$$

$$x\ \rho \cup \sigma\ y \quad \Leftrightarrow \quad x\ \rho\ y \quad \vee \quad x\ \sigma\ y.$$

Инверз Ако је ρ релација, њен инверз је релација $\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}$, тј. важи:

$$y\ \rho^{-1}\ x \quad \Leftrightarrow \quad x\ \rho\ y.$$

Комплемент Ако је ρ релација на A, њен комплемент је релација

$$\rho^c = \{(x, y) \in A \times A \mid (x, y) \notin \rho\} = (A \times A) \setminus \rho,$$

тј. за све $x, y \in A$ важи:

$$x\ \rho^c\ y \quad \Leftrightarrow \quad \neg\ x\ \rho\ y.$$

Композиција Ако су ρ, σ релације, тада је њихова композиција скуп

$$\rho \circ \sigma = \{(x, y) \mid \text{постоји } z \text{ тако да } (x, y) \in \rho,\ (z, y) \in \sigma\},$$

тј. важи:

$$x\ \rho \circ \sigma\ y \quad \Leftrightarrow \quad \text{постоји } z \text{ тако да} \quad x\ \rho\ z \quad \wedge \quad z\ \sigma\ y.$$

Дијагонала За скуп A, дијагонала на A је релација $\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$, тј. важи:

$$x\ \Delta_A\ y \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

$\boxed{\textbf{28.}}$ Доказати:

1) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;

2) $(\rho^c)^c = \rho$;

3) $(\rho^{-1})^c = (\rho^c)^{-1}$;

4) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$;

5) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$;

6) $\rho \circ \Delta_A = \Delta_A \circ \rho = \rho$.

Решење. 1) Имамо:

$$\begin{aligned} x\ (\rho^{-1})^{-1}\ y &\Leftrightarrow\ y\ \rho^{-1}\ x && \text{по дефиницији инверза} \\ &\Leftrightarrow\ x\ \rho\ y && \text{по дефиницији инверза} \end{aligned}$$

што доказује тражену једнакост.

2) Имамо:

$$\begin{aligned} x\ (\rho^c)^c\ y &\Leftrightarrow\ \neg\ x \rho^c\ y && \text{по дефиницији комплемента} \\ &\Leftrightarrow\ \neg\neg\ x\ \rho\ y && \text{по дефиницији комплемента} \\ &\Leftrightarrow\ x\ \rho\ y && \text{скидањем дупле негације} \end{aligned}$$

3) Имамо:

$$\begin{array}{rcll} x\ (\rho^{-1})^c\ y & \Leftrightarrow & \neg\ x\ \rho^{-1}\ y & \text{по дефиницији комплемента} \\ & \Leftrightarrow & \neg\ y\ \rho\ x & \text{по дефиницији инверза} \\ & \Leftrightarrow & y\ \rho^c\ x & \text{по дефиницији комплемента} \\ & \Leftrightarrow & x\ (\rho^c)^{-1}\ y & \text{по дефиницији инверза} \end{array}$$

4) Имамо:

$$\begin{array}{rcll} x\ (\rho\circ\sigma)^{-1}\ y & \Leftrightarrow & y\ \rho\circ\sigma\ x & \text{по дефиницији инверза} \\ & \Leftrightarrow & \text{постоји } z \text{ тд} \quad y\ \rho\ z\ \wedge\ z\ \sigma\ x & \text{по дефиницији композиције} \\ & \Leftrightarrow & \text{постоји } z \text{ тд} \quad z\ \rho^{-1}\ y\ \wedge\ x\ \sigma^{-1}\ z & \text{по дефиницији инверза} \\ & \Leftrightarrow & x\ \sigma^{-1}\circ\rho^{-1}\ y & \text{по дефиницији композиције} \end{array}$$

5) Имамо:

$$\begin{array}{rcll} x\ \rho\circ(\sigma\circ\tau)\ y & \Leftrightarrow & \text{постоји } u \text{ тд} \quad x\ \rho\ u\ \wedge\ u\ \sigma\circ\tau\ y & \text{по деф. композиције} \\ & \Leftrightarrow & \text{постоје } u,v \text{ тд} \quad x\ \rho\ u\ \wedge\ u\ \sigma\ v\ \wedge\ v\ \tau\ y & \text{по деф. композиције} \\ & \Leftrightarrow & \text{постоји } v \text{ тд} \quad x\ \rho\circ\sigma\ v\ \wedge\ v\ \tau\ y & \text{по деф. композиције} \\ & \Leftrightarrow & x\ (\rho\circ\sigma)\circ\tau\ y & \text{по деф. композиције} \end{array}$$

6) Доказаћемо $\rho\circ\Delta_A=\rho$. Ако $x\ \rho\ y$, како је $y\ \Delta_A\ y$, то је $x\ \rho\circ\Delta_A\ y$. Ако $x\ \rho\circ\Delta_A\ y$, тада постоји z тако да $x\ \rho\ z$ и $z\ \Delta_A\ y$. Из $z\ \Delta_A\ y$ следи $z=y$, па из $x\ \rho\ z$ имамо $x\ \rho\ y$. $\dashv$

Степен За релацију ρ и $n\geq 1$ са ρ^n означавамо релацију $\rho^n=\underbrace{\rho\circ\rho\circ\ldots\circ\rho}_{n}$, где је због асоцијативности композиције свеједно где стоје заграде. Приметите да $x\xrightarrow{\rho^n}y$ значи да између x и y води пут од n ρ-стрелица: $x\xrightarrow{\rho}\cdot\xrightarrow{\rho}\cdots\xrightarrow{\rho}y$.

$\boxed{\textbf{29.}}$ Доказати:

1) $\rho\circ(\sigma\cup\tau)=(\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\tau)$;

2) $\rho\circ(\sigma\cap\tau)\subseteq(\rho\circ\sigma)\cap(\rho\circ\tau)$.

3) Примером показати да једнакост у 2) не мора да важи.

Решење. 1) Имамо:

$$\begin{array}{rcl} x\ \rho\circ(\sigma\cup\tau)\ y & \Leftrightarrow & \text{постоји } z \text{ тд} \quad x\ \rho\ z\ \wedge\ z\ \sigma\cup\tau\ y \\ & \Leftrightarrow & \text{постоји } z \text{ тд} \quad x\ \rho\ z\ \wedge\ (z\ \sigma\ y\ \vee\ z\ \tau\ y) \\ & \Leftrightarrow & \text{постоји } z \text{ тд} \quad (x\ \rho\ z\ \wedge\ z\ \sigma\ y)\ \vee\ (x\ \rho\ z\ \wedge\ z\ \tau\ y) \\ & \Rightarrow & x\ \rho\circ\sigma\ y\ \vee\ x\ \rho\circ\tau\ y \\ & \Leftrightarrow & x\ (\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\tau)\ y \end{array}$$

што доказује $\rho\circ(\sigma\cup\tau)\subseteq(\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\tau)$.

Ако $x\ (\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\tau)\ y$, тада $x\ \rho\circ\sigma\ y$ или $x\ \rho\circ\tau\ y$. Ако је $x\ \rho\circ\sigma\ y$, тада постоји z тако да $x\ \rho\ z$ и $z\ \sigma\ y$. Из $z\ \sigma\ y$ следи $z\ \sigma\cup\tau\ y$, па како $x\ \rho\ z$, то је $x\ \rho\circ(\sigma\cup\tau)\ y$. Слично, ако $x\ \rho\circ\tau\ y$ добијамо $x\ \rho\circ(\sigma\cup\tau)\ y$.

2) Имамо:

$$\begin{array}{rcl} x\ \rho\circ(\sigma\cap\tau)\ y & \Leftrightarrow & \text{постоји } z \text{ тд} \quad x\ \rho\ z\ \wedge\ z\ \sigma\cap\tau\ y \\ & \Leftrightarrow & \text{постоји } z \text{ тд} \quad x\ \rho\ z\ \wedge\ z\ \sigma\ y\ \wedge\ z\ \tau\ y \\ & \Rightarrow & x\ \rho\circ\sigma\ y\ \wedge\ x\ \rho\circ\tau\ y \\ & \Leftrightarrow & x\ (\rho\circ\sigma)\cap(\rho\circ\tau)\ y \end{array}$$

3) Импликација у претходном извођењу није еквиваленција јер из $x\ \rho\circ\sigma\ y$ имамо да постоји z_1 тако да $x\ \rho\ z_1$ и $z_1\ \sigma\ y$, а из $x\ \rho\circ\tau\ y$ имамо да постоји z_2 тако да $x\ \rho\ z_2$ и $z_2\ \sigma\ y$, али z_1 и z_2 не морају бити једнаки. Мотивисани овим закључивањем уочимо на скупу $A=\{1,2,3,4\}$ релације $\rho=\{(1,2),(1,3)\}$, $\sigma=\{(2,4)\}$ и $\tau=\{(3,4)\}$. Тада је $\sigma\cap\tau=\emptyset$, па је и $\rho\circ(\sigma\cap\tau)=\emptyset$. Са друге стране је $\rho\circ\sigma=\{(1,4)\}$ и $\rho\circ\tau=\{(1,4)\}$, одакле је $(\rho\circ\sigma)\cap(\rho\circ\tau)=\{(1,4)\}$. $\dashv$

$\boxed{\textbf{30.}}$ Доказати:

1) Ако $\rho\subseteq\sigma$ тада $\rho^{-1}\subseteq\sigma^{-1}$.

2) Ако $\rho\subseteq\sigma$ тада $\sigma^c\subseteq\rho^c$.

3) Ако $\rho\subseteq\sigma$ и $\tau\subseteq\theta$ тада $\rho\circ\tau\subseteq\sigma\circ\theta$.

Решење. 1) Имамо:

$$\begin{aligned} x\ \rho^{-1}\ y &\Leftrightarrow\ y\ \rho\ x \\ &\Rightarrow\ y\ \sigma\ x \qquad \text{јер } \rho\subseteq\sigma \\ &\Leftrightarrow\ x\ \sigma^{-1}\ y \end{aligned}$$

2) Имамо:

$$\begin{aligned} x\ \sigma^c\ y &\Leftrightarrow\ \neg\, x\ \sigma\ y \\ &\Rightarrow\ \neg\, x\ \rho\ y \quad \text{јер } \rho\subseteq\sigma \\ &\Leftrightarrow\ x\ \rho^c\ y \end{aligned}$$

3) Имамо: Имамо:

$$\begin{aligned} x\ \rho\circ\tau\ y &\Leftrightarrow\ \text{постоји } z \text{ тд} \quad x\ \rho\ z \ \wedge\ z\ \tau\ y \\ &\Rightarrow\ \text{постоји } z \text{ тд} \quad x\ \sigma\ z \ \wedge\ z\ \theta\ y \quad \text{јер } \rho\subseteq\sigma \text{ и } \tau\subseteq\theta \\ &\Leftrightarrow\ x\ \sigma\circ\theta\ y. \end{aligned}$$

$\dashv$

$\boxed{\textbf{31.}}$ Доказати да су следеће ствари еквивалентне:

(1) $\rho\subseteq\rho^{-1}$; (2) $\rho^{-1}\subseteq\rho$; (3) $\rho=\rho^{-1}$.

Решење. Према претходном задатку $\rho\subseteq\rho^{-1}$ је еквивалентно са $\rho^{-1}\subseteq\rho$ применом инверза на обе стране неједнакости. $\dashv$

$\boxed{\textbf{32.}}$ Доказати да су следеће ствари еквивалентне:

(1) $\rho^2\subseteq\rho$ (тј. $\rho\circ\rho\subseteq\rho$);

(2) $\rho^n\subseteq\rho$, за све $n\geq 1$.

Решење. (2) $\Rightarrow$ (1): тривијално за $n=2$.

(1) $\Rightarrow$ (2): За $n=1$ је тривијално $\rho\subseteq\rho$. За $n=2$ тврђење следи из претпоставке (1). Наставимо индукцијом. Претпоставимо да је $\rho^{n-1}\subseteq\rho$. Тада је $\rho^n=\rho^{n-1}\circ\rho\subseteq\rho\circ\rho\subseteq\rho$, где прва инклузија важи према индукцијској хипотези, а друга из претпоставке (1). $\dashv$

Дефиниција Нека је ρ бинарна релација на скупу A.

Рефлексивност ρ је рефлексивна ако $\Delta_A\subseteq\rho$, тј. ако за све $x\in A$ важи $x\ \rho\ x$.

Симетричност ρ је симетрична ако $\rho\subseteq\rho^{-1}$, тј. ако важи: $x\ \rho\ y \ \Rightarrow\ y\ \rho\ x$.

Антисиметричност ρ је антисиметрична ако $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$, тј. ако важи:
$$x\,\rho\,y \;\wedge\; y\,\rho\,x \;\Rightarrow\; x = y.$$

Транзитивност ρ је транзитивна ако $\rho \circ \rho \subseteq \rho$, тј. ако важи: $x\,\rho\,y \;\wedge\; y\,\rho\,z \;\Rightarrow\; x\,\rho\,z$.

Еквиваленција ρ је еквиваленција ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Поредак ρ је поредак ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

$\boxed{\textbf{33.}}$ Ако је ρ симетрична и антисиметрична, тада је $\rho \subseteq \Delta_A$. Ако је ρ рефлексивна, симетрична и антисиметрична, тада је $\rho = \Delta_A$.

Решење. Због симетричности и антисиметричности је $\rho = \rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$. А због рефлексивности је $\Delta_A \subseteq \rho$. $\dashv$

2.4 Еквиваленција

Еквиваленција Релација ρ на скупу A је еквиваленција ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Класа еквиваленције Нека је ρ еквиваленција скупа A. Класа еквиваленције елемента $a \in A$ је скуп $a/\rho = \{x \mid x\,\rho\,a\}$. Приметимо да због рефлексивности имамо да увек $a \in a/\rho$, специјално $a/\rho \neq \emptyset$. Због симетричности имамо да је $a/\rho = \{x \mid a\,\rho\,x\}$.

$\boxed{\textbf{34.}}$ Доказати:

(1) $a\,\rho\,b$ акко $a/\rho = b/\rho$;

(2) $\neg\, a\,\rho\,b$ акко $a/\rho \cap b/\rho = \emptyset$.

Решење. (1) $\Rightarrow$: Претпоставимо да важи $a\,\rho\,b$. Ако $x \in a/\rho$, тада $x\,\rho\,a$, па како је $a\,\rho\,b$ по транзитивности имамо $x\,\rho\,b$, тј. $x \in b/\rho$. Слично, ако $x \in b/\rho$, добијамо да $x \in a/\rho$. Дакле, $a/\rho = b/\rho$.

$\Leftarrow$: Претпоставимо да $a/\rho = b/\rho$. Како $a \in a/\rho$, добијамо $a \in b/\rho$, па $a\,\rho\,b$.

(2) $\Rightarrow$: Претпоставимо да $\neg\, a\,\rho\,b$. Ако претпоставимо супротно да $x \in a/\rho \cap b/\rho$, тада $a\,\rho\,x$ и $x\,\rho\,b$ по транзитивности повлаче $a\,\rho\,b$. Контрадикција.

$\Leftarrow$: Претпоставимо да $a/\rho \cap b/\rho = \emptyset$. Како је $a/\rho, b/\rho \neq \emptyset$, закључујемо да је $a/\rho \neq b/\rho$, па према (1) $\neg\, a\,\rho\,b$. $\dashv$

Количнички скуп Ако је ρ еквиваленција скупа A, тада је количнички скуп, A/ρ, скупа A по ρ скуп свих класа еквиваленције ρ: $A/\rho = \{a/\rho \mid a \in A\}$.

Партиција Нека је $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ фамилија непразних подскупова од A. Кажемо да је P партиција скупа A ако је:

(1) $\bigcup P = A$;

(2) ако $X, Y \in P$ и $X \neq Y$, тада $X \cap Y = \emptyset$.

Ово заправо значи да сваки елемент скупа A припада тачно једном скупу из фамилије P.

$\boxed{\textbf{35.}}$ (1) Нека је ρ еквиваленција на A. Тада је A/ρ партиција скупа A.

(2) Ако је P партиција скупа A, тада постоји еквиваленција ρ на A таква да је $P = A/\rho$.

Решење. (1) Сви скупови из A/ρ (а то су класе) су непразни, како смо видели. Сваки елемент $a \in A$ припада a/ρ, па је заиста $\bigcup A/\rho = A$. Такође смо у претходном задатксу видели да различити елементи фамилије P имају празан пресек.

(2) Претпоставимо да је P партиција скупа A. Тада за сваки елемент $a \in A$ постоји јединствен елемент $X_a \in P$ такав да $a \in X_a$. Дефиничемо релацију ρ са: $a\ \rho\ b$ акко $X_a = X_b$. Лако се види да је ρ еквиваленција на A.

Приметимо да $x \in a/\rho$ акко $x\ \rho\ a$ акко $X_x = X_a$. Такође приметимо да $X_x = X_a$ акко $x \in X_a$: ако је $X_x = X_a$, пошто $x \in X_x$, добијамо $x \in X_a$; са друге стране ако $x \in X_a$, како $x \in X_x$, тада $X_a \cap X_x \neq \emptyset$, па $X_x = X_a$. Дакле, $x \in a/\rho$ акко $x \in X_a$, одакле је $a/\rho = X_a$. Према томе $A/\rho \subseteq P$. Али такође, за $X \in P$ имамо да је $X = X_a$, за било који $a \in X$ (који постоји, јер је X непразан), па је $X = X_a = a/\rho \in A/\rho$. Дакле, $A/\rho = P$. $\dashv$

$\boxed{\textbf{36.}}$ Нека је ρ еквиваленција на A. Тада је и ρ^{-1} еквиваленција на A.

Решење. Због симетричности је $\rho^{-1} = \rho$, па је еквиваленција. $\dashv$

$\boxed{\textbf{37.}}$ Нека су ρ, θ еквиваленције на A. СССЕ:

(1) $\rho \circ \theta$ је еквиваленција;

(2) $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$;

(3) $\rho \circ \theta \subseteq \theta \circ \rho$.

Решење. Приметимо ако је $\rho \circ \theta \subseteq \theta \circ \rho$, тада је $(\rho \circ \theta)^{-1} \subseteq (\theta \circ \rho)^{-1}$, тј. $\theta^{-1} \circ \rho^{-1} \subseteq \rho^{-1} \circ \theta^{-1}$, па како су ρ, θ симетричне добијамо $\theta \circ \rho \subseteq$
$rho \circ \theta$. Дакле, важи (2)$\Leftrightarrow$(3).

(1)$\Rightarrow$(2): Претпоставимо да је $\rho \circ \theta$ еквиваленција. Тада је

$$\begin{aligned} \rho \circ \theta &= (\rho \circ \theta)^{-1} && \text{због симетричности } \rho \circ \theta \\ &= \theta^{-1} \circ \rho^{-1} \\ &= \theta \circ \rho && \text{због симетричности } \rho, \theta \end{aligned}$$

(2)$\Rightarrow$(1): Претпоставимо да је $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$. Рефлексивност $\rho \circ \theta$ следи по дефиницији, јер важи $a\ \rho\ a$ и $a\ \theta\ a$, за све a, због рефлексивности ρ и θ. За симетрицност имамо: $(\rho \circ \theta)^{-1} = \theta^{-1} \circ \rho^{-1} = \theta \circ \rho = \rho \circ \theta$, где користимо претпоставку и симетричност ρ, θ. За транзитивност приметимо $(\rho \circ \theta) \circ (\rho \circ \theta) = \rho \circ (\theta \circ \rho) \circ \theta = \rho \circ (\rho \circ \theta) \circ \theta = (\rho \circ \rho) \circ (\theta \circ \theta) \subseteq \rho \circ \theta$, где $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ и $\theta \circ \theta \subseteq \theta$ због транзитивности ρ, θ. $\dashv$

$\boxed{\textbf{38.}}$ Нека је $m \geq 0$. На скупу $\mathbb{Z}$ дефинишемо релацију $\equiv_m$ са: $a \equiv_m b$ акко $a - b = mk$, за неко $k \in \mathbb{Z}$. (Другим речима, $a \equiv_m b$ акко $m \mid a - b$ у $\mathbb{Z}$.) Доказати да је $\equiv_m$ еквиваленција на $\mathbb{Z}$ и описати класе. Колико елемената има количнички скуп $\mathbb{Z}/\equiv_m$.

Решење. Рефлексивност следи јер је $a - a = 0 = m \cdot 0$. Ако $a \equiv_m b$, тада за неко $k \in \mathbb{Z}$ имамо да је $a - b = mk$. Међутим тада је $b - a = m(-k)$ и $-k \in \mathbb{Z}$, па $b \equiv_m a$, што доказује симетричност. Ако је $a \equiv_m b \equiv_m c$, тада је $a - b = mk_1$ и $b - c = mk_2$, за неке $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Тада је $a - c = (a - b) + (b - c) = m(k_1 + k_2)$ и $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, па $a \equiv_m c$. Дакле, $\equiv_m$ је еквиваленција.

За класе имамо:

$$\begin{aligned} a/\equiv_m &= \{x \mid x \equiv_m a\} \\ &= \{x \mid (\exists k \in \mathbb{Z})\ x - a = mk\} \\ &= \{x \mid (\exists k \in \mathbb{Z})\ x = a + mk\} \\ &= \{a + mk \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= a + m\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

У случају да је $m = 0$, имамо да је $a/\equiv_0 = \{a\}$ (дакле, $\equiv_0$ је заправо $=$ на $\mathbb{Z}$), па количнички скуп има бесконачно много елемената (за сваки цео број по једну класу). У случају да је $m = 1$, имамо да је $a/\equiv_1 = \{a + k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$, за сваки a, па $\mathbb{Z}/\equiv_1$ има само један елемент: $\mathbb{Z}$.

За $m \geq 2$ тврдимо да $\mathbb{Z}/\equiv_m$ има m елемената. Прецизније, тврдимо да

$$\mathbb{Z}/\equiv_m = \{0/\equiv_m, 1/\equiv_m, \dots, m-1/\equiv_m\}.$$

Нека је $a \in \mathbb{Z}$ и r остатак при дељењу a са m, тј. $a = mq + r$, где $0 \leq r < m$. Тада је $a - r = mq$, па $a \equiv_m r$, одакле $a/\equiv_m = r/\equiv_m$. Са друге стране, ако $0 \leq r_1 < r_2 < m$, тада $0 < r_2 - r_1 < m$, па $r_2 - r_1$ није дељив са m, тј. $\neg\, r_1 \equiv_m r_2$, одакле $r_1/\equiv_m \neq r_2/\equiv_m$. $\dashv$

$\boxed{\textbf{39.}}$ На $\mathbb{Z}$ је дата релација $\sim$ са: $a \sim b$ акко:

1) $4 \mid a + 3b$;

2) $4 \mid 2a + 2b$.

Доказати да је $\sim$ еквиваленција на $\mathbb{Z}$ и одредити класе.

Решење. 1) Приметимо да $a \sim b$ акко $4 \mid a + 3b$ акко $4 \mid a + 3b - 4b$ акко $4 \mid a - b$. Дакле, $\sim = \equiv_4$, па решење следи према претходном задатку.

2) Приметимо да $a \sim b$ акко $4 \mid 2a + 2b$ акко $4 \mid 2a + 2b - 4b$ акко $4 \mid 2a - 2b$ акко $2 \mid a - b$. Дакле, $\sim = \equiv_2$, па решење следи према претходном задатку. $\dashv$

$\boxed{\textbf{40.}}$ На $\mathbb{R}$ је дефинисана релација $\sim$ са: $a \sim b$ акко:

1) $a^2 + b = b^2 + a$; 2) $a(b^2 + 1) = b(a^2 + 1)$; 3) $\sin a = \sin b$.

Доказати да је $\sim$ еквиваленција на $\mathbb{R}$ и одредити класе.

Решење. $\dashv$

$\boxed{\textbf{41.}}$ На $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ је дефинисана релација $\sim$ са: $(a, b) \sim (u, v)$ акко:

1) $a = u$; 2) $ab = uv$; 3) $a^2 + 2v = u^2 + 2b$.

Доказати да је $\sim$ еквиваленција на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и одредити класе. Дати геометријску интерпретацију класа у равни.

Решење. $\dashv$

$\boxed{\textbf{42.}}$ A и B су скупови. На A је дефинисана релација $\sim$ са: $a_1 \sim a_2$ акко $a_1 - a_2 \in B$, где је:

1) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$; 3) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$; 5) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{R}$.

2) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$; 4) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$;

Испитати да ли је $\sim$ еквиваленција на A и ако јесте одредити класе.

Решење. $\dashv$

2.5 Поредак

Поредак Релација $\preceq$ на A је поредак ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. Ако је $x \preceq y$, онда кажемо да је x мањи или једнак y, односно да је y веци или једнак од x.

Основни примери поретка су нпр. релација $\leq$ на скупу $\mathbb{R}$. Такође, релација $\subseteq$ је поредак на скупу $\mathcal{P}(A)$, за било који скуп A. Између ове две релације постоји битна разлика: наиме за свака два реална броја x, y важи и: $x \leq y$ или $y \leq x$, док за свака два подскупа $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ не мора да важи: $X \subseteq Y$ или $Y \subseteq X$. Дакле, ако имамо поредак $\preceq$ на скупу A, тада не мора да важи $x \preceq y$ или $y \preceq x$, за сваки x, y.

Линеарни поредак За поредак $\preceq$ на скупу A кажемо да је линеаран ако за све $x, y \in A$ важи: $x \preceq y$ или $y \preceq x$.

Дакле, $\leq$ на $\mathbb{R}$ јесте линеаран поредак, док у општем случају (сем кад је $|A| \leq 1$) $\subseteq$ није линеаран поредак на $\mathcal{P}(A)$. С тим у вези имамо и следећи појам.

Неупоредиви елементи Ако је $\preceq$ поредак на A, за елементе $x, y \in A$ кажемо да су неупоредиви ако $x \npreceq y$ и $y \npreceq x$. Да су x, y неупоредиви понекад означавамо са $x \perp y$.

Минимални и максимални елементи За елемент $a \in A$ кажемо да је минималан (максималан) у односу на поредак $\preceq$ ако је за свако $x \in A$ тачна импликација:

$$x \preceq a \Rightarrow x = a \qquad (a \preceq x \Rightarrow a = x).$$

Ово заправо каже да у поретку $\preceq$ ниједан елемент није строго мањи од минималног, тј. строго веци од максималног елемента.

Најмањи и највеци елемент За елемент $a \in A$ кажемо да је најмањи (највећи) елемент у односу на поредак $\preceq$ ако за свако $x \in A$ важи:

$$a \preceq x \qquad (x \preceq a).$$

Ово каже да је најмањи елемент мањи од свих елемената скупа A, а да је највећи елемент већи од свих елемената скупа A.

Напомена Казо што ћемо видети у задацима, минимални, максимални, најмањи, највећи елементи не морају да постоје.

$\boxed{\textbf{43.}}$ Нека је $\preceq$ поредак на A.

1) Ако је a најмањи (највећи) елемент, онда је он једини најмањи (највећи) елемент.

2) Ако је a најмањи (највећи) елемент, онда је он једини минимални (максимални) елемент.

Дакле, ако не постоји минимални (максимални) елемент, или постоје бар два минимална (максимална) елемента, тада не постоји најмањи (највећи). Са дру стране, може се десити да постоји јединствени минимални (максимални) елемент, али да он не буде најмањи (највећи).

Решење. 1) Ако су a, b најмањи елементи, тада имамо $a \preceq b$, јер је a најмањи, и $b \preceq a$, јер је b најмањи. Према антисиметричности је $a = b$, што показује да не можемо имати више од једног најмањег елемента.

2) Ако је a најмањи, он је и минималан. Заиста, ако је $x \preceq a$, како имамо и $a \preceq x$ (јер је a најмањи), по антисиметричности добијамо $a = x$.

Ако је a најмањи и b минималан, тада имамо $a \preceq b$, јер је a најамањи. Како је b минималан, то из $a \preceq b$ закључујемо да је $a = b$. Дакле, поред a немамо других минималних елемената. $\dashv$

$\boxed{\textbf{44.}}$ Нека је $\preceq$ линеарни поредак на A. Тада је $a \in A$ минимални (максимални) елемент акко је најмањи (највећи) елемент.

Решење. ... $\dashv$

$\boxed{\textbf{45.}}$ Нека је $\preceq$ поредак на A. Тада је и $\preceq^{-1}$ поредак на A и ако је $a \in A$ најмањи (највећи, минимални, максимални) елемент у односу на $\preceq$, тада је a највећи (најмањи, максимални, минимални) елемент у односу на $\preceq^{-1}$.

$\boxed{\textbf{46.}}$ На скупу $D \subseteq \mathbb{R}$ је дефинисана релација $\preceq$ са: $a \preceq b$ акко:

1) $a^2 + b \leq b^2 + a$, где је:

1.1) $D = (-\infty, \frac{1}{2}]$; 1.2) $D = [\frac{1}{2}, \infty)$; 1.3) $D = (0, \frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$;

2) $a(b^2 + 1) \leq b(a^2 + 1)$, где је:

2.1) $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; 2.2) $D = [-1, 1]$; 2.3) $D = [-1, 0] \cup [1, \infty)$;

3) $\sin a \leq \sin b$, где је :

3.1) $D = (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$; 3.2) $D = (0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$; 3.3) $D = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Доказати да је $\preceq$ на D линеаран поредак и ако постоје одредити најмањи и највећи елемент.

Решење. ... $\dashv$

2.6 Функције

2.7 Карактеристичне функције

Претпоставимо да је U довољно велики скуп (зваћемо га универзум) такав да су сви скупови које посматрамо његови подскупови. Нпр. ако нас янимају скупови A, B и C, за U можемо да узмемо његову унију.

Сабирање и множење на 2 На скупу $2 = \{0, 1\}$ можемо да посматрамо операције $+$ и $\cdot$ дате таблицама:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Овако дато сабирање и множење на 2 имају уобичајене особине: то су асоцијативне и комутативне операције, множење је дистрибутивно према сабирању, 0 је неутрални елемент за сабирање, 1 је неутрални елемент за множење, и поред тога задовољавају да је $a + a = 0$ и $a^2 = a \cdot a = a$, за $a \in 2$.

$\boxed{\textbf{47.}}$ Доказати да важи:

1) $ab = 1$ акко $a = 1$ и $b = 1$;

2) $a + b + ab = 0$ акко $a = 0$ и $b = 0$;

3) $a + ab = 1$ акко $a = 1$ и $b = 0$;

4) $a + b = 0$ акко $a = b$.

Решење. Све се лако види. $\dashv$

Функције из U у 2 Надаље посматрамо функције $U \longrightarrow 2$. Ако су $f, g : U \longrightarrow 2$, дефинишемо њихов збир и производ $f+g, fg : U \longrightarrow 2$ по правилу:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{и} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

где $x \in U$. Лако је проверити да овако сабирање и множење функција има очекиване особине: оне су асоцијативне и комутативне операције, множење је дистрибутивно према сабирању, 0 је неутрал за сабирање, 1 је неутрал за множење, $f + f = 0$ и $f^2 = f \cdot f = 1$, где су са 0 и 1 означене функције $0, 1 : U \longrightarrow 2$ дате са $0(x) = 0$ и $1(x) = 1$, за све $x \in U$.

Карактеристична функција скупа Нека је $A \subseteq U$. Карактеристична функција скупа A је функција $\chi_A : U \longrightarrow 2$ дата са:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{ако } x \notin A \\ 1 & \text{ако } x \in A \end{cases}$$

за све $x \in U$. Дакле, $x \in A$ акко $\chi_A(x) = 1$.

$\boxed{\textbf{48.}}$ Нека $A, B \subseteq U$. Доказати: $A = B$ акко $\chi_A = \chi_B$.

Решење. $\Rightarrow$: Тривијално. $\Leftarrow$: $x \in A$ акко $\chi_A(x) = 1$ акко $\chi_B(x) = 1$ (јер $\chi_A = \chi_B$) акко $x \in B$. Према томе $A = B$. ⊣

$\boxed{\textbf{49.}}$ Доказати следеће формуле:

1) $\chi_\emptyset = 0$ и $\chi_U = 1$;

2) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$;

3) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \chi_B$;

4) $\chi_{A \smallsetminus B} = \chi_A + \chi_A \chi_B$;

5) $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B$;

6) $\chi_{A^c} = 1 + \chi_A$.

Решење. 2) $\chi_{A \cap B}(x) = 1$ акко $x \in A \cap B$ акко $x \in A$ и $x \in B$ акко $\chi_A(x) = 1$ и $\chi_B(x) = 1$ акко $\chi_A(x)\chi_B(x) = 1$ акко $(\chi_A \chi_B)(x) = 1$. Дакле, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$. Овде смо користили да у 2 важи $ab = 1$ акко $a = 1$ и $b = 1$.

Слично можемо доказати и остале једнакости. ⊣

$\boxed{\textbf{50.}}$ Доказати скуповни идентитет: $(A \cap B) \smallsetminus C = A \cap (B \smallsetminus C)$.

Решење. Ако за U узмемо $A \cup B \cup C$, довољно је доказати да је $\chi_{(A \cap B) \smallsetminus C} = \chi_{A \cap (B \smallsetminus C)}$. Имамо да је:

$$\begin{aligned} \chi_{(A \cap B) \smallsetminus C} &= \chi_{A \cap B} + \chi_{A \cap B} \chi_C \\ &= \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_B \chi_C \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \chi_{A \cap (B \smallsetminus C)} &= \chi_A \chi_{B \smallsetminus C} \\ &= \chi_A (\chi_B + \chi_B \chi_C) \\ &= \chi_A \chi_B + \chi_A \chi_B \chi_C, \end{aligned}$$

па следи једнакост карактеристичних функција. ⊣

$\boxed{\textbf{51.}}$ Доказати: $(A \smallsetminus B) \smallsetminus C \subseteq A \smallsetminus (B \smallsetminus C)$. Одредити неки једноставан потребан и довољан услов да важи једнакост.

Решење. Приметимо да за скупове X и Y важи $X \subseteq Y$ акко $X \cap Y = X$. Рачунамо карактеристичне функције:

$$\begin{aligned}
\chi_{(A \smallsetminus B) \smallsetminus C} &= \chi_{A \smallsetminus B} + \chi_{A \smallsetminus B}\chi_C \\
&= \chi_A + \chi_A\chi_B + (\chi_A + \chi_A\chi_B)\chi_C \\
&= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\chi_{A \smallsetminus (B \smallsetminus C)} &= \chi_A + \chi_A\chi_{B \smallsetminus C} \\
&= \chi_A + \chi_A(\chi_B + \chi_B\chi_C) \\
&= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

Тада је:

$$\begin{aligned}
\chi_{((A \smallsetminus B) \smallsetminus C) \cap (A \smallsetminus (B \smallsetminus C))} &= \chi_{(A \smallsetminus B) \smallsetminus C}\ \chi_{A \smallsetminus (B \smallsetminus C)} \\
&= (\chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C)(\chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C) \\
&= \chi_A^2 + \chi_A^2\chi_B + \chi_A^2\chi_B\chi_C + \chi_A^2\chi_B + \chi_A^2\chi_B^2 + \chi_A^2\chi_B^2\chi_C \\
&+ \chi_A^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C^2 + \chi_A^2\chi_B\chi_C + \chi_A^2\chi_B^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B^2\chi_C^2 \\
&= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C \\
&+ \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C \\
&= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

Овде смо користили $f^2 = f$ и $f + f = 0$. Дакле, $\chi_{(A \smallsetminus B) \smallsetminus C} = \chi_{((A \smallsetminus B) \smallsetminus C) \cap (A \smallsetminus (B \smallsetminus C))}$, па је $(A \smallsetminus B) \smallsetminus C = ((A \smallsetminus B) \smallsetminus C) \cap (A \smallsetminus (B \smallsetminus C))$, тј. $(A \smallsetminus B) \smallsetminus C \subseteq A \smallsetminus (B \smallsetminus C)$.

Имамо да је $(A \smallsetminus B) \smallsetminus C = A \smallsetminus (B \smallsetminus C)$ акко су им карактеристичне функције једнаке, тј. како видимо горе акко $\chi_A\chi_C = 0$. Ово је еквивалентно са $\chi_{A \cap C} = 0 = \chi_\emptyset$, што је еквивалентно са $A \cap C = \emptyset$, што је тражени потребан и довољан услов. $\dashv$

2.8 Директна и инверзна слика скупа

Нека је $f : X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$.

Директна слика Директна слика скупа A је скуп

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y.$$

Дакле, приметимо да $y \in f(x)$ акко је $y = f(x)$, за неко $x \in A$. Нагласимо да $x \in A$ по дефиницији повлачи $f(x) \in f[A]$, док обратно не важи, тј. $f(x) \in f[A]$ не повлачи обавезно да $x \in A$.

Инверзна слика Инверзна слика скупа B је скуп

$$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X.$$

Дакле, $x \in f^{-1}[B]$ акко $f(x) \in B$. Приметимо да ознака $f^{-1}[B]$ никако не имплицира да инверзна функција постоји.

Приметимо неколико очигледних ствари. НАјпре, $f[A] = \emptyset$ акко $A = \emptyset$. Такође, ако је $A_1 \subseteq A_2$, тада је $f[A_1] \subseteq f[A_2]$. Слично, ако је $B_1 \subseteq B_2$, тада је $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$.

$\boxed{\textbf{52.}}$ Доказати:

1) $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$;

2) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$;

3) $f[f^{-1}[f[A]]] = f[A]$;

4) $f^{-1}[f[f^{-1}[B]]] = f^{-1}[B]$.

Решење. 1) Ако $x \in A$, тада $f(x) \in f[A]$, што је по дефиницији инверзне слике еквивалентно са $x \in f^{-1}[f[A]]$.

2) Ако $y \in f[f^{-1}[B]]$, тада $y = f(x)$, за неко $x \in f^{-1}[B]$. Међутим, $x \in f^{-1}[B]$ повлачи $f(x) \in B$, тј. $y \in B$.

3) Према 2), стављајући $B = f[A]$, имамо $f[f^{-1}[f[A]]] \subseteq A$. Са друге стране, према 1) је $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$, па је и $f[f^{-1}[f[A]]] \supseteq f[A]$.

4) Слично као 3). $\dashv$

53. Доказати да су следеће ствари еквивалентне:

(1) f је 1-1;

(2) за све $A \subseteq X$ важи $f^{-1}[f[A]] = A$;

(3) за све једночлане $A \subseteq X$ важи $f^{-1}[f[A]] = A$.

Решење. (1)$\Rightarrow$(2): Нека је f 1-1. Приметимо да смо већ доказали да је $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$. Нека је $x \in f^{-1}[f[A]]$. Тада $f(x) \in f[A]$, па је $f(x) = f(x')$, за неко $x' \in A$. Како је f 1-1, $f(x) = f(x')$ повлачи $x = x'$, одакле $x \in A$.

(2)$\Rightarrow$(3): Ово је очигледно.

