Materijali za
Odabrana poglavlja matematičke logike

Slavko Moconja

Školska 2019/20. godina

Sadržaj

0 Napomene za studente

Ovo su materijali za kurs Odabrana pogavlja matematičke logike za master studente L smera. Materijali nisu potpuni i biće doradjivani u sledećem periodu. Na ispitu znanje teorije neće biti traženo; studenti će samo raditi zadatke. U ovim materijalima biće dat dovoljan broj uradjenih zadataka, ali studenti treba da prorade i zadatke iz treće glave zbirke zadataka Irene Spasić i Predraga Janičića. Takodje, veliki broj zadataka možete naći u materijalima Aleksandre Kostić.

1 Osnovni pojmovi

Sa $\mathbb{N}$ označavamo skup prirodnih brojeva; u ovim materijalima usvojićemo dogovor da je 0 prirodni broj, tj. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Za $k \geqslant 1$, Sa $\mathbb{N}^k$ označavamo skup svih k-torki, odnosno nizova dužine k, prirodnih brojeva: $\mathbb{N}^k = \{(a_0, \dots, a_{k-1}) \mid a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{N}\}$. Specijalno, za $k = 1$, niz duzine 1 (a) identifikujemo sa a. Ovu definiciju možemo proširiti na niz dužine 0. Jedini niz dužine 0 je prazan niz, $()$, a $\mathbb{N}^0$ tada je jednočlani skup koji sadrži ovaj niz: $\mathbb{N}^0 = \{()\}$.

(1.1) Aritmetičke funkcije. F je parcijalna k-arna aritmetička funkcija ako je $F : D \to \mathbb{N}$ gde je $D \subseteq \mathbb{N}^k$ domen funkcije F. Ako $\bar{a} \in \mathbb{N}^k$[1], sa $F(\bar{a}) \downarrow$ označavamo da $\bar{a} \in Dom(F)$, tj. da je $F(\bar{a})$ definisano; u suprotnom pišemo $F(\bar{a}) \uparrow$. Specijalno, nularna aritmetička funkcija je ili prazna funkcija (koja nas ne zanima) ili funkcija sa domenom $\mathbb{N}^0$, jedinstveno odredjena slikom od $()$; ovakve funkcije zovemo konstantama.

k-arna aritmetička funkcija F je totalna ako je $Dom(F) = \mathbb{N}^k$.

Od sada pa nadalje, kada kažemo funkcija mislimo parcijalna aritmetička funckija.

(1.2) Osnovne funkcije. Osnovne aritmetičke funkcije su sledeće:

1. nularna konstanta 0;
2. unarna nula-funkcija Z: $Z(x) = 0$;
3. unarna sledbena funkcija S: $S(x) = x + 1$;
4. n-arne projekcije Π^n_k: $\Pi^n_k(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_k$, za sve $n \geqslant 1$ i $0 \leqslant k < n$.

Primetimo da su sve osnovne funkcije totalne.

(1.3) Definicija kompozicijom. Neka je F l-arna funkcija i $G_0, \dots, G_{l-1}$ k-arne funkcije. k-arna funkcija H definisana je njihovom kompozicijom ako je $H(\bar{x}) = F(G_0(\bar{x}), \dots, G_{l-1}(\bar{x}))$ za sve $\bar{x}$ za koje je desna strana jednakosti definisana; ako desna strana nije definisana, onda nije ni leva. Funkciju H označavamo sa $H = F(G_0, \dots, G_{l-1})$.

Jasno je da $\bar{x} \in Dom(H)$ akko $\bar{x} \in \bigcap_{i<k} Dom(G_i)$ i $(G_0(\bar{x}), \dots, G_{l-1}(\bar{x})) \in Dom(F)$.

(1.4) Definicija primitivnom rekurzijom. Neka je F k-arna funkcija i G $(k+2)$-arna funkcija. $(k+1)$-arna funkcija H definisana je primitovnom rekurzijom od F i G ako:

$$\begin{aligned} H(\bar{x}, 0) &= F(\bar{x}), \\ H(\bar{x}, y+1) &= G(\bar{x}, y, H(\bar{x}, y)). \end{aligned}$$

Funkciju H označavamo sa $H = rec(F, G)$. Tada $(\bar{x}, 0) \in Dom(H)$ akko $\bar{x} \in Dom(F)$, i $(\bar{x}, y+1) \in Dom(H)$ akko $(\bar{x}, y) \in Dom(H)$ i $(\bar{x}, y, H(\bar{x}, y)) \in Dom(G)$.

(1.5) Definicija minimizacijom. Neka je F $(k+1)$-arna funkcija. Za niz $\bar{x}$ dužine k, označimo sa:

$$S_{\bar{x}} := \{y \mid (\forall z \leqslant y)\ F(\bar{x}, z) \downarrow \text{ i } F(\bar{x}, y) = 0\}.$$

k-arna funkcija G dobijena je minimizacijom F ako:

$$G(\bar{x}) = \begin{cases} \min S_{\bar{x}} & \text{ako } S_{\bar{x}} \neq \varnothing \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}.$$

[1] Ovde $\bar{a}$ označava k-torku $(a_0, \dots, a_{k-1})$.

Za G pišemo $G(\bar{x}) = (\mu y)\ F(\bar{x}, y) = 0$. Primetimo da $\bar{x} \in Dom(G)$ akko postoji y tako da $(\bar{x}, z) \in Dom(F)$ za sve $z \leqslant y$ i $F(\bar{x}, y) = 0$.

(1.6) Klinijeva jednakost. Neka su F i G dve k-arne funkcije. Sa $F \simeq G$ označavamo da F i G imaju jednake domene i za svaku k-torku $\bar{x}$ u domenu važi $F(\bar{x}) = G(\bar{x})$.

Primera radi, ako je F unarna funkcija, onda je jasno $\Pi_0^2(F(x), x) \simeq F(x)$, medjutim $\Pi_1^2(F(x), x) \simeq x$ nije obavezno tačno (iako kad su definisane imaju jednake vrednosti), jer domen leve strane jednak je domenu funkcije F koji ne mora biti ceo $\mathbb{N}$, a domen desne strane je $\mathbb{N}$.

2 Primitivno rekurzivne funkcije

A. Definicija i primeri

(2.1) Primitivno rekurzivne funkcije. Familija primitivno rekurzivnih funkcija je najmanja familija $\mathcal{PR}$ koja sadrži sve osnovne funkcije (vidi (1.2)) i zatvorena je za definiciju kompozicijom (1.3) i definiciju primitivnom rekurzijom (1.4). Alternativno, možemo definisati rastući niz familija funkcija $(\mathcal{PR}_n)_{n<\infty}$ sa $\mathcal{PR}_0$ su osnovne funkcije i:

$$\begin{aligned}\mathcal{PR}_{n+1} &= \mathcal{PR}_n \cup \{F(G_0, \ldots, G_{l-1}) \mid F, G_0, \ldots, G_{l-1} \in \mathcal{PR}_n \text{ i } F(G_0, \ldots, G_{l-1}) \text{ je definisana}\} \\ &\cup \{rec(F, G) \mid F, G \in \mathcal{PR}_n \text{ i } rec(F, G) \text{ je definisana}\}.\end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{PR} = \bigcup_{n<\infty} \mathcal{PR}_n$. Dakle, funkcija F je primitivno rekurzivna ako je možemo izgraditi u konačno mnogo koraka od osnovnih funkcija koristeći definiciju kompozicijom i primitivnom rekurzijom. Ako $F \in \mathcal{PR}$, složenost od F je najmanje n takvo da $F \in \mathcal{PR}_n$.

(2.2) Zadatak. Indukcijom po složenosti dokazati da su sve primitivno rekurzivne funkcije totalne.

(2.3) Komentar. Ako je funkcija $F(x_0, x_1)$ primitivno rekurzivna binarna funkcija, onda je i $G(x_0, x_1) = F(x_1, x_0)$ primitivno rekurzivna binarna funkcija jer je $G = F(\Pi_1^2, \Pi_0^2)$.

Opštije, ako je F k-arna primitivno rekurzivna funcija, $k \geqslant 1$, i $i_0, \ldots, i_{k-1} \in \{0, \ldots, l-1\}$, onda je i $G(x_0, \ldots, x_{l-1}) = F(x_{i_0}, \ldots, x_{i_{k-1}})$ primitivno rekurzivna l-arna funkcija jer je $G = F(\Pi_{i_0}^l, \ldots, \Pi_{i_{k-1}}^l)$.

Ovakve konstrukcije ćemo ubuduće samo implicitno raditi bez dodatnih objašnjenja.

(2.4) Osnovni primeri.

1. Konstanta n je primitivno rekurzivna kao kompozicija $\underbrace{S(S(\ldots S}_{n}(0)\ldots))$.

2. Unarna konstantna funkcija $n_1(x) = n$ je primitivno rekurzivna kao $\underbrace{S(S(\ldots S}_{n}(Z(x))\ldots))$. k-arna konstantna funkcija $n_k(\bar{x}) = n$ je primitivno rekurzivna kao $n_1(\Pi_0^k)$.

3. Zbir $F(x, y) = x + y$ je primitivno rekurzivna. Naime:

$$\begin{aligned}F(x, 0) &= x + 0 = x = \Pi_0^1(x), \\ F(x, y+1) &= x + (y+1) = (x+y) + 1 = S(\Pi_2^3(x, y, F(x, y))),\end{aligned}$$

pa je $F = rec(\Pi_0^1, S(\Pi_2^3))$. Nadalje nećemo do detalja objašnjavati primitivnu rekurzivnost.

4. Proizvod $F(x, y) = xy$ je primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned}F(x, 0) &= x \cdot 0 = 0, \\ F(x, y+1) &= x(y+1) = xy + x = F(x, y) + x.\end{aligned}$$

5. Stepen $F(x, y) = x^y$, gde je $0^0 := 1$, je primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned}F(x, 0) &= x^0 = 1, \\ F(x, y+1) &= x^{y+1} = x^y \cdot x = F(x, y) \cdot x.\end{aligned}$$

6. Faktorijel $F(x) = x!$ je primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned} F(0) &= 1, \\ F(x+1) &= (x+1)! = x! \cdot (x+1) = F(x) \cdot (x+1). \end{aligned}$$

7. Funkcija prethodnika $P(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$ je primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned} P(0) &= 0, \\ P(x+1) &= x = \Pi_0^2(x, P(x)), \end{aligned}$$

tj. $P = rec(0, \Pi_0^2)$.

8. Funkcija znaka $sg(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ je primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned} sg(0) &= 0, \\ sg(y+1) &= 1. \end{aligned}$$

9. Funkcija obrnutog znaka $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ je primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned} \overline{sg}(0) &= 1, \\ \overline{sg}(y+1) &= 0. \end{aligned}$$

10. Funkcija odsečenog minusa $x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & x < y \\ x-y & x \geqslant y \end{cases}$ je primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned} x \dot{-} 0 &= x, \\ x \dot{-} (y+1) &= P(x \dot{-} y), \end{aligned}$$

gde je P funkcija prethodnika.

11. Funkcija apsolutne razlike $|x-y|$ je primitivno rekurzivna kao $(x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$.

12. Funkcije $\min(x,y)$ i $\max(x,y)$ su primitivno rekurzivne: $\min(x,y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$ i $\max(x,y) = x + (y \dot{-} x)$.

13. Funkcija razdvajanja po slučajevima $C(x,y,z) = \begin{cases} x & z = 0 \\ y & z > 0 \end{cases}$ je primitivno rekurzivna jer $C(x,y,z) = x \cdot \overline{sg}(z) + y \cdot sg(z)$.

14. Funkcija ostatka $rm(x,y) = \begin{cases} x & y = 0 \\ x\%y & y > 0 \end{cases}$, gde je $x\%y$ uobičajen ostatak pri deljenju x sa $y > 0$, je primitivno rekurzivna.

   Imamo $rm(0,y) = 0$ i $rm(x+1,0) = x+1$. Neka je $y > 0$ i zapišimo $x = qy + r$, gde $rm(x,y) = r < y$. Tada je $rm(x+1,y) = rm(x,y)+1$ ako $rm(x,y)+1 < y$ i $rm(x+1,y) = 0$ ako $rm(x,y)+1 = y$. Primetimo da je $rm(x,y)+1 = y$ akko $y \dot{-} (rm(x,y)+1) = 0$ (jer $rm(x,y)+1 \leqslant y$ za $y > 0$). Dakle:

$$\begin{aligned} rm(0,y) &= 0, \\ rm(x+1,y) &= \begin{cases} x+1 & y = 0 \\ \left.\begin{cases} 0 & y \dot{-} (rm(x,y)+1) = 0 \\ rm(x,y)+1 & y \dot{-} (rm(x,y)+1) > 0 \end{cases}\right| & y > 0 \end{cases} \\ &= C(x+1,\ C(0, rm(x,y)+1, y \dot{-} (rm(x,y)+1)),\ y). \end{aligned}$$

15. Funkcija količnika $qt(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & y = 0 \\ \left[\frac{x}{y}\right] & y > 0 \end{array} \right.$ je primitivno rekurzivna:

$$\begin{array}{rcl} qt(0,y) & = & 0, \\ qt(x+1,y) & = & qt(x,y) + \overline{sg}(rm(x+1,y)). \end{array}$$

(2.5) Zadatak. Razjasnite detalje u prethodnom primeru.

B. Primitivno rekurzivni skupovi

(2.6) Karakteristična funkcija. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Karakteristična funkcija skupa A je totalna k-arna funkcija:

$$\chi_A(\bar{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \bar{x} \in A \\ 0 & \bar{x} \notin A \end{array} \right. .$$

Obratna karakteristična funkcija skupa A je:

$$\overline{\chi}_A(\bar{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \bar{x} \in A \\ 1 & \bar{x} \notin A \end{array} \right. .$$

Primetimo da je χ_A primitivno rekurzivna akko je $\overline{\chi}_A$ primitivno rekurzivna jer $\overline{\chi}_A = \overline{sg}(\chi_A)$ i $\chi_A = \overline{sg}(\overline{\chi}_A)$.

(2.7) Primitivno rekurzivni skupovi. Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je primitivno rekurzivan akko je χ_A (ekvivalentno, $\overline{\chi}_A$) primitivno rekurzivna.

Umesto reči skup koristimo i termine relacija i predikat za $A \subseteq \mathbb{N}^k$, i umesto $\bar{x} \in A$ pišemo $A(\bar{x})$, a umesto $\bar{x} \notin A$ pišemo $\neg A(\bar{x})$.

(2.8) Tvrdjenje. Primitivno rekurzivni skupovi su zatvoreni za konačne Bulove kombinacije, tj. ako su $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivni, onda su i A^c, $A \cap B$, $A \cup B$, pa i $A \smallsetminus B$ i $A \triangle B$ primitivno rekurzivni.

Dokaz. Primetimo samo $\chi_{A^c} = \overline{\chi}_A$ i $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, pa su A^c i $A \cap B$ primitivno rekurzivni. Onda su i $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, $A \smallsetminus B = A \cap B^c$ i $A \triangle B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$ primitivno rekurzivni. □

(2.9) Primeri. Binarne relacije $=$, $\neq$, $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ i $|$ su primitivno rekurzivne.
Primetimo $x = y$ akko $|x - y| = 0$, pa je $\chi_=(x,y) = \overline{sg}(|x-y|)$; $\neq$ je jednako $=^c$.
Takodje, $x < y$ akko $y \dot{-} x > 0$, pa je $\chi_<(x,y) = sg(y \dot{-} x)$. Sada je $\leqslant$ unija $<$ i $=$, $>$ je $\leqslant^c$, $\geqslant$ je $<^c$.
Konačno, $x \mid y$ akko $rm(y,x) = 0$, tj. $\chi_|(x,y) = \overline{sg}(rm(y,x))$.

C. Ograničena kvantifikacija i minimizacija

(2.10) Tvrdjenje. Neka je $F(\bar{x}, y)$ $(k+1)$-arna primitivno rekurzivna funkcija. Tada su i:

1. $G(\bar{x}, y) = \sum_{z<y} F(\bar{x}, z)$, gde $\sum_{z<0} F(\bar{x}, z) := 0$;
2. $H(\bar{x}, y) = \prod_{z<y} F(\bar{x}, z)$, gde $\prod_{z<0} F(\bar{x}, z) := 1$;

primitivno rekurzivne.

Dokaz. Imamo $G(\bar{x}, 0) = 0$ i $G(\bar{x}, y+1) = G(\bar{x}, y) + F(\bar{x}, y)$; takodje, $H(\bar{x}, 0) = 1$ i $H(\bar{x}, y+1) = H(\bar{x}, y) \cdot F(\bar{x}, y)$. □

(2.11) Ograničena kvantifikacija. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$. Sa $B(\bar{x}, y)$ akko $(\exists z < y)\ A(\bar{x}, z)$ i $C(\bar{x}, y)$ akko $(\forall z < y)\ A(\bar{x}, z)$ definišemo skupove $B, C \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ ograničenom kvantifikacijom.
Primetimo da $\neg B(\bar{x}, 0)$ i $C(\bar{x}, 0)$, za sve k-torke $\bar{x}$.

(2.12) Tvrdjenje. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ primitivno rekurzivan. Skupovi B i C dobijeni ograničenom kvantifikacijom iz prethodne definicije su primitivno rekurzivni.

Dokaz. Primetimo: $\chi_B(\bar{x},y) = sg(\sum_{z<y}\chi_A(\bar{x},z))$ i $\chi_C(\bar{x},y) = \prod_{z<y}\chi_A(\bar{x},z)$. □

(2.13) Ograničena minimizacije. Neka je F totalna $(k+1)$-arna funkcija. Za niz $(\bar{x},y)$ dužine $k+1$, označimo sa:

$$S_{\bar{x},y} := \{z < y \mid F(\bar{x},z) = 0\}.$$

$(k+1)$-arna funkcija G dobijena je ograničenom minimizacijom F ako:

$$G(\bar{x},y) = \begin{cases} \min S_{\bar{x},y} & \text{ako } S_{\bar{x},y} \neq \varnothing \\ y & \text{inače} \end{cases}.$$

Za G pišemo $G(\bar{x},y) = (\mu z < y)\ F(\bar{x},y) = 0$.

Neka je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$. Za niz $(\bar{x},y)$ dužine $k+1$ označimo sa:

$$T_{\bar{x},y} := \{z < y \mid A(\bar{x},z)\}.$$

$(k+1)$-arna funkcija H dobijena je ograničenom minimizacijom A ako:

$$H(\bar{x},y) = \begin{cases} \min T_{\bar{x},y} & \text{ako } T_{\bar{x},y} \neq \varnothing \\ y & \text{inače} \end{cases}.$$

Za H pišemo $H(\bar{x},y) = (\mu z < y)\ A(\bar{x},y)$.

(2.14) Tvrdjenje. Neka je F primitivno rekurzivna $(k+1)$-arna funkcija i $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ primitivno rekurzivan skup. Tada su funkcije G i H dobijene ograničenom minimizacijom F i A iz prethodne definicije primitivno rekurzivne.

Dokaz. Jasno je $G(\bar{x},0) = 0$. Pogledajmo sledeće slučajeve:

1° ako $G(\bar{x},y) < y$, onda $S_{\bar{x},y} \neq \varnothing$, pa je i $S_{\bar{x},y+1} \neq \varnothing$ i $\min S_{\bar{x},y} = \min S_{\bar{x},y+1}$, odakle je $G(\bar{x},y+1) = G(\bar{x},y)$;

2° ako $G(\bar{x},y) = y$ i $F(\bar{x},y) = 0$, tada je $S_{\bar{x},y} = \varnothing$ i $S_{\bar{x},y+1} = \{y\}$, pa je $G(\bar{x},y+1) = y$, što možemo da zapišemo i kao $G(\bar{x},y+1) = G(\bar{x},y)$;

3° ako $G(\bar{x},y) = y$ i $F(\bar{x},y) > 0$, tada $S_{\bar{x},y} = S_{\bar{x},y+1} = \varnothing$, pa je $G(\bar{x},y+1) = y+1$, što možemo da zapišemo i kao $G(\bar{x},y+1) = G(\bar{x},y)+1$.

Dakle, $G(\bar{x},y+1) = G(\bar{x},y) + \overline{sg}(y \dot{-} G(\bar{x},y)) \cdot sg(F(\bar{x},y))$.

Sada, $H(\bar{x},y) = (\mu z < y)\ \overline{\chi}_A(\bar{x},z)$. □

Analogno $(\mu z < y)\ A(\bar{x},z)$ možemo da definišemo funkciju i ograničenom maksimizacijom. Preciznije, ako je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$, definišemo funkciju $\overline{H}$ ograničenom maksimizacijom A sa:

$$\overline{H}(\bar{x},y) = \begin{cases} \max T_{\bar{x},y} & \text{ako } T_{\bar{x},y} \neq \varnothing \\ y & \text{inače} \end{cases}.$$

Za $\overline{H}$ ćemo pisati $\overline{H}(\bar{x},y) = (\overline{\mu} z < y)\ A(\bar{x},y)$.

(2.15) Posledica. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ primitivno rekurzivan. Tada je i prethodno definisana funkcija ograničenom maksimizacijom $\overline{H}$ primitivno rekurzivna.

Dokaz. Primetimo da je z maksimalno tako da $0 \leqslant z < y$ i $A(\bar{x},z)$ akko $y - z$ je minimalno tako da $0 < y - z \leqslant y$ i $A(\bar{x},z)$, ili $y-z-1$ je minimalno tako da $0 \leqslant y-z-1 < y$ i $A(\bar{x},z)$. Ako uvedemo zamenu $t = y-z-1$, prethodno je ekvivalentno sa t je minimalno tako da $0 \leqslant t < y$ i $A(\bar{x}, y-(1+t))$. Dakle, u slučaju $T_{\bar{x},y} \neq \varnothing$ imamo $\overline{H}(\bar{x},y) = y \dot{-} [1 + (\mu t < y)\ A(\bar{x}, y \dot{-} (1+t))]$. Kako je $T_{\bar{x},y} \neq \varnothing$ ekvivalentno sa $(\mu z < y)\ A(\bar{x},z) < y$, a $T_{\bar{x},y} = \varnothing$ ekvivalentno sa $(\mu z < y)\ A(\bar{x},z) = y$, možemo da stavimo:

$$\overline{H}(\bar{x},y) = \begin{cases} y \dot{-} [1 + (\mu t < y)\ A(\bar{x}, y \dot{-} (1+t))] & (\mu z < y)\ A(\bar{x},z) < y \\ y & (\mu z < y)\ A(\bar{x},z) = y \end{cases}.$$

Primitivna rekurzivnost sada se može zaključiti razdvajanjem po slučajevima. □

D. Zadaci

U sledećim zadacima razjasnite sebi sve detalje.

(2.16) Zadatak. Funkcija $\tau(x)$ = broj delilaca broja x koji su $\leqslant x$.

Rešenje. Imamo $\tau(x) = \sum_{t \leqslant x} \chi_{|}(t,x)$. Objašnjenje: $F(x,y) = \sum_{t<y} \chi_{|}(t,x)$ je primitivno rekurzivna po (2.10), pa je i $\tau(x) = F(x, S(x))$ primitivno rekurzivna. □

(2.17) Zadatak. Funkcija $\sigma(x)$ = zbir delilaca broja x koji su $\leqslant x$.

Rešenje. Imamo $\sigma(x) = \sum_{t \leqslant x} t \cdot \chi_{|}(t,x)$. Objašnjenje primitivne rekurzivnosti je kao u (2.16). □

(2.18) Zadatak. Skup prostih brojeva $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,\dots\}$ je primitivno rekurzivan.

Rešenje. Broj x je prost akko $\tau(x) = 2$, tj. $\chi_{\mathbb{P}}(x) = \chi_{=}(\tau(x), 2)$. □

(2.19) Zadatak. Funkcija $\pi(x)$ = broj prostih brojeva koji su $< x$.

Rešenje. Imamo $\pi(x) = \sum_{t<x} \chi_{\mathbb{P}}(t)$. □

(2.20) Zadatak. Funkcija $\tau_P(x)$ = broj prostih brojeva koji su $\leqslant x$ i dele x.

Rešenje. Imamo $\tau_P(x) = \sum_{t \leqslant x} \chi_{\mathbb{P}}(t) \cdot \chi_{|}(t,x)$. Objašnjenje prim. rekurzivnosti je kao u (2.16). □

(2.21) Zadatak. Funkcija $pr(x)$ = x-ti prost broj, tj. $pr(0) = 2$, $pr(1) = 3$, $pr(2) = 5, \dots$, je primitivno rekurzivna.

Rešenje. Rešenje se svodi na sledeće tvrdjenje: za svako x, $pr(x) < pr(x+1) \leqslant pr(x)! + 1$. Primetimo da $pr(x)! + 1$ nije deljiv sa prvih x prostih brojeva, pa bilo da je on složen ili ne, sledeći prost broj je u intervalu $(pr(x), pr(x)! + 1]$.

Dakle, $0 < pr(x+1) - pr(x) \leqslant pr(x)! - pr(x) + 1$ ili $0 \leqslant \underbrace{pr(x+1) - pr(x) - 1}_{=t} \leqslant pr(x)! - pr(x)$. Ovde je t minimalno tako da $pr(x) + 1 + t$ prost broj. Neka je:

$$F(u,v) = u + 1 + (\mu t < v)\ \mathbb{P}(u + 1 + t).$$

$F(u,v)$ vraća minimalan prost broj oblika $u + 1 + t$ gde $t < v$, ako takav broj postoji, odnosno $u + 1 + v$ ako takav broj ne postoji. Sada možemo da definišemo:

$$\begin{aligned} pr(0) &= 2, \\ pr(x+1) &= F(pr(x), S(pr(x)! \dot{-} pr(x))). \end{aligned}$$

Jasno je da je $pr(x)$ primitivno rekurzivna. □

(2.22) Zadatak. Funkcija $(x)_y = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \text{maksimalno } t \text{ tako da } pr(y)^t \mid x & x > 0 \end{cases}$ je primitivno rekurzivna.

Rešenje. Rešenje koristi sledeće zapažanje: za $x \neq 0$, $(x)_y < x$. Neka je $pr(y) = p$ i zapišimo $x = p^t x'$ gde $p \nmid x'$; dakle $t = (x)_y$. Tada je $p^t \leqslant x$, pa je $t = \log_p p^t \leqslant \log_p x < x$, gde poslednja nejednakost sledi jer $x < p^x$, što lako vidimo indukcijom. Dakle, $(x)_y = sg(x) \cdot (\overline{\mu} t < x)\ pr(y)^t \mid x$. □

(2.23) Zadatak. Funkcija $[\sqrt{x}]$ je primitivno rekurzivna.

Rešenje. Imamo $[\sqrt{x}] = (\overline{\mu} t \leqslant x)\ t^2 \leqslant x$. □

(2.24) Zadatak. Funkcija $F(x)$ = x-ta cifra u zapisu $\sqrt{2}$, tj. $\sqrt{2} = F(0), F(1)F(2)F(3)F(4)\dots$, je primitivno rekurzivna. Dakle, $F(0) = 1$, $F(1) = 4$, $F(2) = 1$, $F(3) = 4$, $F(4) = 2, \dots$ jer $\sqrt{2} = 1,4142\dots$

Rešenje. Neka je $G(x) = [\sqrt{2} \cdot 10^x]$. Kako je $\sqrt{2}$ iracionalan, $G(x) < \sqrt{2} \cdot 10^x < G(x) + 1$, pa je $G(x)^2 < 2 \cdot 10^{2x} < (G(x)+1)^2$. Kako je još $G(x) \leqslant G(x)^2$, $G(x)$ možemo da izračunamo kao $G(x) = (\overline{\mu} t < 2 \cdot 10^{2x})\ t^2 < 2 \cdot 10^{2x}$. Sada je $F(x) = rm(G(x), 10)$. □

(2.25) Zadatak. Funkcija $F(x,y) = \begin{cases} [\sqrt{x}] & y = 0 \\ y\text{-ta decimala od } [\sqrt{x}] & y > 0 \end{cases}$ je primitivno rekurzivna.

Rešenje. Modifikujte ideju iz prethodnog zadatka. □

3 Akermanova funkcija

(3.1) Akermanova funkcija. Binarna Akermanova funkcija $A(x,y)$ definisana je duplom rekurzijom na sledeći način:

$$\begin{aligned} A(0,y) &= y+1; \\ A(x+1,0) &= A(x,1); \\ A(x+1,y+1) &= A(x, A(x+1,y)). \end{aligned}$$

Prateća Akermanova familija unarnih funkcija $(A_x)_{x \geqslant 0}$ definisana je sa: $A_x(y) := A(x,y)$. Dakle:

$$\begin{aligned} A_0(y) &= y+1; \\ A_{x+1}(0) &= A_x(1); \\ A_{x+1}(y+1) &= A_x(A_{x+1}(y)). \end{aligned}$$

(3.2) Zadatak. Dokazati da je $A_1(y) = y+2$, $A_2(y) = 2y+3$ i $A_3(y) = 2^{y+3} - 3$.

Rešenje. Lakom indukcijom. □

(3.3) Zadatak. Dokazati $A_x(y) > x + y$.

Rešenje. Dokaz izvodimo indukcijom po x. Za $x = 0$ imamo $A_0(y) = y + 1 > 0 + y$.

Pretpostavimo da $A_x(y) > x + y$ važi za sve y i dokažimo da $A_{x+1}(y) > x + 1 + y$ za sve y. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po y. Za $y = 0$ imamo $A_{x+1}(0) = A_x(1) > x + 1 = x + 1 + 0$, gde nejednakost važi po indukcijskoj hipotezi.

Pretpostavimo da $A_{x+1}(y) > x + 1 + y$ i dokažimo $A_{x+1}(y+1) > x + 1 + y + 1$. Imamo $A_{x+1}(y+1) = A_x(A_{x+1}(y)) > x + A_{x+1}(y)$, gde nejednakost važi po prvoj indukcijskoj hipotezi. Ekvivalentno, $A_{x+1}(y+1) \geqslant x + A_{x+1}(y) + 1 > x + x + 1 + y + 1 \geqslant x + 1 + y + 1$ gde druga nejednakost važi po drugoj indukcijskoj hipotezi. □

(3.4) Zadatak. Dokazati $A_x(y) < A_x(y+1)$. Odatle imamo $A_x(y) < A_x(y')$ za $y < y'$.

Rešenje. Za $x = 0$ imamo $A_0(y+1) = y + 2 > y + 1 = A_0(y)$.

Za $x > 0$ imamo $A_x(y+1) = A_{x-1}(A_x(y)) > x - 1 + A_x(y) \geqslant A_x(y)$, gde prva nejednakost važi prema (3.3), a druga jer $x > 0$.

Drugi deo zadatka je jasan lakom indukcijom. □

(3.5) Zadatak. Dokazati $A_x(y) < A_{x+1}(y)$. Odatle imamo $A_x(y) < A_{x'}(y)$ za $x < x'$.

Rešenje. Za $y = 0$ imamo $A_{x+1}(0) = A_x(1) > A_x(0)$, gde nejednakost važi prema (3.4).

Za $y > 0$ imamo $A_{x+1}(y) = A_x(A_{x+1}(y-1)) > A_x(y)$, gde nejednakost važi po (3.4) jer $A_{x+1}(y-1) > x + 1 + y - 1 \geqslant y$, a ovde prva nejednakost važi po (3.3).

Drugi deo zadatka je jasan lakom indukcijom. □

(3.6) Zadatak. Dokazati $A_x(A_{x+1}(y)) \leqslant A_{x+2}(y)$.

Rešenje. Za $y = 0$ imamo $A_{x+2}(0) = A_{x+1}(1) = A_x(A_{x+1}(0))$, gde obe jednakosti su direktno po definiciji.

Za $y > 0$ imamo $A_{x+2}(y) = A_{x+1}(A_{x+2}(y-1)) = A_x(A_{x+1}(A_{x+2}(y-1)-1))$, gde druga jednakost važi po definiciji jer $A_{x+2}(y-1) > x+2+y-1 \geqslant 1$ po (3.3). Dalje, kako je $A_{x+2}(y-1)-1 > x+2+y-1-1 \geqslant y$ po (3.3), dobijamo $A_{x+2}(y) > A_x(A_{x+1}(y))$ primenjujući (3.4) dva puta. □

(3.7) Zadatak. Dokazati $A_x(y) \geqslant xy + 2$ za $x \geqslant 1$.

Rešenje. Dokaz izvodimo indukcijom po x. Za $x = 1$ imamo $A_1(y) > 1 + y$ po (3.3), tj. $A_1(y) \geqslant 1 \cdot y + 2$.

Pretpostavimo da $A_x(y) \geqslant xy + 2$ za sve y i dokažimo $A_{x+1}(y) \geqslant (x+1)y + 2$ za sve y. Ovo ćemo dokazati indukcijom po y. Za $y = 0$ imamo $A_{x+1}(0) > x + 1 \geqslant 2 = (x+1) \cdot 0 + 2$, gde prva nejednakost važi po (3.3), a druga jer $x \geqslant 1$.

Pretpostavimo da je $A_{x+1}(y) \geqslant (x+1)y + 2$ i dokažimo $A_{x+1}(y+1) \geqslant (x+1)(y+1) + 2$. Imamo $A_{x+1}(y+1) = A_x(A_{x+1}(y)) \geqslant xA_{x+1}(y) + 2 \geqslant x((x+1)y+2) + 2$ gde prva nejednakost važi po drugoj, a druga po prvoj indukcijskoj hipotezi. Dakle, $A_{x+1}(y+1) \geqslant x^2y + xy + 2x + 2 \geqslant xy + x + y + 1 + 2 = (x+1)(y+1) + 2$, gde nejednakost važi jer $x \geqslant 1$, pa i $x^2y \geqslant y$. □

(3.8) Zadatak. Dokazati $A_{x+1}(y) > A_x(2y)$ za $x \geqslant 1$.

Rešenje. Dokaz izvodimo indukcijom po y. Za $y = 0$, $A_{x+1}(0) > A_x(0)$ važi po (3.5).

Pretpostavimo $A_{x+1}(y) > A_x(2y)$ i dokažimo $A_{x+1}(y+1) > A_x(2y+2)$. Imamo $A_{x+1}(y+1) = A_x(A_{x+1}(y)) > A_x(A_x(2y))$ gde nejednakost važi po (3.4) jer $A_{x+1}(y) > A_x(2y)$ važi po indukcijskoj hipotezi. Dalje, prema (3.7) i (3.4), $A_x(A_x(2y)) \geqslant A_x(2xy+2) \geqslant A_x(2y+2)$, gde druga nejednakost ponovo važi zbog (3.4) i $x \geqslant 1$. Prema tome $A_{x+1}(y+1) > A_x(2y+2)$. □

(3.9) Definicija. Za primitivno rekurzivnu k-arnu funkciju F, $k \geqslant 1$, kažemo da je ograničena sa A_x, u oznaci $F \in \mathcal{B}(A_x)$, ako za sve k-torke $\bar{y}$ imamo $F(\bar{y}) < A_x(\sum \bar{y})$, gde $\sum \bar{y}$ označava $y_0 + \cdots + y_{k-1}$ za k-torku $\bar{y}$. Za $k = 0$, konstanta F je ograničena sa A_x, ponovo $F \in \mathcal{B}(A_x)$, ako $F < A_x(0)$.

Primetimo da $F \in \mathcal{B}(A_x)$ povlači $F \in \mathcal{B}(A_{x'})$ za sve $x' \geqslant x$ po (3.5).

(3.10) Lema. Osnovne funkcije su ograničene sa A_1.

Dokaz. Za konstantu 0 imamo $0 < 2 = A_0(1) = A_1(0)$. Za $Z(y)$ imamo $Z(y) = 0 < 2 = A_1(0) \leqslant A_1(y)$, gde poslednje nejednakost važi po (3.4), a $\sum y = y$ za niz dužine 1. Za $S(y)$ imamo $S(y) = y+1 < A_1(y)$ gde nejednakost važi zbog (3.3). Konačno, $\Pi^n_k(\bar{y}) = y_k < 1 + \sum \bar{y} < A_1(\sum \bar{y})$, gde smo ponovo iskoristili (3.3). □

(3.11) Lema. Ako je $H = F(G_0, \ldots, G_{l-1})$ i $F, G_0, \ldots, G_{l-1} \in \mathcal{B}(A_x)$, onda $H \in \mathcal{B}(A_{\max(x,l+1)+2})$.

Dokaz. Primetimo da možemo pretpostaviti da je $x > l$; ako $x \leqslant l$, onda $F, G_0, \ldots, G_{l-1} \in \mathcal{B}(A_x)$ povlači $F, G_0, \ldots, G_{l-1} \in \mathcal{B}(A_{l+1})$, a takodje $\max(x, l+1) + 2 = l + 3 = \max(l+1, l+1) + 2$, pa možemo zameniti x sa $l + 1$. Dakle, pretpostavimo $x > l$, tada $\max(x, l+1) + 2 = x + 2$, pa dokazujemo $H \in \mathcal{B}(A_{x+2})$.

Imamo:

$$H(\bar{y}) = F(G_0(\bar{y}), \ldots, G_{l-1}(\bar{y})) < A_x(G_0(\bar{y}) + \cdots + G_{l-1}(\bar{y})) < A_x(lA_x(\sum \bar{y})) = (*),$$

gde prva nejednakost važi zbog $F \in \mathcal{B}(A_x)$, a druga zbog $G_0, \ldots, G_{l-1} \in \mathcal{B}(A_x)$ i (3.4). Kako je $l < x$, tj. $l \leqslant x - 1$, važi $lA_x(\sum \bar{y}) < (x-1)A_x(\sum \bar{y}) + 2$, pa je:

$$(*) = A_x(lA_x(\sum \bar{y})) < A_x((x-1)A_x(\sum \bar{y}) + 2) = (\#)$$

po (3.4). Po (3.7) i (3.4):

$$(\#) \leqslant A_x(A_{x-1}(A_x(\sum \bar{y}))) = (\$).$$

Dalje po (3.6) i (3.4):

$$(\$) \leqslant A_x(A_{x+1}(\sum \bar{y})) \leqslant A_{x+2}(\sum \bar{y}),$$

gde i poslednja nejednakost važi po (3.6). Prema tome $H \in \mathcal{B}(x+2)$.

Prethodno izvodjenje lako se modifikuje za slučaj da su $G_0, \ldots, G_{l-1}$ konstante. □

(3.12) Lema. Ako je $H = rec(F, G)$ i $F, G \in \mathcal{B}(A_x)$, onda $H \in \mathcal{B}(A_{\max(3,x+2)})$.

Dokaz. Primetimo da možemo pretpostaviti da je $x \geqslant 1$. Zaista, ako je $x = 0$, onda $F, G \in \mathcal{B}(A_0)$ povlači $F, G \in \mathcal{B}(A_1)$, a takodje $\max(3, 0 + 2) = 3 = \max(3, 1 + 2)$, pa možemo zameniti $x = 0$ sa 1. Dakle, neka je $x \geqslant 1$, tada je $\max(3, x + 2) = x + 2$, pa dokazujemo $H \in \mathcal{B}(A_{x+2})$.

Funkcija H definisana je sa:

$$\begin{aligned} H(\bar{y}, z) &= F(\bar{y}), \\ H(\bar{y}, z + 1) &= G(\bar{y}, z, H(\bar{y}, z)). \end{aligned}$$

Indukcijom po z dokazujemo da je $H(\bar{y}, z) < A_{x+2}(\sum \bar{y}+z)$. Za $z = 0$ imamo $H(\bar{y}, 0) = F(\bar{y}) < A_x(\sum \bar{y}) < A_{x+2}(\sum \bar{y} + 0)$, gde prva nejednakost važi zbog $F \in \mathcal{B}(A_x)$, a druga po (3.5).

Pretpostavimo da $H(\bar{y}, z) < A_{x+2}(\sum \bar{y} + z)$ i dokažimo $H(\bar{y}, z + 1) < A_{x+2}(\sum \bar{y} + z + 1)$. Imamo:

$$H(\bar{y}, z + 1) = G(\bar{y}, z, H(\bar{y}, z)) < A_x(\sum \bar{y} + z + H(\bar{y}, z)) < A_x(\sum \bar{y} + z + A_{x+2}(\sum \bar{y} + z)) = (*),$$

gde prva nejednakost važi zbog $G \in \mathcal{B}(A_x)$, a druga po indukcijskoj hipotezi i (3.4). Kako $\sum \bar{y} + z < A_{x+2}(\sum \bar{y} + z)$ po (3.3), ponovo zbog (3.4) imamo:

$$(*) < A_x(A_{x+2}(\sum \bar{y} + z) + A_{x+2}(\sum \bar{y} + z)) = A_x(2A_{x+2}(\sum \bar{y} + z)) = (\#).$$

Sada zbog (3.8) imamo:

$$(\#) < A_{x+1}(A_{x+2}(\sum \bar{y} + z)) = A_{x+2}(\sum \bar{y} + z + 1),$$

gde je poslednja jednakost po definiciji. Ovo završava dokaz.

U slučaju da je F konstanta, izvodjenje se lako modifikuje. □

(3.13) Posledica. Za svaku primitivno rekurzivnu funkciju F postoji x tako da $F \in \mathcal{B}(A_x)$.

Dokaz. Ovo tvrdjenje je jasno po lemama (3.10), (3.11) i (3.12) prema konstrukciji primitivno rekurzivnih funkcija. □

(3.14) Tvrdjenje. Akermanova funkcija $A(x, y)$ nije primitivno rekurzivna.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $A(x, y)$ jeste primitivno rekurzivna. Tada je i $F(y) := A(y, y)$ primitivno rekurzivna, pa prema (3.13) postoji x_0 tako da $F \in \mathcal{B}(A_{x_0})$. Tada $F(x_0) < A_{x_0}(x_0) = A(x_0, x_0) = F(x_0)$. Kontradikcija. □

4 Kodiranje konačnih nizova

A. Bijekcije $\mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$

(4.1) Bijekcija $\kappa : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Elementarna aritmetička činjenica je da se svaki pozitivan prirodan broj može jedinstveno napisati u obliku $2^x(2y+1)$ za prirodne brojeve x i y. Ovo nam kaže da ova formula uspostavlja bijekciju izmedju $\mathbb{N}^2$ i $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Kako je $z \to z - 1$ bijekcija izmedju $\mathbb{N}^+$ i $\mathbb{N}$, dobijamo bijekciju $\kappa : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definisanu sa $\kappa(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1$. Od sada pa nadalje bijekcija κ je fiksirana, iako će nam retko njen ekslplicitan oblik biti bitan. Bijekciju κ obično nazivamo kodiranjem parova prirodnih brojeva.

Posmatramo i preslikavanja $\kappa_0, \kappa_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definisana sa $\kappa_i = \Pi^2_i \circ \kappa^{-1}$, $i = 0, 1$. Dakle imamo vezu:

$$\kappa(x, y) = z \text{ akko } \kappa_0(z) = x \text{ i } \kappa_1(z) = y.$$

(4.2) Tvrdjenje. Funkcije κ, κ_0 i κ_1 su primitivno rekurzivne.

Dokaz. Za funkciju κ primitivna rekurzivnost je jasna jer je $\kappa(x,y) = 2^x(2y+1) \dot{-} 1$. Za κ_0 imamo $\kappa_0(z) = (z+1)_0$, gde je $(u)_v$ funkcija iz zadatka (2.22), pa je κ_0 primitivno rekurzivna. Konačno za κ_1 imamo $\kappa_1(z) = qt(qt(z+1, 2^{\kappa_0(z)}) \dot{-} 1, 2)$, pa je i njena primitivna rekurzivnost jasna.