(3)$\Rightarrow$(1): Претпоставимо да је $f(x_1) = f(x_2)$. Уочимо једночлан подскуп $A = \{x_1\}$. Тада је $f[A] = \{f(x_1)\}$, тј. $f(x_1) \in f[A]$, па како је $f(x_1) = f(x_2)$, добијамо да $f(x_2) \in f[A]$. Одавде закључујемо да $x_2 \in f^{-1}[f[A]]$. Како је, према (3), $f^{-1}[f[A]] = A$, добијамо $x_2 \in A = \{x_1\}$, тј. $x_1 = x_2$. Дакле, f је 1-1. $\dashv$

54. Доказати да су следеће ствари еквивалентне:

(1) f је на;

(2) за све $B \subseteq Y$ важи $f[f^{-1}[B]] = B$;

(3) за све једночлане $B \subseteq Y$ важи $f[f^{-1}[B]] = B$.

55. Доказати:

1) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$;

2) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$;

3) $f[A_1 \smallsetminus A_2] \supseteq f[A_1] \smallsetminus f[A_2]$;

4) $f[A_1 \triangle A_2] \supseteq f[A_1] \triangle f[A_2]$.

Решење. 1) Ако $y \in f[A_1 \cup A_2]$, тада је $y = f(x)$ за неко $x \in A_1 \cup A_2$. Тада $x \in A_1$ или $x \in A_2$, па $f(x) \in f[A_1]$ или $f(x) \in f[A_2]$. Одатле $y = f(x) \in f[A_1] \cup f[A_2]$, што доказује инклузију $\subseteq$.

Ако $y \in f[A_1] \cup f[A_2]$, тада $y \in f[A_1]$ или $y \in f[A_2]$. Ако $y \in f[A_1]$, тада је $y = f(x)$ за неко $x \in A_1$. Одатле $x \in A_1 \cup A_2$, па $y = f(x) \in f[A_1 \cup A_2]$. Слично, ако $y \in f[A_2]$, добијамо да $y \in f[A_1 \cup A_2]$, што завршава доказ инклузије $\supseteq$.

2) Нека $y \in f[A_1 \cap A_2]$. Тада $y = f(x)$ за неко $x \in A_1 \cap A_2$. Одатле $x \in A_1$ и $x \in A_2$, па $f(x) \in f[A_1]$ и $f(x) \in f[A_2]$. Дакле, $y = f(x) \in f[A_1] \cap f[A_2]$.

3) Нека $y \in f[A_1] \smallsetminus f[A_2]$. Тада $y \in f[A_1]$ и $y \notin f[A_2]$. Из $y \in f[A_1]$ имамо да је $y = f(x)$ за неко $x \in A_1$. Приметимо да $x \notin A_2$, јер у супротном $y = f(x) \in f[A_2]$. Дакле, $x \in A_1 \smallsetminus A_2$, па $y = f(x) \in f[A_1 \smallsetminus A_2]$.

4) Користимо делове 1), 2) и 3). Имамо:

$$
\begin{array}{rcll}
f[A_1 \Delta A_2] & = & f[(A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)] & \\
& \supseteq & f[A_1 \cup A_2] \setminus f[A_1 \cap A_2] & \text{према 3)} \\
& = & (f[A_1] \cup f[A_2]) \setminus f[A_1 \cap A_2] & \text{према 1)} \\
& \supseteq & (f[A_1] \cup f[A_2]) \setminus (f[A_1] \cap f[A_2]) & \text{према 2)} \\
& = & f[A_1] \Delta f[A_2]. &
\end{array}
$$

⊣

$\boxed{\textbf{56.}}$ Доказати:

1) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$;

2) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$;

3) $f^{-1}[B_1 \setminus B_2] = f^{-1}[B_1] \setminus f^{-1}[B_2]$;

4) $f^{-1}[B_1 \triangle B_2] = f^{-1}[B_1] \triangle f^{-1}[B_2]$.

Решење. 1) Приметимо да:

$$
\begin{array}{rlll}
x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] & \text{акко} & f(x) \in B_1 \cup B_2 & \text{по дефиницији инверзне слике} \\
& \text{акко} & f(x) \in B_1 \text{ или } f(x) \in B_2 & \text{по дефиницији уније} \\
& \text{акко} & x \in f^{-1}[B_1] \text{ или } x \in f^{-1}[B_2] & \text{по дефиницији инверзне слике} \\
& \text{акко} & x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2] & \text{по дефиницији уније}
\end{array}
$$

На сличан начин можемо доказати 2), 3) и 4). ⊣

$\boxed{\textbf{57.}}$ Доказати да су следеће ствари еквивалентне:

(1) f је 1-1;

(2) за све $A_1, A_2 \subseteq X$ важи $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$;

(3) за све једночлане $A_1, A_2 \subseteq X$ важи $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$.

Решење. 1)$\Rightarrow$2): Већ знамо да је $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$. Претпоставимо да $y \in f[A_1] \cap f[A_2]$, тј. да $y \in f[A_1]$ и $y \in f[A_2]$. По дефиницији директне слике имамо да је $y = f(x)$, за неко $x \in A_1$, и $y = f(x')$, за неко $x' \in f[A_2]$. Међутим, тада $f(x) = f(x')$, па како је f 1-1, добијамо $x = x'$. Одатле $x \in A_1 \cap A_2$, па $y = f(x) \in f[A_1 \cap A_2]$.

2)$\Rightarrow$3): Тривијално. (Ако дата једнакост важи за све подскупове од X, онда важи и за све једночлане подскупове од X.)

3)$\Rightarrow$1): Претпоставимо да је $f(x_1) = f(x_2)$, и желимо да докажемо да је $x_1 = x_2$. Уочимо једночлане скупове $A_1 = \{x_1\}$ и $A_2 = \{x_2\}$. Према 3) важи: $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$. Како је $f[A_1] = \{f(x_1)\}$, $f[A_2] = \{f(x_2)\}$ и $f(x_1) = f(x_2)$, видимо да је $f[A_1] \cap f[A_2] \neq \emptyset$. Одатле, према горњој једнакости, и $f[A_1 \cap A_2] \neq \emptyset$, па $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, што је једино могуће ако је $x_1 = x_2$. ⊣

$\boxed{\textbf{58.}}$ Урадите претходни задатак, при чему замените $\cap$ са $\setminus$ или $\triangle$.

$\boxed{\textbf{59.}}$ Доказати:

1) $f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B$;

2) $f[A \setminus f^{-1}[B]] = f[A] \setminus B$.

Решење. 1) Знамо да је $f[A \cap f^{-1}[B]] \subseteq f[A] \cap f[f^{-1}[B]] \subseteq f[A] \cap B$, где прва инклузија важи због понашања директне слике према пресеку, а друга јер је $f[f^{-1}[B]] \supseteq B$.

Претпоставимо сада да $y \in f[A] \cap B$, тј. да $y \in f[A]$ и $y \in B$. Тада је $y = f(x)$, за неко $x \in A$. Како $f(X) = y \in B$, то $x \in f^{-1}[B]$. Дакле, имамо да $x \in A \cap f^{-1}[B]$, па $y = f(x) \in f[A \cap f^{-1}[B]]$.

2) Слично као 1). ⊣

60. Нека $f, g : X \longrightarrow Y$. Доказати да су следеће ствари еквивалентне:

(1) $f = g$;

(2) за све $A \subseteq X, B \subseteq Y$ важи $f[A \cap g^{-1}[B]] = f[A] \cap B$;

(3) за све једночлане $A \subseteq X, B \subseteq Y$ важи $f[A \cap g^{-1}[B]] = f[A] \cap B$.

Решење. 1)$\Rightarrow$2): Следи према претходном задатку.

2)$\Rightarrow$3): Тривијално.

3)$\Rightarrow$1): Треба да докажемо да за свако $x \in X$ важи $f(x) = g(x)$. Изаберимо произвољно $x \in X$ и означимо $f(x) = y_1$ и $g(x) = y_2$ (желимо $y_1 = y_2$). Уочимо једночлане скупове $A = \{x\}$ и $B = \{y_1\}$. Тада $f[A] = \{f(x)\} = \{y_1\}$, па је $f[A] \cap B = \{y_1\}$. Према 3) имамо да је $f[A \cap g^{-1}[B]] = \{y_1\}$, одакле специјално $A \cap g^{-1}[B] \neq \emptyset$. Како је $A = \{x\}$, то је могуће једино ако $x \in g^{-1}[B]$, тј. ако $g(x) \in B$. Дакле, $y_2 \in B = \{y_1\}$, па је $y_1 = y_2$. $\dashv$

Природна пројекција Ако је ρ еквиваленција скупа X, тада имамо функцију $\pi : X \longrightarrow X/\rho$ дату са: $\pi(x) = x/\rho$, коју зовемо природна пројекција. Приметимо да је природна пројекција очигледно на.

Језгро функције Ако је $f : X \longrightarrow Y$ функција, тада је језгро функције f релација скупа X:

$$\ker(f) = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}.$$

Дакле, $x_1 \ker(f)\ x_2$ акко $f(x_1) = f(x_2)$.

61. $\ker(f)$ је еквиваленција домена X.

Решење. $x \ker(f)\ x$ јер $f(x) = f(x)$, што доказује рефлексивност. Ако је $x_1 \ker(f)\ x_2$, тада је $f(x_1) = f(x_2)$, па је $x_2 \ker(f) x_1$, тј. $\ker(f)$ је симетрична. Коначно, ако је $x_1 \ker(f)\ x_2 \ker(f)\ x_3$, тада је $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, па је и $x_1 \ker(f)\ x_3$, тј. $\ker(f)$ је транзитивна. $\dashv$

62. **(Универзално својство количничког скупа)** Нека је $f : X \longrightarrow Y$ функција и ρ еквиваленција на X. Ако је $\rho \subseteq \ker(f)$, тада постоји јединствена функција $\hat{f} : X/\rho \longrightarrow Y$ таква да је $f = \hat{f} \circ \pi$, тј. таква да следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\rho \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Решење. Посматрајмо $\hat{f} : X/\rho \longrightarrow Y$ дато са $\hat{f}(x) = f(x)$. Треба да докажемо да смо добро дефинисали функцију. Претпоставимо да је $x/\rho = x'/\rho$, тј. $x\ \rho\ x'$. Како је $\rho \subseteq \ker(f)$, то је $x \ker(f)\ x'$, тј. $f(x) = f(x')$. Дакле, $\hat{f}$ је заиста добро дефинисана функција.

Како је $f(x) = \hat{f}(x/\rho) = \hat{f}(\pi(x)) = \hat{f} \circ \pi(x)$, то је $f = \hat{f} \circ \pi$.

Ако је $\bar{f} : X/\rho \longrightarrow Y$ таква да $f = \bar{f} \circ \pi$, тада је $\bar{f}(x/\rho) = \bar{f}(\pi(x)) = \bar{f} \circ \pi(x) = f(x) = \hat{f}(x/\rho)$, па је $\bar{f} = \hat{f}$, што доказује јединственост. $\dashv$

Слика функције Ако је $f : X \longrightarrow Y$, тада подскуп кодомена Y:

$$\mathrm{im}(f) := f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$$

зовемо слика функције f.

$\boxed{\textbf{63.}}$ **(Разлагање функције)** Нека је $f : X \longrightarrow Y$. Тада је $f = i \circ \bar{f} \circ \pi$, где је:

- $\pi : X \longrightarrow X/\ker(f)$ канонска пројекција (која је на);
- $\bar{f} : X/\ker(f) \longrightarrow \mathrm{im}(f)$ бијекција дата са $\bar{f}(x/\ker(f)) = f(x)$;
- $i : \mathrm{im}(f) \longrightarrow Y$ инклузија дата са $i(y) = y$ (која је 1-1).

На дијаграму:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"', "\text{на}"] & Y \\
X/\ker(f) \arrow[r, "\text{бij}", "\bar{f}"'] & \mathrm{im}(f) \arrow[u, "\text{1-1}", "i"']
\end{tikzcd}$$

Специјално, имамо и да је $|X/\ker(f)| = |\mathrm{im}(f)|$.

Решење. Према универзалном својству количничког скупа еквиваленције $\ker(f)$ имамо функцију $\hat{f} : X/\ker(f) \longrightarrow Y$ дату са $\hat{f}(x/\ker(f)) = f(x)$. Очигледно је да је $\mathrm{im}(\hat{f}) = \mathrm{im}(f)$, па имамо функцију $\bar{f} : X/\ker(f) \longrightarrow \mathrm{im}(f)$ дату са $\bar{f}(x/\ker(f)) = f(x)$. Она је очигледно на, али такође, ако је $\bar{f}(x/\ker(f)) = \bar{f}(x'/\ker(f))$, тј. ако је $f(x) = f(x')$, тада је $x \ \ker(f) \ x'$, па је $x/\ker(f) = x'/\ker(f)$, што доказује да је она и 1-1.

Канонска пројекција $\pi : X \longrightarrow X/\ker(f)$ је очигледно на, а инклузија $i : \mathrm{im}(f) \longrightarrow Y$ дата са $i(y) = y$ је очигледно 1-1. Такође је $f(x) = i(f(x)) = i(\bar{f}(x/\ker(f))) = i(\bar{f}(\pi(x))) = i \circ \bar{f} \circ \pi(x)$, па је $f = i \circ \bar{f} \circ \pi$ разлагање функције f у композицију једна 1-1 фунцкије, једне бијекције и једне на функције.

Како је $\bar{f}$ бијекција, закључујемо да је $|X/\ker(f)| = |\mathrm{im}(f)|$. $\dashv$

2.9 Кардинали $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$

Пребројив скуп Кажемо да је скуп A пребројив, тј. кардиналности $\aleph_0$ (пишемо $|A| = \aleph_0$), ако постоји бијекција између A и $\mathbb{N}$.

Скуп моћи континуума Кажемо да је скуп A моћи континуума, тј. кардиналности $\mathfrak{c}$ (пишемо $|A| = \mathfrak{c}$), ако постоји бијекција између A и $\mathbb{R}$.

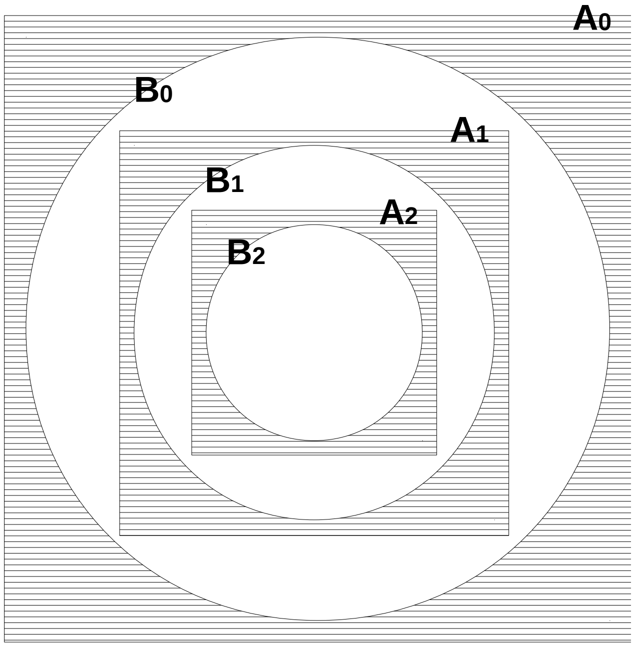
Напомена Како је композиција бијекција бијекција, ако постоји бијекција $A \longrightarrow B$ и ако је $|A| = \aleph_0$ или $|A| = \mathfrak{c}$, тада је и $|B| = \aleph_0$ или $|B| = \mathfrak{c}$.

$\boxed{\textbf{64.}}$ Ако је $A_1 \subseteq B \subseteq A$ и $f : A \longrightarrow A_1$ бијекција, тада постоји бијекција $g : A \longrightarrow B$.

Решење. Дефинишемо низ скупова A_n, B_n, $n \geq 0$ са: $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_{n+1} = f[A_n]$, $B_{n+1} = f[B_n]$. Како је $A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$, индукцијом добијамо да је $A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$, за све $n \geq 0$. Дефинишимо низ C_n, $n \geq 0$, са $C_n = A_n \smallsetminus B_n$. Како је f 1-1 имамо да је $f[C_n] = f[A_n \smallsetminus B_n] = f[A_n] \smallsetminus f[B_n] = A_{n+1} \smallsetminus B_{n+1} = C_{n+1}$.

Ставимо да је $C = \bigcup\limits_{n\geq 0} C_n$ и $D = A \smallsetminus C$. Тада је $f[C] = f[\bigcup\limits_{c\geq 0} C_n] = \bigcup\limits_{c\geq 0} f[C_n] = \bigcup\limits_{c\geq 0} C_{n+1} = \bigcup\limits_{c\geq 1} C_n$.

На следећој слици је приказана ситуација. A_n су квадрати, B_n су кругови. Скуп C чине иштрафирани делови, скуп D је беле боје.



Лако се види да је $A = C \cup D$, $C \cap D = \emptyset$, $B = f[C] \cup D$, $f[C] \cap D = \emptyset$.

Дефинишимо пресликавање $g : A \longrightarrow B$ са:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ако } x \in C \\ x & \text{ако } x \in D. \end{cases}$$

Како је $C \cap D = \emptyset$ и $C \cup D = A$, ово је добро дефинисано пресликавање на $f[C] \cup D = B$.

Докажимо да је g бијекција. Ако $y \in B$, тада важи или $y \in f[C]$ или $y \in D$. У првом случају $y = f(x)$ за неко $x \in C$, и тада је $y = g(x)$, а у другом је $y = g(y)$. Према томе g је на. Ако су $x_1 \neq x_2$ елементи из A, тада имамо четири могућности: $x_1, x_2 \in C$, $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \in C$, $x_2 \in D$ и $x_1 \in D$, $x_2 \in C$. Ако $x_1, x_2 \in C$, тада $g(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = g(x_2)$, јер је f 1-1. Ако $x_1, x_2 \in D$, опет $g(x_1) = x_1 \neq x_2 = g(x_2)$. Ако $x_1 \in C$, $x_2 \in D$, тада $g(x_1) = f(x_1) \in f[C]$, а $g(x_2) = x_2 \in D$, па како $f[C] \cap D = \emptyset$ имамо $g(x_1) \neq g(x_2)$. Слично, ако $x_1 \in D$, $x_2 \in C$ добијамо $g(x_1) \neq g(x_2)$. Дакле, g је 1-1. $\dashv$

Кантор–Бернштајнова теорема Ако постоје 1-1 функције $A \longrightarrow B$ и $B \longrightarrow A$, тада постоји бијекција $A \longrightarrow B$.

Доказ. Нека су $f : A \longrightarrow B$ и $g : B \longrightarrow A$ 1-1 функције. Тада је $g \circ f[A] \subseteq g[B] \subseteq A$ и $g \circ f : A \longrightarrow g \circ f[A]$ је бијекција. Према претходном задатку постоји бијекција $A \longrightarrow g[B]$. Такође је $g : B \longrightarrow g[B]$ бијекција, па закључујемо да постоји бијекција $A \longrightarrow B$. $\dashv$

$\boxed{\textbf{65.}}$ Доказати да су следэци скупови пребројиви:

1) $\mathbb{N}^+$; 2) $2\mathbb{N}$; 3) $\mathbb{Z}$; 4) $\{0, 1, 2\} \times \mathbb{N}$.

Решење. 1) Лако се види да је $n \mapsto n + 1$ бијекција $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^+$. 2) Такође се лако види да је $n \mapsto 2n$ бијекција $\mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$.

3) Идеја конструкције бијекције $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ је следећа: можемо да сликамо парне бројеве у позитивне целе бројеве, а непарне у негативне. Одговарајућа формула је:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{ако је } n \text{ парно} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{ако је } n \text{ непарно.} \end{cases}$$

Лако је доказати да је f бијекција $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

4) $\dashv$

66.

1) Доказати $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

2) Ако $|A| = |B| = \aleph_0$, доказати да је $|A \times B| = \aleph_0$.

Решење. $\dashv$

67. Ако је $A \subseteq \mathbb{N}$ бесконачан подскуп, доказати да је $|A| = \aleph_0$.

Решење. Познато је да сваки подскуп од $\mathbb{N}$ има минимум. Дефинишимо низ подскупова од A, A_n, и низ елемената $a_n \in A$, за $n \geq 0$, на следећи начин: $A_0 = A$, $a_0 = \min A_0$, $A_{n+1} = A_n \setminus \{a_n\}$ и $a_{n+1} = \min A_{n+1}$, за $n \geq 0$. Приметимо да је очигледно $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$. Како је A бесконачан, видимо да су сви скупови A_n непразни. Тврдимо да је $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ дато са: $f(n) = a_n$, бијекција.

Ако је $m \neq n$, нпр. $m < n$, тада $a_m \notin A_{m+1}$, па како је $A_{m+1} \supseteq A_n$, то $a_m \notin A_n$. Такође, $a_n \in A_n$, па закључујемо да $a_m \neq a_n$. Дакле, f је 1-1.

Ако $a \in A$, тада је $\{0, 1, 2, \ldots, a\} \cap A$ коначан скуп који има k елемената. Сада је лако видети да је $a = a_{k-1}$, што доказује да је f на. $\dashv$

68. (Канторова теорема) Не постоји на пресликавање $S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$.

Решење. Претпоставимо супротно, да је $f : S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ на пресликавање. Уочимо скуп $A = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$. Тада је $A \in \mathcal{P}(S)$, па како је f на имамо да је $A = f(a)$ за неко $a \in S$.

Ако $a \in A$, тада a задовољава формулу $x \notin f(x)$, тј. важи $a \notin f(a)$, па како је $f(a) = A$ добијамо $a \notin A$. $\lightning$

Ако $a \notin A$, како је $A = f(a)$ имамо да $a \notin f(a)$, тј. a задовољава формулу $x \notin f(x)$, па по дефиницији скупа A закључујемо да $a \in A$. $\lightning$ $\dashv$

69. Ако постоји бијекција $X \longrightarrow Y$, тада постоји бијекција $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$.

Решење. Нека је $f : X \longrightarrow Y$. Дефинишемо пресликавање $\bar{f} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ са: $\bar{f}(A) = f[A]$.

Ако је $\bar{f}(A_1) = \bar{f}(A_2)$, тј. ако је $f[A_1] = f[A_2]$, тада је $f^{-1}[f[A_1]] = f^{-1}[f[A_2]]$. Како је f 1-1, имамо да је $f^{-1}[f[A_i]] = A_i$, па се претходна једнакост своди на $A_1 = A_2$. Дакле, $\bar{f}$ је 1-1.

Ако $B \in \mathcal{P}(Y)$, како је f на имамо да је $B = f[f^{-1}[B]] = \bar{f}(f^{-1}[B])$, што доказује да је $\bar{f}$ на. $\dashv$

70. Доказати да постоји бијекција $\mathcal{P}(X) \longrightarrow 2^X$.

Решење. Уочимо пресликавање $\chi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow 2^X$ дато са: $\chi(A) = \chi_A$ (слика од A је карактеристична функција скупа A у универзуму X). Знамо да је $A_1 = A_2$ акко $\chi_{A_1} = \chi_{A_2}$, што доказује да је χ 1-1.

Ако је $f \in 2^X$, тада је $f = \chi_{f^{-1}[\{1\}]}$. Заиста: $f(x) = 1$ акко $f(x) \in \{1\}$ акко $x \in f^{-1}[\{1\}]$ (по дефиницији инверзне слике) акко $\chi_{f^{-1}[\{1\}]}(x) = 1$ (по дефиницији карактеристиче функције). $\dashv$

Основна теорема аритметике Сваки природан број $n > 1$ се на јединствен начин може представити као:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

где су $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ прости бројеви и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \geq 1$.

Еуклидова теорема Постоји бесконачно много простих бројева.

Из Еуклидове теореме је скуп простих бројева пребројив (као бесконачан подскуп од $\mathbb{N}$), па уочимо растући низ простих бројева $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$ (тада је $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11, \ldots$).

Користећи Кантор-Бернштајнову теорему и Основну теорему аритметике, можемо индиректно доказати да је $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$. Наиме, очигледно постоји 1-1 пресликавање $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, нпр. дато са $n \mapsto (n, 0)$. Такође, имамо пресликавање $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ дато са $(m, n) \mapsto 2^m \cdot 3^n$, које је по Основној теореми аритметике 1-1. Према Кантор-Бернштајновој теореми, постоји бијекција $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, одакле је $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

71. Доказати да је $|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = \aleph_0$, где је $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ скуп коначних подскупова од $\mathbb{N}$.

Решење. Користимо Кантор-Бернштајнову теорему. Пресликавање $n \mapsto \{n\}$ је очигледно 1-1 пресликавање $\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$. Дефинишемо пресликавање $f : \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$ са: $f(\emptyset) = 1$, $f(A) = \prod\limits_{i \in A} p_i$, где је A непразан коначан подскуп од $\mathbb{N}$, а p_i низ простих бројева. Према Основној теореми аритметике, f је 1-1. Према Кантор-Бернштајновој теореми постоји бијекција $\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$, одакле је $|\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})| = \aleph_0$. $\dashv$

3 Булове алгебре

Булова алгебра Булова алгебра је структура

$$\mathbb{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$$

где су $\wedge$ и $\vee$ бинарне операције на скупу B (које зовемо инфимум и супремум), $'$ је унарна операција на B (коју зовемо комплемент), 0 и 1 су два елемента скупа B, и важе следеће аксиоме (за све $x, y, z \in B$):

(1) $x \wedge y = y \wedge x;$ $\qquad$ $x \vee y = y \vee x;$

(2) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$ $\qquad$ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$

(3) $x \vee 0 = x;$ $\qquad$ $x \wedge 1 = x;$

(4) $x \vee x' = 1;$ $\qquad$ $x \wedge x' = 0;$

(5) $0 \neq 1.$

Комутативност и остале аксиоме Приметимо да због комутативности $\wedge$ и $\vee$ важи и:

$0 \vee x = x;$ $\qquad$ $1 \wedge x = x;$

$x' \vee x = 1;$ $\qquad$ $x' \wedge x = 0;$

$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z);$ $\qquad$ $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z).$

Тако да надаље нећемо наглашавати примену комутативности (имплицитно ћемо је примењивати).

Принцип дуалности ...

Први пример ...

Други пример ...

$\boxed{\textbf{72.}}$ Доказати $0' = 1$ и $1' = 0$.

Решење. Докажимо само $0' = 1$:

$$0' \overset{3.}{=} 0' \vee 0 \overset{1.}{=} 0 \vee 0' \overset{4.}{=} 1.$$

$\dashv$

$\boxed{\textbf{73.}}$ Доказати $(x')' = x$.

Решење.

$$\begin{aligned}(x')' &= (x')' \vee 0\\ &= (x')' \vee (x \wedge x')\\ &= ((x')' \vee x) \wedge ((x')' \vee x')\\ &= ((x')' \vee x) \wedge 1\\ &= ((x')' \vee x) \wedge (x' \vee x)\\ &= ((x')' \wedge x') \vee x\\ &= 0 \vee x\\ &= x.\end{aligned}$$

$\dashv$

$\boxed{\textbf{74.}}$ Доказати законе идемпотенције $x \wedge x = x$ и $x \vee x = x$.

Решење. Докажимо само $x \wedge x = x$.

$$\begin{aligned}x \wedge x &= (x \wedge x) \vee 0\\ &= (x \wedge x) \vee (x \wedge x')\\ &= x \wedge (x \vee x')\\ &= x \wedge 1\\ &= x.\end{aligned}$$

$\dashv$

$\boxed{\textbf{75.}}$ Доказати $x \wedge 0 = 0$ и $x \vee 1 = 1$.

Решење. Докажимо само $x \wedge 0 = 0$.

$$\begin{aligned}x \wedge 0 &= (x \wedge 0) \vee 0\\ &= (x \wedge 0) \vee (x \wedge x')\\ &= x \wedge (0 \vee x')\\ &= x \wedge x'\\ &= 0.\end{aligned}$$

$\dashv$

$\boxed{\textbf{76.}}$ Доказати законе апсорбције $x \wedge (x \vee y) = x$ и $x \vee (x \wedge y) = x$.

Решење. Докажимо само $x \wedge (x \vee y) = x$.

$$\begin{aligned} x \wedge (x \vee y) &= (x \vee 0) \wedge (x \vee y) \\ &= x \vee (0 \wedge y) \\ &= x \vee 0 \\ &= x. \end{aligned}$$

$\dashv$

77. Доказати $x \wedge z = y \wedge z$ и $x \vee z = y \vee z$ ако и само ако $x = y$.

Решење. ($\Leftarrow$) Овај смер је тривијалан.

($\Rightarrow$) Претпоставимо $x \wedge z = y \wedge z$ и $x \vee z = y \vee z$.

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (x \vee z) \\ &= x \wedge (y \vee z), \text{ по претпоставци } x \vee z = y \vee z \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ &= (x \wedge y) \vee (y \wedge z), \text{ по претпоставци } x \wedge z = y \wedge z \\ &= (x \vee z) \wedge y \\ &= (y \vee z) \wedge y, \text{ по претпоставци } x \vee z = y \vee z \\ &= y. \end{aligned}$$

$\dashv$

78. Доказати:

1) $x \vee z = y \vee z$ и $x \vee z' = y \vee z'$ ако и само ако $x = y$;

2) $x \wedge z = y \wedge z$ и $x \wedge z' = y \wedge z'$ ако и само ако $x = y$.

Решење. Докажимо само прво тврђење. Друго се доказује слично.

($\Leftarrow$) Овај смер је тривијалан.

($\Rightarrow$) Претпоставимо $x \vee z = y \vee z$ и $x \vee z' = y \vee z'$.

$$\begin{aligned} x &= x \vee 0 \\ &= x \vee (z \wedge z') \\ &= (x \vee z) \wedge (x \vee z') \\ &= (y \vee z) \wedge (y \vee z'), \text{ по претпоставкама } x \vee z = y \vee z, x \vee z' = y \vee z' \\ &= y \vee (z \wedge z') \\ &= y \vee 0 \\ &= y. \end{aligned}$$

$\dashv$

79. Доказати асоцијативне законе $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ и $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

Решење. Означимо $a = x \wedge (y \wedge z)$, $b = (x \wedge y) \wedge z$ и $c = x$.

$a \vee c = (x \wedge (y \wedge z)) \vee x = x$, $b \vee c = ((x \wedge y) \wedge z) \vee x = ((x \wedge y) \vee x) \wedge (z \vee x) = x \wedge (z \vee x) = x$. Дакле, $a \vee c = b \vee c$.

$a \vee c' = (x \wedge (y \wedge z)) \vee x' = (x \vee x') \wedge ((y \wedge z) \vee x') = 1 \wedge ((y \wedge z) \vee x') = (y \wedge z) \vee x'$, $b \vee c' = ((x \wedge y) \wedge z) \vee x' = ((x \wedge y) \vee x') \wedge (z \vee x') = ((x \vee x') \wedge (y \vee x')) \wedge (z \vee x') = (1 \wedge (y \vee x')) \wedge (z \vee x') = (y \vee x') \wedge (z \vee x') = (y \wedge z) \vee x'$. Дакле, $a \vee c' = b \vee c'$.

Према претходном задатку $a = b$, тј. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$. Слично се доказује и други закон. $\dashv$

80. Доказати $x \wedge y = 0$ и $x \vee y = 1$ ако и само ако $y = x'$.

Решење. ($\Leftarrow$) Овај смер следи директно из аксиоме 4.

($\Rightarrow$) Претпоставимо $x \wedge y = 0$ и $x \vee y = 1$.

$$\begin{aligned} y &= y \vee 0 \\ &= y \vee (x \wedge x') \\ &= (y \vee x) \wedge (y \vee x') \\ &= 1 \wedge (y \vee x'), \text{ по претпоставци } x \vee y = 1 \\ &= (x \vee x') \wedge (y \vee x') \\ &= (x \wedge y) \vee x' \\ &= 0 \vee x', \text{ по претпоставци } x \wedge y = 0 \\ &= x'. \end{aligned}$$

$\dashv$

81. Доказати Де Морганове законе $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ и $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

Решење. Означимо $a = x \wedge y$ и $b = x' \vee y'$. $a \wedge b = (x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$, $a \vee b = (x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = (1 \vee y') \wedge (1 \vee x') = 1 \wedge 1 = 1$. Према претходном задатку је $b = a'$, тј. $x' \vee y' = (x \wedge y)'$.

Слично доказујемо и други закон. $\dashv$

82. Доказати да су следеће ствари еквивалентне:

(1) $x \wedge y = x$; (2) $x \vee y = y$; (3) $x' \vee y = 1$; (4) $x \wedge y' = 0$.

Решење. (1) $\Rightarrow$ (2): Претпоставимо $x \wedge y = x$. Тада је $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Претпоставимо $x \vee y = y$. Тада је $x' \vee y = x' \vee x \vee y = 1 \vee y = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Претпоставимо $x' \vee y = 1$. Тада је $x \wedge y' = x'' \wedge y' = (x' \vee y)' = 1' = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Претпоставимо $x \wedge y' = 0$. Тада је $x \wedge y = (x \wedge y) \vee 0 = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge 1 = x$. $\dashv$

Поредак Дефинишемо на B релацију $\leq$ са: $x \leq y$ ако и само ако $x \wedge y = x$ (према претходном задатку ако и само ако $x \vee y = y$, $x' \vee y = 1$ или $x \wedge y' = 0$).

83. Доказати да је $\leq$ поредак на B, тј. $\leq$ је рефлексива, антисиметрична и транзитивна релација.

Решење. Како је $x \wedge x = x$, то је $x \leq x$, тј. $\leq$ је рефлексивна.

Ако је $x \leq y$ и $y \leq x$, тада је $x \wedge y = x$ и $x \wedge y = y$. Одатле $x = y$, тј. $\leq$ је антисиметрична.

Ако је $x \leq y$ и $y \leq z$, тада је $x \wedge y = x$ и $y \wedge z = y$. $x \wedge z = x \wedge y \wedge y = x \wedge y = x$, одакле је $x \leq z$, тј. $\leq$ је транзитивна. $\dashv$

84. Доказати:

1) $0 \leq x$ и $x \leq 1$;

2) ако $x \leq y$ и $u \leq v$, тада $x \wedge u \leq y \wedge v$ и $x \vee u \leq y \vee v$;

3) $x \leq y$ ако и само ако $y' \leq x'$.

Решење. 1) $0 \leq x$ јер $0 \wedge x = 0$, и $x \leq 1$ јер $x \wedge 1 = x$.

2) Нека је $x \leq y$ и $u \leq v$, тј. $x \wedge y = x$ и $u \wedge v = u$, али такође $x \vee y = y$ и $u \vee v = v$. Тада $(x \wedge u) \wedge (y \wedge v) = (x \wedge y) \wedge (u \wedge v) = x \wedge u$, тј. $x \wedge u \leq y \wedge v$. Такође, $(x \vee u) \vee (y \vee v) = (x \vee y) \vee (u \vee v) = y \vee v$, тј. $x \vee u \leq y \vee v$.

3) $x \leq y$ ако и само ако $x \wedge y = x$ ако и само ако $(x \wedge y)' = x'$ ако и само ако $x' \vee y' = x'$ ако и само ако $y' \leq x'$. ⊣

$\boxed{\textbf{85.}}$ Доказати:

1) $x \wedge y \leq x, y$ и $x, y \leq x \vee y$;

2) ако $z \leq x, y$, тада $z \leq x \wedge y$.

3) ако $x, y \leq z$, тада $x \vee y \leq z$.

Решење. 1)$(x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$, па је $x \wedge y \leq x$. Слично, $x \wedge y \leq y$. Такође, $x \wedge (x \vee y) = x$, па је $x \leq x \vee y$. Слично, $y \leq x \vee y$.

2) Нека $z \leq x, y$. Тада $z = z \wedge z \leq x \wedge y$.

3) Нека $x, y \leq z$. Тада $x \vee y \leq z \vee z = z$. ⊣

Линденбаумова алгебра ...

ТЕКСТ НАДАЉЕ СУ ВЕЖБЕ ИЗ ШКОЛСКЕ 2013/14.

Исказна алгебра

Означимо са 2 скуп $\{0, 1\}$. На скупу 2 дефинишемо једну унарну операцију: негација ($\neg$), и следеће бинарне операције: конјукција ($\wedge$), дисјункција ($\vee$), импликација ($\Rightarrow$), еквиваленција ($\Leftrightarrow$), ексклузивна дисјункција ($\veebar$), Шеферова операција ($\uparrow$) и Лукашиевичева операција ($\downarrow$), које су дате следећим таблицама:

a	$\neg a$
0	1
1	0

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$	$a \veebar b$	$a \uparrow b$	$a \downarrow b$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Неке особине ових операција

- $\wedge, \vee, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow$ су комутативне, што се лако види из таблице;
- $\Rightarrow$ није комутативна, јер $0 \Rightarrow 1 = 1$, а $1 \Rightarrow 0 = 0$;
- $\wedge, \vee, \Leftrightarrow, \veebar$ су асоцијативне (Проверите!);
- $\Rightarrow$ није асоцијативна, јер $0 \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) = 0 \Rightarrow 0 = 1$, а $(0 \Rightarrow 1) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$;
- $\uparrow, \downarrow$ нису асоцијативне, јер нпр. $0 \uparrow (1 \uparrow 1) = 0 \uparrow 0 = 1$, а $(0 \uparrow 1) \uparrow 1 = 1 \uparrow 1 = 0$ и слично $0 \downarrow (1 \downarrow 1) = 0 \downarrow 0 = 1$, а $(0 \downarrow 1) \downarrow 1 = 0 \downarrow 1 = 0$;
- $\neg(\neg a) = a$, $a \Rightarrow b = (\neg a) \vee b = \neg(a \wedge (\neg b))$, $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$, $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$, што се лако да израчунати;
- $a \veebar b = \neg(a \Leftrightarrow b)$, $a \uparrow b = \neg(a \wedge b)$, $a \downarrow b = \neg(a \vee b)$, што се види из таблице.

Договор о приоритетима и брисању заграда Уводимо договор да је $\neg$ "највишег" приоритета, $\wedge, \vee, \uparrow, \downarrow$ су "средњег приоритета", а $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar$ су "најнижег" приоритета. Ово значи да када напишемо $\neg a \Rightarrow b$, то значи $(\neg a) \Rightarrow b$, а не $\neg(a \Rightarrow b)$. Слично $a \wedge b \Rightarrow c \vee d$ значи $(a \wedge b) \Rightarrow (c \vee d)$, а не неки други распоред заграда. Ово такође значи да записи $a \wedge b \vee c$, $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ и $a \Rightarrow b \Leftrightarrow c$ немају смисла, и да морамо поставити заграде. Записи $a \wedge b \wedge c$, $a \vee b \vee c$, $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$ имају смисла јер смо уочили да за ове операције важи асоцијативност, док запис $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ никада неће имати смисла без постављених заграда.

Исказна логика

Исказни језик чине следећи симболи:

1. везници: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow$;

2. скуп исказних слова P (ако се не каже другачије, претпостављамо да је P пребројив; исказна слова обично означавамо са $p, q, r, s, \ldots, p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$);

3. помоћни симболи: ( ).

Исказна формула се гради на следећи начин:

1. исказно слово је исказна формула;

2. ако су F и G исказне формуле, тада су $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, $(F \Leftrightarrow G)$, $(F \veebar G)$, $(F \uparrow G)$, $(F \downarrow G)$ исказне формуле;

3. свака исказна формула се добија коначном применом корака 1. и 2.

Скуп изказних формула означавамо са For.

Напомене

- Према дефиницији свака формула у себи садржи само коначан број симбола; дакле, не постоји формула која у себи има бесконачан низ симбола.

- Строго формално гледано $\neg p$, $\neg\neg p$, $p \wedge \neg q$, $\neg p \Rightarrow q$ нису формуле. Шта јесу формуле? $(\neg p)$, $(\neg(\neg p))$, $(p \wedge (\neg q))$, $((\neg p) \Rightarrow q)$ и $(\neg(p \Rightarrow q))$ јесу.

- Договоримо се да обришемо заграде ако је недвосмислено како је формула изграђена. То значи да ћемо $\neg p$, $\neg\neg p$ и $p \wedge \neg q$, јер је заиста недвосмислено како су оне изграђене. Али није недвосмислено како је $\neg p \Rightarrow q$ изграђена!

- Договоримо се о приоритету везника: $\neg$ је "највишег" приоритета, $\vee, \wedge, \uparrow, \downarrow$ су "средњег приоритета", а $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar$ су најнижег приоритета. Тада је јасно да је $\neg p \Rightarrow q$ заправо формула $((\neg p) \Rightarrow q)$, и да је $p \wedge q \Rightarrow r \vee s$ формула $((p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s))$.

- Код $p \wedge q \wedge r$, $p \wedge q \vee r$, $p \Rightarrow q \Rightarrow r$, $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$ и даље није јасно како смо их изградили, тако да оне и даље нису формуле. Због неких особина које ћемо увести, за прву и последњу од њих ће бити свеједно којим редоследом су изграђене, па ћемо их због тога тако записивати, док за другу и трећу никада неће бити јасно како смо их изградили, тј. њих никада нећемо сматрати формулама.

Валуација је било које пресликавање $v : P \longrightarrow 2$. Дакле, то је пресликавање које сваком исказном слову додељује вредност 0 (тада кажемо да је то слово у валуацији v нетачно) или 1 (тада кажемо да је то слово у валуацији v тачно). Ако је $p \in P$, $a \in 2$ и $v(p) = a$, тада ћемо краће записивати $p =_v a$. Будите пажљиви, овде дефинишемо ознаку $=_v$ и очекујемо да је са њене леве стране елемент из P, а са њене десне стране елемент из 2.

Интерпретација при валуацији v Ако је дата валуација v, интерпретација при валуацији v је пресликавање $\hat{v} : \mathsf{For} \longrightarrow 2$ дефинисано са:

- $\hat{v}(p) = v(p)$, за $p \in P$;
- $\hat{v}(\neg F) = \neg\hat{v}(F)$, за $F \in \mathsf{For}$;
- $\hat{v}(F \star G) = \hat{v}(F) \star \hat{v}(G)$, за $F, G \in \mathsf{For}$ и $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow\}$.

Приметите да су ознаке $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow$ на левој страни једнакости ознаке за логичке везнике, док су на десној страни то ознаке за операције исказне алгебре. Дакле, интерпретација при валуацији v свакој формули додељује вредност 0 (тада кажемо да је та формула нетачна у валуацији v) или 1 (тада кажемо да је та формула тачна у валуацији v). Ако је $F \in \mathsf{For}$, $a \in 2$ и $\hat{v}(F) = a$, тада ћемо краће записивати $F =_v a$. Овим смо проширили дефиницију ознаке $=_v$, и тада је са њене леве стране исказна формула, а са њене десне стране елемент из 2.

Таутологија и контрадикција За формулу F кажемо да је таутологија, ако за сваку валуацију $v : P \longrightarrow 2$ важи $F =_v 1$, тј. ако је F тачна у свакој валуацији. Формула F је контрадикција, ако за сваку валуацију $v : P \longrightarrow 2$ важи $F =_v 0$, тј. ако је F нетачна у свакој валуацији.

Коментар Већ смо приметили да свака формула у себи садржи само коначно много симбола, па према томе садржи и само коначно много исказних слова из P. За формулу F, са $P(F)$ означавамо (коначан) скуп исказних слова који се у њој појављују. Такође можемо да приметимо (то ћемо касније и строго доказати) да вредност формуле F у валуацији v зависи само од вредности валуације v на скупу слова формуле F, $P(F)$. Према томе, да ли је формула таутологија/контрадикција можемо да кажемо већ ако израчунамо њеe вредности у свим валуацијама $v : P(F) \longrightarrow 2$, којих више нема бесконачно, већ их има 2^n, где је n број слова који се појављује у формули F.

Таутологије

Важне таутологије

1. $p \vee \neg p$;
2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$;
3. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$;
4. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$;
5. $p \wedge p \Leftrightarrow p$, $p \vee p \Leftrightarrow p$;
6. $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$, $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$;
7. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$;
8. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$, $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$;
9. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
10. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

$\boxed{\textbf{86.}}$ Свођењем на противречност доказати да је формула таутологија:

1. $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$;
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$;
3. $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.

Решење.

1. Претпоставимо супротно да формула $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ није таутологија. По дефиницији то значи да постоји валуација v таква да $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q =_v 0$. Тада је $p \wedge (p \Rightarrow q) =_v 1$ и $q =_v 0$. Из прве једнакости је тада $p =_v 1$ и $p \Rightarrow q =_v 1$ $(\star)$. Но тада из $p =_v 1$ и $q =_v 0$ следи $p \Rightarrow q =_v 0$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

2. Претпоставимо супротно да формула $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ није таутологија. Тада постоји валуација v таква да $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) =_v 0$. Тада је $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) =_v 1$ $(\star)$ и $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) =_v 0$. Из друге једнакости је даље $p \Rightarrow q =_v 1$ и $p \Rightarrow r =_v 0$, из које је даље $p =_v 1$ и $r =_v 0$. Како је $p \Rightarrow q =_v 1$ и $p =_v 1$, то је и $q =_v 1$. Коначно, тада је $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) =_v 1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) = 1 \Rightarrow 0 = 0$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

3. Претпоставимо супротно да формула $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ није таутологија. Тада постоји валуација v таква да $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) =_v 0$. Имамо два случаја.

   (1) $p \vee q \Rightarrow r =_v 1$ $(\star)$ и $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) =_v 0$. Из друге једнакости закључујемо да је $p \Rightarrow r =_v 0$ или $q \Rightarrow r =_v 0$, па имамо два подслучаја.

      i. $p \Rightarrow r =_v 0$. Одавде је $p =_v 1$ и $r =_v 0$. Тада је $p \vee q \Rightarrow r =_v 1 \vee v(q) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

      ii. $q \Rightarrow r =_v 0$. Одавде је $q =_v 1$ и $r =_v 0$. Тада је $p \vee q \Rightarrow r =_v v(p) \vee 1 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

      Како оба подслучаја нису могућа, то ни први случај није могућ.

   (2) $p \vee q \Rightarrow r =_v 0$ и $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) =_v 1$. Из прве једнакости закључујемо да је $p \vee q =_v 1$ $(\sharp)$ и $r =_v 0$, а из друге да је $p \Rightarrow r =_v 1$ и $q \Rightarrow r =_v 1$. Како је $p \Rightarrow r =_v 1$ и $r =_v 0$, закључујемо и да је $p =_v 0$, и слично из $q \Rightarrow r =_v 1$ и $r =_v 0$ следи да је $q =_v 0$. Но, тада је $p \vee q =_v 0 \vee 0 = 0$, што је у контрадикцији са $(\sharp)$.

   Како оба случаја нису могућа, то ни полазна претпоставка не важи.

$\dashv$

87. Нека су A, B, C, D произвољне исказне формуле.

1. Ако су $A \Rightarrow B \vee C$, $B \Rightarrow C$ и $C \veebar D$ таутологије, доказати да је и $D \Rightarrow \neg A$ таутологија.

2. Ако је $A \vee B$ таутологија и $C \wedge D$ контрадикција, доказати да је $(B \Rightarrow D) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$ таутологија.

Решење.

1. Претпоставимо супротно, да $D \Rightarrow \neg A$ није таутологија. Тада постоји валуација v таква да $D \Rightarrow \neg A =_v 0$. Тада је $D =_v 1$ и $\neg A =_v 0$, тј. $A =_v 1$. Из $D =_v 1$ и $C \veebar D =_v 1$ (јер је $C \veebar D$ таутологија) следи да је $C =_v 0$. Из $C =_v 0$ и $B \Rightarrow C =_v 1$ (јер је $B \Rightarrow C$ таутологија) следи $B =_v 0$. Тада је $A \Rightarrow B \vee C =_v 1 \Rightarrow 0 \vee 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$, што је контардикција са претпоставком да је $A \Rightarrow B \vee C$ таутологија.

2. Претпоставимо супротно, да $(B \Rightarrow D) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$ таутологија. Тада постоји валуација v таква да је $(B \Rightarrow D) \Rightarrow (C \Rightarrow A) =_v 0$, тј. $B \Rightarrow D =_v 1$ $(\star)$ и $C \Rightarrow A =_v 0$, одакле је и $C =_v 1$ и $A =_v 0$. Из $A =_v 0$ и $A \vee B =_v 1$ (јер је $A \vee B$ таутологија) следи $B =_v 1$. Из $C =_v 1$ и $C \wedge D =_v 0$ (јер је $C \wedge D$ контрадикција) следи $D =_v 0$. Тада је $B \Rightarrow D =_v 1 \Rightarrow 0 = 0$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

$\dashv$

88. Табличном методом доказати да је формула таутологија:

1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$;
2. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$.

Решење.

1. Докажимо да је формула тачна у свим валуацијама:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	формула
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

2. Докажимо да је формула тачна у свим валуацијама:

p	q	r	$A = p \Rightarrow q$	$B = p \Rightarrow r$	$C = q \wedge r$	$A \wedge B$	$p \Rightarrow C$	формула
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1

$\dashv$

89. Низови формула A_n и B_n су дефинисани са:

$$A_0 = p,\ B_0 = q,\ A_{n+1} = A_n \wedge B_n,\ B_{n+1} = B_n \Rightarrow A_n,\ n \geq 0.$$

Доказати да ниједна формула A_n и ниједна формула B_n није ни таутологија ни контрадикција.

Решење. Напишимо таблице првих неколико чланова датих низова.

$p = A_0$	$q = B_0$	A_1	B_1	A_2	B_2	A_3	B_3
0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Инспирисани таблицом ћемо доказати неколико тврђења, из којих директно следи решење задатка.

Тврђење 1. Нека је u произвољна валуација таква да је $u(p) = 0$. Тада је $A_n =_u 0$, $n \geq 0$.

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по n. За $n = 0$, $A_0 = p =_u 0$, по избору валуације u.

Докажимо корак $n \to n+1$. Претпоставимо да $A_n =_u 0$. Тада је $A_{n+1} = A_n \wedge B_n =_u 0 \wedge \hat{u}(B_n) = 0$. ■

Тврђење 2. Нека је u произвољна валуација таква да је $u(p) = 0$ и $u(q) = 0$. Тада је $B_{2n} =_u 0$, $B_{2n+1} =_u 1$, $n \geq 0$.

Доказ. Како валуација u задовољава услове Тврђења 1, то је $A_n =_u 0$. Доказ Тврђења 2. изводимо индукцијом по n. За $n = 0$, $B_0 = q =_u 0$, и $B_1 = q \Rightarrow p =_u 0 \Rightarrow 0 = 1$, по избору валуације u.

Докажимо корак $n \to n+1$. Претпоставимо да $B_{2n} =_u 0$ и $B_{2n+1} =_u 1$. Тада је $B_{2n+2} = B_{2n+1} \Rightarrow A_{2n+1} =_u 1 \Rightarrow 0 = 0$, и $B_{2n+3} = B_{2n+2} \Rightarrow A_{2n+2} =_u 0 \Rightarrow 0 = 1$. ■

Тврђење 3. Нека је u произвољна валуација таква да је $u(p) = 0$ и $u(q) = 1$. Тада је $B_{2n} =_u 1$, $B_{2n+1} =_u 0$, $n \geq 0$.

Доказ. Како валуација u задовољава услове Тврђења 1, то је $A_n =_u 0$. Доказ Тврђења 3. изводимо индукцијом по n. За $n = 0$, $B_0 = q =_u 1$, и $B_1 = q \Rightarrow p =_u 1 \Rightarrow 0 = 0$, по избору валуације u.

Докажимо корак $n \to n+1$. Претпоставимо да $B_{2n} =_u 1$ и $B_{2n+1} =_u 0$. Тада је $B_{2n+2} = B_{2n+1} \Rightarrow A_{2n+1} =_u 0 \Rightarrow 0 = 1$, и $B_{2n+3} = B_{2n+2} \Rightarrow A_{2n+2} =_u 1 \Rightarrow 0 = 0$. ■

Тврђење 4. Нека је u произвољна валуација таква да је $u(p) = 1$ и $u(q) = 1$. Тада је $A_n =_u 1$, $B_n =_u 1$, $n \geq 0$.

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по n. За $n = 0$, $A_0 = p =_u 1$, и $B_0 = q =_u 1$, по избору валуације u.

Докажимо корак $n \to n+1$. Претпоставимо да $A_n =_u 1$ и $B_n =_u 1$. Тада је $A_{n+1} = A_n \wedge B_n =_u 1 \wedge 1 = 1$, и $B_{n+1} = B_n \Rightarrow A_n =_u 1 \Rightarrow 1 = 1$. ■

Према Тврђењу 1. ниједна формуле A_n није таутологија, а према Тврђењу 4. ниједна формула A_n није контрадикција. Према Тврђењу 4. ниједна формула B_n такође није контрадикција. Према Тврђењу 2. ниједна парно индексирана формула B_n није таутологија, а према Тврђењу 3. ниједна непарно индексирана формула B_n није таутологија. ⊣

90. Низови формула A_n и B_n су дефинисани са:

$$A_0 = p,\ B_0 = q,\ A_{n+1} = (A_n \Rightarrow B_n) \Rightarrow A_n,\ B_{n+1} = A_n \Rightarrow B_n,\ n \geq 0.$$

Доказати да ниједна формула A_n и ниједна формула B_n није ни таутологија ни контрадикција.

Решење. Напишимо таблице првих неколико чланова датих низова.

$p = A_0$	$q = B_0$	A_1	B_1	A_2	B_2
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Инспирисани таблицом ћемо доказати неколико тврђења, из којих директно следи решење задатка.

Тврђење 1. Нека је u произвољна валуација таква да је $u(p) = 0$ и $u(q) = 1$. Тада је $A_n =_u 0$ и $B_n =_u 1$, $n \geq 0$.

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по n. За $n = 0$, $A_0 = p =_u 0$ и $B_0 = q =_u 1$, по избору валуације u.

Докажимо корак $n \to n+1$. Претпоставимо да $A_n =_u 0$ и $B_n =_u 1$. Тада је $A_{n+1} = (A_n \Rightarrow B_n) \Rightarrow A_n =_u (0 \Rightarrow 1) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$, и $B_{n+1} = A_n \Rightarrow B_n =_u 0 \Rightarrow 1 = 1$. ■

Тврђење 2. Нека је u произвољна валуација таква да је $u(p) = 1$ и $u(q) = 0$. Тада је $A_n =_u 1$ и $B_n =_u 0$, $n \geq 0$.

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по n. За $n = 0$, $A_0 = p =_u 1$ и $B_0 = q =_u 0$, по избору валуације u.

Докажимо корак $n \to n+1$. Претпоставимо да $A_n =_u 1$ и $B_n =_u 0$. Тада је $A_{n+1} = (A_n \Rightarrow B_n) \Rightarrow A_n =_u (1 \Rightarrow 0) \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow 1 = 1$, и $B_{n+1} = A_n \Rightarrow B_n =_u 1 \Rightarrow 0 = 0$. ■

Према Тврђењу 1. ниједна формула A_n није таутологија и ниједна формула B_n није контрадикција. Према Тврђењу 2. ниједна формула A_n није контрадикција и ниједна формула B_n није таутологија. ⊣

91. Низ формула A_n је дефинисан са:

$$A_0 = p,\ A_1 = (q \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p,\ A_{n+2} = A_{n+1} \Leftrightarrow A_n,\ n \geq 0.$$

Испитати који чланови низа A_n су таутологија, а који контрадикције.

Решење. Напишимо таблице првих неколико чланова датог низа.

p	q	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Инспирисани таблицом ћемо доказати два тврђења, из којих директно следи решење задатка.

Тврђење 1. Нека је v валуација таква да $v(p) = 0$. Тада: $A_{3n} =_v 0$, $A_{3n+1} =_v 1$, $A_{3n+2} =_v 0$, за $n \geq 0$.

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по n. За $n = 0$ тврђење следи према прва два реда таблице за A_0, A_1 и A_2.

Претпоставимо да важи: $A_{3n} =_v 0$, $A_{3n+1} =_v 1$, $A_{3n+2} =_v 0$, и докажимо: $A_{3n+3} =_v 0$, $A_{3n+4} =_v 1$, $A_{3n+5} =_v 0$.

$A_{3n+3} = A_{3n+2} \Leftrightarrow A_{3n+1} \overset{\text{их}}{=}_v 0 \Leftrightarrow 1 = 0$; $A_{3n+4} = A_{3n+3} \Leftrightarrow A_{3n+2} =_v 0 \Leftrightarrow 0 = 1$; $A_{3n+5} = A_{3n+4} \Leftrightarrow A_{3n+3} =_v 1 \Leftrightarrow 0 = 0$. ■

Тврђење 2. Нека је v валуација таква да $v(p) = 1$. Тада: $A_{3n} =_v 1$, $A_{3n+1} =_v 0$, $A_{3n+2} =_v 0$, за $n \geq 0$.

Доказ. Доказ се изводи индукцијом по n, слично претходном. Доказ остављамо за вежбу. ■

Последица. Директно према тврђењима следи: A_{3n} и A_{3n+1} нису нити контрадикције нити таутологије, за све $n \geq 0$. A_{3n+2} су контрадикције, за $n \geq 0$. ⊣

92. Низови формула A_n, B_n, C_n су дефинисани са:

$$A_0 = p,\ B_0 = \neg p,\ C_0 = p \Rightarrow p,\ A_{n+1} = B_n \Rightarrow C_n,\ B_{n+1} = C_n \Rightarrow A_n,\ C_{n+1} = A_n \Rightarrow B_n,\ n \geq 0.$$

Испитати који чланови ових низова су таутологије, а који контрадикције.

Решење. Напишимо таблице првих неколико чланова датих низова.

p	A_0	B_0	C_0	A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2	A_3	B_3	C_3
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1

Инспирисани таблицом ћемо доказати два тврђења, из којих директно следи решење задатка.

Тврђење 1. Нека је v валуација таква да $v(p) = 0$. Тада за $n \geq 0$:

$$\begin{array}{lll} A_{3n} =_v 0; & B_{3n} =_v 1; & C_{3n} =_v 1; \\ A_{3n+1} =_v 1; & B_{3n+1} =_v 0; & C_{3n+1} =_v 1; \\ A_{3n+2} =_v 1; & B_{3n+2} =_v 1; & C_{3n+2} =_v 0. \end{array}$$

Доказ. Тврђење доказујемо индукцијом по n. За $n = 0$ тврђене важи, што се лако види из таблице. Претпоставимо да тврђење важи за n и докажимо га за $n + 1$.

$A_{3n+3} = B_{3n+2} \Rightarrow C_{3n+2} \overset{\text{их}}{=}_v 1 \Rightarrow 0 = 0.$
$B_{3n+3} = C_{3n+2} \Rightarrow A_{3n+2} \overset{\text{их}}{=}_v 0 \Rightarrow 1 = 1.$
$C_{3n+3} = A_{3n+2} \Rightarrow B_{3n+2} \overset{\text{их}}{=}_v 1 \Rightarrow 1 = 1.$
$A_{3n+4} = B_{3n+3} \Rightarrow C_{3n+3} =_v 1 \Rightarrow 1 = 1.$
$B_{3n+4} = C_{3n+3} \Rightarrow A_{3n+3} =_v 1 \Rightarrow 0 = 0.$
$C_{3n+4} = A_{3n+3} \Rightarrow B_{3n+3} =_v 0 \Rightarrow 1 = 1.$
$A_{3n+5} = B_{3n+4} \Rightarrow C_{3n+4} =_v 0 \Rightarrow 1 = 1.$
$B_{3n+5} = C_{3n+4} \Rightarrow A_{3n+4} =_v 1 \Rightarrow 1 = 1.$
$C_{3n+5} = A_{3n+4} \Rightarrow B_{3n+4} =_v 1 \Rightarrow 0 = 0.$ ■

Тврђење 2. Нека је v валуација таква да $v(p) = 0$. Тада за $n \geq 0$:

$$\begin{array}{lll} A_{3n} =_v 1; & B_{3n} =_v 0; & C_{3n} =_v 1; \\ A_{3n+1} =_v 1; & B_{3n+1} =_v 1; & C_{3n+1} =_v 0; \\ A_{3n+2} =_v 0; & B_{3n+2} =_v 1; & C_{3n+2} =_v 1. \end{array}$$

Доказ. Слично као доказ претходног тврђења. ■

Последица. Према тврђењима формле C_{3n}, A_{3n+1} и B_{3n+2} су таутологије, за $n \geq 0$, док остале формуле нису ни таутологије ни контрадикције. ⊣

Елементарна еквиваленција, сложеност

Елементарна еквиваленција Кажемо да су формуле A и B елементарно еквивалентне, у ознаци $A \equiv B$, ако је $A \Leftrightarrow B$ таутологија. Другим речима, ако за сваку валуацију v важи $\hat{v}(A) = \hat{v}(B)$.

$\boxed{\textbf{93.}}$ Доказати да је $\equiv$ релација еквиваленције на скупу For.

Решење. Нека је v произвољна валуација. Како је $\hat{v}(A) = \hat{v}(A)$, важи $A \equiv A$, тј. $\equiv$ је рефлексивна.

Ако је $A \equiv B$, тада је $\hat{v}(A) = \hat{v}(B)$, па је и $\hat{v}(B) = \hat{v}(A)$, тј. $B \equiv A$. Дакле, $\equiv$ је симетрична.

Ако је $A \equiv B$ и $B \equiv C$, тада је $\hat{v}(A) = \hat{v}(B)$ и $\hat{v}(B) = \hat{v}(C)$, па је и $\hat{v}(A) = \hat{v}(c)$, тј. $A \equiv C$. Дакле, $\equiv$ је и транзитивна. ⊣

94. Нека је $A \equiv B$ и $C \equiv D$. Доказати да је тада $\neg A \equiv \neg B$ и $A \star C \equiv B \star D$, за све $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow\}$.

Решење. Нека је v произвољна валуација. Из $A \equiv B$ следи $\hat{v}(A) = \hat{v}(B)$, одакле је и $\neg\hat{v}(A) = \neg\hat{v}(B)$, па је по дефиницији интерпретације и $\hat{v}(\neg A) = \hat{v}(\neg B)$, тј. $\neg A \equiv \neg B$.

Нека је v произвољна валуација. Из $A \equiv B$ следи $\hat{v}(A) = \hat{v}(B)$, и из $C \equiv D$ следи $\hat{v}(C) = \hat{v}(D)$. Тада је за сваки везник $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow\}$ важи $\hat{v}(A \star C) = \hat{v}(A) \star \hat{v}(C) = \hat{v}(B) \star \hat{v}(D) = \hat{v}(B \star D)$. Дакле, $A \star C \equiv B \star D$, где прва и трећа једнакост важи по дефиницији интерпретације, а друга важи из претходних једнакости. $\dashv$

Сложеност формуле Сложеност формуле A је број везника у формули A, који означавамо са $\mathrm{sl}(A)$. Индуктивно $\mathrm{sl}(A)$ можемо да дефинишемо на следећи начин: $\mathrm{sl}(p) = 0$, за $p \in P$; $\mathrm{sl}(\neg A) = 1 + \mathrm{sl}(A)$, $\mathrm{sl}(A \wedge B) = 1 + \mathrm{sl}(A) + \mathrm{sl}(B)$ и слично за остале везнике.

95. Нека је F формула и u и v две валуације такве да $u(p) = v(p)$, за све $p \in P(F)$ (дакле, u и v се поклапају на словима формуле F). Доказати да је $\hat{u}(F) = \hat{v}(F)$. Другим речима, доказати да вредност формуле F у некој валуацији зависи само од вредности те валуације на словима формуле F.

Решење. Доказ изводимо индукцијом по сложености формуле F.

Ако је $\mathrm{sl}(F) = 0$, тада је $F = p$, за неко $p \in P$. Приметите да је тада $P(F) = \{p\}$, па према претпоставци $u(p) = v(p)$, одакле је $\hat{u}(p) = \hat{v}(p)$, тј. $\hat{u}(F) = \hat{v}(F)$.

Претпоставимо да тврђење важи за формуле сложености мање од n. И нека је F формула сложености n. Тада је $F = \neg G$ или $F = G \star H$, где $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow\}$.

Нека је најпре $F = \neg G$. Приметите тада да је $P(F) = P(G)$, али тада је и $\mathrm{sl}(G) = \mathrm{sl}(F) - 1 = n - 1 < n$, па за G важи индуктивна хипотеза. Како се u и v поклапају на $P(G)$, по индуктивној хипотези је $\hat{u}(G) = \hat{v}(G)$. Коначно је $\hat{u}(F) = \hat{u}(\neg G) = \neg\hat{u}(G) = \neg\hat{v}(G) = \hat{v}(\neg G) = \hat{v}(F)$.

Нека је сада $F = G \star H$. Приметите да је $P(G), P(H) \subseteq P(F)$, па се u и v поклапају на словима формуле G, као и на словима формуле H. Такође, $\mathrm{sl}(G), \mathrm{sl}(H) < n$, па према индуктивној хипотези важи $\hat{u}(G) = \hat{v}(G)$ и $\hat{u}(H) = \hat{v}(H)$. Коначно, $\hat{u}(F) = \hat{u}(G \star H) = \hat{u}(G) \star \hat{u}(H) = \hat{v}(G) \star \hat{v}(H) = \hat{v}(G \star h) = \hat{v}(F)$. $\dashv$

96. Нека су A и B исказне формуле такве да: A није контрадикција, B није таутологија и $A \Rightarrow B$ јесте таутологија. Доказати да $P(A) \cap P(B) \neq \emptyset$.

Решење. Како A није контрадикција, изаберимо валуацију u такву да је $A =_u 1$. Како B није таутологија, изаберимо валуацију v такву да је $B =_v 0$.

Ако је $P(A) \cap P(B) = \emptyset$, тада је добро дефинисана валуација w са:

$$w(p) = \begin{cases} u(p) & , p \in P(A) \\ v(p) & , p \in P(B) \\ 0 & , p \notin P(A) \cup P(B) \end{cases}$$

Како је $u \mid_{P(A)} = w \mid_{P(A)}$, тада је $\hat{w}(A) = \hat{u}(A) = 1$, а како је $v \mid_{P(B)} = w \mid_{P(B)}$, тада је $\hat{w}(B) = \hat{v}(B) = 0$. Тада је $A \Rightarrow B =_w 1 \Rightarrow 0 = 0$, што је контрадикција са $\models A \Rightarrow B$. $\dashv$

97. Нека је $F(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ формула у којој се пољављују само слова (можда не сва) $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_k$ произвољне формуле. Ако је $F(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ таутологија, доказати да је и $F(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ таутологија. ($F(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ је формула добијена после замене сваког појављивања слова p_i формулом A_i.)

Решење. Ако је v валуација, уочимо неку (било коју) валуацију v' такву да $v'(p_i) = \hat{v}(A_i)$, за $1 \leq i \leq k$. Докажимо да је $\hat{v}'(F(p_1, \ldots, p_k)) = \hat{v}(F(A_1, \ldots, A_k))$.

Доказ изводимо индукцијом по сложености формуле F. За базу индукције, претпоставимо да је $\mathrm{sl}(F) = 0$. Тада је $F(p_1, \ldots, p_k) = p_i$, за неко $1 \leq i \leq k$. Приметимо да је тада $F(A_1, \ldots, A_k) = A_i$. Рачунамо $\hat{v}'(F(p_1, \ldots, p_k)) = \hat{v}'(p_i) = v'(p_i) = \hat{v}(A_i) = \hat{v}(F(A_1, \ldots, A_k))$, што доказује базу индукције.

Претпоставимо да твђење важи за формуле сложености мање од n, и нека је $\mathrm{sl}(F) = n$. Тада је $F = \neg G$ или $F = G \star H$, за неко $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow\}$.

У првом случају $F = \neg G$ имамо да је $\mathrm{sl}(G) = \mathrm{sl}(F) - 1 = n - 1 < n$, па за G важи индуктивна хипотеза, тј. $\hat{v}'(G(p_1, \ldots, p_k)) = \hat{v}(G(A_1, \ldots, A_k))$. Сада рачунамо: $\hat{v}'(F(p_1, \ldots, p_k)) = \hat{v}'(\neg G(p_1, \ldots p_k)) = \neg \hat{v}'(G(p_1, \ldots, p_k)) = \neg \hat{v}(G(A_1, \ldots A_k)) = \hat{v}(\neg G(A_1, \ldots A_k)) = \hat{v}(F(A_1, \ldots A_k))$.

У другом случају $F = G \star H$ имамо да је $\mathrm{sl}(G), \mathrm{sl}(H) < n$, па за G и H важи индуктивна хипотеза, тј. $\hat{v}'(G(p_1, \ldots, p_k)) = \hat{v}(G(A_1, \ldots, A_k))$ и $\hat{v}'(H(P_1, \ldots, p_k)) = \hat{v}(H(A_1, \ldots, A_k))$. Сада рачунамо: $\hat{v}'(F(p_1, \ldots, p_k)) = \hat{v}'(G(p_1, \ldots p_k) \star H(p_1, \ldots, p_k)) = \hat{v}'(G(p_1, \ldots, p_k)) \star \hat{v}'(H(p_1, \ldots, p_k)) = \hat{v}(G(A_1, \ldots A_k)) \star \hat{v}(H(A_1, \ldots, A_k)) = \hat{v}(G(A_1, \ldots A_k) \star H(A_1, \ldots, A_k)) = \hat{v}(F(A_1, \ldots A_k))$.

Сада можемо да докажемо тврђење задатка. Нека је v произвољна валуација, и нека је v' њој придружена валуација како је већ објашњено. Како смо доказали, тада је $\hat{v}(F(A_1, \ldots, A_k)) = \hat{v}'(F(p_1, \ldots, p_k)) = 1$, јер је $F(p_1, \ldots, p_k)$ таутологија, па је специјално тачна у валуацији v'. Дакле, $F(A_1, \ldots, A_k)$ је тачна у произвољној валуацији v, одакле следи да је и она таутологија. $\dashv$

$\boxed{\textbf{98.}}$ Нека је $F(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ формула, и $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_k$ формуле такве да $A_i \equiv B_i$. Доказати да је $F(A_1, A_2, \ldots, A_k) \equiv F(B_1, B_2, \ldots, B_k)$.

Решење. Доказ изводимо индукцијом по сложености формуле F.

Ако је $\mathrm{sl}(F) = 0$, тада је $F(p_1, p_2, \ldots, p_k) = p_i$, за неко i. Тада је $F(A_1, A_2, \ldots, A_k) = A_i$, $F(B_1, B_2, \ldots, B_k) = B_i$, па из претпоставке $A_i \equiv B_i$ следи $F(A_1, A_2, \ldots, A_k) \equiv F(B_1, B_2, \ldots, B_k)$.

Претпоставимо да тврђење важи за формуле сложености мање од n. И нека је F формула сложености n. Тада је $F = \neg G$ или $F = G \star H$, где $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow\}$.

Ако је $F = \neg G$, тада је $\mathrm{sl}(G) = \mathrm{sl}(F) - 1 = n - 1 < n$, па за G важи индуктивна хипотеза, тј. $G(A_1, A_2, \ldots, A_k) \equiv G(B_1, B_2, \ldots, B_k)$, па је и $\neg G(A_1, A_2, \ldots, A_k) \equiv \neg G(B_1, B_2, \ldots, B_k)$, тј. $F(A_1, A_2, \ldots, A_k) \equiv F(B_1, B_2, \ldots, B_k)$.

Ако је $F = G \star H$, за било које $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow\}$, тада је $\mathrm{sl}(G), \mathrm{sl}(H) < n$, па за G и H важи индуктивна хипотеза. То значи $G(A_1, A_2, \ldots, A_k) \equiv G(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ и $H(A_1, A_2, \ldots, A_k) \equiv H(B_1, B_2, \ldots, B_k)$. Тада је $G(A_1, A_2, \ldots, A_k) \star H(A_1, A_2, \ldots, A_k) \equiv G(B_1, B_2, \ldots, B_k) \star H(B_1, B_2, \ldots, B_k)$, тј. $F(A_1, A_2, \ldots, A_k) \equiv F(B_1, B_2, \ldots, B_k)$. $\dashv$

КНФ, ДНФ, ККНФ, КДНФ

КНФ Кажемо да је формула A у КНФ (конјунктивној нормалној форми) ако је $A = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$, где је свака формула A_i дисјункција слова или негације слова.

ДНФ Кажемо да је формула A у ДНФ (дисјунктивној нормалној форми) ако је $A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$, где је свака формула A_i конјункција слова или негације слова.

$\top$ **и** $\bot$ Означимо са $\top$ формулу $p \vee \neg p$, а са $\bot$ формулу $p \wedge \neg p$. Приметите да је $\top$ елементарно еквивалентна свакој таутологији, а да је $\bot$ елементарно еквивалента свакој контрадикцији. Ознаке $\top$ и $\bot$ уводимо због краћег записа неких ствари.

КНФ-ДНФ алгоритам Претпоставимо да формула A од везника има везнике $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Поштујући следеће кораке формулу A можемо елементарно еквивалентно трансформисати у формулу која је у КНФ или ДНФ.

1. Елиминишемо $\Leftrightarrow$ користећи: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
2. Елиминишемо $\Rightarrow$ користећи: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
3. Убацујемо $\neg$ у заграде користећи: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ и $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.
4. Елминишемо дупле негације користећи: $\neg\neg p \equiv p$.
5. Подешавамо тако да добијемо КНФ или ДНФ користећи: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ и њихова уопштења.
6. Козметичка подешавања: $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$, $q \wedge \top \equiv q$, $q \vee \top \equiv \top$, $q \wedge \bot \equiv \bot$, $q \vee \bot \equiv q$.

99. Доказати да за конјункцију и дисјункцију важи рачун "сваки са сваким", тј. важи:

1. $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_l) \equiv (p_1 \wedge q_1) \vee (p_1 \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p_1 \wedge q_l) \vee (p_2 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p_2 \wedge q_l) \vee \ldots \vee (p_k \wedge q_1) \vee (p_k \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p_k \wedge q_l)$;
2. $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_l) \equiv (p_1 \vee q_1) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p_1 \vee q_l) \wedge (p_2 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p_2 \vee q_l) \wedge \ldots \wedge (p_k \vee q_1) \wedge (p_k \vee q_2) \wedge \ldots \wedge (p_k \vee q_l)$.

Решење. $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_l) \equiv [p_1 \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_l)] \vee [p_2 \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_l)] \vee \ldots \vee [p_k \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_l)] \equiv (p_1 \wedge q_1) \vee (p_1 \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p_1 \wedge q_l) \vee (p_2 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p_2 \wedge q_l) \vee \ldots \vee (p_k \wedge q_1) \vee (p_k \wedge q_2) \vee \ldots \vee (p_k \wedge q_l)$, и слично када $\wedge$ и $\vee$ замене места. $\dashv$

100. Користећи елементарне трансформације доказати да је $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ таутологија.

Решење.

$$
\begin{aligned}
& (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \\
\equiv\; & \neg(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \vee ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \\
\equiv\; & \neg(\neg p \vee (q \Rightarrow r)) \vee (\neg(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \\
\equiv\; & \neg(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \vee (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)) \\
\equiv\; & (\neg\neg p \wedge \neg(\neg q \vee r)) \vee ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \\
\equiv\; & (\neg\neg p \wedge (\neg\neg q \wedge \neg r)) \vee ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \\
\equiv\; & (p \wedge (q \wedge \neg r)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \\
\equiv\; & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee r \text{ (ово је ДНФ)} \\
\equiv\; & [p \wedge ((q \wedge \neg r) \vee \neg q)] \vee \neg p \vee r \\
\equiv\; & [p \wedge ((q \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg q))] \vee \neg p \vee r \\
\equiv\; & [p \wedge (\top \wedge (\neg r \vee \neg q))] \vee \neg p \vee r \\
\equiv\; & [p \wedge (\neg r \vee \neg q)] \vee \neg p \vee r \\
\equiv\; & [(p \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee \neg p)] \vee r \\
\equiv\; & [\top \wedge (\neg r \vee \neg q \vee \neg p)] \vee r \\
\equiv\; & \neg r \vee \neg q \vee \neg p \vee r \\
\equiv\; & \top \vee \neg q \vee \neg p \\
\equiv\; & \top
\end{aligned}
$$

$\dashv$

101. Одредити један КНФ и ДНФ формуле $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$.

Решење.

$$\begin{aligned}
& p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \\
\equiv\ & [p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)] \wedge [(q \Leftrightarrow r) \Rightarrow p] \\
\equiv\ & [p \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q))] \wedge [((q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)) \Rightarrow p] \\
\equiv\ & [\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))] \wedge [\neg((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)) \vee p] \\
\equiv\ & [\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))] \wedge [(\neg(\neg q \vee r) \vee \neg(\neg r \vee q)) \vee p] \\
\equiv\ & [\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))] \wedge [((\neg\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg\neg r \wedge \neg q)) \vee p] \\
\equiv\ & [\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))] \wedge [((q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q)) \vee p]\ (\star) \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q) \wedge [((q \vee r) \wedge (q \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q)) \vee p] \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q) \wedge [((q \vee r) \wedge \top \wedge \top \wedge (\neg r \vee \neg q)) \vee p] \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q) \wedge [((q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q)) \vee p] \\
\equiv\ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q) \wedge (q \vee r \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee p), \text{ што је КНФ.}
\end{aligned}$$

Када се вратимо у $(\star)$, имамо:

$$\begin{aligned}
& p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \\
\equiv\ & [\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))] \wedge [((q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q)) \vee p]\ (\star) \\
\equiv\ & [\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q))] \wedge [(q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg q) \vee p] \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee \\
& [(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge q \wedge \neg r] \vee [(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge r \wedge \neg q] \vee [(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge p] \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee \bot \vee [((\neg q \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge q \wedge \neg r)) \wedge (\neg r \vee q)] \vee \\
& [(\neg q \vee r) \wedge ((\neg r \wedge r \wedge \neg q) \vee (q \wedge r \wedge \neg q))] \vee [(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge p] \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee [(\bot \vee \bot) \wedge (\neg r \vee q)] \vee \qquad \dashv \\
& [(\neg q \vee r) \wedge (\bot \vee \bot)] \vee [(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge p] \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee [\bot \wedge (\neg r \vee q)] \vee [(\neg q \vee r) \wedge \bot] \vee [(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge p] \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee \bot \vee \bot \vee [(\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge p] \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee [((\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge q) \vee (r \wedge \neg r) \vee (r \wedge q)) \wedge p] \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee [((\neg q \wedge \neg r) \vee \bot \vee \bot \vee (r \wedge q)) \wedge p] \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee [((\neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge q)) \wedge p] \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg r \wedge p) \vee (r \wedge q \wedge p), \text{ што је ДНФ.}
\end{aligned}$$

102. Низови формула A_n и B_n су дефинисани са:

$$A_0 = p \Rightarrow q,\ A_1 = p,\ A_{n+2} = A_{n+1} \Rightarrow A_n,$$
$$B_0 = p,\ B_{n+1} = B_n \Leftrightarrow A_{2n+1}.$$

Испитати који чланови ових низова су таутологије.