Za κ_0 i κ_1 mogli smo da postupimo i drugačije. Dovoljno je da primetimo da $\kappa_0(z), \kappa_1(z) \leqslant z$, tj. $\kappa(x,y) \geqslant x, y$, što lako možemo da vidimo. Sada imamo:

$$\kappa_0(z) = (\mu x \leqslant z)(\exists y \leqslant z)\ \kappa(x,y) = z \quad \text{i} \quad \kappa_1(z) = (\mu y \leqslant z)(\exists x \leqslant z)\ \kappa(x,y) = z,$$

pa primitivnu rekurzivnosm možemo opravdati ograničenom minimizacijom i ograničenom kvantifikacijom, koristeći primitivnu rekurzivnost funkcije κ. Primetimo da ovo objašnjenje važi za bilo koju drugu bijekciju κ koja je primitivno rekurzivna i zadovoljava uslov $\kappa(x,y) \geqslant x, y$. □

Koristeći kodiranje κ možemo dokazati primitivnu rekurzivnost nekih definicija koje koriste komplikovanije rekurzije.

(4.3) Zadatak (Simultana rekurzija). Neka su F_0, F_1 primitivno rekurzivne k-arne funkcije i G_0, G_1 primitivno rekurzivne $(k+3)$-arne funkcije. Definišemo $(k+1)$-arne funkcije H_0, H_1 sa:

$$\begin{array}{rcl} H_0(\bar{x}, y) & = & F_0(\bar{x}), \\ H_1(\bar{x}, y) & = & F_1(\bar{x}), \\ H_0(\bar{x}, y+1) & = & G_0(\bar{x}, y, H_0(\bar{x}, y), H_1(\bar{x}, y)), \\ H_1(\bar{x}, y+1) & = & G_1(\bar{x}, y, H_0(\bar{x}, y), H_1(\bar{x}, y)). \end{array}$$

Funkcije H_0 i H_1 su očigledno korektno definisani. Dokazati da su i primitivno rekurzivne.

Rešenje. Ideja je da uočimo funkciju $H(\bar{x}, y) = \kappa(H_0(\bar{x}, y), H_1(\bar{x}, y))$. Ako dokažemo da je ona primitivno rekurzivna, onda su i $H_0(\bar{x}, y) = \kappa_0(H(\bar{x}, y))$ i $H_1(\bar{x}, y) = \kappa_1(H(\bar{x}, y))$ primitivno rekurzivne. Dakle, dokazujemo da je H primitivno rekurzivna:

$$\begin{array}{rcl} H(\bar{x}, 0) & = & \kappa(H_0(\bar{x}, 0), H_1(\bar{x}, 0)) \\ & = & \kappa(F_0(\bar{x}), F_1(\bar{x})); \\ H(\bar{x}, y+1) & = & \kappa(H_0(\bar{x}, y+1), H_1(\bar{x}, y+1)) \\ & = & \kappa(G_0(\bar{x}, y, H_0(\bar{x}, y), H_1(\bar{x}, y)), G_1(\bar{x}, y, H_0(\bar{x}, y), H_1(\bar{x}, y))) \\ & = & \kappa(G_0(\bar{x}, y, \kappa_0(H(\bar{x}, y)), \kappa_1(H(\bar{x}, y))), G_1(\bar{x}, y, \kappa_0(H(\bar{x}, y)), \kappa_1(H(\bar{x}, y)))). \end{array}$$

Prema tome H je data primitivnom rekurzijom. □

Takodje, κ možemo da iskoristimo u situacijama u kojima rekurzijom definišemo vrednost funkcije preko dve prethodne vrednosti, kao što je slučaj u sledećem zadatku.

(4.4) Zadatak. Dokazati da je funkcija $F(x) = x$-ti Fibonačijev broj, tj. $F(0) = F(1) = 1$ i $F(x+2) = F(x) + F(x+1)$, primitivno rekurzivna.

Rešenje. Uočimo pomoćnu funkciju $G(x) = \kappa(F(x), F(x+1))$. Ako dokažemo da je ona primitivno rekurzivna, onda je i $F(x) = \kappa_0(G(x))$ primitivno rekurzivna. Dakle, dokažimo da je $G(x)$ primitivno rekurzivna.

$$\begin{array}{rcl} G(0) & = & \kappa(F(0), F(1)) \\ & = & \kappa(1, 1); \\ G(x+1) & = & \kappa(F(x+1), F(x+2)) \\ & = & \kappa(F(x+1), F(x) + F(x+1)) \\ & = & \kappa(\kappa_1(G(x)), \kappa_0(G(x)) + \kappa_1(G(x))), \end{array}$$

pa je prema tome G data primitivnom rekurzijom. □

(4.5) Bijekcije $\kappa^m : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$. Definišemo bijekcije $\kappa^m : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$, sa:

$$\begin{array}{rcl}\kappa^1(x_0) & = & x_0;\\ \kappa^{m+1}(x_0,\dots,x_{m-1},x_m) & = & \kappa(\kappa^m(x_0,\dots,x_{m-1}),x_m).\end{array}$$

Dakle, $\kappa^1 = id_{\mathbb{N}}$ i $\kappa^2 = \kappa$, i opštije κ^{m+1} je kompozicija $\mathbb{N}^{m+1} = \mathbb{N}^m \times \mathbb{N} \overset{\kappa^m \times id_{\mathbb{N}}}{\to} \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2 \overset{\kappa}{\to} \mathbb{N}$. Prema tome, lakom indukcijom vidimo da su κ^m zaista bijekcije. Bijekcije κ^m zovemo kodiranje m-torki prirodnih brojeva.

Za $m \geqslant 1$ i $k < m$ imamo i funkcije $\kappa^m_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ date sa $\kappa^m_k = \Pi^m_k \circ (\kappa^m)^{-1}$. Dakle:

$$\kappa^m(x_0,\dots,x_{m-1}) = y \text{ akko } \kappa^m_0(y) = x_0,\dots,\kappa^m_{m-1}(y) = x_{m-1}.$$

Indukcijom možemo lako da vidimo da važi:

$$\begin{array}{rcl}\kappa^1_0(y) & = & y;\\ \kappa^{m+1}_k(y) & = & \left\{\begin{array}{ll}\kappa^m_k(\kappa_0(y)) & k < m\\ \kappa_1(y) & k = m\end{array}\right. .\end{array}$$

Koristeći gornje formule, indukcijom lako vidimo da su sve funkcije κ^m i κ^m_k primitivno rekurzivne. Medjutim, za κ^m_k važi i više: one su restrikcije jedne jedine ternarne primitivno rekurzivne funkcije, vidite (4.7). Pre toga nam je potrebna jedna lema koju ćemo i kasnije koristiti.

(4.6) Lema. Neka je $F(x)$ unarna primitivno rekurzivna funkcija. Tada je funkcija $\tilde{F}(t,x) = F^t(x) = \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{t}(x)$ primitivno rekurzivna binarna funkcija. (Specijalno, F^0 označava $id_{\mathbb{N}}$.)

Dokaz. $\tilde{F}(t,x)$ definisana je primitivnom rekurzijom sa:

$$\begin{array}{rcl}\tilde{F}(0,x) & = & x;\\ \tilde{F}(t+1,x) & = & F^{t+1}(x) = F \circ F^t(x) = F(\tilde{F}(t,x)).\end{array}$$

□

(4.7) Tvrdjenje. Funkcija $F(x,y,z) = \left\{\begin{array}{cc}\kappa^x_y(z) & x \geqslant 1 \text{ i } y < x\\ 0 & \text{inače}\end{array}\right.$ je primitivno rekurzivna.

Dokaz. Za $x = 0$ ili $y \geqslant x$ (ekvivalentno, $y \geqslant x$) imamo $F(x,y,z) = 0$.

Za $x \geqslant 1$ i $y = 0$ imamo $F(x,y,z) = a_0$ gde je $z = \kappa^x(a_0,\dots,a_{x-1})$. Kako:

$$z = \kappa^x(a_0,\dots,a_{x-1}) \overset{\kappa_0}{\mapsto} \kappa^{x-1}(a_0,\dots,a_{x-2}) \overset{\kappa_0}{\mapsto} \kappa^{x-2}(a_0,\dots,a_{x-3}) \overset{\kappa_0}{\mapsto} \cdots \overset{\kappa_0}{\mapsto} \kappa^2(a_0,a_1) \overset{\kappa_0}{\mapsto} a_0$$

imamo $F(x,y,z) = a_0 = (\kappa_0)^{x-1}(z) = \tilde{\kappa}_0(x \dot{-} 1, z)$, gde je $\tilde{\kappa}_0$ definisana u lemi (4.6).

Za $x \geqslant 1$ i $0 < y < x$ imamo $F(x,y,z) = a_y$ gde je $z = \kappa^x(a_0,\dots,a_y,\dots,a_{x-1})$. Kako:

$$z = \kappa^x(a_0,\dots,a_y,\dots,a_{x-1}) \overset{\kappa_0}{\mapsto} \kappa^{x-1}(a_0,\dots,a_y,\dots,a_{x-2}) \overset{\kappa_0}{\mapsto} \cdots \overset{\kappa_0}{\mapsto} \kappa^{y+1}(a_0,\dots,a_y) \overset{\kappa_1}{\mapsto} a_y$$

imamo $F(x,y,z) = a_y = \kappa_1 \circ (\kappa_0)^{x-(y+1)}(z) = \kappa_1(\tilde{\kappa}_0(x \dot{-} (y+1), z))$, gde je $\tilde{\kappa}_0$ iz (4.6).

Prema tome $F(x,y,z)$ je data sledećim razdvajanjem po slučajevima:

$$F(x,y,z) = \left\{\begin{array}{cc}0 & y \geqslant x\\ \tilde{\kappa}_0(x \dot{-} 1, z) & 0 = y < x\\ \kappa_1(\tilde{\kappa}_0(x \dot{-} (y+1), z)) & 0 < y < x\end{array}\right. ,$$

za koje lako vidimo da je primitivno rekurzivno. □

Ideja iz zadatka (4.4) sada se može uopštiti.

(4.8) Zadatak. Dokazati da je funkcija $F(x)$ definisana sa $F(0) = 1$, $F(1) = 4$, $F(2) = 6$ i $F(x+3) = F(x) + F(x+1)^2 + F(x+2)^3$.

Rešenje. Uočimo pomoćnu funkciju $G(x) = \kappa^3(F(x), F(x+1), F(x+2))$. Ako dokažemo da je $G(x)$ primitivno rekurzivna, onda je i $F(x) = \kappa^3_0(G(x))$ primitivno rekurzivna. Za $G(x)$ imamo:

$$\begin{array}{rcl} G(0) & = & \kappa^3(F(0), F(1), F(2)) \\ & = & \kappa^3(1, 4, 6); \\ G(x+1) & = & \kappa^3(F(x+1), F(x+2), F(x+3)) \\ & = & \kappa^3(F(x+1), F(x+2), F(x) + F(x+1)^2 + F(x+2)^3) \\ & = & \kappa^3(\kappa^3_1(G(x)), \kappa^3_2(G(x)), \kappa^3_0(G(x)) + \kappa^3_1(G(x))^2 + \kappa^3_2(G(x))^3), \end{array}$$

pa je G definisana primitivnom rekurzijom. □

Sledeći komentar biće nam važan na jednom mestu kasnije.

(4.9) Komentar. Primetimo da $x' \leqslant x$ i $y' \leqslant y$ povlači $\kappa(x', y') \leqslant \kappa(x, y)$. Zaista, ovo sledi direktno iz formule za κ. Kako je κ bijekcija, ako je bar jedna od nejednakosti $x' \leqslant x$ i $y' \leqslant y$ stroga, onda je i $\kappa(x', y') < \kappa(x, y)$. Sada indukcijom po m, možemo da dokažemo da $x'_0 \leqslant x_0, \dots, x'_{m-1} \leqslant x_{m-1}$ povlači $\kappa^m(x'_0, \dots, x'_{m-1}) \leqslant \kappa^m(x_0, \dots, x_{m-1})$, i ako je bar jedna nejednakost u $x'_0 \leqslant x_0, \dots, x'_{m-1} \leqslant x_{m-1}$ stroga, onda je $\kappa^m(x'_0, \dots, x'_{m-1}) < \kappa^m(x_0, \dots, x_{m-1})$.

B. Kodiranje konačnih nizova

Uočimo prirodnu bijekciju:

$$\bigcup_{m \geqslant 1} \mathbb{N}^m \xrightarrow{\alpha} \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\kappa} \mathbb{N} \xrightarrow{+1} \mathbb{N}^+,$$

gde $\alpha : (x_0, \dots, x_{m-1}) \mapsto (m-1, \kappa^m(x_0, \dots, x_{m-1}))$; dakle, α bijektivno slika deo $\mathbb{N}^m$ u podskup $\{m-1\} \times \mathbb{N}$ od $\mathbb{N}^2$. Formula koja opisuje prethodnu bijekciju je:

$$(x_0, \dots, x_{m+1}) \mapsto \kappa(m-1, \kappa^m(x_0, \dots, x_{m-1})) + 1.$$

Slikanjem $() \mapsto 0$, prethodnu bijekciju proširujemo do bijekcije $\bigcup_{m \geqslant 0} \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$. Time smo uspostavili bijekciju izmedju skupa svih konačnih nizova i $\mathbb{N}$. Sliku niza $(\dots)$ označavamo sa $\langle \dots \rangle$ i nazivamo je njegovim kodom. Dakle:

- $\langle\rangle = 0$;
- $\langle x_0, \dots, x_{m-1} \rangle = \kappa(m-1, \kappa^m(x_0, \dots, x_{m-1})) + 1$.

Nekoliko funkcija u vezi sa procesom kodiranje biće nam važne. Uvodimo ih u sledećim tvrdjenjima.

(4.10) Tvrdjenje. Funkcija $\ell(z) =$ dužina niza čiji je kod z je primitivno rekurzivna.

Dokaz. Iz formule za kod vidimo:

$$\ell(z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \\ \kappa_0(z \dot{-} 1) + 1 & z > 0 \end{cases}$$

Primitivna rekurzivnost je direktna. □

(4.11) Tvrdjenje. Binarna funkcija $(z)_k$ definisana sa:

$$(z)_k = \begin{cases} k\text{-ta koordinata niza čiji je kod } z & k < \ell(z) \\ 0 & k \geqslant \ell(z) \end{cases}$$

je primitivno rekurzivna.

Dokaz. Iz formule za kod imamo:

$$(z)_k = \begin{cases} \kappa^{\ell(z)}_k(\kappa_1(z \dot{-} 1)) & k < \ell(z) \\ 0 & k \geqslant \ell(z) \end{cases}.$$

Primitivna rekurzivnost je jasna ako se setimo da je funkcija $(u, v, w) \to \kappa^u_v(w)$ primitivno rekurzivna, vidite tvrdjenje (4.7). □

(4.12) Tvrdjenje. Binarna funkcije $x \circ y$ = kod niza dobijenog dodavanjem nizu sa kodom x još jedne koordinate y, tj:

- $0 \circ x = \langle\rangle \circ y = \langle y \rangle$;
- $x \circ y = \langle (x)_0, \ldots, (x)_{\ell(x)-1} \rangle \circ y = \langle (x)_0, \ldots, (x)_{\ell(x)-1}, y \rangle$, za $x > 0$

je primitivno rekurzivna.

Dokaz. Ako je $x = 0$, tj. x je kod praznog niza, onda je $x \circ y = \langle y \rangle = \kappa(0, y) + 1$. Ako je $x > 0$, onda:

$$\begin{aligned}
x \circ y &= \langle (x)_0, \ldots, (x)_{\ell(x)-1} \rangle \circ y \\
&= \langle (x)_0, \ldots, (x)_{\ell(x)-1}, y \rangle \\
&= \kappa(\ \ell(x),\ \underline{\kappa^{\ell(x)+1}((x)_0, \ldots, (x)_{\ell(x)-1}, y)}\ ) + 1 \\
&= \kappa(\ \ell(x),\ \kappa(\underline{\kappa^{\ell(x)}((x)_0, \ldots (x)_{\ell(x)-1})}, y)\ ) + 1 \\
&= \kappa(\ \ell(x),\ \kappa(\kappa_1(x \dot{-} 1), y)\ ) + 1.
\end{aligned}$$

Prema tome, $x \circ y$ data je sa:

$$x \circ y = \begin{cases} \kappa(0, y) + 1 & x = 0 \\ \kappa(\ell(x), \kappa(\kappa_1(x \dot{-} 1), y)) + 1 & x > 0 \end{cases},$$

i njena primitivna rekurzivnost je jasna. □

(4.13) Tvrdjenje. Binarna funkcija $x * y$ = kod niza dobijenog nadovezivanjem nizova sa kodovima x i y, tj:

- $0 * y = y$;
- $x * 0 = x$;
- $x * y = \langle (x)_0, \ldots, (x)_{\ell(x)-1} \rangle * \langle (y)_0, \ldots, (y)_{\ell(y)-1} \rangle = \langle (x)_0, \ldots, (x)_{\ell(x)-1}, (y)_0, \ldots, (y)_{\ell(y)-1} \rangle$, za $x, y > 0$,

je primitivno rekurzivna. Primetimo da je $x \circ y = x * \langle y \rangle$.

Dokaz. Definišemo pomoćnu funkciju $F(x, y, t) = \begin{cases} x & t = 0 \\ x * \langle (y)_0, \ldots, (y)_{t-1} \rangle & t > 0 \end{cases}$. Primetimo da je $x * y = F(x, y, \ell(y))$, pa je dovoljno da dokažemo da je F primitivno rekurzivna. Imamo:

$$\begin{aligned}
F(x, y, 0) &= x; \\
F(x, y, t + 1) &= x * \langle (y)_0, \ldots, (y)_{t-1}, (y)_t \rangle \\
&= x * \langle (y)_0, \ldots, (y)_{t-1} \rangle * \langle (y)_t \rangle \\
&= F(x, y, t) * \langle (y)_t \rangle \\
&= F(x, y, t) \circ (y)_t,
\end{aligned}$$

pa je F definisana primitivnom rekurzijom. □

C. Dalji primeri primitivno rekurzivnih funkcija

Tehnika kodiranja može biti iskorišćena da dokažemo primitivnu rekurzivnost funkcije $F(\bar{x}, y)$ u slučajevima kada je $F(\bar{x}, y + 1)$ definisana koristeći vrednosti $F(\bar{x}, z)$ za neke/sve $z \leqslant y$.

(4.14) Zadatak. Dokazati da je funkcija $F(x)$ definisana sa $F(0) = 1$ i $F(x + 1) = F([x/3])^2 + x$ primitivno rekurzivna.

Rešenje. Definišimo pomoćnu funkciju $G(x)$ sa $G(x) = \langle F(0), \dots, F(x) \rangle$. Ako dokažemo da je $G(x)$ primitivno rekurzivna, onda je i $F(x) = (G(x))_x$ primitivno rekurzivna. Za $G(x)$ imamo:

$$\begin{aligned}
G(0) &= \langle F(0) \rangle = \langle 1 \rangle; \\
G(x+1) &= \langle F(0), \dots, F(x), F(x+1) \rangle \\
&= \langle F(0), \dots, F(x) \rangle \circ F(x+1) \\
&= G(x) \circ (F([x/3])^2 + x) \\
&= G(x) \circ ((G(x))^2_{qt(x,3)} + x),
\end{aligned}$$

pa je funkcija $G(x)$ data primitivno rekurzijom. Ovde smo iskoristili da je $[x/3] = qt(x,3) \leqslant x$, pa je $(G(x))_{qt(x,3)} = F(qt(x,3)) = F([x/3])$. □

(4.15) Zadatak. Dokazati da je funkcija $F(x)$ definisana sa $F(0) = 2$ i $F(x+1) = \prod_{t \leqslant x} F(t)^{x+1}$ primitivno rekurzivna.

Rešenje. Definišimo istu pomoćnu funkciju $G(x) = \langle F(0), \dots, F(x) \rangle$. Dovoljno je da dokažemo da je $G(x)$ primitivno rekurzivna, jer je tada i $F(x) = (G(x))_x$ primitivno rekurzivna. Imamo:

$$\begin{aligned}
G(0) &= \langle F(0) \rangle \\
&= \langle 2 \rangle; \\
G(x+1) &= \langle F(0), \dots, F(x), F(x+1) \rangle \\
&= \langle F(0), \dots, F(x) \rangle \circ F(x+1) \\
&= G(x) \circ \left(\prod_{t \leqslant x} F(t)^{x+1} \right) \\
&= G(x) \circ \left(\prod_{t \leqslant x} (G(x))_t^{x+1} \right).
\end{aligned}$$

Primetimo da je $\prod_{t \leqslant x} (G(x))_t^{x+1}$ jednak $H(x, G(x), S(x))$, gde je $H(x,y,z) = \prod_{t<z} (y)_t^{x+1}$ primitivno rekurzivna data ograničenim proizvodom. Dakle, $G(x)$ data je primitivnom rekuzijom. □

Ideja kodiranja može biti iskorišćena za dokaz primitivne rekurzivnosti i u opštijim situacijama. Npr. ako je $F(x, y+1)$ definisano koristeći vrednosti $F(x', y')$ za neke/sve $x' \leqslant x$ i $y' \leqslant y$. Ali i opštije.

(4.16) Zadatak. Dokazati da je funkcija definisana sa $F(x,0) = x^3 + 5$ i $F(x, y+1) = yF([x/2], y) + 2x$ primitivno rekurzivna.