Решење. Напишимо таблице првих неколико чланова низа A_n.

p	q	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Из таблице видимо да парно индексиране формуле имају исте таблице, тј. елементарно су еквивалентне, и да су непарно индексиране формуле такође елементарно еквивалентне. Ово доказујемо у следећем тврђењу:

Тврђење 1. $A_{n+2} \equiv A_n$, $n \geq 0$.

Доказ. Имамо $A_{n+2} = A_{n+1} \Rightarrow A_n = (A_n \Rightarrow A_{n-1}) \Rightarrow A_n \equiv \neg(\neg A_n \vee A_{n-1}) \vee A_n \equiv (A_n \wedge \neg A_{n-1}) \vee A_n \equiv A_n$, где у последњем кораку користимо закон апсорбције: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (Докажите га!). Претходни доказ пролази за $n \geq 1$. За $n = 0$ имамо $A_2 = A_1 \Rightarrow A_0 = p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv \neg p \vee \neg p \vee q \equiv \neg p \vee q \equiv p \Rightarrow q = A_0$. ■

Последица. $A_{2n} \equiv A_0 = p \Rightarrow q$, $A_{2n+1} \equiv A_1 = p$, за $n \geq 0$. Одавде следи да ниједан члан низа A_n није таутологија.

Напишимо таблице првих неколико чланова низа B_n.

p	q	B_0	B_1	B_2	B_3
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Из таблице видимо, слично као у претходном делу, да су парно индексиране формуле елементарно еквивалентне, и да су непарно индексиране формуле такође елементарно еквивалентне. Ово доказујемо у следећем тврђењу:

Тврђење 2. $B_{n+2} \equiv B_n$, $n \geq 0$.

Доказ. Имамо $B_{n+2} = B_{n+1} \Leftrightarrow A_{2n+3} = (B_n \Leftrightarrow A_{2n+1}) \Leftrightarrow A_{2n+3} \equiv (B_n \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p \equiv B_n \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow p) \equiv B_n \Leftrightarrow \top \equiv B_n$, где смо користили прво тврђење и закон асоцијативности за $\Leftrightarrow$. ■

Последица. $B_{2n} \equiv B_0 = p$, $B_{2n+1} \equiv B_1 = B_0 \Leftrightarrow A_1 = p \Leftrightarrow p \equiv \top$, за $n \geq 0$. Одавде следи да парно индексирани чланови низа B_n нису таутологије, а непарно индексирани чланови јесу. $\dashv$

103. Низ формула A_n је дефинисан са:

$$A_0 = p,\ A_1 = (q \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p,\ A_{n+2} = A_{n+1} \Leftrightarrow A_n,\ n \geq 0.$$

Испитати који чланови низа A_n су таутологија, а који контрадикције.

Решење. Напишимо таблице првих неколико чланова датог низа.

p	q	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Инспирисани таблицом докажимо следеће тврђење, из којег директно следи решење задатка.

Тврђење. $A_{3n+3} \equiv A_{3n}$, за $n \geq 0$.

Доказ. $A_{3n+3} = A_{3n+2} \Leftrightarrow A_{3n+1} = (A_{3n+1} \Leftrightarrow A_{3n}) \Leftrightarrow A_{3n+1} \equiv (A_{3n+1} \Leftrightarrow A_{3n+1}) \Leftrightarrow A_{3n} \equiv \top \Leftrightarrow A_{3n} \Leftrightarrow A_{3n}$. У доказу смо имплицитно користили законе комутативности и асоцијативности еквиваленције. ■

Последица. $A_{3n} \equiv A_0$, $A_{3n+1} \equiv A_1$, $A_{3n+2} \equiv A_2$, за $n \geq 0$. ■

Лако се види да A_0 и A_1 нису ни контрадикције ни таутологије, и да је A_2 контрадикција. Одатле следи да A_{3n} и A_{3n+1} нису ни контрадикције ни таутологије, и да су A_{3n+2} контрадикција, за $n \geq 0$. $\dashv$

У следећим задацима је p^0 други записа за $\neg p$, а p^1 је скраћеница за p.

104. Доказати да за сваке две валуације u, v важи $p^{u(p)} =_v 1$ ако и само ако $u(p) = v(p)$. Специјално, $p^{v(p)} =_v 1$. И слично, $p^{\neg u(p)} =_v 0$ ако и само ако $u(p) = v(p)$. Специјално, $p^{\neg v(p)} =_v 0$.

Решење. ($\Rightarrow$) Претпоставимо да је $p^{u(p)} =_v 1$. Посматрајмо два случаја: $u(p) = 0$ и $u(p) = 1$. Ако је $u(p) = 0$, тада је $p^{u(p)} = p^0 = \neg p$, па претпоставка постаје $\neg p =_v 0$, одакле је $p =_v 0$, тј. $u(p) = v(p) = 0$. Ако је $u(p) = 1$, тада је $p^{u(p)} = p^1 = p$, па претпоставка постаје $p =_v 1$, тј. $u(p) = v(p) = 1$. Дакле, у сваком случају $u(p) = v(p)$.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да је $u(p) = v(p)$. И овде можемо да поделимо ствар у два случаја: $u(p) = v(p) = 0$ и $u(p) = v(p) = 1$. Ако је $u(p) = v(p) = 0$, тада је $p^{u(p)} = p^0 = \neg p =_v \neg 0 = 1$. Ако је $u(p) = v(p) = 1$, тада је $p^{u(p)} = p^1 = p =_v 1$. У сваком случају је дакле $p^{u(p)} =_v 1$.

Остатак задатка сада тривијално следи из доказаног. $\dashv$

105. Нека је A формула чија су слова $P(A) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Доказати:

1. $A \equiv \bigvee\limits_{u:A=_u 1} \left(p_1^{u(p_1)} \wedge p_2^{u(p_2)} \wedge \dots \wedge p_k^{u(p_k)}\right)$. Формула на десној страни се назива КДНФ (канонски ДНФ) формуле A.
2. $A \equiv \bigwedge\limits_{u:A=_u 0} \left(p_1^{\neg u(p_1)} \vee p_2^{\neg u(p_2)} \vee \dots \vee p_k^{\neg u(p_k)}\right)$. Формула на десној страни се назива ККНФ (канонски КНФ) формуле A.

Решење. Докажимо само први део. Други део се доказује на аналоган начин. Треба да докажемо да за сваку валуацију v важи: $\hat{v}(A) = \hat{v}\left(\bigvee\limits_{u:A=_u 1} \left(p_1^{u(p_1)} \wedge p_2^{u(p_2)} \wedge \dots \wedge p_k^{u(p_k)}\right)\right)$, тј. да је $A =_v 1$ ако и само ако $\bigvee_{u:A=_u 1} \left(p_1^{u(p_1)} \wedge p_2^{u(p_2)} \wedge \dots \wedge p_k^{u(p_k)}\right) =_v 1$.

Нека је v произвољна валуација.

($\Rightarrow$) Претпоставимо $A =_v 1$. Према претходном задатку је $p_i^{v(p_i)} =_v 1$, па је и $p_1^{v(p_1)} \wedge p_2^{v(p_2)} \wedge \dots \wedge p_k^{v(p_k)} =_v 1 \wedge 1 \wedge \dots \wedge 1 = 1$. У том случају v је једна од валуација по којој правимо велику дисјункцију на десној страни, па је $\bigvee\limits_{u:A=_u 1} \left(p_1^{u(p_1)} \wedge p_2^{u(p_2)} \wedge \dots \wedge p_k^{u(p_k)}\right) =$

$$\bigvee_{u:A=_u 1, u\neq v} \left(p_1^{u(p_1)} \wedge p_2^{u(p_2)} \wedge \dots \wedge p_k^{u(p_k)}\right) \vee (p_1^{v(p_1)} \wedge p_2^{v(p_2)} \wedge \dots \wedge p_k^{v(p_k)}) =_v \text{ нешто } \vee 1 = 1.$$

($\Leftarrow$) Претпоставимо $\bigvee\limits_{u:A=_u 1} \left(p_1^{u(p_1)} \wedge p_2^{u(p_2)} \wedge \dots \wedge p_k^{u(p_k)}\right) =_v 1$. Како је у питању дисјункција која је тачна у v, то је тачан бар један њен члан у v, тј. постоји валуација w таква да је $A =_w 1$ и $p_1^{w(p_1)} \wedge p_2^{w(p_2)} \wedge \dots \wedge p_k^{w(p_k)} =_v 1$. Тада је за све i: $p_i^{w(p_i)} =_v 1$, па према претходном задатку је $w(p_i) = v(p_i)$. Како је $w(p_i) = v(p_i)$, за сва слова формуле A, то је $w = v$, па како је $A =_w 1$, то је и $A =_v 1$. $\dashv$

106. Формула A има таблицу:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Одредити две формуле еквивалентне са A.

Решење. За тражене две формуле можемо да узмемо КДНФ и ККНФ.

Да бисмо написали КДНФ посматрајмо валуације (редове таблице) у којима је формула A тачна. Према претходном задатку $A \equiv (p^0 \wedge q^0 \wedge r^1) \vee (p^0 \wedge q^1 \wedge r^0) \vee (p^1 \wedge q^0 \wedge r^0) \vee (p^1 \wedge q^0 \wedge r^1) = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$.

Да бисмо написали ККНФ посматрајмо валуације у којима је формула A нетачна. Према претходном задатку је $A \equiv (p^{\neg 0} \vee q^{\neg 0} \vee r^{\neg 0}) \wedge (p^{\neg 0} \vee q^{\neg 1} \vee r^{\neg 1}) \wedge (p^{\neg 1} \vee q^{\neg 1} \vee r^{\neg 0}) \wedge (p^{\neg 1} \vee q^{\neg 1} \vee r^{\neg 1}) = (p^1 \vee q^1 \vee r^1) \wedge (p^1 \vee q^0 \vee r^0) \wedge (p^0 \vee q^0 \vee r^1) \wedge (p^0 \vee q^0 \vee r^0) = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$. ⊣

107. Одредити две формуле са словима p, q, r које су тачне само у валуација у којима је једно слово нетачно.

Решење. Напишимо таблицу таквих формула.

p	q	r	формула
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Две тражене формуле могу бити КДНФ и ККНФ формула датих претходном таблицом.

КДНФ је: $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

ККНФ је: $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$. ⊣

108. Одредити све међусобно нееквивалентне формуле $A(p, q, r)$ такве да је формула $F = (p \wedge q \Leftrightarrow A) \Rightarrow q \wedge r$ таутологија.

Решење. Напишимо таблицу формуле F:

p	q	r	A	$B = p \wedge q$	$C = B \Leftrightarrow A$	$D = q \wedge r$	$F = C \Rightarrow D$
0	0	0	a_1	0	$\neg a_1$	0	a_1
0	0	1	a_2	0	$\neg a_2$	0	a_2
0	1	0	a_3	0	$\neg a_3$	0	a_3
0	1	1	a_4	0	$\neg a_4$	1	1
1	0	0	a_5	0	$\neg a_5$	0	a_5
1	0	1	a_6	0	$\neg a_6$	0	a_6
1	1	0	a_7	1	a_7	0	$\neg a_7$
1	1	1	a_8	1	a_8	1	1

У рачуну таблице смо користили да у исказној алгебри важе једнакост: $0 \Leftrightarrow a = \neg a$, $1 \Leftrightarrow a = a$, $a \Rightarrow 0 = \neg a$. Проверите их!

Из таблице видимо да је формула F таутологија ако и само ако $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 1$ и $a_7 = 0$. Приметите да a_4 и a_8 могу бити и 0 и 1. Дакле, имамо четири могућности за таблицу формуле A, тј. имамо четири нееквивалентне формуле које задовољавају услов задатка дате таблицама:

p	q	r	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1

Остаје још да нађемо по једног представника за формуле чије су ово таблице. Користимо ККНФ (може и КДНФ, али како ове таблице имају мање 0 него 1, ККНФ ће бити краћи од КДНФ): $A_1 = (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$, $A_2 = (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$, $A_3 = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$, $A_4 = \neg p \vee \neg q \vee r$. $\dashv$

109. Одредити све међусобно нееквивалентне формуле $A(p, q, r)$ такве да је формула $F = ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow A) \wedge (r \Rightarrow A)$ контрадикција.

Решење. Напишимо таблицу формуле F:

p	q	r	A	$B = p \Leftrightarrow q$	$C = B \Leftrightarrow A$	$D = r \Rightarrow A$	$F = C \wedge D$
0	0	0	a_1	1	a_1	1	a_1
0	0	1	a_2	1	a_2	a_2	a_2
0	1	0	a_3	0	$\neg a_3$	1	$\neg a_3$
0	1	1	a_4	0	$\neg a_4$	a_4	0
1	0	0	a_5	0	$\neg a_5$	1	$\neg a_5$
1	0	1	a_6	0	$\neg a_6$	a_6	0
1	1	0	a_7	1	a_7	1	a_7
1	1	1	a_8	1	a_8	a_8	a_8

Из таблице видимо да је F контрадикција ако и само ако је $a_1 = a_2 = a_7 = a_8 = 0$ и $a_3 = a_5 = 1$. a_4 и a_6 могу бити и 0 и 1, па имамо четири међусобно нееквивалентне формуле чије су таблице:

p	q	r	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Користећи КДНФ имамо да за формуле A_1, A_2, A_3, A_4 можемо да узмемо: $A_1 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$, $A_2 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$, $A_3 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$, $A_4 = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$. $\dashv$

110. Колико има међусобно нееквивалентних парова формула $(A(p, q), B(p, q))$ таквих да је формула $F = (A \Rightarrow p) \veebar (B \wedge q)$ таутологија. Ако је B контрадикција, одредити све нееквивалентне формуле A такве да је F таутологија.

Решење. Напишимо таблицу формуле F:

p	q	A	B	$C = A \Rightarrow p$	$D = B \wedge q$	$F = C \veebar D$
0	0	a_1	b_1	$\neg a_1$	0	$\neg a_1$
0	1	a_2	b_2	$\neg a_2$	b_2	$\neg a_2 \veebar b_2$
1	0	a_3	b_3	1	0	1
1	1	a_4	b_4	1	b_4	$\neg b_4$

Из таблице видимо да је F таутологија ако и само ако је: $a_1 = 0$, $\neg a_2 \veebar b_2 = 1$, што важи ако и само ако $\neg a_2 \neq b_2$, тј. ако и само ако $a_2 = b_2$, и $b_4 = 0$. Дакле, $b_1 \in \{0,1\}$, $a_2 = b_2 \in \{0,1\}$, $a_3 \in \{0,1\}$, $b_3 \in \{0,1\}$ и $a_4 \in \{0,1\}$, па имамо 32 пара нееквивалентних формула (A, B) таквих да је F таутологија.

Ако је B контрадикција, тада је $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$, па се наш систем услова своди на: $a_1 = 0$, $a_2 = b_2 = 0$, $a_3 =\in \{0,1\}$ и $a_4 =\in \{0,1\}$, па имамо четири међусобно нееквивалентне формуле чије су таблице:

p	q	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1

Можемо узети: $A_1 = p \wedge \neg p$, $A_2 = p \wedge q$, $A_3 = \neg(p \Rightarrow q)$ и $A_4 = p$. $\dashv$

Потпун скуп везника

Потпун скуп везника Нека је S скуп неких везника. За S кажемо да је потпун, ако је свака исказна формула A еквивалентна некој формули B која од везника користи само оне из скупа S. Другим речима, ако је S довољан да се опишу све нееквиваленте формуле. Из КДНФ-а и ККНФ-а видимо да скуп $\{\neg, \wedge, \vee\}$ јесте потпун скуп везника.

111. Доказати да су следећи скупови везника потпуни:

1. $\{\neg, \wedge\}$;
2. $\{\neg, \vee\}$;
3. $\{\neg, \Rightarrow\}$.

Решење.

1. Довољно је приметити да је $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$, па како је $\{\neg, \wedge, \vee\}$ потпун, то се у свакој формули еквивалентно може заменити $\vee$ са $\neg$ и $\wedge$, одакле следи да је $\{\neg, \wedge\}$ потпун.
2. Слично као и малопре, приметимо да је $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$, одакле следи да је $\{\neg, \vee\}$ потпун.
3. Довољно је приметити да је $p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q$, па како је $\{\neg, \vee\}$ потпун, то је и $\{\neg, \Rightarrow\}$ потпун.

$\dashv$

112. $\{\neg\}$ није потпун скуп везника.

Решење. Како је $\neg$ унаран везник, формула која користи само $\neg$ од везника је облика $\neg\neg \ldots \neg p$, где $p \in P$. Дакле, једине нееквивалентне формуле које се могу записати помоћу $\neg$ су p и $\neg p$, $p \in P$. Како ниједна од ових формула није нпр. контрадикција, то се контрадикције не могу записати користећи само везник $\neg$. Дакле, $\{\neg\}$ није потпун. $\dashv$

$\boxed{\textbf{113.}}$ Доказати да су следећи скупови везника потпуни:

1. $\{\uparrow\}$;
2. $\{\downarrow\}$.

Решење.

1. Како у исказној алгебри важи $0 \uparrow 0 = 1$ и $1 \uparrow 1 = 0$, то је $\neg p \equiv p \uparrow p$. Такође, приметимо да је $p \wedge q \equiv \neg(p \uparrow q) \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$, па како $\{\neg, \wedge\}$ јесте потпун, то је и $\{\uparrow\}$ потпун.
2. Слично као и малопре, $\neg p \equiv p \downarrow p$, и $p \vee q \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$, па како је $\{\neg, \vee\}$ потпун, то је и $\{\downarrow\}$ потпун.

$\dashv$

$\boxed{\textbf{114.}}$ Нека је $\star$ произвољна бинарна операција исказне алгебре, и уведимо нови везник $\star$ у исказни језик који се интерпретира операцијом $\star$. Ако је $\{\star\}$ потпун скуп везника, доказати да је $\star = \uparrow$ или $\star = \downarrow$. Дакле, $\{\uparrow\}$ и $\{\downarrow\}$ су једини једночлани потпуни скупови бинарних везника.

Решење. Докажимо најпре да $0 \star 0 = 1$ у исказној алгебри.

Претпоставимо супротно да је $0 \star 0 = 0$. Ако је тако, докажимо да је свака формула F, која користи само везник $\star$, нетачна у валуацији v датој са $v(p) = 0$, за свако $p \in P$. Доказ изведимо индукцијом по $\mathrm{sl}(F)$. Ако је $\mathrm{sl}(F) = 0$, тада је $F = q$, па како је $q =_v 0$, то је и $F =_v 0$. Претпоставимо да тврђење важи за формуле са мање од n везника и докажимо тврђење ако је $\mathrm{sl}(F) = n$. Тада је $F = A \star B$, и $\mathrm{sl}(A), \mathrm{sl}(B) < n$. Према индуктивној претпоставци $A =_v 0$ и $B =_v 0$, па је $F = A \star B =_v 0 \star 0 = 0$.

Како је по претпоставци $\{\star\}$ потпун, то постоји формула F, записана само користећи везник $\star$, таква да је $\neg p \equiv F$. Поново уочимо валуацију v, дату са $v(p) = 0$, за свако $p \in P$. Тада је $\hat{v}(\neg p) = \hat{v}(F)$, тј. $1 = 0$, према доказаном, што је контрадикција.

Дакле, $0 \star 0 = 1$. Потпуно аналогно можемо да докажемо да је $1 \star 1 = 0$.

Докажемо још да $0 \star 1 = 1 \star 0$. Претпоставимо супротно, да је $0 \star 1 \neq 1 \star 0$. Имамо две могућности:

p	q	$p \star q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

p	q	$p \star q$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Приметите да у првом случају важи $\neg p \equiv p \star q$, а у другом $\neg q \equiv p \star q$. Како је $\{\star\}$ потпун, то значи да је и $\{\neg\}$ потпун. Контрадикција.

Дакле, $0 \star 1 = 1 \star 0$, па имамо да је таблица за $\star$ једна од следеће две:

p	q	$p \star q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

p	q	$p \star q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

У првом случају $\star = \downarrow$, а у другом $\star = \uparrow$. $\dashv$

$\boxed{\textbf{115.}}$ Доказати да $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ није потпун скуп везника. Дакле, ниједан његов подскуп није потпун скуп везника.

Решење. Уочимо валуацију v дату са $v(p) = 1$, за свако $p \in P$. Нека је F произвољна формула записана са везницима $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Докажимо најпре $F =_v 1$.

Доказ изводимо индукцијом по $\mathrm{sl}(F)$. Ако је $\mathrm{sl}(F) = 0$, тада је $F = q$, за неко $q \in P$, па је $F =_v 1$. Претпоставимо да је тврђење тачно ако формула садржи мање од n везника, и докажимо га ако је $\mathrm{sl}(F) = n$. Тада је или $F = A \wedge B$ или $F = A \vee B$ или $F = A \Rightarrow B$ или $A \Leftrightarrow B$. У сваком случају, $\mathrm{sl}(A), \mathrm{sl}(B) < n$, па према индуктивној хипотези је $A =_v 1$ и $B =_v 1$. Тада је $A \wedge B =_v 1 \wedge 1 = 1$, $A \vee B =_v 1 \vee 1 = 1$, $A \Rightarrow B =_v 1 \Rightarrow 1 = 1$, $A \Leftrightarrow B =_v 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, дакле у сваком случају је $F =_v 1$.

Ако претпоставимо да је $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ потпун скуп везника, тада постоји формула F која користи само ове везнике, таква да је $\neg q \equiv F$. Уочимо валуацију v дату са $v(p) = 1$, за свако $p \in P$. Тада је $\hat{v}(\neg q) = \hat{v}(F)$, тј. $0 = 1$, према претходном. Контрадикција. $\dashv$

116. Доказати да $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ није потпун систем везника.

Решење. Докажимо најпре следеће тврђење:

Тврђење. Нека је $F(p_1, \ldots, p_n)$ формула записана користећи само везнике $\neg$ и $\Leftrightarrow$. Тада за свако i, $1 \leq i \leq n$, важи:
или $F(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv F(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$, или $F(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg F(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$.

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по $\mathrm{sl}(F)$. Ако је $\mathrm{sl}(F) = 0$, тада је $F = p_j$, за неко $1 \leq j \leq n$. Ако је $i = j$, тада је очигледно $F(p_1, \ldots, \neg p_j, \ldots, p_n) = \neg p_j = \neg F(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_n)$. Ако је $i \neq j$, тада је очигледно $F(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) = p_j = F(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$.

Претпоставимо да смо тврђење доказали за формуле сложености мање од n, и претпоставимо $\mathrm{sl}(F) = n$. Имамо два случаја: $F = \neg G$ и $F = G \Leftrightarrow H$.

Ако је $F = \neg G$, тада је $\mathrm{sl}(G) = n - 1 < n$, па по индуктивној хипотези за свако i: или $G(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv G(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$, или $G(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg G(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$. У првом случају је $F(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) = \neg G(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg G(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n) = F(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$, а у другом случају је је $F(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) = \neg G(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg\neg G(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n) = \neg F(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$.

Ако је $F = G \Leftrightarrow H$, тада је $\mathrm{sl}(G), \mathrm{sl}(H) < n$, па по индуктивној хипотези за свако i важи једно од следећа четири:

1) $G(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv G(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ и $H(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv H(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$. Тада је $F(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) = G(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow H(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv G(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow H(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) = F(p_1, \ldots p_i, \ldots, p_n)$.

2) $G(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv G(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ и $H(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg H(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$. Тада је $F(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) = G(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow H(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv G(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow \neg H(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg(G(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow H(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n)) = \neg F(p_1, \ldots p_i, \ldots, p_n)$.

3) $G(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg G(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ и $H(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv H(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$. Тада је $F(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) = G(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow H(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg G(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow H(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg(G(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow H(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n)) = \neg F(p_1, \ldots p_i, \ldots, p_n)$.

4) $G(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg G(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ и $H(p_1, \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg H(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$. Тада је $F(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) = G(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow H(p_1 \ldots, \neg p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg G(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow \neg H(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \equiv \neg\neg(G(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n) \Leftrightarrow H(p_1 \ldots, p_i, \ldots, p_n)) \equiv F(p_1, \ldots p_i, \ldots, p_n)$.

У претходном смо користили законе $p \Leftrightarrow \neg q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$ и $\neg p \Leftrightarrow q \equiv \neg(p \Leftrightarrow q)$, који се лако показују. Тиме је тврђење доказано. $\blacksquare$

Претпоставимо супротно да је $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ потпун скуп везника. Тада постоји формула $F(p, q, r_1, \ldots, r_k)$ таква да је $p \wedge q \equiv F(p, q, r_1, \ldots, r_k)$. Како $\neg p \wedge q \not\equiv \neg(p \wedge q)$, то $F(\neg p, q, r_1, \ldots, r_k) \not\equiv \neg F(p, q, r_1, \ldots, r_k)$, а како $\neg p \wedge q \not\equiv p \wedge q$, то $F(\neg p, q, r_1, \ldots, r_k) \not\equiv F(p, q, r_1, \ldots, r_k)$. Према тврђењу следи контрадикција. $\dashv$

Лукашиевичев рачун

Лукашиевичев рачун Формуле Лукашиевичевог рачуна су исказне формуле које од везника користе $\neg$ и $\Rightarrow$.

Аксиоме Лукашиевичевог рачуна Нека су A, B, C произвољне формуле Лукашиевичевог рачуна. Аксиоме Лукашиевичевог рачуна су:

A1 $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

A2 $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

A3 $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

Правила извођења Лукашиевичевог рачуна Једино правило извођења је модус поненс: МП $\dfrac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$.

Доказ у Лукашиевичевом рачуну Доказ је коначан низ формула $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у коме за свако i, $1 \leq i \leq n$, важи:

- A_i је аксиома или
- A_i је последица модус поненса из A_j и A_k, где $j, k < i$.

Теорема Лукашиевичевог рачуна Формула A је теорема, $\vdash A$, ако је A последња формула у неком доказу.

Напомена Сваки почетни део доказа је такође доказ. Дакле, свака формула у неком доказу је теорема Лукашиевичевог рачуна.

$\boxed{\textbf{117.}}$ $\vdash A \Rightarrow A$.

Решење.

1.	A1	$A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$
2.	A2	$[A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)] \Rightarrow [(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)]$
3.	МП(1,2)	$(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$
4.	A1	$A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$
5.	МП(4,3)	$A \Rightarrow A$

$\dashv$

Доказ из хипотеза $\mathcal{H}$ Нека је $\mathcal{H}$ неки скуп формула. Доказ из хипотеза $\mathcal{H}$ је коначан низ формула $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у коме за свако i, $1 \leq i \leq n$, важи:

- A_i је аксиома или
- $A_i \in \mathcal{H}$ (A_i је хипотеза) или
- A_i је последица модус поненса из A_j и A_k, где $j, k < i$.

Последица хипотеза $\mathcal{H}$ Формула A је последица хипотеза $\mathcal{H}$, $\mathcal{H} \vdash A$, ако је A последња формула у неком доказу из хипотеза $\mathcal{H}$.

Напомена Ако је $\mathcal{H} \vdash A$, тада је $\mathcal{H}_1 \vdash A$, за сваки $\mathcal{H}_1 \supseteq \mathcal{H}$. Такође, $\vdash A$ ако и само ако $\emptyset \vdash A$.

118. $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$ (транзитивност имликације).

Решење.

1.	хип.	$A \Rightarrow B$
2.	хип.	$B \Rightarrow C$
3.	A1	$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$
4.	МП(2,3)	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
5.	A2	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
6.	МП(4,5)	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
7.	МП(1,6)	$A \Rightarrow C$

$\dashv$

119. (Став дедукције) $\mathcal{H}, A \vdash B$ ако и само ако $\mathcal{H} \vdash A \Rightarrow B$.

Решење. ($\Leftarrow$) Претпоставимо $\mathcal{H} \vdash A \Rightarrow B$. Тада је и $\mathcal{H}, A \vdash A \Rightarrow B$, али тада, како $\mathcal{H}, A \vdash A$ и $\mathcal{H}, A \vdash A \Rightarrow B$, по модус поненсу следи и $\mathcal{H}, A \vdash B$.

($\Rightarrow$) Претпоставимо $\mathcal{H}, A \vdash B$. Доказаћемо $\mathcal{H} \vdash A \Rightarrow B$ индукцијом по дужини доказа последице B из хипотеза $\mathcal{H}, A$. Означимо дужину тог доказа са $d(B)$.

Ако је $d(B) = 1$, тада тај доказ има само један члан и то је B, па мора бити или B је аксиома или $B = A$ или $B \in \mathcal{H}$. Ако је B аксиома тада имамо:

1.	акс.	B
2.	A1	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
3.	МП(1,2)	$A \Rightarrow B$

што доказује $\vdash A \Rightarrow B$, па је и $\mathcal{H} \vdash A \Rightarrow B$. Ако је $B = A$, тада је $\vdash A \Rightarrow B$, јер $\vdash A \Rightarrow A$, па и $\mathcal{H} \vdash A \Rightarrow B$. Коначно, ако је $B \in \mathcal{H}$ тада:

1.	хип.	B
2.	A1	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
3.	МП(1,2)	$A \Rightarrow B$

што доказује $\mathcal{H} \vdash A \Rightarrow B$.

Претпоставимо да тврђење важи за формуле чији је доказ краћи од n, и претпоставимо да је $d(B) = n$. Тада или је B аксиома или је $B = A$ или је $B \in \mathcal{H}$ или је B последица модус поненса из C и D, при чему $d(C), d(D) < n$, и при чему је $D = C \Rightarrow B$. У прва три случаја разматрамо потпуно исто као и у бази индукције. Претпоставимо зато да је B последица модус поненса из C и $C \Rightarrow B$. Како C и $C \Rightarrow B$ имају краћи доказ, за њих важи индуктивна хипотеза па $\mathcal{H} \vdash A \Rightarrow C$ и $\mathcal{H} \vdash A \Rightarrow (C \Rightarrow B)$. Тада:

1.	хипотезе	$\mathcal{H}$
2.	последица из 1.	$A \Rightarrow C$
3.	последица из 1.	$A \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
4.	A2	$(A \Rightarrow (C \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B))$
5.	МП(3,4)	$(A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
6.	МП(2,5)	$A \Rightarrow B$

што доказује $\mathcal{H} \vdash A \Rightarrow B$. $\dashv$

120. $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.

Решење. По ставу дедукције довољно је доказати $A \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, па када још једном применимо став дедукције, довољно је доказати $A, A \Rightarrow B \vdash B$. Но ово је јасно модус поненс. $\dashv$

121. $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$.

Решење. Према ставу дедукције довољно је доказати $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \vdash C$.

1.	хип.	$A \Rightarrow B$
2.	хип.	$B \Rightarrow C$
3.	хип.	A
4.	МП(3,1)	B
5.	МП(4,2)	C

$\dashv$

122. $A, \neg A \vdash B$.

Решење.

1.	хип.	A
2.	хип.	$\neg A$
3.	A1	$\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
4.	МП(2,3)	$\neg B \Rightarrow \neg A$
5.	A3	$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
6.	МП(4,5)	$A \Rightarrow B$
7.	МП(1,6)	B

$\dashv$

Ако на $A, \neg A \vdash B$ применимо на два начина, по два пута став дедукције, добијамо $\vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ и $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

123.

1. $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$, тј. $\neg\neg A \vdash A$;
2. $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$, тј. $A \vdash \neg\neg A$;
3. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$, тј. $A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$;.

Решење.

1. Докажимо $\neg\neg A \vdash A$.

1.	хип.	$\neg\neg A$
2.	$\vdash \neg F \Rightarrow (F \Rightarrow G)$	$\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)$
3.	МП(1,2)	$\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A$
4.	A3	$(\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$
5.	МП(3,4)	$\neg\neg A \Rightarrow A$
6.	МП(1,5)	A

2. Докажимо $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$.

1.	$\vdash \neg\neg F \Rightarrow F$	$\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$
2.	A3	$(\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$
3.	МП(1,2)	$A \Rightarrow \neg\neg A$

3. Докажимо $A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$.

1.	хип.	$A \Rightarrow B$
2.	$\vdash \neg\neg F \Rightarrow F$	$\neg\neg A \Rightarrow A$
3.	$\vdash F \Rightarrow \neg\neg F$	$B \Rightarrow \neg\neg B$
4.	$F \Rightarrow G, G \Rightarrow H \vdash F \Rightarrow H$ (2,1)	$\neg\neg A \Rightarrow B$
5.	$F \Rightarrow G, G \Rightarrow H \vdash F \Rightarrow H$ (4,3)	$\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$
6.	A3	$(\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
7.	МП(5,6)	$\neg B \Rightarrow \neg A$

$\dashv$

$\boxed{\textbf{124.}}$ $\neg A \Rightarrow A \vdash A$.

Решење.

1.	хип.	$\neg A \Rightarrow A$
2.	$\vdash \neg F \Rightarrow (F \Rightarrow G)$	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B))$
3.	А2	$[\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B))] \Rightarrow [(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B))]$
4.	МП (2,3)	$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B))$
5.	МП (1,4)	$\neg A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B)$
6.	А3	$(\neg A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow B)) \Rightarrow ((B \Rightarrow B) \Rightarrow A)$
7.	МП(5,6)	$(B \Rightarrow B) \Rightarrow A$
8.	$\vdash F \Rightarrow F$	$B \Rightarrow B$
9.	МП(8,7)	A

$\dashv$

$\boxed{\textbf{125.}}$ $A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B \vdash B$.

Решење.

1.	хип.	$A \Rightarrow B$
2.	хип.	$\neg A \Rightarrow B$
3.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (1)	$\neg B \Rightarrow \neg A$
4.	$F \Rightarrow G, G \Rightarrow H \vdash F \Rightarrow H$ (3,2)	$\neg B \Rightarrow B$
5.	$\neg F \Rightarrow F \vdash F$ (4)	B

$\dashv$

Дисјункција, конјункција и еквиваленција Дефинишемо $A \vee B := \neg A \Rightarrow B$, $A \wedge B := \neg(A \Rightarrow \neg B)$ и $A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

$\boxed{\textbf{126.}}$ Доказати:

1. $A \vdash A \vee B$;
2. $B \vdash A \vee B$;
3. $A \vee B \vdash B \vee A$;
4. $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$;
5. $(A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$.

Решење.

1. Треба доказати $A \vdash \neg A \Rightarrow B$, што је по ставу дедукције еквивалентно $A, \neg A \vdash B$, а ово смо већ доказали.

2. Треба доказати $B \vdash \neg A \Rightarrow B$, што је по ставу дедукције еквивалентно $B, \neg A \vdash B$, што је тривијално.

3. Треба доказати: $\neg A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow A$.

1.	хип.	$\neg A \Rightarrow B$
2.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (1)	$\neg B \Rightarrow \neg\neg A$
3.	$\vdash \neg\neg F \Rightarrow F$	$\neg\neg A \Rightarrow A$
4.	$F \Rightarrow G, G \Rightarrow H \vdash F \Rightarrow H$ (2,3)	$\neg B \Rightarrow A$

4. Треба доказати: $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C) \vdash \neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow C$, што је по ставу дедукције еквивалентно са $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C), \neg(\neg A \Rightarrow B) \vdash C$.

1.	хип.	$\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow C)$
2.	хип.	$\neg(\neg A \Rightarrow B)$
3.	$\vdash F \Rightarrow (\neg F \Rightarrow G)$	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
4.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (3)	$\neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$
5.	МП(2,4)	$\neg A$
6.	A1	$B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
7.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (6)	$\neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$
8.	МП(2,7)	$\neg B$
9.	МП(5,1)	$\neg B \Rightarrow C$
10.	МП(8,9)	C

$\dashv$

127. Доказати:

1. $A \wedge B \vdash A$;
2. $A \wedge B \vdash B$;
3. $A, B \vdash A \wedge B$;
4. $A \wedge B \vdash B \wedge A$;
5. $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$;
6. $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$.

Решење.

1. Треба доказати $\neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash A$.

1.	хип.	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$
2.	$\vdash \neg F \Rightarrow (F \Rightarrow G)$	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
3.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (2)	$\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg A$
4.	МП(1,3)	$\neg\neg A$
5.	$\neg\neg F \vdash F$ (4)	A

2. Треба доказати $\neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash B$.

1.	хип.	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$
2.	A1	$\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
3.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (2)	$\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg\neg B$
4.	МП(1,3)	$\neg\neg B$
5.	$\neg\neg F \vdash F$ (4)	B

3. Треба доказати $A, B \vdash \neg(A \Rightarrow \neg B)$.

1.	хип.	A
2.	хип.	B
3.	$\vdash F \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow G)$	$A \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B)$
4.	МП(1,3)	$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg B$
5.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (4)	$\neg\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$
6.	$F \vdash \neg\neg F$ (2)	$\neg\neg B$
7.	МП(6,5)	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$

4. Треба доказати $\neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash \neg(B \Rightarrow \neg A)$. Докажимо најпре лему: $B \Rightarrow \neg A \vdash A \Rightarrow \neg B$.

1.	хип.	$B \Rightarrow \neg A$
2.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (1)	$\neg\neg A \Rightarrow \neg B$
3.	$\vdash F \Rightarrow \neg\neg F$	$A \Rightarrow \neg\neg A$
4.	$F \Rightarrow G, G \Rightarrow H \vdash F \Rightarrow H$ (3,2)	$A \Rightarrow \neg B$

Из леме, према ставу дедукције, имамо $\vdash (B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$. Докажимо сада тврђење задатка.

1.	хип.	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$
2.	лема	$(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$
3.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (2)	$\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(B \Rightarrow \neg A)$
4.	МП(1,3)	$\neg(B \Rightarrow \neg A)$

5. Доказујемо $A \wedge (B \wedge C) \vdash (A \wedge B) \wedge C$.

1.	хип.	$A \wedge (B \wedge C)$
2.	$F \wedge G \vdash F$ (1)	A
3.	$F \wedge G \vdash G$ (1)	$B \wedge C$
4.	$F \wedge G \vdash F$ (3)	B
5.	$F \wedge G \vdash G$ (3)	C
6.	$F, G \vdash F \wedge G$ (1,4)	$A \wedge B$
7.	$F, G \vdash F \wedge G$ (6,5)	$(A \wedge B) \wedge C$

$\dashv$

128. Доказати:

1. $A \Leftrightarrow B \vdash A \Rightarrow B$;
2. $A \Leftrightarrow B \vdash B \Rightarrow A$;
3. $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A \vdash A \Leftrightarrow B$;
4. $\vdash A \Leftrightarrow B$ ако и само ако $\vdash A \Rightarrow B$ и $\vdash B \Rightarrow A$.