Rešenje. Uočimo pomoćnu funkciju $G(t) = \langle\, F(\kappa_0(0), \kappa_1(0)),\, F(\kappa_0(1), \kappa_1(1)),\, \dots,\, F(\kappa_0(t), \kappa_1(t))\,\rangle$. Ako pokažemo da je ona primitivno rekurzivna, onda je i $F(x,y) = (G(\kappa(x,y)))_{\kappa(x,y)}$ primitivno rekurzivna. Za $G(t)$ imamo:

$$\begin{aligned}
G(0) &= \langle F(\kappa_0(0), \kappa_1(0)) \rangle \\
&= \langle F(0,0) \rangle \\
&= \langle 5 \rangle; \\
G(t+1) &= G(t) \circ F(\kappa_0(t+1), \kappa_1(t+1)) \\
&= \begin{cases} G(t) \circ F(\kappa_0(t+1), 0) & \kappa_1(t+1) = 0 \\ G(t) \circ F(\kappa_0(t+1), (\kappa_1(t+1) \dot{-} 1) + 1) & \kappa_1(t+1) > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} G(t) \circ (\kappa_0(t+1)^3 + 5) & \kappa_1(t+1) = 0 \\ G(t) \circ [(\kappa_1(t+1) \dot{-} 1) F([\kappa_0(t+1)/2], (\kappa_1(t+1) \dot{-} 1)) + 2\kappa_0(t+1)] & \kappa_1(t+1) > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} G(t) \circ (\kappa_0(t+1)^3 + 5) & \kappa_1(t+1) = 0 \\ G(t) \circ [(\kappa_1(t+1) \dot{-} 1)(G(t))_{\kappa(qt(\kappa_0(t+1),2), \kappa_1(t+1) \dot{-} 1)} + 2\kappa_0(t+1)] & \kappa_1(t+1) > 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Jasno je da je $G(t)$ data primitivnom rekuzijom, ali moramo da opravdamo zašto je

$$(G(t))_{\kappa(qt(\kappa_0(t+1),2), \kappa_1(t+1) \dot{-} 1)} = F([\kappa_0(t+1)/2], (\kappa_1(t+1) \dot{-} 1)),$$

tj. zašto je $\kappa(qt(\kappa_0(t+1),2),\kappa_1(t+1)\dot{-}1)\leqslant t$, odnosno $\kappa(qt(\kappa_0(t+1),2),\kappa_1(t+1)\dot{-}1)<t+1$. Ovo sledi jer $qt(\kappa_0(t+1),2)\leqslant\kappa_0(t+1)$ i $\kappa_1(t+1)\dot{-}1<\kappa_1(t+1)$, pa je $\kappa(qt(\kappa_0(t+1),2),\kappa_1(t+1)\dot{-}1)$ strogo manja od $\kappa(\kappa_0(t+1),\kappa_1(t+1))=t+1$; vidi komentar (4.9). $\square$

(4.17) Zadatak. Dokazati da je funkcija derfinisana sa $F(x,y,0)=x+y$ i $F(x,y,z+1)=F(x\dot{-}z,y\dot{-}x,z)$ primitivno rekurzivna.

Rešenje. Uopštavamo ideju iz prethodnog zadatka i posmatramo pomoćnu funkciju:

$$G(t)=\langle F(\kappa_0^3(0),\kappa_1^3(0),\kappa_2^3(0)),F(\kappa_0^3(1),\kappa_1^3(1),\kappa_2^3(1)),\ldots,F(\kappa_0^3(t),\kappa_1^3(t),\kappa_2^3(t))\rangle.$$

Ponovo, dovoljno je da dokažemo da je $G(t)$ primitivno rekurzivna, jer je onda i:

$$F(x,y,z)=(G(\kappa^3(x,y,z)))_{\kappa^3(x,y,z)}$$

primitivno rekurzivna. Za $G(t)$ imamo:

$$\begin{array}{rcl}
G(0) & = & \langle F(\kappa_0^3(0),\kappa_1^3(0),\kappa_2^3(0))\rangle\\
 & = & \langle F(0,0,0)\rangle\\
 & = & \langle 0\rangle;\\
G(t+1) & = & G(t)\circ F(\kappa_0^3(t+1),\kappa_1^3(t+1),\kappa_2^3(t+1))\\
 & = & \begin{cases} G(t)\circ F(\kappa_0^3(t+1),\kappa_1^3(t+1),0) & \kappa_3^3(t+1)=0\\ G(t)\circ F(\kappa_0^3(t+1),\kappa_1^3(t+1),(\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1)+1) & \kappa_3^3(t+1)>0\end{cases}\\
 & = & \begin{cases} G(t)\circ(\kappa_0^3(t+1)+\kappa_1^3(t+1)) & \kappa_3^3(t+1)=0\\ G(t)\circ F(\kappa_0^3(t+1)\dot{-}(\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1),\kappa_1^3(t+1)\dot{-}\kappa_0^3(t+1),\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1) & \kappa_3^3(t+1)>0\end{cases}\\
 & = & \begin{cases} G(t)\circ(\kappa_0^3(t+1)+\kappa_1^3(t+1)) & \kappa_3^3(t+1)=0\\ G(t)\circ(G(t))_{\kappa^3(\kappa_0^3(t+1)\dot{-}(\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1),\kappa_1^3(t+1)\dot{-}\kappa_0^3(t+1),\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1)} & \kappa_3^3(t+1)>0\end{cases}.
\end{array}$$

Jasno je da je $G(t)$ data primitivnom rekuzijom, pri čemu zbog poslednje jednakosti moramo da proverimo da $\kappa^3(\kappa_0^3(t+1)\dot{-}(\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1),\kappa_1^3(t+1)\dot{-}\kappa_0^3(t+1),\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1)\leqslant t$, odnosno $<t+1$. Kako je $\kappa_0^3(t+1)\dot{-}(\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1)\leqslant\kappa_0^3(t+1)$, $\kappa_1^3(t+1)\dot{-}\kappa_0^3(t+1)\leqslant\kappa_1^3(t+1)$ i $\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1<\kappa_2^3(t+1)$, $\kappa^3(\kappa_0^3(t+1)\dot{-}(\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1),\kappa_1^3(t+1)\dot{-}\kappa_0^3(t+1),\kappa_2^3(t+1)\dot{-}1)\leqslant t$ je strogo manje od $\kappa^3(\kappa_0^3(t+1),\kappa_1^3(t+1),\kappa_2^3(t+1))=t+1$ (vidi (4.9)). $\square$

Uočimo malo generalniju situaciju: neka je $H(x,y)$ definisano sa:

$$\begin{array}{rcl}
H(x,0) & = & F(x);\\
H(x,y+1) & = & G(x,y,H(K(x),y)),
\end{array}$$

gde su F, G i K primitivno rekurzivne. Tada je i H primitivno rekurzivna. Ako je $K(x)\leqslant x$, onda je to sitiuacija koju smo već videli i ideja kodiranja prolazi. Ako $K(x)$ nije obavezno $\leqslant x$, možemo da iskoristimo sledeći trik. Uočimo pomoćnu funkciju $\bar{H}(t,x,y)$ definisanu sa:

$$\begin{array}{rcl}
\bar{H}(t,x,0) & = & F(K^t(x));\\
\bar{H}(t,x,y+1) & = & G(K^{t\dot{-}(y+1)}(x),y,\bar{H}(t,x,y)).
\end{array}$$

Setite se da je $K^z(x)$ primitivno rekurzivna kao binarna funkcija (vidi (4.6)), pa je $\bar{H}$ data primitivnom rekurzijom. Sada nastavljamo u dva koraka: prvo dokažemo da za $t\geqslant y$ važi $(\forall u)$ $\hat{H}(t+u,x,y)=\bar{H}(t,K^u(x),y)$, a onda dokažemo da je $H(x,y)=\bar{H}(y,x,y)$, odakle sledi primitivna rekurzivnost funkcije H. Primer ovoga imamo u sledećem zadatku.

(4.18) Zadatak. Dokazati da je funkcija definisana sa $F(x,0)=x^3+1$ i $F(x,y+1)=3yF(2x,y)+2^x$ primitivno rekurzivna.

Rešenje. Pratimo opisani postupak. Uočimo pomoćnu funkciju datu sa:

$$\begin{aligned} G(t,x,0) &= (2^t x)^3 + 1; \\ G(t,x,y+1) &= 3yG(t,x,y) + 2^{2^{t \dot{-} (y+1)} x}. \end{aligned}$$

Funkcija G data je primitivnom rekurzijom.

Najpre dokazujemo da za $y \leqslant t$ važi $(\forall u)\ G(t+u,x,y) = G(t,2^u x,y)$. Ovo ćemo dokazati indukcijom po y. Za $y = 0$ treba da dokažemo da za $t \geqslant 0$, $(\forall u)\ G(t+u,x,0) = G(t,2^u x,0)$, tj. $(2^{t+u}x)^3 + 1 = (2^t 2^u x)^3 + 1$, što jasno važi za sve t i u.

Pretpostavimo da za $t \geqslant y$ važi $(\forall u)\ G(t+u,x,y) = G(t,2^u,y)$ i dokažimo za $t \geqslant y+1$ važi $(\forall u)\ G(t+u,x,y+1) = G(t,2^u x,y+1)$. Leva strana je:

$$G(t+u,x,y+1) = 3yG(t+u,x,y) + 2^{2^{(t+u) \dot{-} (y+1)} x},$$

a desna strana je:

$$G(t,2^u x,y+1) = 3yG(t,2^u x,y) + 2^{2^{t \dot{-} (y+1)} 2^u x}.$$

Sada ovi izrazi jesu jednaki jer $G(t+u,x,y) = G(t,2^u x,y)$ važi po indukcijskoj hipotezi, a $(t+u) \dot{-} (y+1) = (t \dot{-} (y+1)) + u$ jer $t \geqslant y+1$.

Konačno dokazujemo $F(x,y) = G(y,x,y)$, odakle zaključujemo primitivnu rekurzivnost funkcije F. Ponovo izvodimo dokaz indukcijom po y. Za $y = 0$ imamo (za svako x) $F(x,0) = x^3 + 1$, a $G(0,x,0) = (2^0 x)^3 + 1$, pa je baza indukcije ispunjena.

Pretpostavimo da $F(x,y) = G(y,x,y)$ važi za svako x i dokažimo $F(x,y+1) = G(y+1,x,y+1)$ za svako x. Imamo:

$$\begin{aligned} G(y+1,x,y+1) &= 3yG(y+1,x,y) + 2^{2^0 x} \\ &= 3yG(y,2x,y) + 2^x \\ &= 3yF(2x,y) + 2^x \\ &= F(x,y+1), \end{aligned}$$

gde prva i poslednja jednakost važe po definiciji, druga prema prvom koraku i treća prema indukcijskoj hipotezi. □

5 Rekurzivne i izračunljive funkcije

A. Parcijalno rekurzivne funkcije

Sada ćemo samo uvesti familiju parcijalno rekurzivnih funkcija. Njihovo izučavanje ćemo nastaviti kasnije.

(5.1) Parcijalno rekurzivne funkcije. Familija parcijalno rekurzivnih funkcija je najmanja familija $\mathcal{R}$ koja sadrži sve osnovne funkcije (vidi (1.2)) i zatvorena je za definiciju kompozicijom (1.3), definiciju primitivnom rekurzijom (1.4) i definiciju minimizacijom (1.5). Alternativno, možemo definisati rastući niz familija funkcija $(\mathcal{R}_n)_{n<\infty}$ sa $\mathcal{R}_0$ su osnovne funkcije i:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{n+1} &= \mathcal{R}_n \cup \{F(G_0,\dots,G_{l-1}) \mid F,G_0,\dots,G_{l-1} \in \mathcal{R}_n \text{ i } F(G_0,\dots,G_{l-1}) \text{ je definisana}\} \\ &\cup \ \{rec(F,G) \mid F,G \in \mathcal{R}_n \text{ i } rec(F,G) \text{ je definisana}\} \\ &\cup \ \{(\mu y)\ F(\bar{x},y) = 0 \mid F(\bar{x},y) \in \mathcal{R}_n\}. \end{aligned}$$

Tada je $\mathcal{R} = \bigcup_{n<\infty} \mathcal{R}_n$. Dakle, funkcija F je parcijalno rekurzivna ako je možemo izgraditi u konačno mnogo koraka od osnovnih funkcija koristeći definiciju kompozicijom, primitivnom rekurzijom i minimizacijom. Ako $F \in \mathcal{R}$, složenost od F je najmanje n takvo da $F \in \mathcal{R}_n$.

Ako je $F \in \mathcal{R}$ i totalna funkcija, onda za nju kažemo da je rekurzivna. Kako je karakteristična funkcija uvek totalna, skup nazivamo rekurzivnim ako mu je karakteristična funkcija rekurzivna.

(5.2) Komentar. Direktno iz definicija vidimo da su primitivno rekurzivne funkcije i rekurzivne.

Sledeća laka lema će biti često korišćena.

(5.3) Lema. Neka je $F(\bar{x})$ parcijalno rekurzivna funkcija i $R(\bar{x}, y)$ rekurzivna relacija. Tada je funkcija definisana sa:

$$G(\bar{x}) = \begin{cases} F(\bar{x}) & (\exists y)\, R(\bar{x}, y) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

parcijalno rekurzivna. Opštije, ako je $F(\bar{x})$ parcijalno rekurzivna funkcija i $R(\bar{x}, \bar{y})$ rekurzivna relacija, onda je funkcija definisana sa:

$$G(\bar{x}) = \begin{cases} F(\bar{x}) & (\exists \bar{y})\, R(\bar{x}, \bar{y}) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

parcijalno rekurzivna.

Dokaz. Prvi deo sledi lako jer možemo da primetimo da je $G(\bar{x}) \simeq F(\bar{x}) + 0 \cdot (\mu y)\, R(\bar{x}, y)$, a funkcija na desnoj strani je jasno parcijalno rekurzivna.

Drugi deo sledi iz prvog primenom trika kodiranja. Naime, neka je k dužina od $\bar{y}$ i neka je $R'(\bar{x}, z)$ definisan sa $R(\bar{x}, \kappa_0^k(z), \dots, \kappa_{k-1}^k(z))$. Tada je $R(\bar{x}, \bar{y})$ ekvivalentno sa $R'(\bar{x}, \kappa^k(\bar{y}))$, pa je i $(\exists \bar{y})\, R(\bar{x}, \bar{y})$ ekvivalentno sa $(\exists z)\, R'(\bar{x}, z)$, a relacija R' je jasno rekurzivna. □

B. Registarska mašina

(5.4) Registarska mašina. Registerska mašina sastoji se od beskonačnog niza registara koje označavamo sa $R_1, R_2, R_3, \dots$ Svaki registar sadrži proizvoljno veliki prirodan broj. Mašina menja sadržaj registara izvršavanjem programa. Program P je konačan niz, možda i prazan, naredbi $(N_0, \dots, N_{k-1})$. Izvrašavanje programa uvek počinje izvršavanjem naredbe N_0, ako ona postoji. Svaka naredba je jednog od sledeća dva oblika:

- $R_i^+(m)$: ova naredba uvećava sadržaj registra R_i za 1 i poziva izvršavanje naredbe N_m;
- $R_i^-(m, n)$: ova naredba radi sledeće:
  - •• ako je sadržaj registra R_i pozitivan, njegov sadržaj smanjuje se za 1 i poziva se izvršavanje naredbe N_m;
  - •• ako je sadržaj registra R_i nula, samo se poziva izvršavanje naredbe N_n.

Izvršavanje programa P se prekida ako je pozvana naredba N_m za neko $m \geqslant k$, tj. naredba koja ne postoji u programu. Specijalno, ako je P prazan program, pozivom naredbe N_0 na početku, izvršavanje se odmah završava.

(5.5) Primeri.

1. Program P koji ima jednu naredbu $N_0: \ R_i^+(0)$ u svakom koraku izvršavanja povećava sadržaj registra R_i za 1 i poziva ponovo izvršavanje iste naredbe. Dakle, ovo izvršavanje nikada se ne završava.

2. Program P koji ima jednu naredbu $N_0: \ R_i^-(0, 1)$ „prazni" registar R_i, tj. postavlja sadržaj registra R_i na nula i završava izvršavanje.

3. Program P:

   $N_0: \ R_i^-(1, 2)$
   $N_1: \ R_j^+(0)$

   prebacuje sadržaj registra R_i na sadržaj registra R_j; na kraju izvršavanja u R_i je nula, a u R_j zbir sadržaja R_i i R_j.

4. Program P:

   $N_0: \ R_j^-(0, 1)$
   $N_1: \ R_t^-(1, 2)$

$N_2:\ R_i^-(3,5)$
$N_3:\ R_j^+(4)$
$N_4:\ R_t^+(2)$
$N_5:\ R_t^-(6,7)$
$N_6:\ R_i^+(5)$

najpre prazni registre R_j i R_t, onda prebacuje sadržaj registra R_i u oba registra R_j i R_t, i na kraju prebacuje sadržaj registra R_t u R_i. Ovim postupkom na kraju izvršavanja registar R_i ima isti sadržaj kao na početku izvršavanja, a registar R_j sadrži vrednost iz R_i sa početka izvršavanja. U ovom programu smo koristili R_t kao pomoćni registar.

5. Program P:

$N_0:\ R_3^-(0,1)$
$N_1:\ R_4^-(1,2)$
$N_2:\ R_1^-(3,4)$
$N_3:\ R_3^+(2)$
$N_4:\ R_2^-(5,10)$
$N_5:\ R_3^-(6,8)$
$N_6:\ R_1^+(7)$
$N_7:\ R_4^+(5)$
$N_8:\ R_4^-(9,4)$
$N_9:\ R_3^+(8)$

postavlja u R_1 proizvod sadržaja registara R_1 i R_2 sa početka izvršavanja. Razjasnite postupak.

(5.6) Maksimalan indeks. Kako je svaki program konačan niz naredbi, a svaka naredba menja sadržaj samo jednog registra, izvršavanje programa menja samo konačno mnogo registara. Sa $\mathfrak{m}(P)$ označavamo maksimalan indeks registra koji se menja prilikom izvršavanja programa P. Primetimo da za izvršavanje programa P registri R_i, $i > \mathfrak{m}(P)$, nisu značajni.

Neka je P program, $m = \mathfrak{m}(P)$ i $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$. Sa $P(a_1, \dots, a_m)\downarrow$ označavamo da se izvršavanje programa P za ulaz $a_1, \dots, a_m$ u registrima $R_1, \dots, R_m$ završava. U suprotnom pišemo $P(a_1, \dots, a_m)\uparrow$.

(5.7) Izračunavanje. Neka je P program i $m = \mathfrak{m}(P)$. Izračunavanje programa P je niz, konačan ili beskonačan, $(m+1)$-torki $(x_0^k, x_1^k, \dots, x_m^k)$, za $k < d \leqslant \infty$, gde za svako $k < d$ x_0^k označava broj naredbe koja se izvršava u k-tom koraku, a $(x_1^k, \dots, x_m^k)$ je stanje u registrima $R_1, \dots, R_m$ u k-tom koraku. Broj $d \leqslant \infty$ je dužina izračunavanja.

Izračunavanje programa P za ulaz $(a_1, \dots, a_m)$ dato je sa:

- $(x_0^0, x_1^0, \dots, x_m^0) = (0, a_1, \dots, a_m)$ – na početku izračunavanja izvršava se nulta naredba, a stanje u registrima je $(a_1, \dots, a_m)$;
- ako je x_0^k-ta naredba oblika $R_i^+(n)$, onda je:
$$(x_0^{k+1}, x_1^{k+1}, \dots, x_i^{k+1}, \dots, x_m^{k+1}) = (n, x_1^k, \dots, x_i^k + 1, \dots, x_m^k);$$
- ako je x_0^k-ta naredba oblika $R_i^-(n', n'')$ i $x_i^k > 0$, onda je:
$$(x_0^{k+1}, x_1^{k+1}, \dots, x_i^{k+1}, \dots, x_m^{k+1}) = (n', x_1^k, \dots, x_i^k - 1, \dots, x_m^k);$$
- ako je x_0^k-ta naredba oblika $R_i^-(n', n'')$ i $x_i^k = 0$, onda je:
$$(x_0^{k+1}, x_1^{k+1}, \dots, x_i^{k+1}, \dots, x_m^{k+1}) = (n'', x_1^k, \dots, x_i^k = 0, \dots, x_m^k);$$
- ako x_0^k-ta naredba ne postoji, onda je $d < \infty$ i $k = d - 1$.

Jasno je da $P(a_1, \dots, a_m) \downarrow$ akko $d < \infty$.

(5.8) Primer. Zapišimo izračunavanje programa P:

$$\begin{array}{lcl} N_0 & : & R_1^-(1,2) \\ N_1 & : & R_2^+(0) \end{array}$$

za ulaz $(3,4)$ (primetite da je $\mathfrak{m}(P) = 2$). Izračunavanje je sledeći niz:

$$\begin{array}{c} (0,3,4) \\ (1,2,4) \\ (0,2,5) \\ (1,1,5) \\ (0,1,6) \\ (1,0,6) \\ (0,0,7) \\ (2,0,7) \end{array}$$

C. Izračunljive funkcije

(5.9) Izračunljiva funkcija. Parcijalna k-arna aritmetička funkcija F je izračunljiva ako postoji program P tako da:

- $m = \mathfrak{m}(P) \geqslant k$;
- ako $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in Dom(F)$ onda $P(a_0, \dots, a_{k-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-k}) \downarrow$ i na kraju izračunavanja u registru R_1 se nalazi rezultat $F(a_0, \dots, a_{k-1})$;
- ako $(a_0, \dots, a_{k-1}) \notin Dom(F)$ onda $P(a_0, \dots, a_{k-1}, 0, \dots, 0) \uparrow$.

(5.10) Komentar. Neka je F izračunljiva k-arna funkcija i $D \subseteq Dom(F)$. Funkcija G definisana sa:

$$G(\bar{x}) = \begin{cases} F(\bar{x}) & \bar{x} \in D \\ \uparrow & \bar{x} \notin D \end{cases},$$

nije obavezno izračunljiva, iako postoji program koji izračunava $F(\bar{x})$ za $\bar{x} \in D$. Razlog za to je što mora da postoji program čija se izračunavanja ne završavaju za $\bar{x} \notin D$.

(5.11) Zadatak. Dokazati da je funkcija:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ je paran} \\ \uparrow & x \text{ je neparan} \end{cases}$$

izračunljiva.

Rešenje. Program koji računa F je dat sa:

$$\begin{array}{lcl} N_0 & : & R_1^-(1,3) \\ N_1 & : & R_1^-(0,2) \\ N_2 & : & R_1^+(2) \end{array}$$

Neka je $a = 2b + \varepsilon$, gde je $\varepsilon \in \{0,1\}$, ulaz. U prvih $2b$ koraka pozivamo naizmenično naredbe N_0 i N_1 i smanjujemo stanje registra R_1 za po 1. Na kraju ovog dela izračunavanja u registru R_1 je ε. Sledeća naredba koja se izvršava je N_0. Ako je $\varepsilon = 0$, broj a je paran, u registru R_1 je $\varepsilon = 0$ i program se završava. Ako je $\varepsilon = 1$, tj. a je neparan, stanje u R_1 smanjuje se na 0 i poziva se naredba N_1, koja poziva naredbu N_2, tj. program ulazi u beskonačnu petlju, pa se izvršavanje ne završava. □

(5.12) Lema. Osnovne funkcije (1.2) su izračunljive.

Dokaz. Konstanta 0 i $Z(x)$ su izračunljive jer ih računa program $N_0: R_1^-(0,1)$ (program koji prazni registar R_1). Funkcija sledbenika $S(x)$ je izračunljiva jer je računa program $N_0: R_1^+(1)$ (samo uvećavamo registar R_1 za 1). Funkciju Π_k^n, za $0 < k < n$, računa program:

$$\begin{aligned} N_0 &: R_{n+1}^+(1) \\ N_1 &: R_1^-(1,2) \\ N_2 &: R_{k+1}^-(3,4) \\ N_3 &: R_1^+(2) \end{aligned}$$

Argumenti funkcije $(a_0,\dots,a_k,\dots,a_{n-1})$ na početku se nalaze u registrima $R_1,\dots,R_n$. Kako je $k > 0$, ideja je da ispraznimo registar R_1, pa da onda prebacimo sadržaj registra R_{k+1} (to je baš a_k) u registar R_1. To rade naredbe $N_1 - N_3$. Naredba N_0 je tu samo iz formalnih razloga da bi $\mathfrak{m}(P)$ bilo $\geqslant n$; primetite da ona ne menja prvih n registara gde su argumenti naše funkcije.

Konačno, funkciju Π_0^n računa program $N_0: R_{n+1}^+(1)$, tj. traženi rezultat se već nalazi u registru R_1, pa imamo samo jednu naredbu koja nam je formalno potrebna da bi $\mathfrak{m}(P)$ bilo $\geqslant n$. □

(5.13) Lema. Familija izračunljivih funkcija zatvorena je za definiciju kompozicijom (1.3).

Dokaz. Pretpostavimo da je $H = F(G_0,\dots,G_{l-1})$, gde su $F, G_0,\dots,G_{l-1}$ izračunljive funkcije. Neka su $G_0,\dots,G_{l-1}$ k-arne, neka P računa F, a $Q_0,\dots,Q_{l-1}$ računaju redom $G_0,\dots,G_{l-1}$. Neka je m maksimum $\{\mathfrak{m}(P), \mathfrak{m}(Q_0),\dots,\mathfrak{m}(Q_{l-1})\}$. Neka je $\bar{a}$ niz dužine k (možda je i prazan). Posmatrajmo program koji izvodi sledeće izračunavanje, i računa H (prvo polje prati prvih m registara):

ulaz:	$\bar{a}\ \bar{0}$	$\bar{0}$
postavi:	$\bar{a}\ \bar{0}$	$\bar{a}$
primeni Q_0:	$b_0 \cdots$	$\bar{a}$
postavi:	$\bar{a}\ \bar{0}$	$\bar{a}\ b_0$
primeni Q_1:	$b_1 \cdots$	$\bar{a}\ b_0$
postavi:	$\bar{a}\ \bar{0}$	$\bar{a}\ b_0 b_1$
$\vdots$		
primeni Q_{l-1}:	$b_{l-1} \cdots$	$\bar{a}\ b_0 b_1 \dots b_{l-2}$
postavi:	$b_0 b_1 \cdots b_{l-1}\ \bar{0}$	$\cdots$
primeni P:	$c \cdots$	$\cdots$

Jasno je da se program koji vrši prethodno izračunavanje može napisati. Primetimo da je $b_i = G_i(\bar{a})$, za svako $i < l$, i $c = F(b_0,\dots,b_{l-1})$; prema tome $c = H(\bar{a})$. Takodje primetimo da $\bar{a} \in Dom(H)$ akko se prethodno izračunavanje završava za $\bar{a}$. □

(5.14) Lema. Familija izračunljivih funkcija zatvorena je za definiciju primitivnom rekurzijom (1.4).

Dokaz. Pretpostavimo da je $H = rec(F, G)$, gde su F i G izračunljive, redom k-arna i $(k+2)$-arna funkcija. Neka P i Q računaju F i G, i neka je m maksimum $\{\mathfrak{m}(P), \mathfrak{m}(Q)\}$. Neka je $\bar{a}$ niz dužine k (možda prazan) i b jedan element. Posmatrajmo program koji izvodi deleće izračunavanje, i računa H (prvo polje prati prvih m registara, drugo registar R_{m+1}, i treće registar R_{m+2}):

ulaz:	$\bar a\ b\ \bar 0$	0	0	$\bar 0$	
postavi:	$\bar a\ \bar 0$	b	0	$\bar a$	
primeni P:	$c_0\ \cdots$	b	0	$\bar a$	
	$c_u\ \cdots$	$b-u$	u	$\bar a$	radna konfiguracija u petlji
$N_n:\ R^-_{m+1}(n+1,l)$:	$c_u\ \cdots$	$b-u-1$	u	$\bar a$	while petlja
postavi:	$\bar a\ u\ c_u\ \bar 0$	$b-u-1$	$u+1$	$\bar a$	
primeni Q:	$c_{u+1}\ \cdots$	$b-u-1$	$u+1$	$\bar a$	i idi na N_n

pri čemu N_l ne postoji. Jasno je da se prethodni program može napisati. Primetimo da je $c_0 = F(\bar a)$ i $c_{u+1} = G(\bar a, u, c_u)$, tj. vidimo da je $c_u = H(\bar a, u)$. Program se završava pozivom naredbe N_l u trenutku kada je $b-u=0$, tj. $u=b$, i u registru R_1 se nalazi $c_u = c_b = H(\bar a, b)$. Takodje, nije teško videti da $(\bar a, b) \in Dom(H)$ akko se prethodno izračunavanje završava za $(\bar a, b)$. □

(5.15) Lema. Familija izračunljivih funkcija zatvorena je za definiciju minimizacijom (1.5).

Dokaz. Pretpostavimo da je $H(\bar x) = (\mu y)\ F(\bar x, y) = 0$, gde je F izračunljiva $(k+1)$-arna funkcija. Neka P računa F i neka je $m = \mathfrak{m}(P)$. Neka je $\bar a$ niz dužine k (možda prazan). Posmatrajmo program koji izvodi sledeće izračunavanje, i računa H (prvo polje prati prvih m registara, a drugo registar R_{m+1}):

ulaz:	$\bar a\ \bar 0$	0	$\bar 0$	
postavi:	$\bar a\ 0\ \bar 0$	0	$\bar a$	
primeni P:	$b_0\ \cdots$	0	$\bar a$	
	$b_u\ \cdots$	u	$\bar a$	radna konfiguracija u petlji
$N_n:\ R^-_1(n+1,l)$	$b_u-1\ \cdots$	u	$\bar a$	while petlja
postavi:	$\bar a\ u+1\ \bar 0$	$u+1$	$\bar a$	
primeni P:	$b_{u+1}\ \cdots$	$u+1$	$\bar a$	i idi na N_n
N_l : postavi	$u\ \cdots$	u	$\bar a$	

Jasno je da se program koji vrši prethodno izračunavanje može napisati. Primetimo da je $b_u = F(\bar a, u)$. Naredba N_l biće pozvana prvom prilikom kada u rednoj konfiguraciji imamo $b_u = 0$, prema tome $H(\bar a) = u$. Takodje, jasno je da $\bar a \in Dom(H)$ akko se prethodno izračunavanja završava za $\bar a$. □

Prema prethodne četiri leme direktno imamo sledeću teoremu.

(5.16) Teorema. Parcijalno rekurzivne funkcije su izračunljive. Specijalno, primitivno rekurzivne funkcije su izračunljive. □

Sledeći cilj nam je da pokažemo i obrat prethodne teoreme, tj. dokazaćemo da su izračunljive funkcije parcijalno rekurzivne.

D. Kodiranje programa

(5.17) Kodiranje naredbi. Svim naredbama dodeljujemo njihov kod. Naredbi $R^+_i(m)$ dodeljujemo kod $\langle i, m\rangle$, a naredbi $R^-_i(m,n)$ dedeljujemo kod $\langle i, m, n\rangle$. Jasno je da je svaka naredba jedinstveno odredjena svojim kodom. Sa $Nar \subseteq \mathbb{N}$ označimo skup svih z koji su kodovi neke naredbe. Primetimo da je skup Nar primitivno rekurzivan. Zaista, $Nar(z)$ akko ($\ell(z) = 2$ ili $\ell(z) = 3$) i $(z)_0 > 0$, pa je:

$$\chi_{Nar}(z) = [\chi_=(\ell(z), 2) + \chi_=(\ell(z), 3)] \cdot sg(z),$$

gde je funkcija na desnoj strani jasno primitivno rekurzivna.

(5.18) Kodiranje programa. Programu $P = (N_0, \ldots, N_{l-1})$ dodeljujemo kod $\langle z_0, \ldots, z_{l-1} \rangle$. Jasno je da se svaki program odredjen svojim kodom. Sa $Prog \subseteq \mathbb{N}$ označimo skup svih e koji su kodovi nekog programa. Primetimo da je $Prog$ primitivno rekurzivan. Zaista, $Prog(e)$ akko $(\forall i < \ell(e))\ (e)_i \in Nar$, pa imamo:

$$\chi_{Prog}(e) = \prod_{i < \ell(e)} \chi_{Nar}((e)_i).$$

Nije teško videti da je ograničen proizvod na desnoj strani primitivno rekurzivna funkcija.

Dalje primetimo da je funkcija definisana sa:

$$\mathfrak{m}(e) = \begin{cases} \mathfrak{m}(P) & \text{ako je } e \text{ kod programa } P \\ 0 & \text{ako } e \notin Prog \end{cases}$$

primitivno rekurzivna. (Primetite dvostruku upotrebu oznake $\mathfrak{m}$ što ne bi trebalo da stvara nejasnoće.) Da bismo opravdali primitivnu rekurzivnost, posmatrajmo pomoćnnu funkciju $F(e,t)$ definisanu primitivnom rekurzijom sa:

$$\begin{aligned} F(e,0) &= 0; \\ F(e,t+1) &= \max(F(e,t), ((e)_t)_0). \end{aligned}$$

Ako je e kod programa, onda je $((e)_t)_0$ indeks registra koji menja naredba $(e)_t$, pa $F(e, \ell(e))$ baš daje maksimalan indeks registra koji menja program sa kodom e. Dakle, $\mathfrak{m}(e) = \chi_{Prog}(e) \cdot F(e, \ell(e))$ je primitivno rekurzivna.

(5.19) Kodiranje izračunavanja. Neka je P program, $m = \mathfrak{m}(P)$ i neka je $(x_0^k, x_1^k, \ldots, x_m^k)_{k<d}$ izračunavanje programa P koje se završava (dakle, $d < \infty$; vidi (5.7)). Kod koraka k, $(x_0^k, x_1^k, \ldots, x_m^k)$, je $\hat{x}^k = \langle x_0^k, x_1^k, \ldots, x_m^k \rangle$, a kod celog izračunavanja je $\langle \hat{x}^0, \ldots, \hat{x}^{d-1} \rangle$. Jasno je da je izračunavanje jedinstveno odredjeno svojim kodom. Sa $Izr \subseteq \mathbb{N}^2$ označimo skup svih parova (e,y), gde je e kod nekog programa P, a y je kod nekog izračunavanja programa P koje se završava. Tvrdimo da je Izr primitivno rekurzivan. Primetimo da $Izr(e,y)$ akko važe sledeći uslovi:

- e je kod programa, tj. $Prog(e)$;
- y je kod nepraznog niza, tj. $\ell(y) > 0$;
- svi članovi niza čiji je kod y su kodovi nizova dužine $\mathfrak{m}(e)+1$, tj. $(\forall k < \ell(d))\ \ell((y)_k) = \mathfrak{m}(e) + 1$;
- na početku izračunavanja izvršava se naredba N_0, tj. $((y)_0)_0 = 0$;
- na kraju izračunavanja pozvana je naredba N_n za neko $n \geqslant \ell(e)$, tj. $((y)_{\ell(y) \dot{-} 1})_0 \geqslant \ell(e)$;
- u svim koracima izračunavanja, sem poslednjeg, izvršava se naredba N_n za neko $n < \ell(e)$, tj. $(\forall k < \ell(y) \dot{-} 1)\ ((y)_k)_0 < \ell(e)$;
- u svakom koraku k, sem poslednjem, tj. $(\forall k < \ell(y) \dot{-} 1)$, kontrolišemo stanje u registrima u koraku $k+1$:
  - •• ako $\ell((e)_{((y)_k)_0}) = 2$, u koraku k izvršava se $R^+_{((e)_{((y)_k)_0})_0}(((e)_{((y)_k)_0})_1)$, pa:

    $$((y)_{k+1})_0 = ((e)_{((y)_k)_0})_1 \ \wedge\ (\forall i < \mathfrak{m}(e))\ ((y)_{k+1})_{i+1} = ((y)_k)_{i+1} + \chi_=(i+1, ((e)_{((y)_k)_0})_0);$$

  - •• ako $\ell((e)_{((y)_k)_0}) = 3$, u koraku k izvršava se $R^-_{((e)_{((y)_k)_0})_0}(((e)_{((y)_k)_0})_1, ((e)_{((y)_k)_0})_2)$, pa:

    $$(\forall i < \mathfrak{m}(e))\ ((y)_{k+1})_{i+1} = ((y)_k)_{i+1} \dot{-} \chi_=(i+1, ((e)_{((y)_k)_0})_0) \quad \text{i:}$$

••• ako $((y)_k)_{((e)_{((y)_k)_0})_0} > 0$, onda $((y)_{k+1})_0 = ((e)_{((y)_k)_0})_1$;
••• ako $((y)_k)_{((e)_{((y)_k)_0})_0} = 0$, onda $((y)_{k+1})_0 = ((e)_{((y)_k)_0})_2$.

Primetimo da je svaka od stavki primitivno rekurzivna (data već poznatim primitivno rekurzivnim funkcijama i skupovima, ograničenom univerzalnom kvantifikacijom i primitivno rekurzivnim razdvajanjem po slučajevima), pa je i njihova konjunkcija primitivno rekurzivna, tj. Izr jeste primitivno rekurzivan.

(5.20) Klinijev predikat T. Definišimo $T(k,e,x,y)$ akko je e kod programa, a y je kod njegovog izračunavanja koje se završava za ulaz $(\kappa_0^k(x)\ldots,\kappa_{k-1}^k(x),\underbrace{0,\ldots,0}_{\mathfrak{m}(e)-k})$. Prema tome $T(k,e,x,y)$ je ekvivalentno sa $Izr(e,y)$ (primetite da ovo već polači $Prog(e)$) i:

$$(\forall i<k)\ ((y)_0)_{i+1} = \kappa_i^k(x)\ \land\ (\forall i<\mathfrak{m}(e)\dot{-}k)\ ((y)_0)_{i+k+1} = 0,$$

što opisuje ulaz u izračunavanje. Setite se da je $\kappa_v^u(w)$ primitivno rekurzivna kao ternarna funkcija (4.7), pa nije teško videti da je prethodno opisana relacija primitivno rekurzivna. Prema tome i T je primitivno rekurzivni predikat.

(5.21) Klinijeva funkcija izlaza U. Označimo sa $U(y) = ((y)_{\ell(y)-1})_1$. Funkcija $U(y)$ očigledno je primitivno rekurzivna. Primetimo da za slučaj da je y kod izračunavanja koje se završava, $U(y)$ je stanje registra R_1 na kraju tog izvršavanja.

(5.22) Funkcija enumeracije Φ. Definišemo funkciju $\Phi(k,e,x) = U((\mu y)\ T(k,e,x,y))$. Primetimo da ovde $(\mu y)\ T(k,e,x,y)$ znači $(\mu y)\ \bar{\chi}_T(k,e,x,y) = 0$. Funkcija Φ očigledno je parcijalno rekurzivna. $\Phi(k,e,x)$ vraća sadržaj registra R_1 na kraju izračunavanja programa sa kodom e za ulaz kodiran sa x, ako se takvo izračunavanje završava. U suprotnom, ako e ne kodira program ili se izvršavanje za ulaz x ne završava, $\Phi(k,e,x)$ nije definisano.

(5.23) Teorema.

1. Funkcija F je parcijlano rekurzivna akko je izračunljiva.
2. Za svaku k-arnu parcijalno rekurzivnu funkciju F postoji e tako da:

$$F(x_0,\ldots,x_{k-1}) = \Phi(k,e,\kappa^k(x_0,\ldots,x_{k-1}))$$

za sve $x_0,\ldots,x_{k-1}$.

Dokaz. 1. Smer ($\Rightarrow$) već smo dokazali. Za ($\Leftarrow$), neka je F izračunljiva k-arna funkcija, i neka je P program koji je izračunava. Neka je e kod programa P. Prema definicji izračunljive funkcije i funkcije enumeracije Φ direktno vidimo $F(x_0,\ldots,x_{k-1}) = \Phi(k,e,\kappa^k(x_0,\ldots,x_{k-1}))$ za sve $x_0,\ldots,x_{k-1}$, pa je F jasno parcijalno rekurzivna.

2. Prema 1. i dokazu dela 1. dovoljno je da uzmemo za e kod programa koji izračunava F. □

(5.24) Komentar. U delu 2. iz prethodne teoreme važi i više: Za svaku k-arnu rekurzivnu funkciju F postoji beskonačno mnogo e tako da:

$$F(x_0,\ldots,x_{k-1}) = \Phi(k,e,\kappa^k(x_0,\ldots,x_{k-1}))$$

za sve $x_0,\ldots,x_{k-1}$. Naime, dovoljno je da primetimo da za svaku izračunkljivu funkciju F postoji beskonačno mnogo programa koji je izračunavaju. Zaista, ako je P program koji računa F, možemo da ga modifikujemo tako što ćemo da mu dodamo na kraju naredbe $N_{\mathfrak{m}(P)+i}:\ R_2^+(\mathfrak{m}(P)+i+1)$ za $i<n$, gde je n proizvoljno veliki broj. Ovakav program posle izračunavanja F, i smeštanja rezultata u R_1, besmisleno dodaje (najviše) n jedinica u registar R_2. Tim postupkom rezultat nije narušen, tj. i ovakav program računa F. Za različite n-ove, programi su formalno različiti i imaju različite kodove.

(5.25) Enumeracija parcijalno rekurzivnih funkcija. Sa $\phi_e^{(k)}$ označavamo k-arnu funkciju $\Phi(k,e,\kappa^k(x_0,\ldots,x_{k-1}))$. Broj e zove se Gedelov indeks funkcije $\phi_e^{(k)}$. Prema teoremi o enumeraciji svaka parcijalno rekurzivna funkcija ima svoj indeks, zapravo beskonačno mnogo indeksa. Umesto $\phi_e^{(k)}(x_0, \ldots, x_{k-1})$ pisaćemo kraće $e \cdot (x_0, \ldots, x_{k-1})$.

Domen funkcije $\phi_e^{(k)}$ označavaćemo sa $W_e^{(k)}$, a $Ran(F)$[2] sa $E_e^{(k)}$. U slučaju $k = 1$ pisaćemo ϕ_e, W_e, E_e umesto $\phi_e^{(1)}, W_e^{(1)}, E_e^{(1)}$.

E. S_n^m-teorema i teoreme o rekurziji

(5.26) Normalizacija programa. Neka je P program $(N_0, \ldots, N_{k-1})$. Po definiciji, izvršavanje programa P završava se ako je pozvana naredba N_n za neko $n \geqslant k$. Program P možemo malo da promenimo do programa P' tako da P i P' imaju isti tok izračunavanja, ali razalog za prekid izvršavanja programa P' je poziv naredbe N_k. Naime, dovoljno je da svaku naredbu N_j oblika $R_i^+(m)$ zamenimo sa N_j': $R_i^+(\min(m,k))$ (dakle, ako je $m < k$ ne menjamo naredbu, a ako je $m \geqslant k$, izlaz iz programa pozivom m-te naredbe menjamo izlazom pozivom k-te naredbe), i slično naredbu N_j oblika $R_i^-(m,n)$ zamenimo sa N_j': $R_i^-(\min(m,k), \min(n,k))$. Tada je $P' = (N_0', \ldots, N_{k-1}')$ traženi program. Program P' nazivamo normalizacijom programa P.

Bitno nam je da postoji primitivno rekurzivna funkcija $norm(e)$ koja vraća kod normalizacije programa sa kodom e, ako je e kod programa. Naime, najpre možemo da posmatramo funkciju:

$$F(x,k) = \begin{cases} \langle (x)_0, \min((x)_1, k)\rangle & \ell(x) = 2 \\ \langle (x)_0, \min((x)_1, k), \min((x)_2, k) & \ell(x) = 3 \\ x & \text{inače} \end{cases}$$

koja je jasno primitivno rekurzivna. Dalje, primitivnom rekurzijom definišemo $G(e,k,t)$ sa:

$$\begin{aligned} G(e,k,0) &= \langle\rangle = 0; \\ G(e,k,t+1) &= G(e,k,t) \circ F((e)_t, k), \end{aligned}$$

pa jedna tražena funkcija $norm(e)$ može biti $G(e, \ell(e), \ell(e))$. (Razjasnite detalje!)