Решење. Прве три ствари се добијају директно из дефиниције еквиваленције и претходног задатка. А последња ствар је директна последица прве три. $\dashv$

129. Доказати:

1. $\vdash \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;
2. $\vdash \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

Решење.

1. Докажимо најпре $\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$, тј. $\vdash \neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$, што је према ставу дедукције еквивалентно са $\neg(\neg A \Rightarrow B) \vdash \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$.

   Докажимо најпре лему: $\neg A \Rightarrow \neg\neg B \vdash \neg A \Rightarrow B$, што је по ставу дедукције еквивалентно са $\neg A \Rightarrow \neg\neg B, \neg A \vdash B$.

1.	хип.	$\neg A \Rightarrow \neg\neg B$
2.	хип.	$\neg A$
3.	МП(2,1)	$\neg\neg B$
4.	$\neg\neg F \vdash F$ (3)	B

   Из леме, према ставу дедукције, добијамо $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$. Докажимо сада тврђење.

1.	хип.	$\neg(\neg A \Rightarrow B)$
2.	лема	$(\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$
3.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (2)	$\neg(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$
4.	МП(1,3)	$\neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$

Докажимо сада $\vdash \neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)$, тј. $\vdash \neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow B)$, што је према ставу дедукције еквивалентно са $\neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \vdash \neg(\neg A \Rightarrow B)$.

Докажимо најпре лему: $\neg A \Rightarrow B \vdash \neg A \Rightarrow \neg\neg B$, што је по ставу дедукције еквивалентно са $\neg A \Rightarrow B, \neg A \vdash \neg\neg B$.

1.	хип.	$\neg A \Rightarrow B$
2.	хип.	$\neg A$
3.	МП(2,1)	B
4.	$F \vdash \neg\neg F$ (3)	$\neg\neg B$

Из леме, према ставу дедукције, добијамо $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$. Докажимо сада тврђење.

1.	хип.	$\neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$
2.	лема	$(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$
3.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (2)	$\neg(\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow \neg(\neg A \Rightarrow B)$
4.	МП(1,3)	$\neg(\neg A \Rightarrow B)$

$\dashv$

Табло у исказној логици

Означена формула Нека је A формула која од везника користи само $\neg$, $\vee$, $\wedge$ и $\Rightarrow$. Означене формуле су $\mathcal{F}\ A$ и $\mathcal{T}\ A$.

α **правила** $\dfrac{\mathcal{T}\ \neg A}{\mathcal{F}\ a}$, $\dfrac{\mathcal{F}\ \neg A}{\mathcal{T}\ A}$, $\dfrac{\mathcal{T}\ A \wedge B}{\begin{matrix}\mathcal{T}\ A\\ \mathcal{T}\ B\end{matrix}}$, $\dfrac{\mathcal{F}\ A \vee B}{\begin{matrix}\mathcal{F}\ A\\ \mathcal{F}\ B\end{matrix}}$ и $\dfrac{\mathcal{F}\ A \Rightarrow B}{\begin{matrix}\mathcal{T}\ A\\ \mathcal{F}\ B\end{matrix}}$.

β **правила** $\dfrac{\mathcal{F}\ A \wedge B}{\mathcal{F}\ A \mid \mathcal{F}\ B}$, $\dfrac{\mathcal{T}\ A \vee B}{\mathcal{T}\ A \mid \mathcal{T}\ B}$ и $\dfrac{\mathcal{T}\ A \Rightarrow B}{\mathcal{F}\ A \mid \mathcal{T}\ B}$.

Табло Табло формуле A је бинарно дрво које задовољава:

1. корен таблоа је означена формула $\mathcal{F}\ A$;
2. табло се даље грана по α и β правилима.

Грана Грана таблоа је низ формула који садржи корен и не садржи гранање у себи.

Затворена грана Грана је затворена ако садржи означене формуле $\mathcal{F}\ B$ и $\mathcal{T}\ B$, за неку (бар једну) формулу B.

Затворен табло Табло је затворен ако су му све гране затворене.

Теорема потпуности за табло A је таутологија ако и само ако је табло за A затворен.

$\boxed{\textbf{130.}}$ Методом таблоа доказати да је $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ таутологија.

Решење.

- $0.\ \mathcal{F}\ (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- $1(0)\ \mathcal{T}\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
- $2(0)\ \mathcal{F}\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
  - $3(1)\ \mathcal{F}\ p$
    - $5(2)\ \mathcal{T}\ p \Rightarrow q$
    - $6(2)\ \mathcal{F}\ p \Rightarrow r$
      - $7(5)\ \mathcal{F}\ p$, $9(6)\ \mathcal{T}\ p$, $10(6)\ \mathcal{F}\ r$, $\times(7,9)$
      - $8(5)\ \mathcal{T}\ q$, $11(6)\ \mathcal{T}\ p$, $12(6)\ \mathcal{F}\ r$, $\times(3,11)$
  - $4(1)\ \mathcal{T}\ q \Rightarrow r$
    - $13(2)\ \mathcal{T}\ p \Rightarrow q$
    - $14(2)\ \mathcal{F}\ p \Rightarrow r$
      - $15(4)\ \mathcal{F}\ q$
        - $17(13)\ \mathcal{F}\ p$, $19(14)\ \mathcal{T}\ p$, $20(14)\ \mathcal{F}\ r$, $\times(17,19)$
        - $18(13)\ \mathcal{T}\ q$, $21(14)\ \mathcal{T}\ p$, $22(14)\ \mathcal{F}\ r$, $\times(15,18)$
      - $16(4)\ \mathcal{T}\ r$
        - $23(13)\ \mathcal{F}\ p$, $25(14)\ \mathcal{T}\ p$, $26(14)\ \mathcal{F}\ r$, $\times(23,25)$
        - $24(13)\ \mathcal{T}\ q$, $27(14)\ \mathcal{T}\ p$, $28(14)\ \mathcal{F}\ r$, $\times(16,28)$

Или:

- $0.\ \mathcal{F}\ (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
- $1(0)\ \mathcal{T}\ p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
- $2(0)\ \mathcal{F}\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $3(2)\ \mathcal{T}\ p \Rightarrow q$
- $4(2)\ \mathcal{F}\ p \Rightarrow r$
- $5(4)\ \mathcal{T}\ p$
- $6(4)\ \mathcal{F}\ r$
  - $7(1)\ \mathcal{F}\ p$, $\times(5,7)$
  - $8(1)\ \mathcal{T}\ q \Rightarrow r$
    - $9(3)\ \mathcal{F}\ p$, $\times(5,9)$
    - $10(3)\ \mathcal{T}\ q$
      - $11(8)\ \mathcal{F}\ q$, $\times(10,11)$
      - $12(8)\ \mathcal{T}\ r$, $\times(6,12)$

$\dashv$

131. Методом таблоа доказати да је $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ таутологија.

Решење.

$0.\ \mathcal{F}\ (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

$1(0)\ \mathcal{T}\ p \vee q \Rightarrow r$

$2(0)\ \mathcal{F}\ (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

- $3(1)\ \mathcal{F}\ p \vee q$
  - $5(3)\ \mathcal{F}\ p$
  - $6(3)\ \mathcal{F}\ q$
    - $7(2)\ \mathcal{F}\ p \Rightarrow r$
      - $9(7)\ \mathcal{T}\ p$
      - $10(7)\ \mathcal{F}\ r$
      - $\times(5, 9)$
    - $8(2)\ \mathcal{F}\ q \Rightarrow r$
      - $11(8)\ \mathcal{T}\ q$
      - $12(8)\ \mathcal{F}\ r$
      - $\times(6, 11)$
- $4(1)\ \mathcal{T}\ r$
  - $13(2)\ \mathcal{F}\ p \Rightarrow r$
    - $15(13)\ \mathcal{T}\ p$
    - $16(13)\ \mathcal{F}\ r$
    - $\times(4, 16)$
  - $14(2)\ \mathcal{F}\ q \Rightarrow r$
    - $17(14)\ \mathcal{T}\ p$
    - $18(14)\ \mathcal{F}\ r$
    - $\times(4, 18)$

$\dashv$

132. Методом таблоа доказати да је $(r \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r))$ таутологија.

Решење.

- $0.\ \mathcal{F}\ (r \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r))$
- $1(0)\ \mathcal{T}\ r \Rightarrow p$
- $2(0)\ \mathcal{F}\ (p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$
- $3(2)\ \mathcal{T}\ (p \wedge q) \vee r$
- $4(2)\ \mathcal{F}\ p \wedge (q \vee r)$
  - $5(1)\ \mathcal{F}\ r$
    - $7(3)\ \mathcal{T}\ p \wedge q$
      - $9(7)\ \mathcal{T}\ p$
      - $10(7)\ \mathcal{T}\ q$
        - $11(4)\ \mathcal{F}\ p$
          - $\times(9, 11)$
        - $12(4)\ \mathcal{F}\ q \vee r$
          - $13(12)\ \mathcal{F}\ q$
          - $14(12)\ \mathcal{F}\ r$
          - $\times(10, 13)$
    - $8(3)\ \mathcal{T}\ r$
      - $\times(5, 8)$
  - $6(1)\ \mathcal{T}\ p$
    - $15(4)\ \mathcal{F}\ p$
      - $\times(6, 15)$
    - $16(4)\ \mathcal{F}\ q \vee r$
      - $17(16)\ \mathcal{F}\ q$
      - $18(16)\ \mathcal{F}\ r$
        - $19(3)\ \mathcal{T}\ p \wedge q$
          - $21(19)\ \mathcal{T}\ p$
          - $22(19)\ \mathcal{T}\ q$
          - $\times(17, 22)$
        - $20(3)\ \mathcal{T}\ r$
          - $\times(18, 20)$

$\dashv$

133. Методом таблоа доказати да је $(r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \wedge \neg q) \wedge \neg r)$ таутологија.

Решење.

$0.\ \mathcal{F}\ (r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \wedge \neg q) \wedge \neg r)$

$1(0)\ \mathcal{T}\ r \Rightarrow \neg p$

$2(0)\ \mathcal{F}\ p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \wedge \neg q) \wedge \neg r$

$3(2)\ \mathcal{T}\ p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$

$4(2)\ \mathcal{F}\ (p \wedge \neg q) \wedge \neg r$

$5(3)\ \mathcal{T}\ p$

$6(3)\ \mathcal{T}\ \neg(q \wedge \neg r)$

$7(6)\ \mathcal{F}\ q \wedge \neg r$

- $8(1)\ \mathcal{F}\ r$
  - $11(7)\ \mathcal{F}\ q$
    - $14(4)\ \mathcal{F}\ p \wedge \neg q$
      - $17(14)\ \mathcal{F}\ p$
        - $\times(5, 17)$
      - $18(14)\ \mathcal{F}\ \neg q$
        - $19(18)\ \mathcal{T}\ q$
        - $\times(11, 19)$
    - $15(4)\ \mathcal{F}\ \neg r$
      - $16(15)\ \mathcal{T}\ r$
      - $\times(8, 16)$
  - $12(7)\ \mathcal{F}\ \neg r$
    - $13(12)\ \mathcal{T}\ r$
    - $\times(8, 13)$
- $9(1)\ \mathcal{T}\ \neg p$
  - $10(9)\ \mathcal{F}\ p$
  - $\times(5, 10)$

$\dashv$

134. Методом таблоа доказати да је $((p \wedge q) \vee (q \wedge r)) \vee (r \wedge p) \Rightarrow (p \vee q) \wedge ((q \vee r) \wedge (r \vee p))$ таутологија.

Решење.

- $0.\ \mathcal{F}\ ((p \wedge q) \vee (q \wedge r)) \vee (r \wedge p) \Rightarrow (p \vee q) \wedge ((q \vee r) \wedge (r \vee p))$
- $1(0)\ \mathcal{T}\ ((p \wedge q) \vee (q \wedge r)) \vee (r \wedge p)$
- $2(0)\ \mathcal{F}\ (p \vee q) \wedge ((q \vee r) \wedge (r \vee p))$
  - $3(1)\ \mathcal{T}\ (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$
    - $5(3)\ \mathcal{T}\ p \wedge q$, $7(5)\ \mathcal{T}\ p$, $8(5)\ \mathcal{T}\ q$
      - $9(2)\ \mathcal{F}\ p \vee q$, $11(9)\ \mathcal{F}\ p$, $12(9)\ \mathcal{F}\ q$, $\times(7, 11)$
      - $10(2)\ \mathcal{F}\ (q \vee r) \wedge (r \vee p)$
        - $13(10)\ \mathcal{F}\ q \vee r$, $15(13)\ \mathcal{F}\ q$, $16(13)\ \mathcal{F}\ r$, $\times(8, 15)$
        - $14(10)\ \mathcal{F}\ r \vee p$, $17(10)\ \mathcal{F}\ r$, $18(10)\ \mathcal{F}\ p$, $\times(7, 18)$
    - $6(3)\ \mathcal{T}\ q \wedge r$, $19(6)\ \mathcal{T}\ q$, $20(6)\ \mathcal{T}\ r$
      - $21(2)\ \mathcal{F}\ p \vee q$, $23(21)\ \mathcal{F}\ p$, $24(21)\ \mathcal{F}\ q$, $\times(19, 24)$
      - $22(2)\ \mathcal{F}\ (q \vee r) \wedge (r \vee p)$
        - $25(22)\ \mathcal{F}\ q \vee r$, $27(25)\ \mathcal{F}\ q$, $28(25)\ \mathcal{F}\ r$, $\times(20, 28)$
        - $26(22)\ \mathcal{F}\ r \vee p$, $29(26)\ \mathcal{F}\ r$, $30(26)\ \mathcal{F}\ p$, $\times(20, 29)$
  - $4(1)\ \mathcal{T}\ r \wedge p$, $31(4)\ \mathcal{T}\ r$, $32(4)\ \mathcal{T}\ p$
    - $33(2)\ \mathcal{F}\ p \vee q$, $35(31)\ \mathcal{F}\ p$, $36(31)\ \mathcal{F}\ q$, $\times(32, 35)$
    - $34(2)\ \mathcal{F}\ (q \vee r) \wedge (r \vee p)$
      - $37(34)\ \mathcal{F}\ q \vee r$, $39(37)\ \mathcal{F}\ q$, $40(37)\ \mathcal{F}\ r$, $\times(31, 40)$
      - $38(34)\ \mathcal{F}\ r \vee p$, $41(38)\ \mathcal{F}\ r$, $42(38)\ \mathcal{F}\ p$, $\times(31, 41)$

$\dashv$

Резолуција у исказној логици

Литерал Литерал је исказно слово или негација исказног слова.

Клауза Клауза је дисјункција литерала. Клаузе ћемо записивати као скупове: тј. клаузу $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$, где су L_i литерари, пишемо као $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$.

КНФ КНФ је конјункција клауза.

Правило резолуције Ако су C_1 и C_2 клаузе, $L_1 \in C_1$, $L_2 \in C_2$ литерали такви да $L_1 \equiv \neg L_2$ (тј. један од L_1, L_2 је исказно слово, а други је његова негација), тада је **резолвента** од C_1 и C_2, у односу на L_1 и L_2, следећа клауза: $Res(C_1, C_2; L_1, L_2) = (C_1 - \{L_1\}) \cup (C_2 - \{L_2\})$. У овом случају правило резолуције гласи: $Res\dfrac{C_1, C_2}{Res(C_1, C_2; L_1, L_2)}$.

Доказ за клаузу C из скупа клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ Доказ за клаузу C из скупа клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ је коначан низ клауза $A_1, A_2, \ldots, A_m$ који задовољава: за сваку клаузу A_i, $1 \leq i \leq m$ важи

1. $A_i \in \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ или
2. $A_i = Res(A_j, A_k; L_j, L_k)$, где $j, k < i$. И
3. $A_m = C$.

Теорема потпуности за резолуцију Скуп клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ је контрадикторан ако и само ако постоји доказ за $\emptyset$ из скупа клауза $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$.

Коментар Формула F дата у КНФ је контрадикција ако и само ако постоји доказ за $\emptyset$ из клауза формуле F. Користећи да је формула F таутологија ако и само ако је $\neg F$ контрадикција, метод резолуције можемо да користимо и за доказ да је F таутологија.

135. Методом резолуције доказати да је $F = (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ таутологија.

Решење. Запишимо најпре $\neg F$ у КНФ.

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge \neg((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \Rightarrow r) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r.
\end{aligned}$$

Имамо дакле 4 клауза. Запишимо доказ за $\emptyset$.

$C_1 = \{\neg p, q\}$	
$C_2 = \{\neg q, r\}$	
$C_3 = \{p\}$	
$C_4 = \{\neg r\}$	
$C_5 = \{q\}$	$Res(C_1, C_3; \neg p, p)$
$C_6 = \{r\}$	$Res(C_2, C_5; \neg q, q)$
$C_7 = \emptyset$	$Res(C_4, C_6; \neg r, r)$

Како смо доказали $\emptyset$, то је $\neg F$ контрадикција, па је F таутологија. $\dashv$

136. Методом резолуције доказати да је $F = (r \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r))$ таутологија.

Решење. Запишимо најпре $\neg F$ у КНФ.

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv (r \Rightarrow p) \wedge \neg((p \wedge q) \vee r \Rightarrow p \wedge (q \vee r)) \\
&\equiv (\neg r \vee p) \wedge ((p \wedge q) \vee r) \wedge \neg(p \wedge (q \vee r)) \\
&\equiv (\neg r \vee p) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \\
&\equiv (\neg r \vee p) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r).
\end{aligned}$$

Имамо 5 клауза. Запишимо доказ за $\emptyset$.

$C_1 = \{\neg r, p\}$
$C_2 = \{p, r\}$
$C_3 = \{q, r\}$
$C_4 = \{\neg p, \neg q\}$
$C_5 = \{\neg p, \neg r\}$

$C_6 = \{p\}$	$Res(C_1, C_2; \neg r, r)$
$C_7 = \{\neg q\}$	$Res(C_4, C_6; \neg p, p)$
$C_8 = \{r\}$	$Res(C_3, C_7; q, \neg q)$
$C_9 = \{\neg p\}$	$Res(C_5, C_8; \neg r, r)$
$C_{10} = \emptyset$	$Res(C_6, C_9; p, \neg p)$

Како смо доказали $\emptyset$, то је $\neg F$ контрадикција, па је F таутологија. $\dashv$

137. Методом резолуције доказати да је $F = (r \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \Rightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ таутологија.

Решење. Запишимо најпре $\neg F$ у КНФ.

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv (r \Rightarrow \neg p) \wedge \neg(p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \Rightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
&\equiv (\neg r \vee \neg p) \wedge p \wedge \neg(q \wedge \neg r) \wedge \neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
&\equiv (\neg r \vee \neg p) \wedge p \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r).
\end{aligned}$$

Имамо 4 клаузе. Запишимо доказ за $\emptyset$.

$C_1 = \{\neg r, \neg p\}$
$C_2 = \{p\}$
$C_3 = \{\neg q, r\}$
$C_4 = \{\neg p, q, r\}$

$C_5 = \{\neg r\}$	$Res(C_1, C_2; \neg p, p)$
$C_6 = \{\neg q\}$	$Res(C_3, C_5; r, \neg r)$
$C_7 = \{q, r\}$	$Res(C_2, C_4; p, \neg p)$
$C_8 = \{r\}$	$Res(C_6, C_7; \neg q, q)$
$C_9 = \emptyset$	$Res(C_5, C_8; \neg r, r)$

Како смо доказали $\emptyset$, то је $\neg F$ контрадикција, па је F таутологија. $\dashv$

138. Методом резолуције доказати да је $F = (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \Rightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ таутологија.

Решење. Запишимо најпре $\neg F$ у КНФ.

$$\neg F \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg p).$$

Имамо 6 клауза. Запишимо доказ за $\emptyset$.

$C_1 = \{p, q\}$
$C_2 = \{q, r\}$
$C_3 = \{r, p\}$
$C_4 = \{\neg p, \neg q\}$
$C_5 = \{\neg q, \neg r\}$
$C_6 = \{\neg r, \neg p\}$

$C_7 = \{p, \neg r\}$	$Res(C_1, C_5; q, \neg q)$
$C_8 = \{p\}$	$Res(C_3, C_7; r, \neg r)$
$C_9 = \{\neg p, r\}$	$Res(C_2, C_4; q, \neg q)$
$C_{10} = \{\neg p\}$	$Res(C_6, C_9; \neg r, r)$
$C_{11} = \emptyset$	$Res(C_8, C_{10}; p, \neg p)$

Како смо доказали $\emptyset$, то је $\neg F$ контрадикција, па је F таутологија. $\dashv$

Булове алгебре

Булова алгебра Структура $\mathbb{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, где је B неки скуп, $\wedge$ и $\vee$ бинарне операције на скупу B, $'$ унарна операција на скупу B, и $0, 1 \in B$ су два истакнута елемента, се зове Булова алгебра ако задовољава следеће аксиоме:

1. $x \wedge y = y \wedge x$ $\qquad x \vee y = y \vee x$;
2. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ $\qquad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
3. $x \wedge 1 = x$ $\qquad x \vee 0 = x$;
4. $x \wedge x' = 0$ $\qquad x \vee x' = 1$;
5. $0 \neq 1$.

Операцију $\wedge$ називамо инфимум, $\vee$ супремум, а $'$ комплемент.

139. Доказати $0' = 1$ и $1' = 0$.

Решење. Докажимо само $0' = 1$:

$$0' \overset{3.}{=} 0' \vee 0 \overset{1.}{=} 0 \vee 0' \overset{4.}{=} 1.$$

$\dashv$

Коментар Надаље нећемо посебно да наглашавамо коју аксиому користимо, и комутативност, као и све последице комутативности у комбинацијама са осталим аксиомама, нећемо посебно записивати.

140. Доказати $(x')' = x$.

Решење.

$$\begin{aligned}
(x')' &= (x')' \vee 0 \\
&= (x')' \vee (x \wedge x') \\
&= ((x')' \vee x) \wedge ((x')' \vee x') \\
&= ((x')' \vee x) \wedge 1 \\
&= ((x')' \vee x) \wedge (x' \vee x) \\
&= ((x')' \wedge x') \vee x \\
&= 0 \vee x \\
&= x.
\end{aligned}$$

$\dashv$

141. Доказати законе идемпотенције $x \wedge x = x$ и $x \vee x = x$.

Решење. Докажимо само $x \wedge x = x$.

$$\begin{aligned} x \wedge x &= (x \wedge x) \vee 0 \\ &= (x \wedge x) \vee (x \wedge x') \\ &= x \wedge (x \vee x') \\ &= x \wedge 1 \\ &= x. \end{aligned}$$

⊣

142. Доказати $x \wedge 0 = 0$ и $x \vee 1 = 1$.

Решење. Докажимо само $x \wedge 0 = 0$.

$$\begin{aligned} x \wedge 0 &= (x \wedge 0) \vee 0 \\ &= (x \wedge 0) \vee (x \wedge x') \\ &= x \wedge (0 \vee x') \\ &= x \wedge x' \\ &= 0. \end{aligned}$$

⊣

143. Доказати законе апсорбције $x \wedge (x \vee y) = x$ и $x \vee (x \wedge y) = x$.

Решење. Докажимо само $x \wedge (x \vee y) = x$.

$$\begin{aligned} x \wedge (x \vee y) &= (x \vee 0) \wedge (x \vee y) \\ &= x \vee (0 \wedge y) \\ &= x \vee 0 \\ &= x. \end{aligned}$$

⊣

144. Доказати $x \wedge z = y \wedge z$ и $x \vee z = y \vee z$ ако и само ако $x = y$.

Решење. ($\Leftarrow$) Овај смер је тривијалан.
($\Rightarrow$) Претпоставимо $x \wedge z = y \wedge z$ и $x \vee z = y \vee z$.

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (x \vee z) \\ &= x \wedge (y \vee z), \text{ по претпоставци } x \vee z = y \vee z \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ &= (x \wedge y) \vee (y \wedge z), \text{ по претпоставци } x \wedge z = y \wedge z \\ &= (x \vee z) \wedge y \\ &= (y \vee z) \wedge y, \text{ по претпоставци } x \vee z = y \vee z \\ &= y. \end{aligned}$$

⊣

145. Доказати:

1. $x \vee z = y \vee z$ и $x \vee z' = y \vee z'$ ако и само ако $x = y$;
2. $x \wedge z = y \wedge z$ и $x \wedge z' = y \wedge z'$ ако и само ако $x = y$.

Решење. Докажимо само прво тврђење. Друго се доказује слично.
($\Leftarrow$) Овај смер је тривијалан.
($\Rightarrow$) Претпоставимо $x \vee z = y \vee z$ и $x \vee z' = y \vee z'$.

$$\begin{aligned} x &= x \vee 0 \\ &= x \vee (z \wedge z') \\ &= (x \vee z) \wedge (x \vee z') \\ &= (y \vee z) \wedge (y \vee z'), \text{ по претпоставкама } x \vee z = y \vee z, x \vee z' = y \vee z' \\ &= y \vee (z \wedge z') \\ &= y \vee 0 \\ &= y. \end{aligned}$$

$\dashv$

146. Доказати асоцијативне законе $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ и $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

Решење. Означимо $a = x \wedge (y \wedge z)$, $b = (x \wedge y) \wedge z$ и $c = x$.
$a \vee c = (x \wedge (y \wedge z)) \vee x = x$, $b \vee c = ((x \wedge y) \wedge z) \vee x = ((x \wedge y) \vee x) \wedge (z \vee x) = x \wedge (z \vee x) = x$. Дакле, $a \vee c = b \vee c$.
$a \vee c' = (x \wedge (y \wedge z)) \vee x' = (x \vee x') \wedge ((y \wedge z) \vee x') = 1 \wedge ((y \wedge z) \vee x') = (y \wedge z) \vee x'$, $b \vee c' = ((x \wedge y) \wedge z) \vee x' = ((x \wedge y) \vee x') \wedge (z \vee x') = ((x \vee x') \wedge (y \vee x')) \wedge (z \vee x') = (1 \wedge (y \vee x')) \wedge (z \vee x') = (y \vee x') \wedge (z \vee x') = (y \wedge z) \vee x'$. Дакле, $a \vee c' = b \vee c'$.
Према претходном задатку $a = b$, тј. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$. Слично се доказује и други закон. $\dashv$

147. Доказати $x \wedge y = 0$ и $x \vee y = 1$ ако и само ако $y = x'$.

Решење. ($\Leftarrow$) Овај смер следи директно из аксиоме 4.
($\Rightarrow$) Претпоставимо $x \wedge y = 0$ и $x \vee y = 1$.

$$\begin{aligned} y &= y \vee 0 \\ &= y \vee (x \wedge x') \\ &= (y \vee x) \wedge (y \vee x') \\ &= 1 \wedge (y \vee x'), \text{ по претпоставци } x \vee y = 1 \\ &= (x \vee x') \wedge (y \vee x') \\ &= (x \wedge y) \vee x' \\ &= 0 \vee x', \text{ по претпоставци } x \wedge y = 0 \\ &= x'. \end{aligned}$$

$\dashv$

148. Доказати Де Морганове законе $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ и $(x \vee y)' = x' \wedge y'$.

Решење. Означимо $a = x \wedge y$ и $b = x' \vee y'$. $a \wedge b = (x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$, $a \vee b = (x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = (1 \vee y') \wedge (1 \vee x') = 1 \wedge 1 = 1$. Према претходном задатку је $b = a'$, тј. $x' \vee y' = (x \wedge y)'$.

Слично доказујемо и други закон. $\dashv$

149. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:

1. $x \wedge y = x$;
2. $x \vee y = y$;
3. $x' \vee y = 1$;
4. $x \wedge y' = 0$.

Решење. (1. $\Rightarrow$ 2.) Претпоставимо $x \wedge y = x$. Тада је $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Претпоставимо $x \vee y = y$. Тада је $x' \vee y = x' \vee x \vee y = 1 \vee y = 1$.

(3. $\Rightarrow$ 4.) Претпоставимо $x' \vee y = 1$. Тада је $x \wedge y' = x'' \wedge y' = (x' \vee y)' = 1' = 0$.

(4. $\Rightarrow$ 1.) Претпоставимо $x \wedge y' = 0$. Тада је $x \wedge y = (x \wedge y) \vee 0 = (x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge 1 = x$. $\dashv$

Уређење Кажемо да је $x \leq y$ ако и само ако $x \wedge y = x$ (према претходном задатку ако и само ако $x \vee y = y$, $x' \vee y = 1$ или $x \wedge y' = 0$).

150. Доказати да је $\leq$ парцијално уређење на B, тј. $\leq$ је рефлексива, антисиметрична и транзитивна релација.

Решење. Како је $x \wedge x = x$, то је $x \leq x$, тј. $\leq$ је рефлексивна.

Ако је $x \leq y$ и $y \leq x$, тада је $x \wedge y = x$ и $x \wedge y = y$. Одатле $x = y$, тј. $\leq$ је антисиметрична.

Ако је $x \leq y$ и $y \leq z$, тада је $x \wedge y = x$ и $y \wedge z = y$. $x \wedge z = x \wedge y \wedge y = x \wedge y = x$, одакле је $x \leq z$, тј. $\leq$ је транзитивна. $\dashv$

151. Доказати:

1. $0 \leq x$ и $x \leq 1$;
2. ако $x \leq y$ и $u \leq v$, тада $x \wedge u \leq y \wedge v$ и $x \vee u \leq y \vee v$;
3. $x \leq y$ ако и само ако $y' \leq x'$.

Решење.

1. $0 \leq x$ јер $0 \wedge x = 0$, и $x \leq 1$ јер $x \wedge 1 = x$.
2. Нека је $x \leq y$ и $u \leq v$, тј. $x \wedge y = x$ и $u \wedge v = u$, али такође $x \vee y = y$ и $u \vee v = v$. Тада $(x \wedge u) \wedge (y \wedge v) = (x \wedge y) \wedge (u \wedge v) = x \wedge u$, тј. $x \wedge u \leq y \wedge v$. Такође, $(x \vee u) \vee (y \vee v) = (x \vee y) \vee (u \vee v) = y \vee v$, тј. $x \vee u \leq y \vee v$.
3. $x \leq y$ ако и само ако $x \wedge y = x$ ако и само ако $(x \wedge y)' = x'$ ако и само ако $x' \vee y' = x'$ ако и само ако $y' \leq x'$.

$\dashv$

$\boxed{\textbf{152.}}$ Доказати:

1. $x \wedge y \leq x$ и $x \leq x \vee y$;
2. ако $z \leq x, y$, тада $z \leq x \wedge y$.
3. ако $x, y \leq z$, тада $x \vee y \leq z$.

Решење.

1. $(x \wedge y) \wedge x = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$, па је $x \wedge y \leq x$. Такође, $x \wedge (x \vee y) = x$, па је $x \leq x \vee y$.
2. Нека $z \leq x, y$. Тада $z = z \wedge z \leq x \wedge y$.
3. Нека $x, y \leq z$. Тада $x \vee y \leq z \vee z = z$.

$\dashv$

Интервал Ако је $a \leq b$, интервал $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

$\boxed{\textbf{153.}}$ Нека је $a < b$. За $x \in [a, b]$ дефинишемо $x^\star = (x' \vee a) \wedge b$. Доказати да је $([a, b], \wedge, \vee, ^\star, a, b)$ Булова алгебра.

Решење. Докажимо најпре да су $\wedge, \vee, ^\star$ операције на $[a, b]$. Нека $x, y \in [a, b]$, тј. $a \leq x \leq b$ и $a \leq y \leq b$. Тада $a = a \wedge a \leq x \wedge y \leq b \wedge b = b$ и $a = a \vee a \leq x \vee y \leq b \vee b = b$, одакле $x \wedge y, x \vee y \in [a, b]$. Ако $x \in [a, b]$, тада $a \leq x' \vee a$, па како је и $a \leq b$, то је $a = a \wedge a \leq (x' \vee a) \wedge b = x^\star$. Такође, $x^\star = (x' \vee a) \wedge b \leq b$, одакле $x^\star \in [a, b]$.

Како су $\wedge, \vee$ комутативне операције и дистрибутивне једна према другој на B, оне су такве и на $[a, b]$.

Ако $x \in [a, b]$, тј. $a \leq x \leq b$, то је и $x \vee a = x$ и $x \wedge b = x$, па је испуњена и трећа аксиома. Такође, $x \wedge x^\star = x \wedge (x' \vee a) \wedge b = (x \wedge b) \wedge (x' \vee a) = x \wedge (x' \vee a) = (x \wedge x') \vee (x \wedge a) = 0 \vee a = a$ и $x \vee x^\star = x \vee ((x' \vee a) \wedge b) = (x \vee x' \vee a) \wedge (x \vee b) = (1 \vee a) \wedge b = 1 \wedge b = b$, па је испуњена и четврта аксиома.

Како је $a < b$, то је $a \neq b$, што даје пету аксиому. Дакле, $([a, b], \wedge, \vee, ^\star, a, b)$ је Булова алгебра. $\dashv$

Идеал $I \subsetneq B$ је идеал ако:

1. $0 \in I$;
2. ако $x \in I$ и $y \leq x$, тада $y \in I$;
3. ако $x, y \in I$, тада $x \vee y \in I$.

Филтер $F \subsetneq B$ је филтер ако:

1. $1 \in F$;
2. ако $x \in F$ и $x \leq y$, тада $y \in F$;
3. ако $x, y \in F$, тада $x \wedge y \in F$.

$\boxed{\textbf{154.}}$ Нека је $a \neq 0, 1$. Доказати да је интервал $[0, a] = \{x \mid x \leq a\}$ идеал, а интервал $[a, 1] = \{x \mid a \leq x\}$ филтер алгебре B.

Решење. Докажимо само да је $[a, 1]$ филтер, ако је $a \neq 0$.

Докажимо најпре да је $[a, 1] \subsetneq B$. Ако претпоставимо супротно да је $[a, 1] = B$, тада је $0 \in [a, 1]$, па је $a \leq 0$. Како је увек $0 \leq a$, то је $a = 0$, што је контрадикција.

Приметимо да $1 \in [a, 1]$, одакле је прва особина испуњена.

Нека $x \in [a, 1]$ и $x \leq y$. Тада $a \leq x \leq y$, па и $a \leq y$, одакле $y \in [a, 1]$.

Нека $x, y \in [a, 1]$. Тада $a \leq x$ и $a \leq y$, па је $a = a \wedge a \leq x \wedge y$, одакле $x \wedge y \in [a, 1]$. $\dashv$

$\boxed{\textbf{155.}}$ Нека је $S \subseteq B$. Дефинишемо $S^\star = \{x' \mid x \in S\}$. Приметите $S^{\star\star} = S$.

1. Ако је I идеал, доказати да је $I^\star$ филтер.

2. Ако је F филтер. доказати да је $F^\star$ идеал.

Решење. Докажимо само први део. Користимо очигледну карактеризацију: $x \in I^\star$ ако и само ако $x' \in I$.

$I^\star \subsetneq B$, јер из $1 \notin I$, следи $0 \notin I^\star$. Такође, како $0 \in I$, то $1 \in I^\star$.

Нека $x \in I^\star$ и $x \leq y$. Тада $x' \in I$ и $y' \leq x'$, па $y' \in I$, одакле $y \in I^\star$. Нека $x, y \in I^\star$. Тада $x', y' \in I$, па $x' \vee y' \in I$. Тада $x \wedge y = (x' \vee y')' \in I^\star$. $\dashv$

$\boxed{\textbf{156.}}$ Нека је F коначан филтер неке Булове алгебре. Тада је F главни филтер. Специјално, сви филтери у коначној Буловој алгебри су главни.

Решење. . Нека је $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Нека је $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k$. Докажимо да је $F = [a, 1]$.

Нека $x \in F$. Тада је $x = a_i$, за неко $1 \leq i \leq k$, и $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k \leq a_i = x$, па $x \in [a, 1]$. Дакле, $F \subseteq [a, 1]$.

Приметимо да $a \in F$, јер је a коначан инфимум елемената из F (по трећој аксиоми за филтер). Одатле, због друге аксиоме за филтер, $[a, 1] \subseteq F$. $\dashv$

$\boxed{\textbf{157.}}$

1) $\{1\}$ је филтер.

2) Ако су F и G филтри, тада је и $F \cap G$ филтер.

3) Ако су F и G филтри, тада је $FG = \{x \wedge y \mid x \in F, y \in G\}$ или филтер или је једнак B.

4) Ако су F, G и FG филтри, тада $F, G \subseteq FG$ и ако је H филтер такав да $F, G \subseteq H$, тада је $FG \subseteq H$. (Другим речима, ако је FG филтер, тада је он најмањи филтер који садржи и F и G.)

Решење.

1) Ово је очигледно.

2) Ако су F и G филтри, тада је $F \cap G \subseteq F \subsetneq B$, па је $F \cap G$ строго садржан у B. Такође, како $1 \in F, G$, то $1 \in F \cap G$, па је прва особина из дефиниције филтра испуњена.

   Претпоставимо да $x, y \in F \cap G$. Тада $x, y \in F, G$, па како су F и G филтри то $x \wedge y \in F, G$, па и $x \wedge y \in F \cap G$, одакле следи да је испуњена и друга особина дефиниције филтра.

   Претпоставимо да $x \in F \cap G$ и $x \leq y$. Тада $x \in F, G$, па како су F и G филтри, то $y \in F, G$, па и $y \in F \cap G$, одакле је испуњена и трећа особина дефиниције филтра.

3) Претпоставимо да $FG \neq B$. Тада је $FG \subsetneq B$. Доказујемо да FG задовољава особине филтра. Како $1 \in F, G$, то $1 = 1 \wedge 1 \in FG$.

   Претпоставимо да $x, y \in FG$. Тада је $x = x_1 \wedge x_2$ и $y = y_1 \wedge y_2$, за неке $x_1, y_1 \in F$ и $x_2, y_2 \in G$. Тада је $x \wedge y = X_1 \wedge x_2 \wedge y_1 \wedge y_2 = (x_1 \wedge y_1) \wedge (x_2 \wedge y_2) \in FG$, јер $x_1 \wedge y_1 \in F$, а $x_2 \wedge y_2 \in G$.

   Коначно претпоставимо да $x \in FG$ и $x \leq y$. Тада је $x = x_1 \wedge x_2$ за неке $x_1 \in F$ и $x_2 \in G$. Како је $x_1 \leq x_1 \vee y$ и $x_2 \leq x_2 \vee y$, то $x_1 \vee y \in F$, а $x_2 \vee y \in G$. Приметимо да је $(x_1 \vee y) \wedge (x_2 \vee y) = (x_1 \wedge x_2) \vee y = x \vee y = y$, јер $x \leq y$, па због тога $y \in FG$.