(5.27) Kompozicija programa. Neka su $P = (N_0, \ldots, N_{k-1})$ i $Q = (M_0, \ldots, M_{l-1})$ programi. Kompozicija programa QP je program $(K_0, \ldots, K_{k-1}, K_k, \ldots, K_{k+l-1})$, gde je $(K_0, \ldots, K_{k-1})$ normalizacija P' programa P, a naredbe K_{k+j} su naredbe M_j izmenjene na sledeći način: ako je M_j oblika $R_i^+(m)$, onda je K_{k+j} naredba $R_i^+(k+m)$, a ako je M_j oblika $R_i^-(m,n)$, onda je K_{k+j} naredba $R_i^-(k+m, k+n)$. Lako je videti da program QP menja mašinu isto kao da najpre pokrenemo program P, a onda posle njegovog izvršavanja pokrenemo program Q. Program QP nazivamo kompozicijom program P i Q.

Bitno nam je da postoji primitivno rekurzivna funkcija $comp(e,f)$ koja vraća kod kompozicije QP ako je e kod programa P, a f kod programa Q. Posmatrajmo funkciju:

$$F(x,k) = \begin{cases} \langle (x)_0, k + (x)_1\rangle & \ell(x) = 2 \\ \langle (x)_0, k + (x)_1, k + (x)_2\rangle & \ell(x) = 3 \\ x & \text{inače} \end{cases}$$

koja je jasno primitivno rekurzivna. Primitivnom rekurzijom definišemo $G(f,k,t)$ sa:

$$\begin{aligned} G(f,k,0) &= \langle\rangle = 0; \\ G(f,k,t+1) &= G(f,k,t) \circ F((f)_t, k), \end{aligned}$$

pa možemo definisati $comp(e,f) = norm(e) * G(f, \ell(e), \ell(f))$. (Razjasnite detalje!)

Nije teško videti da je kompozicija programa asocijativna, tj. važi $P_1(P_2P_3) = (P_1P_2)P_3$, pa ćemo u ovom slučaju pisati samo $P_1P_2P_3$, i opštije $P_1P_2\ldots P_m$. Defnišemo rekurzivno m-arne funkcije $comp^m$, $m \geqslant 2$, sa:

$$\begin{aligned} comp^2(e_1, e_2) &= comp(e_1, e_2); \\ comp^{m+1}(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}) &= comp(comp^m(e_1, \ldots, e_m), e_{m+1}). \end{aligned}$$

[2] $Ran(F)$ je slika $F[Dom(F)]$; oznaka Ran potiče od reči ,,range".

Indukcijom lako da vidimo da $comp^m(e_1, \dots, e_m)$ vraća kod kompozicije $P_m \dots P_1$ u slučaju da su $e_1, \dots, e_m$ kodovi programa $P_1, \dots, P_m$. Takodje, sve $comp^m$ su primitivno rekurzivne.

(5.28) Lema. Neka $m, n \geqslant 1$. Postoji $(m+1)$-arna primitivno rekurzivna funkcija $T_n^m(l, a_1, \dots, a_m)$ koja za $l \geqslant m+n$ vraća kod programa koji vrši sledeću promenu prvih l registara:

ulaz:	$b_1 \dots b_n \cdots$
postavi:	$a_1 \dots a_m \; b_1 \dots b_n \; \bar{0}$

Dokaz. Traženi program je kompozicija programa SQP, gde:

- P je program koji prazni registre $R_{n+1}, \dots, R_l$;
- Q je program koji premešta sadržaje registara $R_1, \dots, R_n$ u $R_{m+1}, \dots, R_{m+n}$, i pritom prazni $R_1, \dots, R_n$;
- S postavlja $a_1, \dots, a_m$ u registre $R_1, \dots, R_m$.

Elementaran program P_i koji samo prazni registar R_i ima jednu jedinu naredbu $N_0 : \; R_i^-(0,1)$. Kod ove naredbe je $\langle i, 0, 1\rangle$, a kod programa $\langle\langle i, 0, 1\rangle\rangle$. Funkcija $F(i) = \langle\langle i, 0, 1\rangle\rangle$ je jasno primitivno rekurzivna, i ona vraća kod programa P_i za $i \geqslant 1$. Program P je kompozicija $P_l P_{l-1} \dots P_{n+1}$. Posmatrajmo funkciju $G(t)$ datu primitivnom rekurzijom:

$$\begin{aligned} G(0) &= \langle\rangle = 0; \\ G(t+1) &= comp(G(t), F(n+t+1)). \end{aligned}$$

Dakle, $G(0)$ je kod praznog programa, $G(1)$ je kod programa P_{n+1}, $G(2)$ je kod programa $P_{n+2}P_{n+1}$ itd. Prema tome kod programa P je $G(l \dot{-} n)$.

Elementaran program Q_i koji prebacuje sadržaj registra R_i u R_{m+i}, i pritom prazni R_i ima dve naredbe: $N_0 : \; R_i^-(1,2)$, $N_1 : \; R_{m+i}^+(0)$. Kod ovog programa je $\langle\langle i,1,2\rangle, \langle m+i, 0\rangle\rangle$. Funkcija $H(i) = \langle\langle i,1,2\rangle, \langle m+i, 0\rangle\rangle$ je jasno primitivno rekurzivna, i vraća kod programa Q_i za $i \geqslant 1$. Program Q je kompozicija $Q_1 Q_2 \dots Q_n$. (Primetite ovde redosled kompozicije. Naime, prvo ćemo prebaciti R_n, jer je posle primene programa P registar R_{m+n} prazan, a na kraju ćemo prebaciti R_1. Obratno može da nam pokvari situaciju. Naime, ako prvo prebacujemo R_1 u R_{m+1}, nemamo garanciju da je R_{m+1} prazan, jer je možda $m < n$. Zato vršimo prebacivanje s desna na levo.) Dakle, kod programa Q je $q = comp^n(H(n), H(n-1), \dots, H(1))$. Primetite da je q konstanta, tj. ne zavisi od argumenata funkcije T_n^m.

Elementaran program S_i koji povećava sadržaj registra R_i za 1 ima jednu naredbu $N_0 : \; R_i^+(1)$, i njegov kod je $\langle\langle i, 1\rangle\rangle$. Funkcija $K(i) = \langle\langle i, 1\rangle\rangle$ je primitivno rekurzivna i za $i \geqslant 1$ vraća kod programa S_i. Uočimo funkciju $L(i,t)$ datu primitivnom rekurzijom:

$$\begin{aligned} L(i,0) &= \langle\rangle = 0; \\ L(i,t+1) &= comp(L(i,t), K(i)). \end{aligned}$$

Dakle, $L(i,t)$ je kod programa $\underbrace{S_i \dots S_i}_{t}$ koji uvećava registar R_i za t.

Prema tome, tražena funkcija $T_n^m(l, a_1, \dots, a_m)$ data je sa:

$$comp^{m+2}(G(l \dot{-} n), q, L(1, a_1), L(2, a_2), \dots, L(m, a_m)).$$

Data kompozicija očigledno je primitivno rekurzivna. $\square$

(5.29) Klinijeva S_n^m-teorema. Neka $m, n \geqslant 1$. Postoji primitvno rekurzivna $(m+1)$-arna funkcija S_n^m takva da:

$$S_n^m(e, x_1, \dots, x_m) \cdot (y_1, \dots, y_n) \simeq e \cdot (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n),$$

za sve $e, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$.

Dokaz. Ako e nije kod programa ili ako je e kod programa i $\mathfrak{m}(e) < m+n$, onda desna strana nije definisana, pa možemo da stavimo $S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m) = \langle\langle\rangle\rangle$, što nije kod programa, pa ni leva strana nije definisana. U suprotnom, ako je e kod programa i $\mathfrak{m}(e) \geqslant m+n$, onda $S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m)$ treba da bude kod programa koji radi sledeće (pratimo prvih $\mathfrak{m}(e)$ registara):

ulaz:	$y_1 \ldots y_n \ \bar{0}$
postavi:	$x_1 \ldots x_m \ y_1 \ldots y_n \ \bar{0}$
primeni e:	$z \cdots$

Primetimo da je ovde $z = e \cdot (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$. Dakle, možemo da uzmemo $S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m) = \mathit{comp}(T_n^m(\mathfrak{m}(e), x_1, \ldots, x_m), e)$, gde je T_n^m funkcija iz prethodne leme. Funkcija S_n^m je primitivno rekurzivna. $\square$

(5.30) Komentar. Moguće je modifikovati definiciju funkcije S_n^m tako da ona bude 1-1, i više, da zadovoljava $S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m) > e, x_1, \ldots, x_m$.

Naime, možemo da posmatramo primitivno rekurzivnu funkciju: $U(e, x_1, \ldots, x_m) =$

$$= \langle\ \langle 2+e, 1\rangle, \langle 3+e+x_1, 2\rangle, \langle 4+e+x_1+x_2, 3\rangle, \ldots \langle m+2+e+x_1+x_2+\cdots+x_m, m+1\rangle\ \rangle.$$

(Uverite se da ovo zaista jeste primitivno rekurzivna funkcija!) Ova funkcija vraća kod programa:

$$\begin{array}{rcl} N_0 & : & R^+_{2+e}(1) \\ N_1 & : & R^+_{3+e+x_1}(2) \\ N_2 & : & R^+_{4+e+x_1+x_2}(3) \\ \vdots & & \\ N_m & : & R^+_{m+2+e+x_1+x_2+\cdots+x_m}(m+1) \end{array}$$

Primetite da ovaj program ne menja registar R_1, pa ako je $S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m)$ kod programa, onda je i $\mathit{comp}(S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m), U(e, x_1, \ldots, x_m))$ kod programa koji za svaku n-torku $(y_1, \ldots, y_n)$ vraća isti rezultat kao i $S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m)$. Dakle, možemo da zamenimo $S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m)$ sa funkcijom $\mathit{comp}(S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m), U(e, x_1, \ldots, x_m))$. Uverite se da uradjeni trik zaista povlači da je S_n^m 1-1 i da zadovoljava uslov $S_n^m(e, x_1, \ldots, x_m) > e, x_1, \ldots, x_m$.

(5.31) Klinijeva teorema rekurzije. Neka je $k \geqslant 1$ i F parcijalno rekurzivna $(k+1)$-arna funkcija. Tada postoji e tako da za sve $x_1, \ldots, x_k$ važi: $e \cdot (x_1, \ldots, x_k) \simeq F(x_1, \ldots, x_k, e)$.

Dokaz. Neka je f indeks funkcije F, tj. $F(x_1, \ldots, x_k, y) \simeq f \cdot (x_1, \ldots, x_k, y)$. Posmatrajmo $(k+2)$-arnu funkciju G datu sa:

$$\begin{array}{rcl} G(u, v, x_1, \ldots, x_k) & = & u \cdot (x_1, \ldots, x_k, S_k^1(v, v)) \\ & = & \Phi(k+1, u, \kappa^{k+1}(x_1, \ldots, x_k, S_k^1(v, v))). \end{array}$$

Funkcija G je jasno parcijalno rekurzivna, pa ima indeks g, tj. $G(u, v, x_1, \ldots, x_k) \simeq g \cdot (u, v, x_1, \ldots, x_k)$. Uzmimo: $e = S_k^1(S_{k+1}^1(g, f), S_{k+1}^1(g, f))$. Imamo:

$$\begin{array}{rcl} e \cdot (x_1, \ldots, x_k) & = & S_k^1(S_{k+1}^1(g, f), S_{k+1}^1(g, f)) \cdot (x_1, \ldots, x_k) \\ & = & S_{k+1}^1(g, f) \cdot (S_{k+1}^1(g, f), x_1, \ldots, x_k) \\ & = & g \cdot (f, S_{k+1}^1(g, f), x_1, \ldots, x_k) \\ & = & G(f, S_{k+1}^1(g, f), x_1, \ldots, x_k) \\ & = & f \cdot (x_1, \ldots, x_k, S_k^1(S_{k+1}^1(g, f), S_{k+1}^1(g, f))) \\ & = & f \cdot (x_1, \ldots, x_k, e) \\ & = & F(x_1, \ldots, x_k, e), \end{array}$$

gde druga i treća jednakost važe po S_n^m-teoremi, a sve ostale po odgovarajućoj definiciji. $\square$

(5.32) Komentar. Ako u prethodnom dokazu stavimo $H(x) = S_k^1(S_{k+1}^1(g,x), S_{k+1}^1(g,x))$, H je očigledno primitivno rekurzivna funkcija i $e = H(f)$. Prema tome postoji primitivno rekurzivna funkcija koja vraća odgovarajuće e u zavisnnosti od indeksa funkcije F.

(5.33) Klinijeva teorema o fiksnoj tački. Neka je F totalna rekurzivna unarna funkcija i $k \in \mathbb{N}$. Postoji e tako da su e i $F(e)$ indeksi za istu k-arnu funkciju, tj. $\phi_e^{(k)} = \phi_{F(e)}^{(k)}$.

Dokaz. Uočimo $(k+1)$-arnu funkciju G datu sa:

$$\begin{aligned} G(x_1,\dots,x_k,y) &= F(y)\cdot(x_1,\dots,x_k) \\ &= \Phi(k, F(y), \kappa^k(x_1,\dots,x_k)). \end{aligned}$$

Funkcija G je parcijalno rekurzivna, pa prema teoremi o rekurziji postoji e tako da $e\cdot(x_1,\dots,x_k) = G(x_1,\dots,x_k,e)$. Kako je $G(x_1,\dots,x_k,e) = F(e)\cdot(x_1,\dots,x_k)$ po definiciji, dobijamo $\phi_e^{(k)} = \phi_{F(e)}^{(k)}$.

Daćemo još jedan dokaz ove teoreme. Uočimo $(k+1)$-arnu funkciju G datu sa:

$$\begin{aligned} G(y,x_1,\dots,x_k) &= F(y\cdot y)\cdot(x_1,\dots,x_k) \\ &= \Phi(k, F(\Phi(1,y,y)), \kappa^k(x_1,\dots,x_k)). \end{aligned}$$

G je parcijalno rekurzivna, pa ima svoj indeks g, tj. $g\cdot(y,x_1,\dots,x_k) = G(y,x_1,\dots,x_k)$, tj. prema S_n^m-teoremi $S_k^1(g,y)\cdot(x_1,\dots,x_k) = G(y,x_1,\dots,x_k)$. Kako je $S_k^1(g,y)$ primitivno rekurzivna unarna funkcija, ona ima svoj indeks s, tj. $s\cdot y = S_k^1(g,y)$. Neka je $e = s\cdot s$; primetite da e jeste definisano jer je $s\cdot y$ primitivno rekurzivna, specijalno totalna. Sada je:

$$\begin{aligned} e\cdot(x_1,\dots,x_k) &= (s\cdot s)\cdot(x_1,\dots,x_k) \\ &= S_k^1(g,s)\cdot(x_1,\dots,x_k) \\ &= g\cdot(s,x_1,\dots,x_k) \\ &= G(s,x_1,\dots,x_k) \\ &= F(s\cdot s)\cdot(x_1,\dots,x_k) \\ &= F(e)\cdot(x_1,\dots,x_k), \end{aligned}$$

pa smo dobili željeno e. □

(5.34) Zadatak. Neka je F parcijalno rekurzivna k-arna funkcija. Dokazati da postoji strogo rastuća totalna rekurzivna funkcija $C(n)$ takva da je $C(n)$ indeks funkcije F, tj. $F = \phi_{C(n)}^{(k)}$, za sve n.

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $G(n,u,x_1,\dots,x_k) = F(x_1,\dots,x_k)$. Funkcija G je parcijalno rekurzivna pa ima indeks g, tj. $G(n,u,x_1,\dots,x_k) = g\cdot(n,u,x_1,\dots,x_k) = S_k^2(g,n,u)\cdot(x_1,\dots,x_k)$, gde je druga jednakost prema S_n^m-teoremi. Funkcija $H(n,u) = S_k^2(g,n,u)$ je primitivno rekurzivna, pa po teoremi rekurzije imamo c tako da $c\cdot n = H(n,c) = S_k^2(g,n,c)$. Prema (5.30) možemo da pretpostavimo da je $c\cdot n > n$. Takodje, $\phi_c(n) = S_k^2(g,n,c)$ je primitivno rekurzivna, specijalno totalna, i $c\cdot n$ definisano je za sve n. Imamo: $(c\cdot n)\cdot(x_1,\dots,x_k) = S_n^2(g,n,c)\cdot(x_1,\dots,x_k) = g\cdot(n,c,x_1,\dots,x_k) = G(n,c,x_1,\dots,x_k) = F(x_1,\dots,x_k)$. Prema tome $\phi_c(n)$ je indeks funkcije F za svako n. Znamo da je ϕ_c totalno (čak primitivno) rekurzivna, ali ne znamo da je ϕ_c strogo rastuća. Ali imamo $\phi_c(n) = c\cdot n > n$.

Defninišimo funkciju $C(n)$ primitivnom rekurzijom sa:

$$\begin{aligned} C(0) &= \phi_c(0); \\ C(n+1) &= \phi_c(C(n)). \end{aligned}$$

Jasno je da je C totalno (čak primitivno) rekurzivna funkcija i $C(n)$ je indeks funkcije F za svako n, ali takodje imamo $C(n+1) = \phi_c(C(n)) > C(n)$, pa je C i strogo rastuća.

Možemo da damo i drugo rešenje. Neka je f neki indeks funkcije F; tj. kod nekog programa koji računa F. Nove indekse možemo da dobijemo dodavanjem besmislenih naredbi na kraj programa sa kodom f (vidite (5.24)) vodeći računa da ne poremetimo rezultat, tj. registar R_1. Npr. uočimo kod

$\langle\langle 2,1\rangle\rangle$ programa sa jednom jedinom naredbom N_0 : $R_2^+(1)$ koji dodaje 1 u R_2. Definišimo $C(n)$ primitivnom rekurzijom sa:

$$\begin{aligned} C(0) &= f; \\ C(n+1) &= comp(C(n), \langle\langle 2,1\rangle\rangle). \end{aligned}$$

Zbog dodavanja naredbi koje ne menjaju registar rezultat u registru R_1, $C(n)$ kodiraju programe koji računaju F. Razjasnite da je funkcija $C(n)$ takodje strogo rasuća. $\square$

(5.35) Zadatak. Neka je F totalna rekurzivna unarna funkcija i $k \in \mathbb{N}$. Postoji rastuća totalna rekurzivna funkcija $E(n)$ tako da su $E(n)$ i $F(E(n))$ indeksi za istu k-arnu funkciju, tj. $\phi^{(k)}_{E(n)} = \phi^{(k)}_{F(E(n))}$, za sve n.

Rešenje. Možemo da iskoristimo ideje iz dokaza teoreme o fiksnoj tački i prethodnog zadatka. Kao u drugom dokazu teoreme o fiksnoj tački možemo da nadjemo indeks g tako da:

$$S^1_k(g,y)\cdot(x_1,\dots,x_k) = F(y\cdot y)\cdot(x_1,\dots,x_k).$$

Neka je $C(n)$ totalna rekurzivna strogo rastuća funkcija takva da je $C(n)$ indeks za $S^1_k(g,y)$, tj. $S^1_k(g,y) = \phi_{C(n)}(y)$, za sve n; ovakva funkcija postoji prema prethodnom zadatku. Neka je $D(n) = S^1_k(g,C(n))$, tj. $D(n) = C(n)\cdot C(n)$; po (5.30) možemo da pretpostavimo da je $D(n) > C(n) \geqslant n$ (gde druga nejednakost važi jer je C strogo rastuća). Za svako n imamo:

$$D(n)\cdot(x_1,\dots,x_k) = S^1_k(g,C(n))\cdot(x_1,\dots,x_k) = F(C(n)\cdot C(n))\cdot(x_1,\dots,x_k) = F(D(n))\cdot(x_1,\dots,x_k),$$

tj. $\phi^{(k)}_{D(n)} = \phi^{(k)}_{F(D(n))}$. Sada definišemo $E(n)$ kao u prethodnom zadatku:

$$\begin{aligned} E(0) &= D(0); \\ E(n+1) &= D(E(n)). \end{aligned}$$

Iz $E(n+1) = D(E(n)) > E(n)$ imamo i da je E rastuća, pa prema tome tražena funkcija. $\square$

(5.36) Zadatak. Dokazati da postoji e tako da je ϕ_e totalna funkcija i $\phi^n_e = \phi_{e\cdot n}$ za sve n. (Ovde ϕ^n_e označava kompoziciju $\underbrace{\phi_e \circ \cdots \circ \phi_e}_{n}$, gde je $\phi^0_e = id$.)

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $F(n,u,x) = \phi^n_u(x)$ i primetimo da je ona parcijalno rekurzivna. Zaista, možemo je definisati primitivnom rekurzijom sa:

$$\begin{aligned} F(0,u,x) &= \phi^0_u(x) = x, \\ F(n+1,u,x) &= \phi^{n+1}_u(x) = \phi_u(\phi^n_u(x)) = \Phi(1,u,F(n,u,x)). \end{aligned}$$

Neka je f neki indeks za F. Tada po S^m_n-teoremi imamo $S^2_1(f,n,u)\cdot x = f\cdot(n,u,x) = F(n,u,x) = \phi^n_u(x)$. Primenom teoreme rekurzije na funkciju $G(n,u) = S^2_1(f,n,u)$ nalazimo indeks e takav da $e\cdot n = G(n,e) = S^2_1(f,n,e)$. Iz ove jednakosti očigledno je ϕ_e totalna funkcija (jer je S^2_1 totalna). Takodje imamo $\phi_{e\cdot n}(x) = (e\cdot n)\cdot x = S^2_1(f,n,e)\cdot x = \phi^n_e(x)$, pa je $\phi^n_e = \phi_{e\cdot n}$ za sve n. $\square$

F. Rekurzivnost Akermanove funkcije

Setimo se da je Akermanova funkcija binarna funkcija $A(x,y)$ data dupplom rekurzijom sa:

$$\begin{aligned} A(0,y) &= y+1; \\ A(x+1,0) &= A(x,1); \\ A(x+1,y+1) &= A(x,A(x+1,y)). \end{aligned}$$

Dokazali smo da Akermanova funkcija nije primitivno rekurzivna (vidi (3.14)). Sada možemo da dokažemo da ona jeste rekurzivna.

Posmatrajmo ternarnu funkciju $F(x,y,u)$ datu sa:

$$F(x,y,u)=\begin{cases} y+1 & x=0 \\ u\cdot(x\dot{-}1,1) & x>0, y=0 \\ u\cdot(x\dot{-}1,u\cdot(x,y\dot{-}1)) & x,y>0 \end{cases}.$$

Funkcija F je parcijalno rekurzivna jer:

$$\begin{aligned} F(x,y,u) &= \begin{cases} y+1 & x=0 \\ \Phi(2,u,\kappa^2(x\dot{-}1,1)) & x>0, y=0 \\ \Phi(2,u,\kappa^2(x\dot{-}1,\Phi(2,u,\kappa^2(x,y\dot{-}1)))) & x,y>0 \end{cases} \\ &= C(y+1, C(\Phi(2,u,\kappa^2(x\dot{-}1,1)), \Phi(2,u,\kappa^2(x\dot{-}1,\Phi(2,u,\kappa^2(x,y\dot{-}1)))),y),x), \end{aligned}$$

gde je C funkcija razdvajanja po slučajevima. (Poslednji izraz je očigledno kompozicija rekurzivnih funkcija, pa je rekurzivan.) Prema teoremi rekurzije postoji indeks a tako da $a\cdot(x,y)=F(x,y,a)$, tj.:

$$a\cdot(x,y)=\begin{cases} y+1 & x=0 \\ a\cdot(x\dot{-}1,1) & x>0, y=0 \\ a\cdot(x\dot{-}1,a\cdot(x,y\dot{-}1)) & x,y>0 \end{cases}.$$

Sada dokazujemo $A(x,y)=a\cdot(x,y)=\phi_a^{(2)}(x,y)$, tj. $A=\phi_a^{(2)}$ je rekurzivna. Dokaz izvodimo indukcijom po x. Za $x=0$, direktno iz definicija imamo $A(0,y)=y+1=a\cdot(0,y)$. Pretpostavimo da $A(x,y)=a\cdot(x,y)$ vaẃ zi za sve y i dokažimo $A(x+1,y)=a\cdot(x+1,y)$ za sve y.

Dokaz izvodimo indukcijom po y. Za $y=0$ imamo $A(x+1,0)=A(x,1)=a\cdot(x,1)=a\cdot(x+1,0)$, gde druga jednakost važi po indukcijskoj hipotezi, a treća po izboru a. Pretpostavimo da $A(x+1,y)=a\cdot(x+1,y)$ i dokažimo $A(x+1,y+1)=a\cdot(x+1,y+1)$. Imamo $A(x+1,y+1)=A(x,A(x+1,y))=a\cdot(x,a\cdot(x+1,y))=a\cdot(x+1,y+1)$, gde druga jednakost važi po indukcijskim hipotezama, a treća po izboru a. Ovo završava dokaz.

Za funkciju iz sledećeg zadatka smo već dokazali da je primitivno rekurzivna, pa i rekurzivna. Koristeći ideju iz prethodnog dokaza rekurzivnosti Akermanove funkcije, rekurzivnost sledeće funkcije možemo značajno lakše zaključiti.

(5.37) Zadatak. Dokazati da je funkcija definisana sa $F(x,0)=x^3+1$ i $F(x,y+1)=3yF(2x,y)+2^x$ rekurzivna.

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $G(x,y,u)$ definisanu sa:

$$G(x,y,u)=\begin{cases} x^3+1 & y=0 \\ 3(y\dot{-}1)(u\cdot(2x,y\dot{-}1))+2^x & y>0 \end{cases}.$$

Funkcija G je jasno parcijalno rekurzivna, pa prema teoremi rekurzije postoji indeks f takav da:

$$f\cdot(x,y)=G(x,y,f)=\begin{cases} x^3+1 & y=0 \\ 3(y\dot{-}1)(f\cdot(2x,y\dot{-}1))+2^x & y>0 \end{cases}.$$

Sada indukcijom po y lako vidimo da je $F(x,y)=f\cdot(x,y)=\phi_f(x,y)$, pa zaključujemo da je F rekurzivna funkcija. □

G. Zadaci

(5.38) Zadatak. Dokazati da postoji e tako da $W_e=\{e\}$.

Rešenje. Uočimo funkciju $F(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ \uparrow & x\neq y \end{cases}$. F možemo da zapišemo kao $(\mu z)\ |x-y|+z=0$, pa je F parcijalno rekurzivna. Prema teoremi rekurzije postoji e tako da $e\cdot x=F(x,e)=\begin{cases} 0 & x=e \\ \uparrow & x\neq e \end{cases}$. Dakle, $e\cdot x\downarrow$ akko $x=e$, tj. $W_e=\{e\}$. □

(5.39) Zadatak. Dokazati da postoji e tako da $W_e = \{x \mid x > e\}$.

Rešenje. Uočimo funkciju $F(x,y) = \begin{cases} 0 & x > y \\ \uparrow & x \leqslant y \end{cases}$. F možemo da zapišemo kao $(\mu z)\ ((y+1) \dot{-} x) + z = 0$, pa je F parcijalno rekurzivna. Prema teoremi rekurzije postoji e tako da $e \cdot x = F(x,e) = \begin{cases} 0 & x > e \\ \uparrow & x \leqslant e \end{cases}$. Dakle, $e \cdot x \downarrow$ akko $x > e$, tj. $W_e = \{x \mid x > e\}$. □

(5.40) Zadatak. Dokazati da postoji injektivna totalno rekurzivna unarna funkcija F takva da $W_{F(n)} = \{F(n+1)\}$ za sve n.

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $G(n,u,x) = \begin{cases} 0 & x = u \cdot (n+1) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Primetimo da je $G(n,u,x)$ jednaka $(\mu z)\, |x - \Phi(1,u,n+1)| + z = 0$, pa je parcijalno rekurzivna i neka je g neki njen indeks. Prema S^m_n-teoremi imamo $S^2_1(g,n,u) \cdot x = g \cdot (n,u,g) = G(n,u,x)$. Primenom teoreme rekurzije na $G(n,u) = S^2_1(g,n,u)$ nalazimo e tako da $e \cdot n = H(n,e) = S^2_1(g,n,e)$. Primetimo da je funkcije $F = \phi_e$ totalna i injektivna (jer je $S^2_1(g,n,e)$ takva; vidi (5.30)). Sad $F(n) \cdot x \downarrow$ akko $(e \cdot n) \cdot x \downarrow$ akko $S^2_1(g,n,e) \cdot x \downarrow$ akko $G(n,e,x) \downarrow$ akko $x = e \cdot (n+1) = F(n+1)$. Prema tome $W_{F(n)} = \{F(n+1)\}$ za sve n. □

(5.41) Zadatak. Dokazati da postoji e tako da $W_e = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ i $E_e = \{e^x \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Rešenje. Uočimo funkciju $F(x,y) = \begin{cases} y^{x/2} & x \text{ paran} \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Primetimo $F(x,y) = y^{(\mu z)\, x = 2z}$, pa je F parcijalno rekurzivna. Prema teoremi rekurzije postoji e rakav da $e \cdot x = F(x,e) = \begin{cases} e^{x/2} & x \text{ paran} \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Sada $e \cdot x \downarrow$ akko je x paran, pa je $W_e = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$. Takodje, po konstrukciji, $e \cdot 2x = e^x$, odakle $E_e = \{e^x \mid x \in \mathbb{N}\}$. □

(5.42) Zadatak. Dokazati da postoji totalna izračunljiva funkcija F takva da $W_{F(n)} = \{2n\}$ i $E_{F(n)} = \{2n+1\}$.

Rešenje. Uočimo funkciju $G(n,x) = \begin{cases} 2n+1 & x = 2n \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$; $G(n,x)$ jednaka je $2n+1+(\mu z)(|x-2n|+z=0)$, pa je G parcijalno rekurzivna i neka je g neki njen indeks. Po S^m_n-teoremi $S^1_1(g,n) \cdot x = g \cdot (n,x) = G(n,x)$. Neka je $F(n) = S^1_1(g,n)$. Jasno je da je F totalna, $F(n) \cdot x \downarrow$ akko $x = 2x$ i $F(n) \cdot (2n) = 2n+1$. Prema tome $W_{F(n)} = \{2n\}$ i $E_{F(n)} = \{2n+1\}$. □

6 Rekurzivni i rekurzivno nabrojivi skupovi

A. Rekurzivni skupovi

(6.1) Rekurzivni skupovi. Kao što smo već definisali, skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan, ako je χ_S rekurzivna funkcija. Umesto termina rekurzivan skup koristimo i termin odlučivi predikat.

Svaki $S \subseteq \mathbb{N}^k$ odredjuje sledeći problem: Da li $\bar{x} \in S$? Za ovaj problem kažemo da je odlučiv ako je S rekurzivan skup, tj. odlučiv predikat.

(6.2) Halting problem i standardan problem. Halting i standardan problem dati su sledećim skupovima:

$$\mathcal{H} = \{(e,x) \mid (\exists y)\ T(1,e,x,y)\} \quad \text{i} \quad \mathcal{K} = \{x \mid (\exists y)\ T(1,x,x,y)\},$$

gde je T Klinijev predikat. Dakle, halting problem je: Da li je $e \cdot x$ definisano, tj. da li $e \cdot x \downarrow$?[3] Standardni problem je: Da li je $x \cdot x$ definisano, tj. da li $x \cdot x \downarrow$?

(6.3) Tvrdjenje. Halting i standardan problem nisu odlučivi.

[3]Drugim rečima, halting problem je problem da li se program sa kodom e zaustavlja za ulaz $(x, \bar{0})$, odakle i sledi naziv „halting”.

Dokaz. Najpre dokažimo da halting problem nije odlučiv. Pretpostavimo suprotno. Tada je $\chi_{\mathcal{H}}(e,x) = \begin{cases} 1 & e\cdot x\downarrow \\ 0 & e\cdot x\uparrow \end{cases}$ rekurzivna funkcija. Uočimo bilo koju unarnu parcijalno rekurzivnu funkciju F tako da $Dom(F) = \{0\}$. Takva funkcija postoji, npr. $F(x) = (\mu y)\ x + y = 0$ koja je očigledno parcijalno rekurzivna. Neka je $G(x,u) = F(\chi_{\mathcal{H}}(u,x))$; G je očigledno parcijalno rekurzivna. Prema teoremi rekurzije postoji e tako da $e\cdot x = G(x,e) = F(\chi_{\mathcal{H}}(e,x))$. Primetimo $e\cdot x\downarrow$ akko $F(\chi_{\mathcal{H}}(e,x))\downarrow$ akko $\chi_{\mathcal{H}}(e,x) = 0$ akko $e\cdot x\uparrow$. Kontradikcija.

Dokažimo sada da standardan problem nije odlučiv. Pretpostavimo suprotno. Tada je $\chi_{\mathcal{K}}(x) = \begin{cases} 1 & x\cdot x\downarrow \\ 0 & x\cdot x\uparrow \end{cases}$ rekurzivna funkcija, pa je i $H(x) = F(\chi_{\mathcal{K}}(x))$ parcijlano rekurzivna, gde je F funkcija iz prethodnog pasusa. Prema tome, H ima indeks h, tj. $h\cdot x = H(x)$. Sada imamo $h\cdot h\downarrow$ akko $H(h)\downarrow$ akko $F(\chi_{\mathcal{K}}(h))\downarrow$ akko $\chi_{\mathcal{K}}(h) = 0$ akko $h\cdot h\uparrow$. Kontradikcija.

Znajući da je standardan problem neodlučiv, mogli smo dokazati da je halting problem neodlučiv na sledeći način. Primetimo $x\in\mathcal{K}$ akko $(x,x)\in\mathcal{H}$. Prema tome $\chi_{\mathcal{K}}(x) = \chi_{\mathcal{H}}(x,x)$, pa ako je $\mathcal{H}$ odlučiv, tj. $\chi_{\mathcal{H}}$ je rekurzivna, onda je i $\chi_{\mathcal{K}}$ rekurzivna, tj. $\mathcal{K}$ je odlučiv; kontradikcija. Ovaj način zaključivanja je primer svodjenja. □

(6.4) Svodjenje. Neka $A\subseteq\mathbb{N}^k$ i $B\subseteq\mathbb{N}^l$. Skup A se svodi na B ako postoje totalne rekurzivne k-arne funkcije $F_0,\dots,F_{l-1}$ tako da: $\bar{x}\in A$ akko $(F_0(\bar{x}),\dots,F_{l-1}(\bar{x}))\in B$.

(6.5) Lema. Ako se $A\subseteq\mathbb{N}^k$ svodi na $B\subseteq\mathbb{N}^l$ i B je rekurzivan, onda je i A rekurzivan. Drugim rečima, ako se A svodi na B i A nije rekurzivan, onda ni B nije rekurzivan.

Dokaz. Iz definicije svodjenja je $\chi_A(\bar{x}) = \chi_B(F_0(\bar{x}),\dots,F_{l-1}(\bar{x}))$, pa tvrdjenje leme direktno sledi. □

Prema prethodnoj lemi, ako želimo da dokažemo da neki B nije rekurzivan, dovoljno je da svedemo na B neki skup A za koji je poznato da nije rekurzivan, kao što su npr. $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$.

(6.6) Zadatak. Dokazati da $\{e \mid \phi_e$ je totalna$\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Uočimo funkciju $F(x,y) = \begin{cases} 0 & x\cdot x\downarrow \\ \uparrow & x\cdot x\uparrow \end{cases}$. Primetimo da je $F(x,y)\simeq 0\cdot\Phi(1,x,x)$, tj. $F(x,y)$ je parcijalno rekurzivna, pa ima svoj indeks f. Dakle, $F(x,y) = f\cdot(x,y) = S^1_1(f,x)\cdot y$, gde druga jednakost važi po S^m_n-teoremi. Primetimo $x\cdot x\downarrow$ akko $(\forall y)\ F(x,y)\downarrow$, tj. $(\forall y)\ S^1_1(f,x)\cdot y\downarrow$, što je ekvivalentno sa $S^1_1(f,x)\in\{e \mid \phi_e$ je totalna$\}$. Kako je $S^1_1(f,x)$, kao unarna funkcija promenljive x, totalno rekurzivna (čak primitivno rekurzivna), sveli smo standardan skup $\mathcal{K}$ na $\{e \mid \phi_e$ je totalna$\}$, pa ovaj skup nije rekurzivan. □

(6.7) Zadatak. Dokazati da $\{e \mid W_e = \varnothing\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Setimo se da je skup rekurzivan akko je njegov komplement rekurzivan. Prema tome, dovoljno je da dokažemo da skup $A = \{e \mid W_e \neq \varnothing\}$ nije rekurzivan. Posmatrajmo istu funkciju $F(x,y)$ kao u prethodnom zadatku sa indeksom f. Kao u prethodnom zadatku imamo $F(x,y) = S^1_1(f,x)\cdot y$. Primetimo da $S^1_1(f,x)\in A$ akko $(\exists y)\ S^1_1(f,x)\cdot y\downarrow$, tj. akko $(\exists y)\ F(x,y)\downarrow$. Prema definiciji funkcije F, ovo je ekvivalentno sa $x\cdot x\downarrow$. Dakle, sveli smo $\mathcal{K}$ na A, pa A nije rekurzivan. □

(6.8) Zadatak. Dokazati da $\{e \mid E_e$ je beskonačan$\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Koristićemo istu ideju kao u prethodnim zadacima. Posmatrajmo $F(x,y) = \begin{cases} y & x\cdot x\downarrow \\ \uparrow & x\cdot x\uparrow \end{cases}$, koja je parcijalno rekurzivna jer $F(x,y)\simeq y + 0\cdot\Phi(1,x,x)$; neka je f njen indeks. Tada $F(x,y) = f\cdot(x,y) = S^1_1(f,x)\cdot y$. Primetimo $x\cdot x\downarrow$ akko $S^1_1(f,x)\in\{e \mid W_e$ je beskonačan$\}$ (Razjasnite!), pa smo sveli $\mathcal{K}$ na ovaj skup, te on nije rekurzivan. □

(6.9) Zadatak. Dokazati da $\{(e_0,e_1) \mid \phi_{e_0} = \phi_{e_1}\}$ nije rekurzivan.

Rešenje. Neka je e indeks funkcije $Z(y)$. Dakle $e \cdot y = 0$ za sve y. Posmatrajmo $F(x,y) = \begin{cases} 0 & x \cdot x \downarrow \\ \uparrow & x \cdot x \uparrow \end{cases}$. Kao što smo već videli, $F(x,y)$ je parcijalno rekurzivna funkcija, neka je f njen indeks, tj. $F(x,y) = f \cdot (x,y) = S^1_1(f,x) \cdot y$. Primetimo $x \cdot x \downarrow$ akko $(\forall y)\ F(x,y) = 0$, tj. akko $(\forall y)\ S^1_1(f,x) \cdot y = 0$. Ovo je ekvivalentno sa $(\forall y)\ S^1_1(f,x) \cdot y = e \cdot y$, tj. ekvivalentno sa $(S^1_1(f,x), e) \in \{(e_0, e_1) \mid \phi_{e_0} = \phi_{e_1}\}$. Prema tome, sveli smo $\mathcal{K}$ na željeni skup, pa on nije rekurzivan. $\square$

(6.10) Zadatak. Dokazati da sledeći skupovi nisu rekurzivni:

(a) $\{e \mid 2 \in W_e\}$;

(b) $\{e \mid 5 \notin W_e\}$;

(c) $\{e \mid W_e \text{ je konačan}\}$;

(d) $\{e \mid E_e = \mathbb{N}\}$.

Rekurzivnost podskupova od $\mathbb{N}^k$ svodi se na rekurzivnost podskupova od $\mathbb{N}$, tj. dovoljno je da znamo rekurzivne podskupove od $\mathbb{N}$ da bismo znali rekurzivne podskupove od svih $\mathbb{N}^k$.

(6.11) Tvrdjenje. Skup $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan akko je $B = \{\kappa^k(\bar{x}) \mid \bar{x} \in A\}$ rekurzivan.

Dokaz. Po definiciji $\bar{x} \in A$ akko $\kappa^k(\bar{x}) \in B$. Sa druge strane, $y \in B$ akko $(\kappa^k_0(y), \dots, \kappa^k_{k-1}(y)) \in A$. Prema tome, skupovi A i B se svode jedan na drugi, pa je prema tome jedan od njih rekurzivan akko je drugi rekurzivan. $\square$

U sledećim zadacima imamo karakterizacijui rekurzivnih skupova.

(6.12) Zadatak. Neka je S beskonačan skup. Dokazati da su sledeći iskazi ekvivalentni:

(1) S je rekurzivan (tj. odlučiv);

(2) postoji rastuća totalna rekurzivna funkcija F takva da je $S = Ran(F)$;

(3) postoji neopadajuća totalna rekurzivna funkcija F takva da je $S = Ran(F)$.

Rešenje. (1)$\Rightarrow$(2) Neka je S rekurzivan. Definišimo $F(x)$ primitivnom rekurzijom sa:

$$\begin{aligned} F(0) &= (\mu y)\ S(y); \\ F(x+1) &= (\mu y)\ (y > F(x) \wedge S(y)). \end{aligned}$$

F je očigledno parcijalno rekurzivna. Kako je S beskonačan, on nije ograničen, pa indukcijom lako vidimo da je F totalna i rastuća. Po konstrukciji je jasno $Ran(F) \subseteq S$. Sa druge strane, ako $a \notin Ran(F)$, onda je $F(x) < a < F(x+1)$ za neko x (jer je F rastuća), pa po definiciji $F(x+1)$ vidimo da $a \notin S$. Dakle $S = Ran(F)$.

(2)$\Rightarrow$(3) Očigledno.

(3)$\Rightarrow$(1) Neka je F neopadajuća totalna rekurzivna funkcija takva da $Ran(F) = S$; specijalno, $Ran(F)$ je beskonačan, pa i neograničen. Tada $S(y)$ akko $F((\mu x)\ F(x) \geqslant y) = y$. Zbog neograničenosti F, $(\mu x)\ F(x) \geqslant y$ je definisano, i prethodna ekvivalencija je očigledna. $\square$

(6.13) Zadatak. Dokazati da je za skup S ekvivalentno:

(1) S je rekurzivan;

(2) $S = \varnothing$ ili postoji neopadajuća totalna rekurzivna funkcija F takva da je $S = Ran(F)$.

Rešenje. Ako je S beskonačan, ekvivalencija sledi prema prethodnom zadatku. Ako je $S = \varnothing$, oba iskaza (1) i (2) su tačni. Pretpostavimo da je $S \neq \varnothing$ i konačan, recimo $S = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, gde $a_0 < \cdots < a_{n-1}$. Tada je S rekurzivan jer:

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x = a_0 \vee \cdots \vee x = a_{n-1} \\ 0 & \text{inače} \end{cases},$$

ali takodje $S = Ran(F)$, gde je:

$$F(x) = \begin{cases} a_x & x < n \\ a_{n-1} & \text{inače} \end{cases},$$

i F je očigledno neopadajuća i totalna rekurzivna. □

B. Rajsova teorema

Svi zadaci iz prethodnog poglavlja koristili su istu ideju. Naime, posmatrali smo funkcije oblika $F(x,y) = \begin{cases} \ldots & x \cdot x \downarrow \\ \uparrow & x \cdot x \uparrow \end{cases}$ koje su bile parcijalno rekurzivne, pa su imale svoj indeks f, odakle prema S^m_n-teoremi sledi $F(x,y) = S^1_1(f,x) \cdot y$, pa nam je funkcija $S^1_1(f,x)$ davala svodjenje $\mathcal{K}$ na odredjeni problem. Koristeći ovu ideju, dokazaćemo generalniji rezultat – Rajsovu teoremu.