4) Ако $x \in F$, како $1 \in G$, тада $x = x \wedge 1 \in FG$, што доказује $F \subseteq FG$. Слично се доказује $G \subseteq FG$.

   Претпоставимо да $F, G \subseteq H$. Ако $x \in FG$, тада је $x = x_1 \wedge x_2$, за неке $x_1 \in F$ и $x_2 \in G$. Како $F, G \subseteq H$, то $x_1, x_2 \in H$, па и $x = x_1 \wedge x_2 \in H$. То доказује $FG \subseteq H$.

$\dashv$

Поље скупова Нека је $S \neq \emptyset$. Фамилија $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$ је *поље скупова над* S ако:

1. $\emptyset, S \in \mathcal{B}$;
2. ако $A, B \in \mathcal{B}$, тада и $A \cap B, A \cup B, A^C \in \mathcal{B}$.

158. Нека је $S \neq \emptyset$ и $\mathcal{B}$ поље скупова над S. Доказати да је $(\mathcal{B}, \cap, \cup, ^C, \emptyset, S)$ Булова алгебра. Доказати да је њено уређење $\subseteq$.

Решење. Из дефиниције поља скупова следи да су $\cap, \cup, ^C$ операције на $\mathcal{B}$ и да $\emptyset, S \in \mathcal{B}$. Проверимо аксиоме Булових алгебри.

Очигледно је да је комутативност испуњена, тј. да је $A \cap B = B \cap A$ и да је $A \cup B = B \cup A$. Докажимо дистрибутиван закон $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

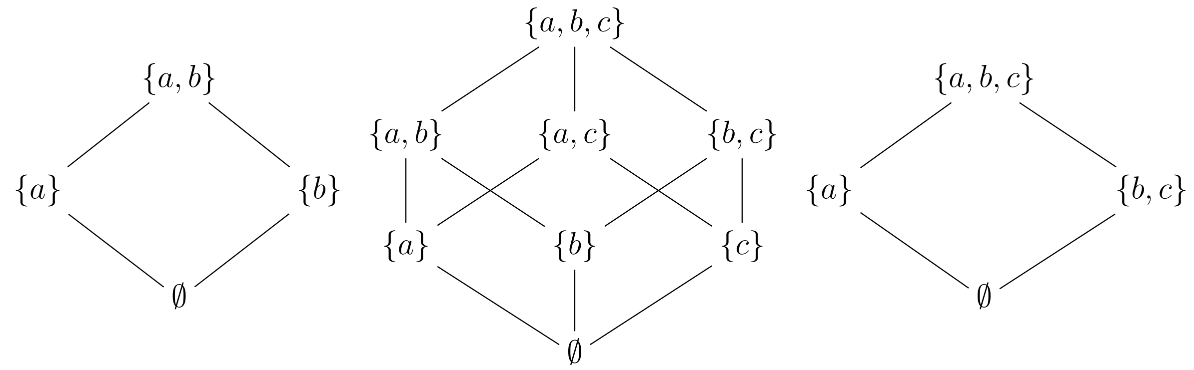
Слично се доказује и други дистрибутивни закон.

Трећа аксиома на датом језику гласи: $A \cup \emptyset = A$ и $A \cap S = A$. Прва једнакост је тривијално испуњена, док друга следи из чињенице да је $A \subseteq S$, јер је $A \in \mathcal{B}$, а $\mathcal{B}$ је поље скупова над S.

Четврта аксиома гласи: $A \cap A^C = \emptyset$ и $A \cup A^C = S$, и она је тривијално испуњена. Пета аксиома, $\emptyset \neq S$, је испуњена по претпоставци о скупу S.

Дакле, $(\mathcal{B}, \cap, \cup, ^C, \emptyset, S)$ јесте Булова алгебра. У њој је уређење дефинисано са: $A \leq B$ ако и само ако $A = A \cap B$, што је еквивалентно са $A \subseteq B$. $\dashv$

Напомена За $S \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(S)$ јесте поље скупова, па је на $\mathcal{P}(S)$ дефинисана структура Булове алгебре. $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ је коначно поље скупова над $\{a, b, c\}$. На слици су нацртане Булове алгебре: $\mathcal{P}(\{a, b\})$, $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ и $\mathcal{B}$.



159. Доказати да је $\mathcal{B} = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X$ је коначан или X је коконачан$\}$ поље скупова над $\mathbb{N}$.

Решење. $\emptyset \in \mathcal{B}$, јер је $\emptyset$ коначан, а $\mathbb{N} \in \mathcal{B}$, јер је $\mathbb{N}$ коконачан.

Ако $A \in \mathcal{B}$, тада је A коначан или је A коконачан. Ако је A коначан, тада је A^C коконачан, а ако је A коконачан, тада је A^C коначан. У сваком случају $A^C \in \mathcal{B}$.

Нека су $A, B \in \mathcal{B}$. Докажимо да $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{B}$. Ако је бар један од A, B коначан, тада је $A \cap B$ коначан. Ако су и A и B коконачни, тада је по Де Моргановим законима $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$, па је јасно да је $A \cap B$ коконачан. Дакле, у сваком случају $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Ако је бар један од A, B коконачан, тада је $A \cup B$ коконачан. Ако су и A и B коначни, тада је $A \cup B$ коначан. Опет у сваком случају $A \cup B \in \mathcal{B}$. $\dashv$

160. Нека је $\mathcal{F}\{X \subseteq \mathbb{N} \mid X$ је коконачан$\}$. $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ и $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{B}$, где је $\mathcal{B}$ Булова алгебра из претходног задатка. Доказати да је $\mathcal{F}$ филтер обе Булове алгебре, и да $\mathcal{F}$ није главни. (Овај филтер се зове Фрешеов филтер.)

Решење. Приметите да је прва аксиома за филтер испуњена. $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$, јер $\mathbb{N}$ јесте коконачан. Такође, ако је $A \in \mathcal{F}$ и $A \subseteq B$, тј. ако је A коконачан и $A \subseteq B$, тада је и B коконачан, тј. $B \in \mathcal{F}$. Према томе, испуњена је и друга аксиома за филтер. У претходном задатку смо видели да пресек два коконачна скупа јесте коконачан, па је због тога испуњена и трећа аксиома за филтер.

Претпоставимо супротно да је $\mathcal{F}$ главни. Тада је $F = [S, \mathbb{N}]$, за неки коконачан скуп S. Изаберимо произвољно $x \in S$, и уочимо $S' = S - \{x\}$. Како је S коконачан, то је и S' коконачан, па $S' \in \mathcal{F} = [S, \mathbb{N}]$. Одатле је $S \subseteq S'$, што је контрадикција, јер $x \in S$, али $x \notin S'$. $\dashv$

Атом и коатом Елемент $a \in B$ се зове *атом* ако:

1. $0 < a$;
2. ако $0 \leq x \leq a$, тада $0 = x$ или $x = a$.

Елемент $a \in B$ се зове *коатом* ако:

1. $a < 1$;
2. ако $a \leq x \leq 1$, тада $a = x$ или $x = 1$.

Атоми и коатоми не морају да постоје. Јасно је да, ако је a атом, тада је a' коатом, и обратно. Дакле, Булова алгебра има атоме ако и само ако има коатоме.

161. $a \in B$ је атом ако и само ако је a' коатом.

Решење. $\Rightarrow$) Претпоставимо да је a атом. Како је $0 < a$, тада је $a' < 1$, па је први услов из дефиниције коатома испуњен.

Претпоставимо да је $a' \leq x \leq 1$. Тада је $0 \leq x' \leq a$, па како је a атом, то је $x' = 0$ или $x' = a$. Тада је $x = 1$ или $x = a'$, одакле следи да је и други услов из дефиниције коатома испуњен.

$\Leftarrow$) се доказује слично. $\dashv$

$\boxed{\textbf{162.}}$ Коначна Булова алгебра B има атоме.

Решење. Претпоставимо супротно да B нема атоме. Нека је $a_0 = 1$. Тада је $a_0 > 0$ и a_0 није атом, јер B нема атоме, па постоји елемент a_1 у B такав да $0 < a_1 < a_0$. Како $a_1 > 0$ и a_1 није атом, то постоји a_2 такав да $0 < a_2 < a_1 < a_0$. Настављајући поступак налазимо бесконачан низ различитих елемената у B, која је коначна. Контрадикција. $\dashv$

Линденбаумова алгебра Нека је P пребројив скуп исказних слова, и нека је $\equiv$ релација елементарне еквиваленције на скупу формула For. Сетите се да је $\equiv$ релација еквиваленције на скупу For. *Класа формуле* A је скуп:

$$[A] = \{B \mid A \equiv B\}.$$

Приметите да $A \in [A]$, као и да:

$$[A] = [B] \text{ ако и само ако } A \equiv B.$$

Такође, $[A] \cap [B] = \emptyset$ ако и само ако $A \not\equiv B$.

Уочимо скуп $\mathcal{B} = \{[A] \mid A \in \mathsf{For}\}$. На скупу $\mathcal{B}$ дефинишемо операције $\wedge$, $\vee$ и $'$ са:

$$[A] \wedge [B] := [A \wedge B],$$
$$[A] \vee [B] := [A \vee B],$$
$$[A]' := [\neg A].$$

Такође, означимо $0 := [p \wedge \neg p]$ и $1 := [p \vee \neg p]$.

$\boxed{\textbf{163.}}$ $(\mathcal{B}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ је Булова алгебра, коју зовемо Линденбаумова алгебра.

Решење. Најпре, треба да докажемо да су дефинисане операције добро дефинисане. Тј. да резултат операције не зависи од избора представника који смо направили у дефиницији. Узмимо зато да је $[A] = [A']$ и $[B] = [B']$. Проверимо да је $[A] \wedge [B] = [A'] \wedge [B']$, тј. да је $[A \wedge B] = [A' \wedge B']$. Како је $[A] = [A']$ и $[B] = [B']$, то је $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$. Тада је $A \wedge B \equiv A' \wedge B'$, па је одатле $[A \wedge B] = [A' \wedge B']$. Слично се доказује да су $\vee$ и $'$ добро дефинисане. Такође се лако види да дефиниције 0 и 1 не зависе од избора слова p. Приметите да је 0 класа свих контрадикција, а да је 1 класа свих таутологија.

Проверимо сада аксиоме Булових алгебри. Најпре профеþимо $[A] \wedge [B] = [B] \wedge [A]$. То је еквивалентно са $[A \wedge B] = [B \wedge A]$, тј. са $A \wedge B \equiv B \wedge A$, што знамо да важи. Слично се доказе да је и $\vee$ комутативна операција.

$[A] \wedge ([B] \vee [C]) = ([A] \wedge [B]) \vee ([A] \wedge [C])$ ако и само ако $[A] \wedge [B \vee C] = [A \wedge B] \vee [A \wedge C]$, што важи ако и само ако $[A \wedge (B \vee C)] = [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$, тј. ако и само ако $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, за шта знамо да важи. Слично можемо доказати други дистрибутиван закон.

$[A] \vee 0 = [A]$ ако и само ако $[A] \vee [p \wedge \neg p] = [A]$, тј. ако и само ако $[A \vee (p \wedge \neg p)] = [A]$, тј. ако и само ако $A \vee (p \wedge \neg p) \equiv A$. Но, како је $p \wedge \neg p$ контрадикција, ово је тачно. Слично важи и $[A] \wedge 1 = [A]$.

$[A] \wedge [A]' = 0$ ако и само ако $[A] \wedge [\neg A] = [p \wedge \neg p]$, тј. ако и само ако $[A \wedge \neg A] = [p \wedge \neg p]$, тј. ако и само ако $A \wedge \neg A \equiv p \wedge \neg p$. а ово је тачно, јер су обе контрадикције. Слично се види да је $[A] \vee [A]' = 1$.

Коначно, $0 \neq 1$ јер $p \wedge \neg p \not\equiv p \vee \neg p$, јер контрадикција и таутологија нису еквивалентне. $\dashv$

164. Доказати да у Линденбаумовој алгебри важи $[A] \leq [B]$ ако и само ако $\vdash A \Rightarrow B$.

Решење. Имамо:

$$\begin{array}{rll} [A] \leq [B] & \text{акко} & [A] \wedge [B] = [A] \\ & \text{акко} & [A \wedge B] = [A] \\ & \text{акко} & A \wedge B \equiv A \\ & \text{акко} & \vdash A \wedge B \Leftrightarrow A \\ & \text{акко} & \vdash (A \wedge B \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow A \wedge B) \\ & \text{акко} & \vdash A \Rightarrow A \wedge B \\ & \text{акко} & \vdash A \Rightarrow B. \end{array}$$

Образложите сваки корак у претходном доказу. $\dashv$

165. Доказати да Линденбаумова алгебра $\mathcal{B}$ нема атоме.

Решење. Нека је $0 < [A]$. Доказаћемо да $[A]$ није атом. Најпре приметимо да A није контрадикција, јер је $[A] > 0$, па постоји валуација v таква да је $A =_v 1$.

Формула A садржи само коначно много слова, па изаберимо слово p које се не јавља у A. Како вредност формуле A у валуацији v зависи само од вредности валуације v на словима која се јављају у A, можемо да уочимо две валуације: v_1 такву да је $p =_{v_1} 1$ и $A =_{v_1} 1$, и v_2 такву да је $p =_{v_2} 0$ и $A =_{v_2} 1$. Заправо v_1 и v_2 су једнаке са v на словима формуле A, а на слову p, које није међу словима формуле A, су додефинисане.

Приметите да је тада $p \wedge A =_{v_1} 1$, па формула $p \wedge A$ није контрадикција, одакле је $0 < [p \wedge A]$. Такође је $p \wedge A =_{v_2} 0$ и $A =_{v_2} 1$, па $p \wedge A \not\equiv A$, тј. $[p \wedge A] \neq [A]$. Како је још $[p \wedge A] = [p] \wedge [A] \leq [A]$, то је $[p \wedge A] < [A]$.

Дакле, имамо $0 < [p \wedge A] < [A]$, одакле следи да $[A]$ није атом. Како је $[A]$ био произвољан ненула елемент Линденбаумове алгебре, то она нема атоме. $\dashv$

Предикатска логика првог реда

Логички део језика предикацке логике првог реда чине следећи скупови симбола:

1. везници: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$;
2. квантификатори: $\exists$, $\forall$;
3. једнакост: $=$;
4. промењиве (Var): $x, y, z, z_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$;
5. помоћни симболи: ( ) ,.

Језик првог реда $\mathcal{L}$ чине три скупа међусобно дисјунктних симбола:

1. $\mathsf{Const}_{\mathcal{L}}$– скуп симбола константи;
2. $\mathsf{Fun}_{\mathcal{L}}$– скуп симбола операција;
3. $\mathsf{Rel}_{\mathcal{L}}$– скуп симпола релација (предиката).

При томе, за сваки симбол $s \in \mathsf{Fun}_{\mathcal{L}} \cup \mathsf{Rel}_{\mathcal{L}}$ је унарпред одређен природан број који означавамо са $\mathrm{ar}(s)$ и зовемо арност (дужина) симбола s.

Терми језика $\mathcal{L}$ ($\mathsf{Term}_{\mathcal{L}}$) се граде на следећи начин:

1. елементи скупова Var и $\mathsf{Const}_{\mathcal{L}}$ су терми;
2. ако је $f \in \mathsf{Fun}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(f) = n$, и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ терми, тада је $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ терм;
3. терми се граде коначном применом 1. и 2.

Променљиве у терму За терм t, са $\mathrm{V}(t)$ означавамо скуп променљивих које се појављују у терму t. $\mathrm{V}(t)$ је коначан скуп.

Сложеност терма Сложеност терма t је број функцијских симбола који се појављују у терму t. Сложеност терма t означавамо са $\mathrm{sl}(t)$. Сложеност терма можемо индуктивно дефинисати са:

1. $\mathrm{sl}(x) = 0$, за $x \in \mathsf{Var}$,
   $\mathrm{sl}(c) = 0$, за $c \in \mathsf{Const}_{\mathcal{L}}$;
2. $\mathrm{sl}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \mathrm{sl}(t_1) + \mathrm{sl}(t_2) + \ldots + \mathrm{sl}(t_n) + 1$, за $f \in \mathsf{Fun}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(f) = n$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathsf{Term}_{\mathcal{L}}$.

Атомичне формуле језика $\mathcal{L}$ ($\mathsf{At}_{\mathcal{L}}$) се граде на два начина:

1. ако је $p \in \mathsf{Rel}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(p) = n$, и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ терми, тада је $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ атомична формула;
2. ако су t_1, t_2 терми, тада је $t_1 = t_2$ атомична формула.

Формуле језика $\mathcal{L}$ ($\mathsf{For}_{\mathcal{L}}$) се граде на следећи начин:

1. атомичне формуле су формуле;
2. ако су A и B формуле, тада су $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$,... формуле;
3. ако је A формула и $x \in \mathsf{Var}$, тада су $\forall x\, A$ и $\exists x\, A$;
4. формуле се граде коначном применом 1, 2. и 3.

Променљиве у формули За формулу A, са $\mathrm{V}(A)$ означавамо скуп променљивих које се појављују у формули A. $\mathrm{V}(A)$ је коначан скуп.

Слободно и везано појављивање променљиве у формули Индуктивно дефинишемо када је појављивање неке променљиве у формули слободно/везано:

1. Свако појављивање било које променљиве у атомичној формули је слободно.
2. Ако је појављивање произвољне променљиве било слободно/везано у формулама A и B, тада је оно слободно/везано и у формулама $\neg A$ и $A \star B$ за $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots\}$.
3. Појављивање променљиве x после квантификатора, тј. у $\forall x$ или $\exists x$, је везано.
4. Ако је појављивање променљиве x било слободно/везано у A, тада је оно слободно/везано у формулама $\forall y\, A$ и $\exists y\, A$.
5. Ако је појављивање променљиве x било везано у A, тада је оно везано у формулама $\forall x\, A$ и $\exists x\, A$, и везано је неким ранијим квантификатором.
6. Ако је појављивање променљиве x било слободно у A, тада је оно везано у формулама $\forall x\, A$ и $\exists x\, A$, и везано је тим квантификатором.

Слободне променљиве у формули За формулу A, са $\mathrm{V}^*(A)$ означавамо скуп променљивих које се појављују слободно у формули A. $\mathrm{V}^*(A)$ је коначан скуп и $\mathrm{V}^*(A) \subseteq \mathrm{V}(A)$.

Коментар Према дефиницији имамо:

1. $\mathrm{V}^*(t_1 = t_2) = \mathrm{V}(t_1 = t_2)$ и $\mathrm{V}^*(p(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = \mathrm{V}(p(t_1, t_2, \ldots, t_n))$.
2. $\mathrm{V}^*(\neg A) = \mathrm{V}^*(A)$ и $\mathrm{V}^*(A \star B) = \mathrm{V}^*(A) \cup \mathrm{V}^*(B)$, за $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots\}$.
3. $\mathrm{V}^*(\forall x\, A), \mathrm{V}^*(\exists x\, A) = \mathrm{V}^*(A) \smallsetminus \{x\}$.

Коментар Ако је A формула и x слободна променљива која се појављује у A, са $A(x)$ записујемо формулу A, при чему наглашавамо сва слободна појављивања променљиве x. У тој ситуацији, за произвољан терм t, $A(t)$ је ознака за формулу коју добијемо када свако слободно појављивање променљиве x заменимо са термом t.

Реченица Формула A која нема слободне променљиве, тј. $\mathrm{V}^*(A) = \emptyset$, се назива реченица.

Сложеност формуле Сложеност формуле A је број брок везника и квантификатора који се појављују у формули A. Сложеност терма A означавамо са $\mathrm{sl}(A)$. Сложеност формуле можемо индуктивно дефинисати са:

1. $\mathrm{sl}(t_1 = t_2) = 0$, за $t_1, t_2 \in \mathsf{Term}_{\mathcal{L}}$,
   $\mathrm{sl}(p(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = 0$, за $p \in \mathsf{Rel}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(p) = n$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathsf{Term}_{\mathcal{L}}$;
2. $\mathrm{sl}(\neg A) = \mathrm{sl}(A) + 1$, за $A \in \mathsf{For}_{\mathcal{L}}$,
   $\mathrm{sl}(A \star B) = \mathrm{sl}(A) + \mathrm{sl}(B) + 1$, за $A, B \in \mathsf{For}_{\mathcal{L}}$, $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots\}$;
3. $\mathrm{sl}(\forall x\, A) = \mathrm{sl}(A) + 1$, за $A \in \mathsf{For}_{\mathcal{L}}$,
   $\mathrm{sl}(\exists x\, A) = \mathrm{sl}(A) + 1$, за $A \in \mathsf{For}_{\mathcal{L}}$.

Модел језика $\mathcal{L}$ је структура $\mathbb{M} = (D, s^{\mathbb{M}})_{s \in \mathcal{L}}$, где је D неки скуп, који зовемо *домен* модела, а $s^{\mathbb{M}}$ зовемо интерпретација симбола s где је:

1. $s^{\mathbb{M}} \in D$, ако $s \in \mathsf{Const}_{\mathcal{L}}$;
2. $s^{\mathbb{M}} : D^n \longrightarrow D$, ако $s \in \mathsf{Fun}_{\mathcal{L}}$;
3. $s^{\mathbb{M}} : D^n \longrightarrow 2$, ако $s \in \mathsf{Rel}_{\mathcal{L}}$.

Експанзија модела константама Нека је $\mathbb{M} = (D, s^{\mathbb{M}})_{s \in \mathcal{L}}$ модел језика $\mathcal{L}$. Уочимо следеће проширење језика $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\underline{d} \mid d \in D\}$, где су $\underline{d}$ нови симболи константе, који зовемо *име елемента* d.

Експанзија модела $\mathbb{M}$ је модел $\mathbb{M}' = (D, s^{\mathbb{M}'}, \underline{d}^{\mathbb{M}'})_{s \in \mathcal{L}, d \in D}$ језика $\mathcal{L}'$, дефинисан са:

1. $s^{\mathbb{M}'} := s^{\mathbb{M}}$;
2. $\underline{d}^{\mathbb{M}'} := d$.

Надаље претпоставимо да је фиксиран језик $\mathcal{L}$ и модел $\mathbb{M} = (D, \ldots)$ језика $\mathcal{L}$, и претпоставимо да $\mathcal{L}$ већ садржи имена елемената из D које $\mathbb{M}$ интерпретира.

Валуација је пресликавање $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$.

Интерпретација терма Нека је v валуација. v се шири до пресликавања $\overline{v}$: $\mathsf{Term}_{\mathcal{L}} \longrightarrow D$, дефинисаног са:

1. $\overline{v}(x) := v(x)$, за $x \in \mathsf{Var}$;
2. $\overline{v}(c) := c^{\mathbb{M}}$, за $c \in \mathsf{Const}_{\mathcal{L}}$;
3. $\overline{v}(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) := f^{\mathbb{M}}(\overline{v}(t_1), \overline{v}(t_2), \ldots, \overline{v}(t_n))$, за $f \in \mathsf{Fun}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(f) = n$.

Интерпретација формуле Нека је v валуација и $\overline{v}$ њено проширење на $\mathsf{Term}_{\mathcal{L}}$. *Интерпретација* формула при валуацији v је пресликавање $\hat{v}$: $\mathsf{For}_{\mathcal{L}} \longrightarrow 2$, дефинисано са:

1. $\hat{v}(p(t_1, t_2, \ldots, t_n)) := p^{\mathbb{M}}(\overline{v}(t_1), \overline{v}(t_2), \ldots, \overline{v}(t_n))$;
2. $\hat{v}(t_1 = t_2) := 1$ ако и само ако $\overline{v}(t_1) = \overline{v}(t_2)$;
3. $\hat{v}(\neg A) := \neg\hat{v}(A)$, $\hat{v}(A \wedge B) := \hat{v}(A) \wedge \hat{v}(B)$, $\hat{v}(A \vee B) := \hat{v}(A) \vee \hat{v}(B)$, ...
4. $\hat{v}(\exists x\, A(x)) := 1$ ако и само ако постоји елемент $d \in D$ тако да $\hat{v}(A(\underline{d})) = 1$;
5. $\hat{v}(\exists x\, A(x)) := 0$ ако и само ако за све елементе $d \in D$ важи $\hat{v}(A(\underline{d})) = 0$;
6. $\hat{v}(\forall x\, A(x)) := 0$ ако и само ако постоји елемент $d \in D$ тако да $\hat{v}(A(\underline{d})) = 0$;
7. $\hat{v}(\forall x\, A(x)) := 1$ ако и само ако за све елементе $d \in D$ важи $\hat{v}(A(\underline{d})) = 1$;

166. Нека су u и v две валуације и t терм. Ако је $u\,|_{\mathrm{V}(t)} = v\,|_{\mathrm{V}(t)}$, тада је $\bar{u}(t) = \bar{v}(t)$.

Решење. Доказ изводимо индукцијом по сложености терма t. Ако је $\mathrm{sl}(t) = 0$, тада имамо следеће случајеве:

1. $t = x \in \mathsf{Var}$. Тада је $\mathrm{V}(t) = \{x\}$, па је према претпоставци $u(x) = v(x)$, одакле је $\bar{u}(t) = \bar{u}(x) = u(x) = v(x) = \bar{v}(x) = \bar{v}(t)$.
2. $t = x \in \mathsf{Const}_{\mathcal{L}}$. Тада је $\bar{u}(t) = \bar{u}(c) = c^{\mathbb{M}} = \bar{v}(c) = \bar{v}(t)$.

Докажимо индуктивни корак: $\mathrm{sl} < n \longrightarrow \mathrm{sl} = n$. Нека је $\mathrm{sl}(t) = n$ и нека је $u\,|_{\mathrm{V}(t)} = v\,|_{\mathrm{V}(t)}$. Тада је $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, за неки $f \in \mathsf{Fun}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(f) = m$, и $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathsf{Term}_{\mathcal{L}}$. Важи: $\mathrm{sl}(t_i) < \mathrm{sl}(t)$, за све $1 \leq i \leq m$, и $\mathrm{V}(t_i) \subseteq \mathrm{V}(t)$, за све $1 \leq i \leq m$. Због тога је и $u\,|_{\mathrm{V}(t_i)} = v\,|_{\mathrm{V}(t_i)}$, за све $1 \leq i \leq m$, па по индуктивној хипотези закључујемо $\bar{u}(t_i) = \bar{v}(t_i)$, за све $1 \leq i \leq m$. Сада је $\bar{u}(t) = \bar{u}(f(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = f^{\mathbb{M}}(\bar{u}(t_1), \bar{u}(t_2), \ldots, \bar{u}(t_m)) = f^{\mathbb{M}}(\bar{v}(t_1), \bar{v}(t_2), \ldots, \bar{v}(t_m)) = \bar{v}(f(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = \bar{v}(t)$. $\dashv$

167. Нека су u и v две валуације и A формула. Ако је $u\,|_{\mathrm{V}^*(A)} = v\,|_{\mathrm{V}^*(A)}$, тада је $\hat{u}(A) = \hat{v}(A)$.

Решење. Доказ изводимо индукцијом по сложености формуле A. Ако је $\mathrm{sl}(A) = 0$, тада имамо следеће случајеве:

1. $A = (t_1 = t_2)$за неке $t_1, t_2 \in \mathsf{Term}_{\mathcal{L}}$. Тада је $\mathrm{V}^*(A) = \mathrm{V}(A)$, па је према претпоставци $u\,|_{\mathrm{V}(A)} = v\,|_{\mathrm{V}(A)}$. Како је $\mathrm{V}(t_1), \mathrm{V}(t_2) \subseteq \mathrm{V}(A)$, то је и $u\,|_{\mathrm{V}(t_1)} = v\,|_{\mathrm{V}(t_1)}$ и $u\,|_{\mathrm{V}(t_2)} = v\,|_{\mathrm{V}(t_2)}$, па према претходном задатку имамо: $\bar{u}(t_1) = \bar{v}(t_1)$ и $\bar{u}(t_2) = \bar{v}(t_2)$. Сада је $\hat{u}(A) = 1$ акко $\bar{u}(t_1) = \bar{u}(t_2)$ акко $\bar{v}(t_1) = \bar{v}(t_2)$ акко $\hat{v}(A) = 1$. Дакле, $\hat{u}(A) = \hat{v}(A)$.
2. $A = p(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, за неке $p \in \mathsf{Rel}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(p) = m$, и $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathsf{Term}_{\mathcal{L}}$. Поново је $\mathrm{V}^*(A) = \mathrm{V}(A)$, па је према претпоставци $u\,|_{\mathrm{V}(A)} = v\,|_{\mathrm{V}(A)}$. Како је $\mathrm{V}(t_i) \subseteq \mathrm{V}(A)$, за све $1 \leq i \leq m$, то је и $u\,|_{\mathrm{V}(t_i)} = v\,|_{\mathrm{V}(t_i)}$, за све $1 \leq i \leq m$, па према претходном задатку имамо: $\bar{u}(t_i) = \bar{v}(t_i)$, за све $1 \leq i \leq m$. Сада је $\hat{u}(A) = \hat{u}(p(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = p^{\mathbb{M}}(\bar{u}(t_1), \bar{u}(t_2), \ldots, \bar{u}(t_m)) = p^{\mathbb{M}}(\bar{v}(t_1), \bar{v}(t_2), \ldots, \bar{v}(t_m)) = \hat{v}(p(t_1, t_2, \ldots, t_m)) = \hat{v}(A)$.

Докажимо индуктивни корак: $\mathrm{sl} < n \longrightarrow \mathrm{sl} = n$. Нека је $\mathrm{sl}(A) = n$ и нека је $u \mid_{\mathrm{V}^*(A)} = v \mid_{\mathrm{V}^*(A)}$. Имамо следеће случајеве:

1. $A = \neg B$, за неко $B \in \mathsf{For}_{\mathcal{L}}$. Тада је $\mathrm{V}^*(B) = \mathrm{V}^*(A)$, па је $u \mid_{\mathrm{V}^*(B)} = v \mid_{\mathrm{V}^*(B)}$. Такође, $\mathrm{sl}(B) < n$, па према индуктивној хипотези $\hat{u}(B) = \hat{v}(B)$. Сада је $\hat{u}(A) = \hat{u}(\neg B) = \neg\hat{u}(B) = \neg\hat{v}(B) = \hat{v}(\neg B) = \hat{v}(A)$.

2. $A = B \star C$, за неке $B, C \in \mathsf{For}_{\mathcal{L}}$ и $\star \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots\}$. Тада је $\mathrm{V}^*(B), \mathrm{V}^*(C) \subseteq \mathrm{V}^*(A)$, па је $u \mid_{\mathrm{V}^*(B)} = v \mid_{\mathrm{V}^*(B)}$ и $u \mid_{\mathrm{V}^*(C)} = v \mid_{\mathrm{V}^*(C)}$. Такође, $\mathrm{sl}(B) < n$ и $\mathrm{sl}(C) < n$, па према индуктивној хипотези $\hat{u}(B) = \hat{v}(B)$ и $\hat{u}(C) = \hat{v}(C)$. Сада је $\hat{u}(A) = \hat{u}(B\star C) = \hat{u}(B)\star\hat{u}(C) = \hat{v}(B)\star\hat{v}(C) = \hat{v}(B \star C) = \hat{v}(A)$.

3. $A = \exists x\, B(x)$, за неко $x \in \mathsf{Var}$ и $B \in \mathsf{For}_{\mathcal{L}}$. Приметимо да је тада, за сваки елемент $d \in D$, формула $B(\underline{d})$ сложености мања од n и $\mathrm{V}^*(B(\underline{d})) = \mathrm{V}^*(A)$, па је $u \mid_{\mathrm{V}^*(B(\underline{d})} = v \mid_{\mathrm{V}^*(B(\underline{d})}$. Према индуктивној хипотези, тада је $\hat{u}(B(\underline{d})) = \hat{v}(B(\underline{d}))$. Сада имамо: $\hat{u}(A) = 1$ акко постоји елемент $a \in D$ такав да $\hat{u}(B(\underline{a})) = 1$ акко постоји елемент $a \in D$ такав да $\hat{v}(B(\underline{a})) = 1$ акко $\hat{v}(A) = 1$. Дакле, $\hat{u}(A) = \hat{v}(A)$.

4. $A = \forall x\, B(x)$, за неко $x \in \mathsf{Var}$ и $B \in \mathsf{For}_{\mathcal{L}}$. Приметимо да је тада, за сваки елемент $d \in D$, формула $B(\underline{d})$ сложености мања од n и $\mathrm{V}^*(B(\underline{d})) = \mathrm{V}^*(A)$, па је $u \mid_{\mathrm{V}^*(B(\underline{d})} = v \mid_{\mathrm{V}^*(B(\underline{d})}$. Према индуктивној хипотези, тада је $\hat{u}(B(\underline{d})) = \hat{v}(B(\underline{d}))$. Сада имамо: $\hat{u}(A) = 1$ акко за све елементе $a \in D$ важи $\hat{u}(B(\underline{a})) = 1$ акко за све елементе $a \in D$ важи $\hat{v}(B(\underline{a})) = 1$ акко $\hat{v}(A) = 1$. Дакле, $\hat{u}(A) = \hat{v}(A)$.

$\dashv$

Последица Ако је A реченица, тада је A тачна/нетачна у при једној валуацији ако и само ако је тачна/нетачна у свим валуацијама.

Запис Уместо $v(x) = \ldots$, $\overline{v}(t) = \ldots$, $\hat{v}(A) = \ldots$ пишемо $x =_v \ldots$, $t =_v \ldots$, $A =_v \ldots$.

Модел формуле A Модел језика $\mathcal{L}$ $\mathbb{M} = (D, \ldots)$ је модел формуле A на језику $\mathcal{L}$ ако за све валуације $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ важи $A =_v 1$. Пишемо $\mathbb{M} \vDash A$.

Контрамодел формуле A Модел језика $\mathcal{L}$ $\mathbb{M} = (D, \ldots)$ је контрамодел формуле A на језику $\mathcal{L}$ ако постоји валуација $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ за коју важи $A =_v 0$. Пишемо $\mathbb{M} \nvDash A$.

Ваљана формула A Формула A на језику $\mathcal{L}$ је ваљана ако за сваки модел $\mathbb{M}$ језика $\mathcal{L}$ важи $\mathbb{M} \vDash A$. Пишемо $\vDash A$.

Модели и ваљане формуле

$\boxed{\textbf{168.}}$ Наћи модел и контрамодел за формулу $F = \exists x\, \forall y\, p(x, y)$.

Решење. Језик дате формуле је $\mathcal{L} = \{p\}$, где је p бинаран симбол релације.

1. Уочимо најпре модел $\mathbb{M} = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{M}})$, где је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, а $p^{\mathbb{M}}$ је релација $\leq$. Докажимо да је $\mathbb{M} \vDash F$.

   Претпоставимо супротно да је $\mathbb{M} \nvDash F$ и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \mathbb{N}$ валуација таква да је $F =_v 0$, тј. $\exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 0$. Тада за све елементе $n \in \mathbb{N}$ важи $\forall y\, p(\underline{a}, y) =_v 0$. Како ово важи за све $n \in \mathbb{N}$, специјално важи и за $n = 0$, тј. $\forall y\, p(\underline{0}, y) =_0$. Одавде следи да постоји елемент $a \in \mathbb{N}$ тако да $p(\underline{0}, \underline{a}) =_v 0$. Одавде је $p^{\mathbb{M}}(0, a) = 0$, тј. $0 \nleq a$, што је контрадикција.

   Дакле, $\mathbb{M} \vDash F$.

2. Уочимо модел $\mathbb{K} = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{K}})$, где је $p^{\mathbb{K}}$ релација $\geq$. Докажимо да је $\mathbb{K} \not\models F$.

   Претпоставимо супротно да је $\mathbb{K} \models F$ и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \mathbb{N}$ произвољна валуација. Тада је $\exists x \forall y\, p(x, y) =_v 1$. Одавде закључујемо да постоји елемент $a \in \mathbb{N}$ такав да је $\forall y\, p(\underline{a}, y) =_v 1$. Даље закључујемо да за све $n \in \mathbb{N}$ важи $p(\underline{a}, \underline{n}) =_v 1$. Како ово важи за све $n \in \mathbb{N}$, специјално важи и за $n = a + 1$ (приметите да $a + 1 \in \mathbb{N}$, јер $a \in \mathbb{N}$), тј. $p(\underline{a}, \underline{a+1}) =_v 1$. Одавде $p^{\mathbb{K}}(a, a + 1) = 1$, тј. $a \geq a + 1$, што је контрадикција.

   Дакле, $\mathbb{K} \not\models F$.

3. Уочимо модел $\mathbb{K}_1 = (\mathbb{Z}, p^{\mathbb{K}_1})$, где је $\mathbb{Z}$ скуп целих бројева, а $p^{\mathbb{K}_1}$ релација $\leq$. Докажимо да је $\mathbb{K}_1 \not\models F$.

   Претпоставимо супротно да је $\mathbb{K}_1 \models F$ и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \mathbb{Z}$ произвољна валуација. Тада је $\exists x \forall y\, p(x, y) =_v 1$. Одавде закључујемо да постоји елемент $a \in \mathbb{Z}$ такав да је $\forall y\, p(\underline{a}, y) =_v 1$. Даље закључујемо да за све $n \in \mathbb{Z}$ важи $p(\underline{a}, \underline{n}) =_v 1$. Како ово важи за све $n \in \mathbb{Z}$, специјално важи и за $n = a - 1$ (приметите да $a - 1 \in \mathbb{Z}$, јер $a \in \mathbb{Z}$), тј. $p(\underline{a}, \underline{a-1}) =_v 1$. Одавде $p^{\mathbb{K}_1}(a, a - 1) = 1$, тј. $a \leq a - 1$, што је контрадикција.

   Дакле, $\mathbb{K}_1 \not\models F$.

$\dashv$

169. Доказати да је формула $p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$ ваљана.

Решење. Језик дате формуле је $\mathcal{L} = \{p\}$, где је p унаран симбол релације.

Претпоставимо супротно $\not\models p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$. Нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}) \not\models p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$, и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ валуација таква да је $p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x) =_v 0$. Тада је $p(x) =_v 1$ и $\exists x\, p(x) =_v 0$. Из $p(x) =_v 1$, закључујемо да је $p^{\mathbb{K}}(v(x)) = 1$ $(\star)$. Из $\exists x\, p(x) =_v 0$ закључујемо да за све елементе $d \in D$ важи $p(\underline{d}) =_v 0$, тј. $p^{\mathbb{K}}(d) = 0$. Како ово важи за све $d \in D$, специјално важи и за $d = v(x)$, тј. $p^{\mathbb{K}}(v(x)) = 0$, што је контрадикција са $(\star)$.

Дакле, $\models p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$. $\dashv$

170. Наћи модел и контрамодел формуле $\exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)$.

Решење. Посматрајмо модел $\mathbb{K} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{K}})$, где је $p^{\mathbb{K}}$ предикат дефинисан таблицом:

$p^{\mathbb{K}}$	α	β
	1	0

Докажимо да је $\mathbb{K} \not\models \exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)$.

Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ валуација за коју је $v(x) = \beta$. Приметимо да из $p^{\mathbb{K}}(\beta) = 0$, следи $p^{\mathbb{K}}(v(x)) = 0$, тј. $p(x) =_v 0$. Такође, приметимо да из $p^{\mathbb{K}}(\alpha) = 1$ следи $p(\underline{\alpha}) =_v 1$, што нам даље говори да је $\exists x\, p(x) =_v 1$. Дакле, $\exists x\, p(x) \Rightarrow p(x) =_v 1 \Rightarrow 0 = 0$, тј. заиста $\mathbb{K} \not\models \exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)$.

Посматрајмо даље моделе $\mathbb{M}_1 = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{M}_1})$ и $\mathbb{M}_2 = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{M}_2})$, где су $p^{\mathbb{M}_1}$ и $p^{\mathbb{M}_2}$ предикати дефинисани таблицама:

$p^{\mathbb{M}_1}$	α	β
	0	0

$p^{\mathbb{M}_2}$	α	β
	1	1

Докажимо да су $\mathbb{M}_1 \models \exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)$ и $\mathbb{M}_2 \models \exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)$.

Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ произвољна валуација у моделу $\mathbb{M}_1$. Докажимо да је $\exists x\, p(x) =_v 0$. Претпоставимо супротно да је $\exists x\, p(x) =_v 1$. Тада постоји елемент $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да је $p(\underline{a}) =_v 1$, тј. $p^{\mathbb{M}_1}(a) = 1$. Како је $a = \alpha$ или $a = \beta$, ово нам каже да је $p^{\mathbb{M}_1}(\alpha) = 1$ или $p^{\mathbb{M}_1}(\beta) = 1$, што је у сваком случају контрадикција. Дакле, $\exists x\, p(x) =_v 0$, па је $\exists x\, p(x) =_v 0 \Rightarrow$ нешто $= 1$. Како је v била произвољна валуација, то значи да је $\mathbb{M}_1 \models \exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)$.

Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ произвољна валуација у моделу $\mathbb{M}_2$. Докажимо да је $p(x) =_v 1$. Како је $v(x) = \alpha$ или $v(x) = \beta$, имамо два случаја. Ако је $v(x) = \alpha$, тада из $p^{\mathbb{M}_2}(\alpha) = 1$, следи

$p^{\mathbb{M}_2}(v(x)) = 1$, тј. $p(x) =_v 1$. Ако је $v(x) = \beta$, тада из $p^{\mathbb{M}_2}(\beta) = 1$, следи $p^{\mathbb{M}_2}(v(x)) = 1$, тј. $p(x) =_v 1$. Дакле, заиста $p(x) =_v 1$, и одатле $\exists x\, p(x) \Rightarrow p(x) =_v$ нешто $\Rightarrow 1 = 1$. Како је v била произвољна валуација, то значи да је $\mathbb{M}_2 \vDash \exists x\, p(x) \Rightarrow p(x)$. $\dashv$

171. Доказати да су следеће формуле ваљане:

1. $\exists x\, \exists y\, p(x, y) \Rightarrow \exists y\, \exists x\, p(x, y)$;
2. $\forall x\, \forall y\, p(x, y) \Rightarrow \forall y\, \forall x\, p(x, y)$;
3. $\exists x\, \forall y\, p(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, p(x, y)$.

Решење.

1. Претпоставимо супротно да $\nvDash \exists x\, \exists y\, p(x, y) \Rightarrow \exists y\, \exists x\, p(x, y)$. Нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}) \nvDash \exists x\, \exists y\, p(x, y) \Rightarrow \exists y\, \exists x\, p(x, y)$ и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ валуација таква да је $\exists x\, \exists y\, p(x, y) \Rightarrow \exists y\, \exists x\, p(x, y) =_v 0$. Тада је:
$$(1)\ \exists x\, \exists y\, p(x, y) =_v 1 \text{ и } (2)\ \exists y\, \exists x\, p(x, y) =_v 0.$$
Из (1) следи да постоји елемент $a \in D$ такав да: $(3)\, \exists y\, p(\underline{a}, y) =_v 1$. Из (3) следи да постоји елемент $b \in D$ такав да: $(\star)\ p(\underline{a}, \underline{b}) =_v 1$.

   Из (2) следи да за све елементе $d \in D$ важи: $\exists x\, p(x, \underline{d}) =_v 0$. Како ово важи за све $d \in D$, специјално за $d = b$ имамо: $(4)\, \exists x\, p(x, \underline{b}) =_v 0$. Из (4) следи да за све елементе $e \in D$ важи: $p(\underline{e}, \underline{b}) =_v 0$. Како ово важи за све $e \in D$, специјално за $e = a$ имамо $p(\underline{a}, \underline{b}) =_v 0$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

2. Претпоставимо супротно да $\nvDash \forall x\, \forall y\, p(x, y) \Rightarrow \forall y\, \forall x\, p(x, y)$. Нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}) \nvDash \forall x\, \forall y\, p(x, y) \Rightarrow \forall y\, \forall x\, p(x, y)$ и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ валуација таква да је $\forall x\, \forall y\, p(x, y) \Rightarrow \forall y\, \forall x\, p(x, y) =_v 0$. Тада је:
$$(1)\ \forall x\, \forall y\, p(x, y) =_v 1 \text{ и } (2)\ \forall y\, \forall x\, p(x, y) =_v 0.$$
Из (2) следи да постоји елемент $a \in D$ такав да: $(3) \forall x\, p(x, \underline{a}) =_v 0$. Из (3) следи да постоји елемент $b \in D$ такав да: $(\star)\ p(\underline{b}, \underline{a}) =_v 0$.

   Из (1) следи да за све елементе $d \in D$ важи: $\forall y\, p(\underline{d}, y) =_v 1$. Како ово важи за све $d \in D$, специјално за $d = b$ имамо: $(4)\, \forall y\, p(\underline{b}, y) =_v 1$. Из (4) следи да за све елементе $e \in D$ важи: $p(\underline{b}, \underline{e}) =_v 1$. Како ово важи за све $e \in D$, специјално за $e = a$ имамо $p(\underline{b}, \underline{a}) =_v 1$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

3. Претпоставимо супротно да $\nvDash \exists x\, \forall y\, p(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, p(x, y)$. Нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}) \nvDash \exists x\, \forall y\, p(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, p(x, y)$ и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ валуација таква да је $\exists x\, \forall y\, p(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, p(x, y) =_v 0$. Тада је
$$(1)\ \exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 1 \text{ и } (2)\ \forall y\, \exists x\, p(x, y) =_v 0.$$
Из (1) следи да постоји елемент $a \in D$ такав да: $(3)\ \forall y\, p(\underline{a}, y) =_v 1$.

   Из (2) следи да постоји елемент $b \in D$ такав да: $(4)\ \exists x\, p(x, \underline{b}) =_v 0$.

   Из (3) следи да за све елементе $d \in D$ важи да: $p(\underline{a}, \underline{d}) =_v 1$. Како ово важи за све елементе $d \in D$, специјално за $d = b$ имамо: $(\star)\ p(\underline{a}, \underline{b}) =_v 1$.

   Из (4) следи да за све елементе $e \in D$ важи да: $p(\underline{e}, \underline{b}) =_v 0$. Како ово важи за све елементе $e \in D$, специјално за $e = a$ имамо: $p(\underline{a}, \underline{b}) =_v 0$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

$\dashv$

172. Наћи модел и контрамодел за формулу $\forall y\, \exists x\, p(x, y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y)$.

Решење. Даћемо неколико модела и контрамодела за ову формулу.

1. Уочимо модел $\mathbb{K} = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{K}})$, где је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, а $p^{\mathbb{K}}$ је релација $\geq$. Докажимо да је $\mathbb{K} \not\models \forall y\, \exists x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x,y)$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \mathbb{N}$ произвољна валуација.

   Најпре тврдимо $\forall y\, \exists x\, p(x,y) =_v 1$. Претпоставимо супротно да је $\forall y\, \exists x\, p(x,y) =_v 0$. Тада постоји елемент $a \in \mathbb{N}$ такав да је $\exists x\, p(x,\underline{a}) =_v 0$. Одавде следи да за све $n \in \mathbb{N}$ важи: $p(\underline{n},\underline{a}) =_v 0$, тј. за све $n \in \mathbb{N}$ важи: $p^{\mathbb{K}}(n,a) = 0$, или за све $n \in \mathbb{N}$ важи: $n \not\geq a$. Како ово важи за све $n \in \mathbb{N}$, специјално за $n = a+1$ имамо: $a+1 \not\geq a$, што је контрадикција. Дакле, $\forall y\, \exists x\, p(x,y) =_v 1$.

   Даље тврдимо $\exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v 0$. Претпоставимо супротно да је $\exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v 1$. Тада постоји елемент $a \in \mathbb{N}$ такав да је $\forall y\, p(\underline{a},y) =_v 1$. Одавде следи да за све $n \in \mathbb{N}$ важи: $p(\underline{a},\underline{n}) =_v 1$, тј. за све $n \in \mathbb{N}$ важи: $p^{\mathbb{K}}(a,n) = 1$, или за све $n \in \mathbb{N}$ важи: $a \geq n$. Како ово важи за све $n \in \mathbb{N}$, специјално за $n = a+1$ имамо: $a \geq a+1$, што је контрадикција. Дакле, $\exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v 0$.

   Коначно, $\forall y\, \exists x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v 1 \Rightarrow 0 = 0$, одакле је $\mathbb{K} \not\models \forall y\, \exists x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x,y)$.

2. Уочимо модел $\mathbb{M} = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{M}})$, где је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, а $p^{\mathbb{M}}$ је релација $\leq$. Докажимо да је $\mathbb{M} \models \forall y\, \exists x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x,y)$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \mathbb{N}$ произвољна валуација.

   Тврдимо $\exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v 1$. Претпоставимо супротно да је $\exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v 0$. Тада за све елементе $n \in \mathbb{N}$ важи да је $\forall y\, p(\underline{n},y) =_v 0$. Како ово важи за све $n \in \mathbb{N}$, специјално за $n = 0$ имамо: $\forall y\, p(\underline{0},y) =_v 0$. Одавде следи да постоји $a \in \mathbb{N}$ такав да важи: $p(\underline{0},\underline{a}) =_v 0$, тј. $p^{\mathbb{M}}(0,a) = 0$, или $0 \not\leq a$, што је контрадикција. Дакле, $\exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v 1$.

   Коначно, $\forall y\, \exists x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v$ нешто $\Rightarrow 1 = 1$, па како је v била произвољна валуација, то је $\mathbb{M} \models \forall y\, \exists x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x,y)$.

Размислимо сада неформално о формулама $\forall y\, \exists x\, p(x,y)$ и $\exists x\, \forall y\, p(x,y)$. Замислимо p као таблицу нула и јединица, на неком скупу D, где први аргумент означава врсту, а други колону. Тада је $\forall y\, \exists x\, p(x,y)$ тачна ако и само ако у свакој колони постоји бар једна јединица. Дакле, $\forall y\, \exists x\, p(x,y)$ је нетачна ако и само ако постоји колона у којој су све нуле. Такође, $\exists x\, \forall y\, p(x,y)$ је тачна ако и само ако постоји врста у којој су записане све јединице. Дакле, $\exists x\, \forall y\, p(x,y)$ је нетачна ако и само ако у свакој врси постоји бар једна нула.

Дакле, ако желимо да направимо контрамодел за дату формулу, треба да водимо рачуна да је $\forall y\, \exists x\, p(x,y)$ тачна и $\exists x\, \forall y\, p(x,y)$ нетачна. Дакле, у свакој колони морамо имати бар једну јединицу и у свакој врсти морамо да имамо бар једну нулу.

Такође ако желимо да направимо модел за дату формулу, довољно је да се постарамо да је "лева" формула $\forall y\, \exists x\, p(x,y)$ нетачна, или да је "десна" формула $\exists x\, \forall y\, p(x,y)$ тачна. Дакле, довољно је да имамо колону у којој су све нуле, или да имамо врсту у којој су све јединице.

Ово је све била неформална прича, уочимо сада неколико модела на $\{\alpha,\beta\}$ и докажимо за њих да су ону контрамодел/модел дате формуле.

3. Уочимо модел $\mathbb{K}_1 = (\{\alpha,\beta\}, p^{\mathbb{K}_1})$, где је $p^{\mathbb{K}_1}$ дефинисан таблицом:

$p^{\mathbb{K}_1}$	α	β
α	1	0
β	0	1

   Докажимо да је $\mathbb{K}_1 \not\models \forall y\, \exists x\, p(x,y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x,y)$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha,\beta\}$ произвољна валуација.

   Прво докажимо $\forall y\, \exists x\, p(x,y) =_v 1$. Претпоставимо супротно да је $\forall y\, \exists x\, p(x,y) =_v 0$. Тада постоји елемент $a \in \{\alpha,\beta\}$ такав да важи: $\exists x\, p(x,\underline{a}) =_v 0$. Одавде следи да за све $d \in \{\alpha,\beta\}$ важи: $p(\underline{d},\underline{a}) =_v 0$, тј. за све $d \in \{\alpha,\beta\}$ важи $p^{\mathbb{K}_1}(d,a) = 0$. Како $a \in \{\alpha,\beta\}$, имамо два случаја. Ако је $a = \alpha$, онда за све $d \in \{\alpha,\beta\}$ важи $p^{\mathbb{K}_1}(d,\alpha) = 0$. Како ово важи за све

$d \in \{\alpha, \beta\}$, специјално за $d = \alpha$ имамо $p^{\mathbb{K}_1}(\alpha, \alpha) = 0$, што је контрадикција. Ако је $a = \beta$, онда за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p^{\mathbb{K}_1}(d, \beta) = 0$. Како ово важи за све $d \in \{\alpha, \beta\}$, специјално за $d = \beta$ имамо $p^{\mathbb{K}_1}(\beta, \beta) = 0$, што је контрадикција. Дакле, $\forall y\, \exists x\, p(x, y) =_v 1$.

Даље докажимо $\exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 0$. Претпоставимо супротно да је $\exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 1$. Тада постоји елемент $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да важи: $\forall y\, p(\underline{a}, y) =_v 1$. Одавде следи да за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи: $p(\underline{a}, \underline{d}) =_v 1$, тј. за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p^{\mathbb{K}_1}(a, d) = 1$. Како $a \in \{\alpha, \beta\}$, имамо два случаја. Ако је $a = \alpha$, онда за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p^{\mathbb{K}_1}(\alpha, d) = 1$. Како ово важи за све $d \in \{\alpha, \beta\}$, специјално за $d = \beta$ имамо $p^{\mathbb{K}_1}(\alpha, \beta) = 1$, што је контрадикција. Ако је $a = \beta$, онда за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p^{\mathbb{K}_1}(\beta, d) = 1$. Како ово важи за све $d \in \{\alpha, \beta\}$, специјално за $d = \alpha$ имамо $p^{\mathbb{K}_1}(\beta, \alpha) = 1$, што је контрадикција. Дакле, $\exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 0$.

Дакле, $\forall y\, \exists x\, p(x, y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 1 \Rightarrow 0 = 0$, одакле је $\mathbb{K}_1 \not\models \forall y\, \exists x\, p(x, y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y)$.

4. Уочимо модел $\mathbb{M}_1 = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{M}_1})$, где је $p^{\mathbb{M}_1}$ дефинисан таблицом:

$$\begin{array}{c|cc} p^{\mathbb{M}_1} & \alpha & \beta \\ \hline \alpha & 0 & \star \\ \beta & 0 & \star \end{array}.$$

(Због дефинисаности модела, требало би да уместо $\star$ у таблици ставимо 0 или 1. Овде остављамо овако да бисмо нагласили да ти уноси у таблици не утичу на конкретан рачун.) Докажимо да је $\mathbb{M}_1 \models \forall y\, \exists x\, p(x, y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y)$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ произвољна валуација.

Докажимо $\forall y\, \exists x\, p(x, y) =_v 0$. Претпоставимо супротно да је $\forall y\, \exists x\, p(x, y) =_v 1$. Тада за све елементе $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи: $\exists x\, p(x, \underline{d}) =_v 1$. Како ово важи за све елементе $d \in \{\alpha, \beta\}$, специјално за $d = \alpha$ имамо $\exists x\, p(x, \underline{\alpha}) =_v 1$. Одавде следи да постоји $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да важи: $p(\underline{a}, \underline{\alpha}) =_v 1$, тј. $p^{\mathbb{M}_1}(a, \alpha) = 1$. Како $a \in \{\alpha, \beta\}$, имамо два случаја. Ако је $a = \alpha$, онда имамо $p^{\mathbb{M}_1}(\alpha, \alpha) = 1$, што је контрадикција. Ако је $a = \beta$, онда имамо $p^{\mathbb{M}_1}(\beta, \alpha) = 1$, што је контрадикција. Дакле, $\forall y\, \exists x\, p(x, y) =_v 0$.

Дакле, $\forall y\, \exists x\, p(x, y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 0 \Rightarrow$ нешто $= 1$, па како је v била произвољна, то је $\mathbb{M}_1 \models \forall y\, \exists x\, p(x, y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y)$.

5. Уочимо модел $\mathbb{M}_2 = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{M}_2})$, где је $p^{\mathbb{M}_2}$ дефинисан таблицом:

$$\begin{array}{c|cc} p^{\mathbb{M}_2} & \alpha & \beta \\ \hline \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \star & \star \end{array}.$$

Докажимо да је $\mathbb{M}_2 \models \forall y\, \exists x\, p(x, y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y)$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ произвољна валуација.

Докажимо $\exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 1$. Претпоставимо супротно да је $\exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 0$. Тада за све елементе $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи: $\forall y\, p(\underline{d}, y) =_v 0$. Како ово важи за све елементе $d \in \{\alpha, \beta\}$, специјално за $d = \alpha$ имамо $\forall y\, p(\underline{\alpha}, y) =_v 0$. Одавде следи да постоји $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да важи: $p(\underline{\alpha}, \underline{a}) =_v 0$, тј. $p^{\mathbb{M}_2}(\alpha, a) = 0$. Како $a \in \{\alpha, \beta\}$, имамо два случаја. Ако је $a = \alpha$, онда имамо $p^{\mathbb{M}_2}(\alpha, \alpha) = 0$, што је контрадикција. Ако је $a = \beta$, онда имамо $p^{\mathbb{M}_2}(\alpha, \beta) = 0$, што је контрадикција. Дакле, $\exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v 1$.

Дакле, $\forall y\, \exists x\, p(x, y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y) =_v$ нешто $\Rightarrow 1 = 1$, па како је v била произвољна, то је $\mathbb{M}_2 \models \forall y\, \exists x\, p(x, y) \Rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y)$.

$\dashv$

173.

1. Доказати да је формула $F_1 = \forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x\, (p(x) \wedge q(x))$ ваљана.

2. Наћи модел и контрамодел за формулу $F_2 = \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x))$.

3. Доказати да је формула $F_3 = \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x\, \forall y\, (p(x) \vee q(y))$ ваљана.

Решење.

1. Претпоставимо супротно да $\not\models F_1$, и нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}) \not\models F_1$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ таква да је $F_1 =_v 0$. Имамо два случаја

   (1) Нека је $\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) =_v 1$ и $\forall x\, (p(x) \wedge q(x)) =_v 0\, (\star)$. Из прве једнакости имамо да је $\forall x\, p(x) =_v 1$ и $\forall x\, q(x) =_v 1$. Тада за све $d \in D$ важи $p(\underline{d}) =_v 1$ и $q(\underline{d}) =_v 1$, па за све $s \in D$ важи и $p(\underline{d}) \wedge q(\underline{d}) =_v 1$, одакле је $\forall x\, (p(x) \wedge q(x)) =_v 1$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

   (2) Нека је $\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) =_v 0 (\sharp)$ и $\forall x\, (p(x) \wedge q(x)) =_v 1$. Из друге једнакости следи да за све $d \in D$ важи $p(\underline{d}) \wedge q(\underline{d}) =_v 1$, тј. за све $d \in D$ важи и $p(\underline{d}) =_v 1$ и $q(\underline{d}) =_v 1$. Али тада је $\forall x\, p(x) =_v 1$ и $\forall x\, q(x) =_v 1$, па је и $\forall x\, p(x) \wedge \forall x\, q(x) =_v 1$, што је у контрадикцији са $(\sharp)$.

2. Независно од задатка, доказаћемо да је $\models \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Rightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x))$. Претпоставимо супротно да то није случај. Нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}) \not\models \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Rightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x))$ и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ валуација у којој је та формула нетачна. Тада је $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) =_v 1\, (\star)$ и $\forall x\, (p(x) \vee q(x)) =_v 0$. из друге једнакости следи да постоји елемент $a \in D$ такав да је $p(\underline{a}) \vee q(\underline{a}) =_v 0$, тј. $p(\underline{a}) =_v 0$ и $q(\underline{a}) =_v 0$. Међутим, тада a сведочи да $\forall x\, p(x) =_v 0$ и $\forall x\, q(x) =_v 0$, одакле је $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) =_v 0$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

   Конструишимо сада контрамодел за формулу F_2. Контрамодел конструишемо тако да је лева страна еквиваленције нетачна, а десна страна тачна. (Према претходном пасусу контрамодел у коме је лева страна тачна, а десна нетачна, не постоји.) Уочимо модел $\mathbb{K} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}})$, где су $p^{\mathbb{K}}$ и $q^{\mathbb{K}}$ дефинисани таблицама:

   $$\begin{array}{c|cc} p^{\mathbb{K}} & \alpha & \beta \\ \hline & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} q^{\mathbb{K}} & \alpha & \beta \\ \hline & 0 & 1 \end{array}.$$

   Докажимо да је $\mathbb{K} \not\models F_2$. Доказаћемо ово у три корака. Нека је v произвољна валуација.

   (1) Прво доказујемо $\forall x\, p(x) =_v 0$. Претпоставимо да је $\forall x\, p(x) =_v 1$. Тада за све елементе $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p(\underline{d}) =_v 1$, па специјално за $d = \beta$ имамо $p(\underline{\beta}) =_v 1$, тј. $p^{\mathbb{K}}(\beta) = 1$, што је контрадикција.

   (2) Даље доказујемо $\forall x\, q(x) =_v 0$. Приметимо да је $q^{\mathbb{K}}(\alpha) = 0$. Одатле је и $q(\underline{\alpha}) =_v 0$, па α сведочи да је $\forall x\, q(x) =_v 0$.

   (3) Коначно, доказујемо $\forall x\, (p(x) \vee q(x)) =_v 1$. Претпоставимо супротно $\forall x\, (p(x) \vee q(x)) =_v 0$. Тада постоји $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да $p(\underline{a}) \vee q(\underline{a}) =_v 0$. Одатле је $p(\underline{a}) =_v 0$ и $q(\underline{a}) =_v 0$, тј. $p^{\mathbb{K}}(a) = 0$ и $q^{\mathbb{K}}(a) = 0$. Из $p^{\mathbb{K}}(a) = 0$ и $a \in \{\alpha, \beta\}$ закључујемо да је $a = \beta$, па из $q^{\mathbb{K}}(a) = 0$ следи $q^{\mathbb{K}}(\beta) = 0$, што је контрадикција.

   Дакле, $F_2 = \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x)) =_v 0 \vee 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, што доказује да је $\mathbb{K} \not\models F_2$.

   КОМЕНТАР. Можемо да посматрамо и моделе $\mathbb{K}_1 = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{K}_1}, q^{\mathbb{K}_1})$ и $\mathbb{K}_2 = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{K}_2}, q^{\mathbb{K}_2})$, где су предикати дефинисани са:

   $$\begin{aligned} p^{\mathbb{K}_1}(n) = 1 &\quad \text{акко} \quad n \text{ је паран} \\ q^{\mathbb{K}_1}(n) = 1 &\quad \text{акко} \quad n \text{ је непаран} \\ p^{\mathbb{K}_2}(n) = 1 &\quad \text{акко} \quad n > 100 \\ q^{\mathbb{K}_2}(n) = 1 &\quad \text{акко} \quad n \leq 100 \end{aligned}$$

   Остављамо да се докаже да су $\mathbb{K}_1 \not\models F_2$ и $\mathbb{K}_2 \not\models F_2$.

Нађимо сада модел за формулу F_2. Уочимо модел $\mathbb{M} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{M}}, q^{\mathbb{M}})$, где су $p^{\mathbb{M}}$ и $q^{\mathbb{M}}$ дефинисани таблицама:

$$\begin{array}{c|cc} p^{\mathbb{M}} & \alpha & \beta \\ \hline & 1 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} q^{\mathbb{M}} & \alpha & \beta \\ \hline & \star & \star \end{array}.$$

Докажимо да је $\mathbb{M} \vDash F_2$. Нека је v произвољна валуација.

Доказаћемо само да је $\forall x\, p(x) =_v 1$. Претпоставимо супротно да је $\forall x\, p(x) =_v 0$. Тада посотоји елемент $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да је $p(\underline{a}) =_v 0$, тј. $p^{\mathbb{M}}(a) = 0$. Како $a \in \{\alpha, \beta\}$ и $p^{\mathbb{M}}(a) = 0$, то имамо контрадикцију.

Тада је $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) =_v 1 \vee$ нешто $= 1$, па како је $\vDash \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Rightarrow \forall x\,(p(x) \vee q(x))$, то је $\forall x\,(p(x) \vee q(x)) =_v 1$. Коначно, $F_2 = \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x\,(p(x) \vee q(x)) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$. Како је v била произвољна валуација, то је $\mathbb{M} \vDash F_2$.

КОМЕНТАР. Можемо да посматрамо и модел $\mathbb{M}_1 = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{M}_1}, q^{\mathbb{M}_1})$, где су предикати дефинисани са:

$$\begin{aligned} p^{\mathbb{M}_1}(n) = 1 \quad &\text{акко} \quad n > 100 \\ q^{\mathbb{M}_1}(n) = 1 \quad &\text{акко} \quad n < 100 \end{aligned}$$

Докажимо да је $\mathbb{M}_1 \vDash F_2$. Нека је v произвољна валуација.

(1) Прво доказујемо $\forall x\, p(x) =_v 0$. Приметимо да $99 \not> 100$, тј. $p^{\mathbb{M}_1}(99) = 0$, одакле је $p(\underline{99}) =_v 0$, па 99 сведочи да је $\forall x\, p(x) =_v 0$.

(2) Даље доказујемо $\forall x\, q(x) =_v 0$. Приметимо да $101 \not< 100$, тј. $q^{\mathbb{M}_1}(101) = 0$, одакле је $q(\underline{101}) =_v 0$, па 101 сведочи да је $\forall x\, q(x) =_v 0$.

(3) Коначно, доказујемо $\forall x\,(p(x) \vee q(x)) =_v 0$. Приметимо да $100 \not> 100$ и $100 \not< 100$, тј. $p^{\mathbb{M}_1}(100) = 0$ и $q^{\mathbb{M}_1}(100) = 0$, одакле је $p(\underline{100}) =_v 0$ и $q(\underline{100}) =_v 0$. Тада је $p(\underline{100}) \vee q(\underline{100}) =_v 0$, па 100 сведочи да је $\forall x\,(p(x) \vee q(x)) =_v 0$.

Дакле, $F_2 = \forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \Leftrightarrow \forall x\,(p(x) \vee q(x)) =_v 0 \vee 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 1$. Како је v била произвољна валуација, то је $\mathbb{M}_1 \vDash F_2$.

3. Претпоставимо супротно да $\nvDash F_3$, и нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}) \nvDash F_3$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ таква да је $F_3 =_v 0$. Имамо два случаја

   (1) Нека је $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) =_v 1\ (\star)$ и $\forall x\, \forall y\,(p(x) \vee q(y)) =_v 0$. Из друге једнакости имамо да постоји елемент $a \in D$ такав да је $\forall y\,(p(\underline{a}) \vee q(y)) =_v 0$, а одавде да постоји елемент $b \in D$ такав да је $p(\underline{a}) \vee q(\underline{b}) =_v 0$. Тада је $p(\underline{a}) =_v 0$ и $q(\underline{b}) =_v 0$. Из $p(\underline{a}) =_v 0$ следи да је a сведок да $\forall x\, p(x) =_v 0$, а из $q(\underline{b}) =_v 0$ следи да је b сведок да $\forall x\, q(x) =_v 0$. Одатле је $\forall x\, p(a) \vee \forall x\, q(x) =_v 0 \vee 0 = 0$, што је у контрадикцији са $(\star)$.

   (2) Нека је $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) =_v 0$ и $\forall x\, \forall y\,(p(x) \vee q(y)) =_v 1\ (\sharp)$. Из прве једнакости је $\forall x\, p(x) =_v 0$ и $\forall x\, q(x) =_v 0$. Из $\forall x\, p(x) =_v 0$ следи да постоји елемент $a \in D$ такав да је $p(\underline{a}) =_v 0$, а из $\forall x\, q(x) =_v 0$ следи да постоји елемент $b \in D$ такав да је $q(\underline{b}) =_v 0$. Тада је $p(\underline{a}) \vee q(\underline{b}) =_v 0$. Ово нам каже да b сведочи да је $\forall y\,(p(\underline{a}) \vee q(y)) =_v 0$. А одавде следи да је a сведок да $\forall x\, \forall y\,(p(x) \vee q(y)) =_v 0$, што је у контрадикцији са $(\sharp)$.

$\dashv$

174.

1. Доказати да је формула $F_1 = \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x)) \Rightarrow \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$ ваљана.

2. Наћи контрамодел за формулу $F_2 = \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x)) \Rightarrow \forall x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$.

Решење.

1. Претпоставимо супротно да $\not\models F_1$. Нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}, r^{\mathbb{K}}) \not\models F_1$, и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ валуација таква да је $F_1 =_v 0$. Тада је:

$$\begin{aligned} \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) &=_v 1\,(1)\\ \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x)) &=_v 1\,(2)\\ \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x)) &=_v 0\,(3) \end{aligned}$$

Из (2) следи да постоји елемент $a \in D$ такав да $q(\underline{a}) \Rightarrow r(\underline{a}) =_v 1\,(4)$. Из (1) следи да за све елементе $d \in D$ важи $p(\underline{d}) \Rightarrow q(\underline{d}) =_v 1$, па специјално за $d = a$ имамо $p(\underline{a}) \Rightarrow q(\underline{a}) =_v 1\,(5)$. Из (3) следи да за све елементе $d \in D$ важи $p(\underline{d}) \Rightarrow r(\underline{d}) =_v 0$, па специјално за $d = a$ имамо $p(\underline{a}) \Rightarrow r(\underline{a}) =_v 0\,(6)$.

Из (6) следи да је $p(\underline{a}) =_v 1$ и $r(\underline{a}) =_v 0$. Из (4) и $r(\underline{a}) =_v 0$ следи да је $q(\underline{a}) =_0$. Коначно је $p(\underline{a}) \Rightarrow q(\underline{a}) =_v 1 \Rightarrow 0 = 0$, што је у контрадикцији са (5).

2. Посматрајмо модел $\mathbb{K} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}, r^{\mathbb{K}})$, где су предикати $p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}, r^{\mathbb{K}}$ дефинисани таблицама:

$p^{\mathbb{K}}$	α	β
	1	0

$q^{\mathbb{K}}$	α	β
	1	0

$r^{\mathbb{K}}$	α	β
	0	$\star$

Докажимо да је $\mathbb{K} \not\models F_2$. нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ произвољна валуација.

(1) Докажимо прво $\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) =_v 1$. Претпоставимо супротно да је $\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) =_v 0$. Тада постоји $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да $p(\underline{a}) \Rightarrow q(\underline{a}) =_v 0$, тј. $p(\underline{a}) =_v 1$ и $q(\underline{a}) =_v 0$, одакле $p^{\mathbb{K}}(a) = 1$ и $q^{\mathbb{K}}(a) = 0$. Како $a \in \{\alpha, \beta\}$ и $p^{\mathbb{K}}(a) = 1$, то је $a = \alpha$, али тада из $q^{\mathbb{K}}(a) = 0$ следи $q^{\mathbb{K}}(\alpha) = 0$, што је контрадикција.

(2) Даље доказујемо да је $\exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x)) =_v 1$. Приметимо да је $q^{\mathbb{K}}(\beta) = 0$, одакле је $q(\underline{\beta}) =_v 0$. Тада је $q(\underline{\beta}) \Rightarrow r(\underline{\beta}) =_v 0 \Rightarrow$ нешто $= 1$, па је β сведок да $\exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x)) =_v 1$.

(3) Коначно докажимо да је $\forall x\,(p(x) \Rightarrow r(x)) =_v 0$. Приметимо да је $p^{\mathbb{K}}(\alpha) = 1$ и $r^{\mathbb{K}}(\alpha) = 0$, одакле је $p(\underline{\alpha}) =_v 1$ и $r(\underline{\alpha}) =_v 0$. Тада је $p(\underline{\alpha}) \Rightarrow r(\underline{\alpha}) =_v 1 \Rightarrow 0 = 0$, па је α сведок да $\forall x\,(p(x) \Rightarrow r(x)) =_v 0$.

Коначно, $F_2 = \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x)) \Rightarrow \forall x\,(p(x) \Rightarrow r(x)) =_v 1 \wedge 1 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$, одакле је $\mathbb{K} \not\models F_2$.

КОМЕНТАР. Можемо да посматрамо и модел $\mathbb{K}_1 = (\mathbb{N}, p^{\mathbb{K}_1}, q^{\mathbb{K}_1}, r^{\mathbb{K}_1})$, где су предикати дефинисани са:

$$\begin{aligned} p^{\mathbb{K}_1}(n) = 1 \quad &\text{акко} \quad n > 5\\ q^{\mathbb{K}_1}(n) = 1 \quad &\text{акко} \quad n > 3\\ r^{\mathbb{K}_1}(n) = 1 \quad &\text{акко} \quad n > 7 \end{aligned}$$

Остављамо да се докаже да је $\mathbb{K}_1 \not\models F_2$.

$\dashv$

175. На скупу $\{\alpha, \beta\}$ наћи контрамодел за формулу $F = \forall x\,\exists y\,(p(x, y) \Rightarrow \exists z\,q(z, a))$.

Решење. Посматрајмо модел $\mathbb{K} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}, a^{\mathbb{K}})$, где је $a^{\mathbb{K}} = \alpha$ и где су предикати $p^{\mathbb{K}}, q^{\mathbb{K}}$ дефинисани таблицама:

$p^{\mathbb{K}}$	α	β
α	1	1
β	$\star$	$\star$

$q^{\mathbb{K}}$	α	β
α	0	$\star$
β	0	$\star$

Докажимо да је $\mathbb{K} \not\models F$. нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ произвољна валуација.

Докажимо најпре да је $\exists z\, q(z,a) =_v 0$. Приметите да за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $q^{\mathbb{K}}(d, \alpha) = 0$, одакле за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $q(\underline{d}, a) =_v 0$, па је $\exists x\, q(z,a) =_v 0$.

Даље, приметите да за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p^{\mathbb{K}}(\alpha, d) = 1$, одакле за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p(\underline{\alpha}, \underline{d}) =_v 1$. Тада за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $p(\underline{\alpha}, \underline{d}) \Rightarrow \exists z\,(z,a) =_v 1 \Rightarrow 0 = 0$, одакле је $\exists y\,(p(\underline{\alpha}, y) \Rightarrow \exists z\, q(z,a)) =_v 0$. Међутим, то значи да је α сведок за $\forall x\, \exists y\,(p(x,y) \Rightarrow \exists z\, q(z,a)) =_v 0$. Дакле, $\mathbb{K} \not\models F$. $\dashv$

Табло у предикатској логици првог реда

γ **правила** $\dfrac{\mathcal{F}\ \exists x\, A(x)}{\mathcal{F}\ A(a)}, \dfrac{\mathcal{T}\ \forall x\, A(x)}{\mathcal{T}\ A(a)}$, где је a било који симбол константе. Једно исто γ правило можемо користити и више пута у таблоу.

δ **правила** $\dfrac{\mathcal{T}\ \exists x\, A(x)}{\mathcal{T}\ A(a)}, \dfrac{\mathcal{F}\ \forall x\, A(x)}{\mathcal{F}\ A(a)}$, где је a нови симбол константе.

Теорема Ако је табло формуле A затворен, тада је A ваљана формула.

$\boxed{\mathbf{176.}}$ Методом таблоа доказати да је $\forall x\,(p(x) \Rightarrow q(X)) \wedge \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x)) \Rightarrow \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$ ваљана.

Решење.

$$0.\ \mathcal{F}\ \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x)) \Rightarrow \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$$

$$1(0)\ \mathcal{T}\ \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x))$$

$$2(0)\ \mathcal{F}\ \exists x\,(p(x) \Rightarrow r(x))$$

$$3(1)\ \mathcal{T}\ \forall x\,(p(x) \Rightarrow q(x))$$

$$4(1)\ \mathcal{T}\ \exists x\,(q(x) \Rightarrow r(x))$$

$$5(4)\ \mathcal{T}\ q(a) \Rightarrow r(a)$$

$$6(2)\ \mathcal{F}\ p(a) \Rightarrow r(a)$$

$$7(3)\ \mathcal{T}\ p(a) \Rightarrow q(a)$$

$$8(6)\ \mathcal{T}\ p(a)$$

$$9(6)\ \mathcal{F}\ r(a)$$

$$10(5)\ \mathcal{F}\ q(a) \qquad\qquad 11(5)\ \mathcal{T}\ r(a)$$

$$12(7)\ \mathcal{F}\ p(a) \qquad 13(7)\ \mathcal{T}\ q(a) \qquad \times(9,11)$$

$$\times(8,12) \qquad \times(10,13)$$

$\dashv$

$\boxed{\textbf{177.}}$ Методом таблоа доказати да је $\forall x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, q(x,y)) \land \forall x\, \exists y\,(q(x,y) \Rightarrow \neg r(x)) \Rightarrow (\exists x\, r(x) \Rightarrow \exists x\,(r(x) \land \neg p(x)))$ ваљана.

Решење. $0.\ \mathcal{F}\ \forall x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, q(x,y)) \land \forall x\, \exists y\,(q(x,y) \Rightarrow \neg r(x)) \Rightarrow (\exists x\, r(x) \Rightarrow \exists x\,(r(x) \land \neg p(x)))$

$1(0)\ \mathcal{T}\ \forall x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, q(x,y)) \land \forall x\, \exists y\,(q(x,y) \Rightarrow \neg r(x))$

$2(0)\ \mathcal{F}\ \exists x\, r(x) \Rightarrow \exists x\,(r(x) \land \neg p(x))$

$3(1)\ \mathcal{T}\ \forall x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, q(x,y))$

$4(1)\ \mathcal{T}\ \forall x\, \exists y\,(q(x,y) \Rightarrow \neg r(x))$

$5(2)\ \mathcal{T}\ \exists x\, r(x)$

$6(2)\ \mathcal{F}\ \exists x\,(r(x) \land \neg p(x))$

$7(5)\ \mathcal{T}\ r(a)$

$8(4)\ \mathcal{T}\ \exists y\,(q(a,y) \Rightarrow \neg r(a))$

$9(8)\ \mathcal{T}\ q(a,b) \Rightarrow \neg r(a)$

$10(3)\ \mathcal{T}\ p(a) \Rightarrow \forall y\, q(a,y)$

$11(6)\ \mathcal{F}\ r(a) \land \neg p(a)$

$12(11)\ \mathcal{F}\ r(a)$ $\qquad$ $13(11)\ \mathcal{F}\ \neg p(a)$

$\times(7,12)$ $\qquad$ $14(13)\ \mathcal{T}\ p(a)$

$15(10)\ \mathcal{F}\ p(a)$ $\qquad$ $16(10)\ \mathcal{T}\ \forall y\, q(a,y)$

$\times(14,15)$ $\qquad$ $17(16)\ \mathcal{T}\ q(a,b)$

$18(9)\ \mathcal{F}\ q(a,b)$ $\qquad$ $19(9)\ \mathcal{T}\ \neg r(a)$

$\times(17,18)$ $\qquad$ $20(19)\ \mathcal{F}\ r(a)$

$\times(7,20)$

$\dashv$

$\boxed{\textbf{178.}}$ Методом таблоа доказати да је $\forall z\,(p(a) \wedge \forall x\,\exists y\,(q(y,z) \Rightarrow r(x,y))) \Rightarrow \forall z\,\forall u\,\exists y\,(\neg q(y,z) \vee r(u,y))$ ваљана.

Решење.

$$0.\ \mathcal{F}\ \forall z\,(p(a) \wedge \forall x\,\exists y\,(q(y,z) \Rightarrow r(x,y))) \Rightarrow \forall z\,\forall u\,\exists y\,(\neg q(y,z) \vee r(u,y))$$

$$1(0)\ \mathcal{T}\ \forall z\,(p(a) \wedge \forall x\,\exists y\,(q(y,z) \Rightarrow r(x,y)))$$

$$2(0)\ \mathcal{F}\ \forall z\,\forall u\,\exists y\,(\neg q(y,z) \vee r(u,y))$$

$$3(2)\ \mathcal{F}\ \forall u\,\exists y\,(\neg q(y,b) \vee r(u,y))$$

$$4(3)\ \mathcal{F}\ \exists y\,(\neg q(y,b) \vee r(c,y))$$

$$5(1)\ \mathcal{T}\ p(a) \wedge \forall x\,\exists y\,(q(y,b) \Rightarrow r(x,y))$$

$$6(5)\ \mathcal{T}\ p(a)$$

$$7(5)\ \mathcal{T}\ \forall x\,\exists y\,(q(y,b) \Rightarrow r(x,y))$$

$$8(7)\ \mathcal{T}\ \exists y\,(q(y,b) \Rightarrow r(c,y))$$

$$9(8)\ \mathcal{T}\ q(d,b) \Rightarrow r(c,d)$$

$$10(4)\ \mathcal{F}\ \neg q(d,b) \vee r(c,d)$$

$$11(10)\ \mathcal{F}\ \neg q(d,b)$$

$$12(10)\ \mathcal{F}\ r(c,d)$$

$$13(11)\ \mathcal{T}\ q(d,b)$$

$$\begin{array}{cc}
14(9)\ \mathcal{F}\ q(d,b) & 15(9)\ \mathcal{T}\ r(c,d) \\
| & | \\
\times(13,14) & \times(12,15)
\end{array}$$

$\dashv$

179. Методом таблоа доказати да је $(\exists y\, p(a,y) \vee \forall x\, q(x,x)) \wedge \forall x\, \exists y\, \neg q(x,y) \Rightarrow \exists x\, \exists y\, p(x,y) \vee \forall x\, (q(x,x) \wedge \neg \forall y\, q(x,y))$ ваљана.

Решење. $0.\ \mathcal{F}\ (\exists y\, p(a,y) \vee \forall x\, q(x,x)) \wedge \forall x\, \exists y\, \neg q(x,y) \Rightarrow \exists x\, \exists y\, p(x,y) \vee \forall x\, (q(x,x) \wedge \neg \forall y\, q(x,y))$

$1(0)\ \mathcal{T}\ (\exists y\, p(a,y) \vee \forall x\, q(x,x)) \wedge \forall x\, \exists y\, \neg q(x,y)$

$2(0)\ \mathcal{F}\ \exists x\, \exists y\, p(x,y) \vee \forall x\, (q(x,x) \wedge \neg \forall y\, q(x,y))$

$3(1)\ \mathcal{T}\ \exists y\, p(a,y) \vee \forall x\, q(x,x)$

$4(1)\ \mathcal{T}\ \forall x\, \exists y\, \neg q(x,y)$

$5(2)\ \mathcal{F}\ \exists x\, \exists y\, p(x,y)$

$6(2)\ \mathcal{F}\ \forall x\, (q(x,x) \wedge \neg \forall y\, q(x,y))$

$7(6)\ \mathcal{F}\ q(b,b) \wedge \neg \forall y\, q(b,y)$

$8(4)\ \mathcal{T}\ \exists y\, \neg q(b,y)$

$9(8)\ \mathcal{T}\ \neg q(b,c)$

$10(9)\ \mathcal{F}\ q(b,c)$

$11(5)\ \mathcal{F}\ \exists y\, p(a,y)$

<table>
<tr>
<td>

$12(3)\ \mathcal{T}\ \exists y\, p(a,y)$

$14(12)\ \mathcal{T}\ p(a,d)$

$15(11)\ \mathcal{F}\ p(a,d)$

$\times(14,15)$

</td>
<td>

$13(3)\ \mathcal{T}\ \forall x\, q(x,x)$

$16(13)\ \mathcal{T}\ q(b,b)$

<table>
<tr>
<td>

$17(7)\ \mathcal{F}\ q(b,b)$

$\times(16,17)$

</td>
<td>

$18(7)\ \mathcal{F}\ \neg \forall y\, q(b,y)$

$19(18)\ \mathcal{T}\ \forall y\, q(b,y)$

$20(19)\ \mathcal{T}\ q(b,c)$

$\times(10,20)$

</td>
</tr>
</table>

</td>
</tr>
</table>

$\dashv$

$\boxed{\textbf{180.}}$ Методом таблоа доказати да је $\forall x\,[\exists y\,\neg p(x,y) \vee (\exists y\, q(a,y) \Rightarrow \exists y\, p(y, f(x)))] \Rightarrow \exists x\,(p(a,x) \Rightarrow p(x, f(a))) \vee \forall y\,\neg q(a,y)$ ваљана.

Решење. $0.\ \mathcal{F}\ \forall x\,[\exists y\,\neg p(x,y) \vee (\exists y\, q(a,y) \Rightarrow \exists y\, p(y, f(x)))] \Rightarrow \exists x\,(p(a,x) \Rightarrow p(x, f(a))) \vee \forall y\,\neg q(a,y)$

$1(0)\ \mathcal{T}\ \forall x\,[\exists y\,\neg p(x,y) \vee (\exists y\, q(a,y) \Rightarrow \exists y\, p(y, f(x)))]$

$2(0)\ \mathcal{F}\ \exists x\,(p(a,x) \Rightarrow p(x, f(a))) \vee \forall y\,\neg q(a,y)$

$3(1)\ \mathcal{T}\ \exists y\,\neg p(a,y) \vee (\exists y\, q(a,y) \Rightarrow \exists y\, p(y, f(a)))$

$4(2)\ \mathcal{F}\ \exists x\,(p(a,x) \Rightarrow p(x, f(a)))$

$5(2)\ \mathcal{F}\ \forall y\,\neg q(a,y)$

$6(5)\ \mathcal{F}\ \neg q(a,b)$

$7(6)\ \mathcal{T}\ q(a,b)$

- $8(3)\ \mathcal{T}\ \exists y\,\neg p(a,y)$
  - $10(8)\ \mathcal{T}\ \neg p(a,c)$
  - $11(10)\ \mathcal{F}\ p(a,c)$
  - $12(4)\ \mathcal{F}\ p(a,c) \Rightarrow p(c, f(a))$
  - $13(12)\ \mathcal{T}\ p(a,c)$
  - $14(12)\ \mathcal{F}\ p(c, f(a))$
  - $\times(11,13)$
- $9(3)\ \mathcal{T}\ \exists y\, q(a,y) \Rightarrow \exists y\, p(y, f(a))$
  - $15(9)\ \mathcal{F}\ \exists y\, q(a,y)$
    - $17(15)\ \mathcal{F}\ q(a,b)$
    - $\times(7,17)$
  - $16(9)\ \mathcal{T}\ \exists y\, p(y, f(a))$
    - $18(16)\ \mathcal{T}\ p(d, f(a))$
    - $19(4)\ \mathcal{F}\ p(a,d) \Rightarrow p(d, f(a))$
    - $20(19)\ \mathcal{T}\ p(a,d)$
    - $21(19)\ \mathcal{F}\ p(d, f(a))$
    - $\times(18,21)$

$\dashv$

181. Методом таблоа доказати да је $\forall x\,(\exists y\, q(x,y) \Rightarrow p(x)) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, [\forall y\, \neg q(x,y) \vee \exists x\,(q(x,y) \wedge p(x))]$ ваљана.

Решење.

$0.\ \mathcal{F}\ \forall x\,(\exists y\, q(x,y) \Rightarrow p(x)) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, [\forall y\, \neg q(x,y) \vee \exists x\,(q(x,y) \wedge p(x))]$

$1(0)\ \mathcal{T}\ \forall x\,(\exists y\, q(x,y) \Rightarrow p(x))$

$2(0)\ \mathcal{F}\ \forall x\, \exists y\, [\forall y\, \neg q(x,y) \vee \exists x\,(q(x,y) \wedge p(x))]$

$3(2)\ \mathcal{F}\ \exists y\, [\forall y\, \neg q(a,y) \vee \exists x\,(q(x,y) \wedge p(x))]$

$4(1)\ \mathcal{T}\ \exists y\, q(a,y) \Rightarrow p(a)$

$5(3)\ \mathcal{F}\ \forall y\, \neg q(a,y) \vee \exists x\,(q(x,a) \wedge p(x))$

$6(5)\ \mathcal{F}\ \forall y\, \neg q(a,y)$

$7(5)\ \mathcal{F}\ \exists x\,(q(x,a) \wedge p(x))$

$8(6)\ \mathcal{F}\ \neg q(a,b)$

$9(8)\ \mathcal{T}\ q(a,b)$

Лева грана:

$10(4)\ \mathcal{F}\ \exists y\, q(a,y)$

$12(10)\ \mathcal{F}\ q(a,b)$

$\times(9,12)$

Десна грана:

$11(4)\ \mathcal{T}\ p(a)$

$13(3)\ \mathcal{F}\ \forall y\, \neg q(a,y) \vee \exists x\,(q(x,b) \wedge p(x))$

$14(13)\ \mathcal{F}\ \forall y\, \neg q(a,y)$

$15(13)\ \mathcal{F}\ \exists x\,(q(x,b) \wedge p(x))$

$16(15)\ \mathcal{F}\ q(a,b) \wedge p(a)$

$17(16)\ \mathcal{F}\ q(a,b)$ — $\times(9,17)$

$18(16)\ \mathcal{F}\ p(a)$ — $\times(11,18)$

⊣

182. Методом таблоа доказати да је $\exists x \, \forall y \, \exists z \, (p(x,y) \Rightarrow p(y,z))$ ваљана.

Решење.

$$
\begin{array}{c}
0.\ \mathcal{F}\ \exists x \, \forall y \, \exists z \, (p(x,y) \Rightarrow p(y,z)) \\
| \\
1(0)\ \mathcal{F}\ \forall y \, \exists z \, (p(a,y) \Rightarrow p(y,z)) \\
| \\
2(1)\ \mathcal{F}\ \exists z \, (p(a,b) \Rightarrow p(b,z)) \\
| \\
3(0)\ \mathcal{F}\ \forall y \, \exists z \, (p(b,y) \Rightarrow p(y,z)) \\
| \\
4(3)\ \mathcal{F}\ \exists z \, (p(b,c) \Rightarrow p(c,z)) \\
| \\
5(4)\ \mathcal{F}\ p(b,c) \Rightarrow p(c,a) \\
| \\
6(5)\ \mathcal{T}\ p(b,c) \\
| \\
7(5)\ \mathcal{F}\ p(c,a) \\
| \\
8(2)\ \mathcal{F}\ p(a,b) \Rightarrow p(b,c) \\
| \\
9(8)\ \mathcal{T}\ p(a,b) \\
| \\
10(8)\ \mathcal{F}\ p(b,c) \\
| \\
\times(6,10)
\end{array}
$$

$\dashv$

Примери колоквијума

Први пример

1. Доказати да је формула $F = ((p \veebar q) \wedge r) \veebar ((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r))$ таутологија.

2. Нека су A и B исказне формуле такве да су формуле $A \Rightarrow B$ и $A \veebar B$ таутологије. Доказати да је A контрадикција и да је B таутологија.

3. Написати ККНФ формуле A, која садржи само слова p, q, r, и која је задата таблицом:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

4. Методом резолуције доказати да је формула $F = ((p \wedge r) \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg r))$ таутологија.

5. У Буловој алгебри за елементе x и y важи једнакост $(x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = 0$. Доказати да је $x = y$.

Решења

1. Напишимо таблицу дате формуле:

p	q	r	$A = p \veebar q$	$B = A \wedge r$	$C = p \wedge r$	$D = q \wedge r$	$E = C \Leftrightarrow D$	$F = B \veebar E$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1

Из таблице видимо да је F таутологија.

2. Претпоставимо супротно да A није контрадикција. Тада постоји валуација v таква да је $A =_v 1$. Како је $A \Rightarrow B =_v 1$, јер је $A \Rightarrow B$ таутологија, то је тада $B =_v 1$. Али тада $A \veebar B =_v 1 \veebar 1 = 0$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $A \veebar B$ таутологија. Дакле, A јесте контрадикција.

   Докажимо сада да је B таутологија. Нека је v произвољна валуација. Како имамо $A =_v 0$, јер смо доказали да је A контрадикција, и $A \veebar B =_v 1$, јер је $A \veebar B$ таутологија, то је $B =_v 1$. Како је v била произвољна валуација, то је B таутологија.

3. Тражени ККНФ је: $A \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

4. Запишимо најпре $\neg F$ у КНФ.

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv ((p \wedge r) \Rightarrow q) \wedge \neg((p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg r)) \\
&\equiv (\neg(p \wedge r) \vee q) \wedge p \wedge \neg q \wedge \neg(p \wedge \neg r) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg r \vee q) \wedge p \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee r)
\end{aligned}$$

   Имамо дакле 4 клаузе. Запишимо доказ за $\emptyset$.

$C_1 = \{\neg p, q, \neg r\}$	
$C_2 = \{p\}$	
$C_3 = \{\neg q\}$	
$C_4 = \{\neg p, r\}$	
$C_5 = \{\neg p, q\}$	$Res(C_1, C_4; \neg r, r)$
$C_6 = \{\neg p\}$	$Res(C_3, C_5; \neg q, q)$
$C_7 = \emptyset$	$Res(C_2, C_6; p, \neg p)$

   Како смо доказали $\emptyset$, то је $\neg F$ контрадикција, па је F таутологија.

5. Докажимо да је $x = y$.

$$\begin{aligned}
x &= x \vee 0 \\
&\overset{\text{пп}}{=} x \vee (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \\
&= x \vee (x' \wedge y) \\
&= (x \vee x') \wedge (x \vee y) \\
&= 1 \wedge (x \vee y) \\
&= (y \vee y') \wedge (x \vee y) \\
&= (x \wedge y') \vee y \\
&= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee y \\
&\overset{\text{пп}}{=} 0 \vee y \\
&= y
\end{aligned}$$

Други пример

1. Нека је v валуација дата са: $v(p) = 0$, за све $p \in P$. Доказати: ако је формула F записана користећи само везник $\Leftrightarrow$, тада је $F =_v 0$, ако је $\mathrm{sl}(F)$ паран број, а $F =_v 1$, ако је $\mathrm{sl}(F)$ непаран број.

2. Одредити КНФ формуле $(p \wedge q) \Leftrightarrow (r \vee s)$.

3. Одредити све нееквивалентне формуле A, које користе слова p, q, r, такве да је формула $F = ((p \veebar A) \Leftrightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q \vee A)$ контрадикција.

4. Доказати да у Лукашиевичевом рачуну важи: $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \vdash A$.

5. Методом таблоа доказати да је формула $((p \wedge r) \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg r))$ таутологија.

Решења

1. Изведимо доказ инфукцијом по сложености формуле.

   <u>База</u> Ако је $\mathrm{sl}(F) = 0$, тада је $F = p$, за неко слово p, и очигледно је $F =_v 0$. Како је $\mathrm{sl}(F) = 0$ паран број, то смо базу доказали.

   <u>Корак</u> Претпоставимо да тврђење важи за формуле које користе од везника само $\Leftrightarrow$ и које су сложености мање од n.

   Нека је $\mathrm{sl}(F) = n$. Како F садржи само знак $\Leftrightarrow$, то је $F = G \Leftrightarrow H$, и $n = \mathrm{sl}(F) = 1 + \mathrm{sl}(G) + \mathrm{sl}(H)$. $\mathrm{sl}(G), \mathrm{sl}(H) < n$, па за G и H важи индуктивна хипотеза. Имамо неколико случајева.

   (1) Нека је n паран број. Тада је $\mathrm{sl}(G) + \mathrm{sl}(H)$ непаран број, па су $\mathrm{sl}(G)$ и $\mathrm{sl}(H)$ различите парности. Имамо два подслучаја.

      i. Ако је $\mathrm{sl}(G)$ паран и $\mathrm{sl}(H)$ непаран, тада је према индуктивној хипотези $G =_v 0$ и $H =_v 1$, па је $F = G \Leftrightarrow H =_v 0 \Leftrightarrow 1 = 0$.

      ii. Ако је $\mathrm{sl}(G)$ непаран и $\mathrm{sl}(H)$ паран, тада је према индуктивној хипотези $G =_v 1$ и $H =_v 0$, па је $F = G \Leftrightarrow H =_v 1 \Leftrightarrow 0 = 0$.

      У сваком случају је $F =_v 0$, што доказује тврђење ако је n паран број.

   (2) Нека је n непаран број. Тада је $\mathrm{sl}(G) + \mathrm{sl}(H)$ паран број, па су $\mathrm{sl}(G)$ и $\mathrm{sl}(H)$ једнаке парности. Имамо два подслучаја.

      i. Ако су $\mathrm{sl}(G)$ и $\mathrm{sl}(H)$ парни, тада је према индуктивној хипотези $G =_v 0$ и $H =_v 0$, па је $F = G \Leftrightarrow H =_v 0 \Leftrightarrow 0 = 1$.

      ii. Ако су $\mathrm{sl}(G)$ и $\mathrm{sl}(H)$ непарни, тада је према индуктивној хипотези $G =_v 1$ и $H =_v 1$, па је $F = G \Leftrightarrow H =_v 1 \Leftrightarrow 1 = 1$.

      У сваком случају је $F =_v 1$, што доказује тврђење ако је n непаран број.

2. Свођење на КНФ је:

$$
\begin{array}{rl}
 & (p \wedge q) \Leftrightarrow (r \vee s) \\
\equiv & [(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \vee s) \Rightarrow (p \wedge q)] \\
\equiv & [\neg(p \wedge q) \vee r \vee s] \wedge [\neg(r \vee s) \vee (p \wedge q)] \\
\equiv & (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge [(\neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q)] \\
\equiv & (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg s \vee p) \wedge (\neg s \vee q))
\end{array}
$$

3. Напишимо таблицу формуле F.

p	q	r	A	$B = p \veebar A$	$C = B \Leftrightarrow r$	$D = q \vee A$	$E = r \Rightarrow D$	$F = C \wedge E$
0	0	0	a_1	a_1	$\neg a_1$	a_1	1	$\neg a_1$
0	0	1	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2	a_2
0	1	0	a_3	a_3	$\neg a_3$	1	1	$\neg a_3$
0	1	1	a_4	a_4	a_4	1	1	a_4
1	0	0	a_5	$\neg a_5$	a_5	a_5	1	a_5
1	0	1	a_6	$\neg a_6$	$\neg a_6$	a_6	a_6	0
1	1	0	a_7	$\neg a_7$	a_7	1	1	a_7
1	1	1	a_8	$\neg a_8$	$\neg a_8$	1	1	$\neg a_8$

Из таблице видимо, да би формула F била контрадикција, морамо имати $a_1 = a_3 = a_8 = 1$ и $a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = 0$, док је a_6 произвољно. Према томе постоје две нееквиваленте формуле које задовољавају дати услов. Њихове таблице су:

p	q	r	A_1	A_2
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Формуле можемо наћи у ДНФу: $A_1 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ и $A_1 = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$.

4. Доказ тврђења је:

1.	хип.	$\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$
2.	$\vdash \neg F \Rightarrow (F \Rightarrow G)$	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$
3.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (2)	$\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow \neg\neg A$
4.	МП(1,3) (3)	$\neg\neg A$
5.	$\neg\neg F \vdash F$ (4)	A

5. Докажимо да су све гране таблоа дате формуле затворене:

- 0. $\mathcal{F}\ ((p \wedge r) \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg r))$
- 1(0) $\mathcal{T}\ (p \wedge r) \Rightarrow q$
- 2(0) $\mathcal{F}\ (p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \wedge \neg r)$
- 3(2) $\mathcal{T}\ p \wedge \neg q$
- 4(2) $\mathcal{F}\ p \wedge \neg r$
- 5(3) $\mathcal{T}\ p$
- 6(3) $\mathcal{T}\ \neg q$
- 7(6) $\mathcal{F}\ q$
  - 8(1) $\mathcal{F}\ p \wedge r$
    - 10(4) $\mathcal{F}\ p$
      - $\times(5, 10)$
    - 11(4) $\mathcal{F}\ \neg r$
      - 12(11) $\mathcal{T}\ r$
        - 13(8) $\mathcal{F}\ p$
          - $\times(5, 13)$
        - 14(8) $\mathcal{F}\ r$
          - $\times(12, 14)$
  - 9(1) $\mathcal{T}\ q$
    - $\times(7, 9)$

Примери испита

Први пример

1. Наћи све логички нееквивалентне исказне формуле A у којима учествују искључиво слова p и q тако да формула $F = (A \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (A \wedge p)$ буде контрадикција.

2. Доказати да у Лукашиевичевом рачуну важи: $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \vee \neg A$.

3. Доказати да у Буловој алгебри важи: $x \vee y' \leq x \wedge y$ ако и само ако је $y = 1$.

4. По дефиницији доказати да је формула $\forall x\, p(x) \vee \exists x\, \neg p(x)$ ваљана.

5. Наћи контрамодел за формулу $\forall x\, \exists y\, \forall z\, [p(x, y) \Rightarrow p(z, y)]$.

6. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:

$$\exists x\, (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow [\forall x\, \forall y\, (q(x) \Rightarrow r(y)) \Rightarrow (\forall x\, p(x) \Rightarrow r(a))].$$

Студенти који полажу цео испит раде задатке: 1, 2, 3, 4. и 5.

Студенти који полажу други део раде задатке: 3, 4, 5. и 6.

Решења

1. Напишимо таблицу формуле F.

p	q	A	$B = p \Rightarrow q$	$C = A \Rightarrow B$	$D = A \wedge p$	$F = C \Rightarrow D$
0	0	a_1	1	1	0	0
0	1	a_2	1	1	0	0
1	0	a_3	0	$\neg a_3$	a_3	a_3
1	1	a_4	1	1	a_4	a_4

Из таблице видимо, да би формула F била контрадикција, морамо имати $a_3 = a_4 = 0$, док су a_1 и a_2 произвољни. Према томе постоје четири нееквиваленте формуле које задовољавају дати услов. Њихове таблице су:

p	q	A_1	A_2	A_3	A_4
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0

Формуле су: $A_1 = p \wedge \neg p$, $A_2 = \neg p \wedge q$, $A_3 = \neg p \wedge \neg q$, $A_4 = \neg p$.

2. По дефиницији је $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \vee \neg A$ ако и само ако $\vdash \neg(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A$, што је по ставу дедукције еквивалентно са $\neg(\neg A \Rightarrow A) \vdash \neg A$.

Доказ:

1.	хип.	$\neg(\neg A \Rightarrow A)$
2.	акс. 1	$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow A)$
3.	$F \Rightarrow G \vdash \neg G \Rightarrow \neg F$ (2)	$\neg(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A$
4.	МП(1,3)	$\neg A$

3. ($\Leftarrow$) Претпоставимо да је $y = 1$. Тада је $x \vee y' = x \vee 1' = x \vee 0 = x$, а $x \wedge y = x \wedge 1 = x$. Како јесте $x \leq x$, то је и $x \vee y' \leq x \wedge y$.

($\Rightarrow$) Претпоставимо сада да је $x \vee y' \leq x \wedge y$. Тада је $y = y \vee (x \wedge y) \geq y \vee (x \vee y') = x \vee (y \vee y') = x \vee 1 = 1$. Дакле, $y \geq 1$, а како је увек $1 \geq y$, то је $y = 1$.

4. Претпоставимо супротно да $\not\models \forall x\, p(x) \vee \exists x\, \neg p(x)$; нека је $\mathbb{K} = (D, p^{\mathbb{K}}) \not\models \forall x\, p(x) \vee \exists x\, \neg p(x)$ и нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ таква да је $\forall x\, p(x) \vee \exists x\, \neg p(x) =_v 0$.

Тада је $\forall x\, p(x) =_v 0$ (1) и $\exists x\, \neg p(x) =_v 0$ (2). Из (1) следи да постоји елемент $a \in D$ такав да је $p(\underline{a}) =_v 0$ ($\star$). Из (2) следи да за све елементе $d \in D$ важи $\neg p(\underline{d}) =_v 0$, тј. $p(\underline{d}) =_v 1$. Како ово важи за све $d \in D$, специјално за $d = a$ имамо $p(\underline{a}) =_v 1$, што је у контрадикцији са ($\star$).

5. Уочимо модел $\mathbb{K} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{K}})$, где је $p^{\mathbb{K}}$ дефинисан таблицом:

$p^{\mathbb{K}}$	α	β
α	1	1
β	0	0

.

Докажимо да је $\mathbb{K} \not\models \forall x\, \exists y\, \forall z\, [p(x, y) \Rightarrow p(z, y)]$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ произвољна валуација.

Довољно је да докажемо да је $\forall x\, \exists y\, \forall z\, [p(x, y) \Rightarrow p(z, y)] =_v 0$. Претпоставимо супротно, да је $\forall x\, \exists y\, \forall z\, [p(x, y) \Rightarrow p(z, y)] =_v 1$.

Тада за све елементе $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $\exists y\, \forall z\, [p(\underline{d}, y) \Rightarrow p(z, y)] =_v 1$. Специјално за $d = \alpha$ имамо $\exists y\, \forall z\, [p(\underline{\alpha}, y) \Rightarrow p(z, y)] =_v 1$. Одавде следи да постоји елемент $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да

$\forall z\,[p(\underline{\alpha},\underline{a}) \Rightarrow p(z,\underline{a})] =_v 1$, а одавде да за све елементе $e \in \{\alpha,\beta\}$ важи $p(\underline{\alpha},\underline{a}) \Rightarrow p(\underline{e},\underline{a}) =_v 1$. Специјално, за $e = \beta$ имамо $p(\underline{\alpha},\underline{a}) \Rightarrow p(\underline{\beta},\underline{a}) =_v 1$.

Сада имамо два случаја: $p(\underline{\alpha},\underline{a}) =_v 0$ или $p(\underline{\beta},\underline{a}) =_v 1$.

У првом случају, $p(\underline{\alpha},\underline{a}) =_v 0$, добијамо да је $p^{\mathbb{K}}(\alpha,a) = 0$, што је контрадикција, шта год да је $a \in \{\alpha,\beta\}$.

У другом случају, $p(\underline{\beta},\underline{a}) =_v 1$, добијамо да је $p^{\mathbb{K}}(\beta,a) = 1$, што је такође контрадикција, шта год да је $a \in \{\alpha,\beta\}$.

6.

$$
\begin{array}{c}
0.\ \mathcal{F}\ \exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow [\forall x\,\forall y\,(q(x) \Rightarrow r(y)) \Rightarrow (\forall x\,p(x) \Rightarrow r(a))]\\
|\\
1(0)\ \mathcal{T}\ \exists x\,(p(x) \Rightarrow q(x))\\
|\\
2(0)\ \mathcal{F}\ \forall x\,\forall y\,(q(x) \Rightarrow r(y)) \Rightarrow (\forall x\,p(x) \Rightarrow r(a))\\
|\\
3(1)\ \mathcal{T}\ p(b) \Rightarrow q(b)\\
|\\
4^{\star}(2)\ \mathcal{T}\ \forall x\,\forall y\,(q(x) \Rightarrow r(y))\\
|\\
5(2)\ \mathcal{F}\ \forall x\,p(x) \Rightarrow r(a)\\
|\\
6^{\star}(5)\ \mathcal{T}\ \forall x\,p(x)\\
|\\
7(5)\ \mathcal{F}\ r(a)\\
|\\
8^{\star}(4)\ \mathcal{T}\ \forall y\,(q(b) \Rightarrow r(y))\\
|\\
9(8)\ \mathcal{T}\ q(b) \Rightarrow r(a)\\
|\\
10(6)\ \mathcal{T}\ p(b)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
11(3)\ \mathcal{F}\ p(b) & 12(3)\ \mathcal{T}\ q(b)\\
| & \begin{array}{cc} 13(9)\ \mathcal{F}\ q(b) & 14(9)\ \mathcal{T}\ r(a)\\ | & |\\ \times(12,13) & \times(7,14)\end{array}\\
\times(10,11) &
\end{array}
$$

Други пример

1. Доказати да је $\{\veebar, \Leftrightarrow, \vee\}$ потпун скуп везника.
2. Методом резолуције доказати да је формула $F = (p \Rightarrow q) \vee [(q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)]$ таутологија.
3. Нека је F филтер Булове алгебре $\mathbb{B}$. Доказати да су следећи искази еквивалентни:
   (а) за све $x, y \in \mathbb{B}$ важи: ако $x \vee y \in F$, тада $x \in F$ или $y \in F$;
   (б) за све $x \in \mathbb{B}$ важи: $x \in F$ или $x' \in F$.
4. Методом таблоа доказати да је следећа формула ваљана:
$$\forall x\,\forall y\,(q(x,y) \Rightarrow p(x)) \Rightarrow [\exists x\,q(a,x) \Rightarrow \exists x\,(\exists y\,q(x,y) \wedge p(x))].$$
5. Наћи модел за формулу $\exists x\,\forall y\,p(x,y) \wedge \forall x\,\exists y\,q(x,y) \wedge \exists x\,r(x) \wedge \exists x\,\neg r(x)$.
6. Нека је $A(x)$ произвољна формула на језику $\mathcal{L}$, и нека је c константан симбол такав да $x \notin \mathcal{L}$. Ако формула $A(c)$ језика $\mathcal{L} \cup \{c\}$ има модел, доказати и да формула $\exists x\,A(x)$ језика $\mathcal{L}$ има модел.

Студенти који полажу цео испит раде задатке: 1, 2, 3, 4. и 5.

Студенти који полажу други део раде задатке: 3, 4, 5. и 6.

Решења

1. Како је $\{\neg, \vee\}$ потпун скуп, и како је $\neg p \equiv (p \veebar p) \Leftrightarrow p$, то је и $\{\veebar, \Leftrightarrow, \vee\}$ потпун.

2. Запишимо формулу $\neg F$ у КНФ. $\neg F \equiv \neg(p \Rightarrow q) \wedge \neg[(q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow p)] \equiv p \wedge \neg q \wedge [\neg(q \Rightarrow r) \vee \neg(r \Rightarrow p)] \equiv p \wedge \neg q \wedge [(q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p)] \equiv p \wedge \neg q \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee \neg p) \equiv p \wedge \neg q \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p)$. Имамо дакле 5 клауза. Запишимо доказ за $\emptyset$.

$$\begin{array}{ll}
C_1 = \{p\} & \\
C_2 = \{\neg q\} & \\
C_3 = \{q, r\} & \\
C_4 = \{q, \neg p\} & \\
C_5 = \{\neg r, \neg p\} & \\
\hline
C_6 = \{q\} & Res(C_1, C_4; p, \neg p) \\
C_7 = \emptyset & Res(C_2, C_6; \neg q, q)
\end{array}$$

Одатле је $\neg F$ контрадикција, па је F таутологија.

3. (а)$\Rightarrow$(б): Претпоставимо да важи (а). Нека је x произвољан елемент алгебре $\mathbb{B}$. Приметимо да $x \vee x' = 1 \in F$, јер је F филтер, па садржи 1. Но, како $x \vee x' \in F$, то према (а) директно следи да $x \in F$ или $x' \in F$.

   (б)$\Rightarrow$(а): Претпоставимо сада да важи (б). Нека су x, y произвољни елементи алгебре $\mathbb{B}$, такви да $x \vee y \in F$. Претпоставимо супротно да $x \notin F$ и $y \notin F$. Тада према (б) имамо $x' \in F$ и $y' \in F$. Како је F филтер, то $x' \wedge y' \in F$, тј. $(x \vee y)' \in F$. Дакле, $x \vee y, (x \vee y)' \in F$, па и $0 = (x \vee y) \wedge (x \vee y)' \in F$. Контрадикција.

4.

$0.\ \mathcal{F}\ \forall x\, \forall y\, (q(x,y) \Rightarrow p(x)) \Rightarrow [\exists x\, q(a,x) \Rightarrow \exists x\, (\exists y\, q(x,y) \wedge p(x))]$

$1^\star(0)\ \mathcal{T}\ \forall x\, \forall y\, (q(x,y) \Rightarrow p(x))$

$2(0)\ \mathcal{F}\ \exists x\, q(a,x) \Rightarrow \exists x\, (\exists y\, q(x,y) \wedge p(x))$

$3(2)\ \mathcal{T}\ \exists x\, q(a,x)$

$4^\star(2)\ \mathcal{F}\ \exists x\, (\exists y\, q(x,y) \wedge p(x))$

$5(3)\ \mathcal{T}\ q(a,b)$

$6^\star(1)\ \mathcal{T}\ \forall y\, (q(a,y) \Rightarrow p(a))$

$7(4)\ \mathcal{F}\ \exists y\, q(a,y) \wedge p(a)$

$8(6)\ \mathcal{T}\ q(a,b) \Rightarrow p(a)$

- $9(8)\ \mathcal{F}\ q(a,b)$
  - $\times(5,9)$
- $10(8)\ \mathcal{T}\ p(a)$
  - $11^\star(7)\ \mathcal{F}\ \exists y\, q(a,y)$
    - $13(11)\ \mathcal{F}\ q(a,b)$
      - $\times(5,13)$
  - $12(7)\ \mathcal{F}\ p(a)$
    - $\times(10,12)$

5. Уочимо модел $\mathbb{M} = (\{\alpha, \beta\}, p^{\mathbb{M}}, q^{\mathbb{M}}, r^{\mathbb{M}})$, где су $p^{\mathbb{M}}, q^{\mathbb{M}}, r^{\mathbb{M}}$ дефинисани таблицама:

$p^{\mathbb{M}}$	α	β
α	1	1
β	$\star$	$\star$

$q^{\mathbb{M}}$	α	β
α	1	$\star$
β	1	$\star$

$r^{\mathbb{M}}$	α	β
	1	0

Докажимо да је $\mathbb{M} \vDash \exists x\, \forall y\, p(x,y) \wedge \forall x\, \exists y\, q(x,y) \wedge \exists x\, r(x) \wedge \exists x\, \neg r(x)$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow \{\alpha, \beta\}$ произвољна валуација.

(1) Докажимо најпре да је $\exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v 1$. Претпоставимо супротно да је $\exists x\, \forall y\, p(x,y) =_v 0$. Тада за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $\forall y\, p(\underline{d}, y) =_v 0$. Специјално за $d = \alpha$ имамо $\forall y\, p(\underline{\alpha}, y) =_v 0$. Одавде следи да посотји елемент $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да је $p(\underline{\alpha}, \underline{a}) =_v 0$, тј. $p^{\mathbb{M}}(\alpha, a) = 0$. Али шта год да је $a \in \{\alpha, \beta\}$, видимо да добијамо контрадикцију.

(2) Друго доказујемо да је $\forall x\, \exists y\, q(x,y) =_v 1$. Претпоставимо супротно да је $\forall x\, \exists y\, q(x,y) =_v 0$. Тада постоји $a \in \{\alpha, \beta\}$ такав да важи $\exists y\, q(\underline{a}, y) =_v 0$. Одавде следи да за све $d \in \{\alpha, \beta\}$ важи $q(\underline{a}, \underline{d}) =_v 0$; специјално за $d = \alpha$ имамо $q(\underline{a}, \underline{\alpha}) =_v 0$, тј. $q^{\mathbb{M}}(a, \alpha) = 0$. Али шта год да је $a \in \{\alpha, \beta\}$, видимо да добијамо контрадикцију.

(3) Даље доказујемо $\exists x\, r(x) =_v 1$. Уочимо да је $r^{\mathbb{M}}(\alpha) = 1$, одакле је $r(\underline{\alpha}) =_v 1$. Одатле је $\exists x\, r(x) =_v 1$.

(4) Коначно доказујемо $\exists x\, \neg r(x) =_v 1$. Уочимо да је $r^{\mathbb{M}}(\beta) = 0$, одакле је $r(\underline{\beta}) =_v 0$. Тада је $\neg r(\underline{\beta}) =_v 1$, одакле следи да је $\exists x\, \neg r(x) =_v 1$.

Дакле, доказали смо да је $\exists x\, \forall y\, p(x,y) \wedge \forall x\, \exists y\, q(x,y) \wedge \exists x\, r(x) \wedge \exists x\, \neg r(x) =_v 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$. Како је v била произвољна, то је $\mathbb{M} \vDash \exists x\, \forall y\, p(x,y) \wedge \forall x\, \exists y\, q(x,y) \wedge \exists x\, r(x) \wedge \exists x\, \neg r(x)$.

6. Нека је $\mathbb{M} = (D, s^{\mathbb{M}}, c^{\mathbb{M}})_{s \in \mathcal{L}} \vDash A(c)$. (Приметите да је $\mathbb{M}$ модел језика $\mathcal{L} \cup \{c\}$.) Докажимо да за модел $\mathbb{M}_0 = (D, s^{\mathbb{M}_0})_{s \in \mathcal{L}}$ језика $\mathcal{L}$, који је дефинисан са $s^{\mathbb{M}_0} := s^{\mathbb{M}}$, важи $\mathbb{M}_0 \vDash \exists x\, A(x)$.

Претпоставимо супротно да је $\mathbb{M}_0 \nvDash \exists x\, A(x)$. Нека је $v : \mathsf{Var} \longrightarrow D$ таква да је $\exists x\, A(x) =_v 0$. Тада за све $d \in D$ важи $A(\underline{d}) =_v 0$, па специјално за $d = c^{\mathbb{M}}$ имамо $A(\underline{c^{\mathbb{M}}}) =_v 0$. Но, како су сви симболи језика $\mathcal{L}$ исто интерпретирани у оба модела, то у моделу $\mathbb{M}$ важи $A(c) =_v 0$. Контрадикција.