(6.14) Zatvorenost za indekse. Neka je $I \subseteq \mathbb{N}$. Skup I je zatvoren za indekse ako $e \in I$ i $\phi_e = \phi_f$ povlači $f \in I$.

Rekurzivnih skupova koji su zatvoreni za indekse nema puno.

(6.15) Rajsova teorema. Neka je $I \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivan i zatvoren za indekse. Tada je $I = \varnothing$ ili $I = \mathbb{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da $I \neq \varnothing, \mathbb{N}$. Neka je e indeks takav da $Dom(\phi_e) = \varnothing$; takav indeks naravno postoji, npr. indeks funkcije $(\mu y)\ x + y + 1 = 0$. Možemo da pretpostavimo da $e \notin I$, jer u suprotnom možemo da zamenimo I sa njegovim komplementom (komplement rekurzivnog skupa zatvorenog za indekse je takoje rekurzivan i očigledno zatvoren za indekse). Izaberimo proizvoljno $f \in I$; postoji jer $I \neq \varnothing$.

Posmatrajmo $G(x,y) = \begin{cases} f \cdot y & x \cdot x \downarrow \\ \uparrow & x \cdot x \uparrow \end{cases}$ Kako je $G(x,y) = \Phi(1,f,y) + 0 \cdot \Phi(1,x,x)$, ona je parcijalno rekurzivna, pa ima indeks g. Tada $G(x,y) = g \cdot (x,y) = S^1_1(g,x) \cdot y$. Primetimo, $x \cdot x \downarrow$ povlači $(\forall y)\ S^1_1(g,x) \cdot y = f \cdot y$, tj. $\phi_{S^1_1(g,x)} = \phi_f$, pa kako $f \in I$ i I je zatvoren za indekse, to $S^1_1(g,x) \in I$. Sa druge strane, ako $x \cdot x \uparrow$, tada je $(\forall y)\ S^1_1(g,x) \cdot y \uparrow$, tj. $(\forall y)\ S^1_1(g,x) \cdot y = e \cdot y$, odnosno $\phi_{S^1_1(g,x)} = \phi_e$, pa kako $e \notin I$ i I je zatvoren za indekse, to $S^1_1(g,x) \notin I$. Dakle, $x \cdot x \downarrow$ akko $S^1_1(g,x) \in I$, što svodi $\mathcal{K}$ na I, i prema tome I nije rekurzivan. Kontradikcija.

Daćemo još jedan, direktan dokaz Rajsove teoreme. Pretpostavimo suprotno i izaberimo $e \notin I$ i $f \in I$. Posmatrajmo funkciju $H(x,u) = \begin{cases} e \cdot x & u \in I \\ f \cdot x & u \notin I \end{cases}$. Kako je $H(x,u) = \Phi(1,e,x) \cdot \chi_I(u) + \Phi(1,f,x) \cdot \overline{\chi}_I(u)$ parcijalno rekurzivna, to prema teoremi rekurzije možemo naći h tako da $h \cdot x = H(x,h)$; dakle, $h \cdot x = \begin{cases} e \cdot x & h \in I \\ f \cdot x & h \notin I \end{cases}$. Sada $h \in I$ povlači $\phi_h = \phi_e$, pa $h \notin I$ jer je I zatvoren za indekse. Sa druge strane, $h \notin I$ povlači $\phi_h = \phi_f$, pa $h \in I$ jer je I zatvoren za indekse. Prema tome, $h \in I$ akko $h \notin I$. Kontradikcija. □

(6.16) Zadatak. Zaključite nerekurzivnost skupova iz zadataka iz prethodnog poglavlja koristeći Rajsovu teoremu.

C. Rekurzivno nabrojivi skupovi

(6.17) Rekurzivno nabrojivu skupovi. Skup $S \subseteq \mathbb{N}$ je rekurzivno nabrojiv ako je $S = \varnothing$ ili ako postoji unarna primitivno rekurzivna funkcija F takva da $Ran(F) = S$. U drugom slučaju važi $S = \{F(0), F(1), F(2), \ldots\}$, i odatle naziv nabrojiv skup.

(6.18) Karakterizacija rekurzivne nabrojivosti. Sledeći iskazi su ekvivalentni za skup $S \subseteq \mathbb{N}$:

(1) S je rekurzivno nabrojiv;

(2) $S = \varnothing$ ili postoji k-arna primitivno rekurzivna funkcija F takva da $Ran(F) = S$;

(3) postoji unarna parcijalno rekurzivna funkcija F takva da $Ran(F) = S$;

(4) postoji k-arna parcijalno rekurzivna funkcija F takva da $Ran(F) = S$;

(5) postoji unarna parcijalno rekurzivna funkcija F takva da $Dom(F) = S$;

(6) postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da $S = \{x \mid (\exists y)\ R(x,y)\}$;

(7) postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$, $k \geqslant 1$, takav da $S = \{x \mid (\exists \bar{y})\ R(x,\bar{y})\}$;

(8) postoji primitivno rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^2$ takav da $S = \{x \mid (\exists y)\ R(x,y)\}$;

(9) postoji primitivno rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$, $k \geqslant 1$, takav da $S = \{x \mid (\exists \bar{y})\ R(x,\bar{y})\}$.

Dokaz. Neke od ekvivalencija su lake, pa prokomentarišimo najpre njih.

(1)⇔(2) Ako je F unarna primitivno rekurzivna funkcija takva da $Ran(F) = S$, tada je $G = F(\kappa^k)$ k-arna primitivno rekurzivna funkcija takva da $Ran(G) = S$. Obratno, ako je G k-arna primitivno rekurzivna funkcija takva da $Ran(G) = S$, onda je $F = G(\kappa^k_0, \dots, \kappa^k_{k-1})$ unarna primitivno rekurzivna funkcija takva da $Ran(F) = S$.

Isti trik kodiranja/dekodiranja objašnjava i (3)⇔(4), (6)⇔(7) i (8)⇔(9).

(1)⇒(3) Za $S = \varnothing$, $S = Ran(F)$ gde je F npr. $(\mu y)\ x + y + 1 = 0$. Drugi slučaj je očigledan.

(3)⇒(5) Neka je F unarna parcijalno rekurzivna funkcija takva da $Ran(F) = S$; neka je f indeks funkcije f. Treba da nadjemo unarnu parcijalno rekurzivnu funkciju G takvu da $Dom(G) = S$, tj. $G(x) \downarrow$ akko $(\exists z)\ f \cdot z = x$. Posmatrajmo funkciju $H(u,x) = \begin{cases} 0 & (\exists z)\ \Phi(1,u,z) = x \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Funkcija $H(u,x)$ je parcijalno rekurzivna jer $H(u,x) = 0 \cdot (\mu z)(\Phi(1,u,z) = x)$; neka je h indeks funkcije H, tj. $H(u,x) = h \cdot (u,x) = S^1_1(h,u) \cdot x$. Za $u = f$ imamo:

$$S^1_1(h,f) \cdot x = \begin{cases} 0 & (\exists z)\ \Phi(1,f,z) = x \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} 0 & (\exists z)\ f \cdot z = x \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}.$$

Dakle, $S^1_1(h,f) \cdot x \downarrow$ akko $(\exists z)\ f \cdot z = x$, pa za G možemo da uzmemo $\phi_{S^1_1(h,f)}$.

(5)⇒(8) Neka je F parcijlano rekurzivna funkcija takva da $Dom(F) = S$ i neka je f indeks funkcije F. Tada, $x \in S$ akko $F(x) \downarrow$ akko $f \cdot x \downarrow$ akko $(\exists y)\ T(1,f,x,y)$, pa prema tome možemo da uzmemo $R = \{(x,y) \mid T(1,f,x,y)\}$. Primetimo da je R primitivno rekurzivan jer je T primitivno rekurzivan.

(8)⇒(6) je očigledno.

(6)⇒(2) Neka je $S = \{x \mid (\exists y)\ R(x,y)\}$, gde je R rekurzivan. Ako je $S = \varnothing$ nemamo šta da dokažemo, pa pretpostavimo da je $S \neq \varnothing$ i fiksirajmo $a_0 \in S$. Funkcija $G(x,y) = \begin{cases} 0 & R(x,y) \\ \uparrow & \neg R(x,y) \end{cases}$ je parcijalno rekurzivna i neka je g njen indeks. Funkcija $H(x,y,z) = \begin{cases} x & T(2,g,\kappa^2(x,y),z) \\ a_0 & \neg T(2,g,\kappa^2(x,y),z) \end{cases}$ je primitivno rekurzivna. Dovoljno je da dokažemo da $Ran(H) = S$.

Ako $x \in S$, tada postoji y tako da $R(x,y)$, tj. postoji y tako da $g \cdot (x,y) = G(x,y) \downarrow$. Po definiciji postoji z tako da $T(2,g,\kappa^2(x,y),z)$, pa je $H(x,y,z) = x$, tj. $x \in Ran(H)$. Sa druge strane, ako $x \in Ran(H)$ tada $x = H(t,y,z)$ za neke t,y,z. Ako $\neg T(2,g,\kappa^2(t,y),z)$, onda je $x = a_0 \in S$ i završili smo. Ako $T(2,g,\kappa^2(t,y),z)$, tada $x = t$, tj. važi $T(2,g,\kappa^2(x,y),z)$. Odavde, $g \cdot (x,y) \downarrow$, tj. $G(x,y) \downarrow$, pa važi $R(x,y)$. Prema tome, ponovo $x \in S$.

Ovo završava dokaz. □

(6.19) Primer. Standardan skup $\mathcal{K}$ je rekurzivno nabrojiv. Zaista, $\mathcal{K} = \{x \mid (\exists y)\ T(1,x,x,y)\}$, pa je uslov (8) ispunjen.

(6.20) Rekurzivna nabrojivost podskupova od $\mathbb{N}^k$, $k \geqslant 2$. Koristeći karakterizaciu (5) rekurzivno nabrojivih podskupova od $\mathbb{N}$ definišemo da je podskup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno nabrojiv akko postoji parcijalno rekurzivna funkcija F takva da je $Dom(F) = S$. Dakle, rekurzivno nabrojivi skupovi su tačno skupovi oblika $W_e^{(k)}$ (vidi (5.25)). Kao u (6.11) važi:

1. Skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivno nabrojiv akko je $R = \{\kappa^k(\bar{x}) \mid \bar{x} \in S\}$ rekurzivno nabrojiv.

Odgovarajuće karakterizacije (1)-(4) očigledno ne važe za rekurzivno nabrojive podskupove od $\mathbb{N}^k$, $k \geqslant 2$, jer je $Ran(F)$ uvek podskup od $\mathbb{N}$, ali odgovarajuće karakterizacije (6)-(9) važe, tj.:

2. Sledeći iskazi su ekvivalentni za $S \subseteq \mathbb{N}^k$:

   (1) S je rekurzivno nabrojiv;

   (2) postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^k + 1$ takav da $S = \{\bar{x} \mid (\exists y)\ R(\bar{x}, y)\}$;

   (3) postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^k + l$, $l \geqslant 1$, takav da $S = \{\bar{x} \mid (\exists \bar{y})\ R(\bar{x}, \bar{y})\}$;

   (4) postoji primitivno rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^k + 1$ takav da $S = \{\bar{x} \mid (\exists y)\ R(\bar{x}, y)\}$;

   (5) postoji priimitivno rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^k + l$, $l \geqslant 1$, takav da $S = \{\bar{x} \mid (\exists \bar{y})\ R(\bar{x}, \bar{y})\}$.

Dokaz. 1. Ako je $S = Dom(F)$, gde je F parcijalno rekurzivna k-arna funkcija, onda je $R = Dom(G)$ gde je $G = F(\kappa_0^k, \ldots, \kappa_{k-1}^k)$. Sa druge strane, ako je $R = Dom(F)$, gde je F parcijalno rekurzivna unarna funkcija, onda je $S = Dom(G)$, gde je $G = F(\kappa^k)$.

2. Tvrdjenje sledi iz 1. i odgovarajućih karakterizacija rekurzivne nabrojivosti za podskupove od $\mathbb{N}$. Ostavljamo detalje dokaza za vežbu. $\square$

(6.21) Primer. Halting skup $\mathcal{H}$ je rekurzivno nabrojiv. Zaista, $\mathcal{H} = \{(e, x) \mid (\exists y)\ T(1, e, x, y)\}$, pa je ispunjen uslov (4) iz prethodne karakterizacije.

Direktna posledica prethodnih rezultata i leme (5.3) je sledeća lema.

(6.22) Lema. Neka je $F(\bar{x})$ parcijalno rekurzivna funkcija i $R(\bar{x})$ rekurzivno nabrojiv skup. Tada je funkcija definisana sa:

$$G(\bar{x}) = \begin{cases} F(\bar{x}) & R(\bar{x}) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

parcijalno rekurzivna. $\square$

Analogno sa (6.5) imamo sledeću lemu.

(6.23) Lema. Ako se $A \subseteq \mathbb{N}^k$ svodi na $B \subseteq \mathbb{N}^l$ i B je rekurzivno nabrojiv, onda je i A rekurzivno nabrojiv. Drugim rečima, ako se A svodi na B i A nije rekurzivno nabrojiv, onda ni B nije rekurzivno nabrojiv.

Dokaz. Neka je $\chi_A(\bar{x}) = \chi_B(F_0(\bar{x}), \ldots, F_{l-1}(\bar{x}))$ iz definicije svodjenja. Ako je B rekurzivno nabrojiv, tj. $B = Dom(G)$, gde je G parcijalno rekurzivna l-arna funkcija, tada je $A = Dom(H)$, gde je $H = G(F_0, \ldots, F_{l-1})$ očigledno parcijalno rekurzivna k-arna funkcija. Zaista $\bar{x} \in A$ akko $\chi_A(\bar{x}) = 1$ akko $\chi_B(F_0(\bar{x}), \ldots, F_{l-1}(\bar{x})) = 1$ akko $(F_0(\bar{x}), \ldots, F_{l-1}(\bar{x})) \in B$ akko $G(F_0(\bar{x}), \ldots, F_{l-1}(\bar{x}))\downarrow$, tj. akko $H(\bar{x})\downarrow$. $\square$

Za sada ne znamo nijedan skup koji nije rekurzivno nabrojiv, pa metod svodjenja za dokazivanje da skup nije rekurzivno nabrojiv još uvek ne možemo da koristimo. Jedan primer skupa koji nije rekurzivno nabrojiv dat je u sledećem zadatku.

(6.24) Zadatak. Skup $\{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\}$ nije rekurzivno nabrojiv.

Rešenje. Pretpostavimo suprotno. Neka je $S = \{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\} = Ran(F)$, gde je F primitivno rekurzivna funkcija, specijalno totalna (primetite da jasno $S \neq \varnothing$). Posmatrajmo funkciju $G(x) = F(x) \cdot x + 1 = \Phi(1, F(x), x) + 1$. G je jasno parcijalno rekurzivna. Primetimo da je $G(x)$ i totalna. Zaista, za svako x, $F(x)$ je indeks totalne funkcije, pa $F(x) \cdot x\downarrow$, odakle i $G(x)\downarrow$. Neka je g indeks za G. Tada $g \in S$, pa postoji a tako da $g = F(a)$. Sada imamo $g \cdot a = G(a) = F(a) \cdot a + 1 = g \cdot a + 1$. Kontradikcija. $\square$

Sada možemo da vidimo jedan primer svodjenja.

(6.25) Zadatak. Skup $\{e \mid \phi_e \simeq Z\}$ nije rekurzivno nabrojiv.

Rešenje. Uočimo funkciju $F(t,x) = Z(t \cdot x) = Z(\Phi(1,t,x))$. Ona je jasno parcijalno rekurzivna, pa ima svoj indeks f. Dakle, $F(t,x) = f \cdot (t,x) = S_1^1(f,t) \cdot x$, što možemo da zapišemo i ovako:

$$S_1^1(f,t) \cdot x = Z(t \cdot x) = \begin{cases} 0 & t \cdot x \downarrow \\ \uparrow & t \cdot x \uparrow \end{cases} .$$

Prema tome, ako je ϕ_t totalna, onda je i $\phi_{S_1^1(f,t)}$ totalna i $\simeq Z$. Ako ϕ_t nije totalna, onda ni $\phi_{S_1^1(f,t)}$ nije totalna. Dakle, $t \in \{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\}$ akko $S_1^1(f,t) \in \{e \mid \phi_e \simeq Z\}$, pa smo sveli rekurzivno nabrojiv skup $\{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\}$ na $\{e \mid \phi_e \simeq Z\}$, te ni on nije rekurzivno nabrojiv. □

(6.26) Zadatak. Dokazati da svaki beskonačan rekurzivno nabrojiv skup sadrži beskonačan rekurzivan podskup.

Rešenje. Neka je $S = Ran(F)$, gde je F unarna totalna rekurzivna funkcija. Definišimo funkciju G primitivnom rekurzijom sa:

$$\begin{aligned} G(0) &= F(0); \\ G(x+1) &= \max(G(x), F(x+1)). \end{aligned}$$

Funkcija G očigledno je neopadajuća i $Ran(G) \subseteq Ran(F) = S$. Kako je $Ran(F)$ beskonačan, za svako x postoji $x' > x$ tako da $F(x') > F(x)$, pa je prema tome i $Ran(G)$ beskonačan. Konačno, $Ran(G)$ je rekurzivan prema (6.12). □

Videćemo da komplement rekurzivno nabrojivog skupa ne mora biti rekurzivno nabrojiv (vidite Postovu teoremu). Sledeći zadaci pokazuju da rekurzivno nabrojivi skupovi jesu zatvoreni za neke skupovne operacije.

(6.27) Zadatak. Ako su S, S' rekurzivno nabrojivi, dokazati da su i $S \cap S'$ i $S \cup S'$ rekurzivno nabrojivi. Dokazati i jače tvredjenje: Postoje primitivno rekurzivne binarne funkcije F i G takve da je $W_x \cap W_y = W_{F(x,y)}$ i $W_x \cup W_y = W_{G(x,y)}$.

Rešenje. Pretpostavimo da je $S(x)$ definisan sa $(\exists y)\ R(x,y)$, a S' definisan sa $(\exists y)\ R'(x,y)$, gde su R i R' rekurzivni. Tada je $S \cup S'$ definisana sa $(\exists y)(R(x,y) \vee R'(x,y))$, a sa $S \cap S'$ definisana sa $(\exists y y')(R(x,y) \wedge R'(x,y'))$. Dakle, vidimo da su $S \cup S'$ i $S \cap S'$ rekurzivno nabrojivi.

Dokažimo da postoji primitivno rekurzivna binarna funkcija F takva da $W_x \cap W_y = W_{F(x,y)}$. Uočimo funkciju $G(x,y,t) = \begin{cases} 0 & x \cdot t \downarrow \text{ i } y \cdot t \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Primetimo da je $x \cdot t \downarrow$ i $y \cdot t \downarrow$ opisano sa $(\exists u) T(1,x,t,z) \wedge (\exists v) T(1,y,t,v)$, tj. $(\exists uv)(T(1,x,t,u) \wedge T(1,y,t,v))$, pa je G parcijalno rekurzivna prema (5.3). Neka je g indeks funkcije G. Tada $S_1^2(g,x,y) \cdot t = g \cdot (x,y,t) = G(x,y,t)$. Označimo $F(x,y) = S_1^2(g,x,y)$, F je jasno primitivno rekurzivna. Takodje po konstrukciji, $F(x,y) \cdot t \downarrow$ akko $x \cdot t \downarrow$ i $y \cdot t \downarrow$, tj. $W_{F(x,y)} = W_x \cap W_y$.

Analogno tvrdjenje za uniju ostavljamo za vežbu. □

(6.28) Zadatak. Ako je S rekurzivno nabrojiv, dokazati da je i $\bigcup_{t \in S} W_t$ rekurzivno nabrojiv. Dokazati i jače tvrdjenje: postoji primitivno rekurzivna funkcija $F(x)$ takva da $W_{F(x)} = \bigcup_{t \in W_x} W_t$.

Rešenje. Dokazaćemo jače tvrdjenje. Posmatrajmo funkciju $G(x,z) = \begin{cases} 0 & (\exists t)(x \cdot t \downarrow \wedge\, t \cdot z \downarrow) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Kako je $(\exists t)(x \cdot t \downarrow \wedge\, t \cdot z \downarrow)$ ekvivalentno sa $(\exists tuv)(T(1,x,t,u) \wedge T(1,t,z,v))$, G je parcijalno rekurzivna prema (5.3). Neka je g indeks za G; tada $S_1^1(g,x) \cdot z = g \cdot (x,z) = G(x,z)$. Ako uzmemo $F(x) = S_1^1(g,x)$, tada je F primitivno rekurzivna funkcija i $F(x) \cdot z \downarrow$ akko $(\exists t)(x \cdot t \downarrow \wedge\, t \cdot z \downarrow)$, tj. akko $z \in \bigcup_{t \in W_x} W_t$, pa je $W_{F(x)} = \bigcup_{t \in W_x} W_t$. □

Primetimo da rekurzivno nabrojivi skupovi nisu zatvoreni za proizvoljne unije. Npr. za svaki A imamo $A = \bigcup_{t\in A}\{t\}$, svi jednočlani skupovi su rekurzivno nabrojivi, ali A ne mora biti. Takodje, rekurzivno nabrojivi skupovi nisu zatvoreni za proizvoljne preseke, čak ni sa one koji su rekurzivno nabrojivo indeksirani. Npr. $\bigcap_{t\in\mathbb{N}}\{e \mid e\cdot t\downarrow\} = \{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\}$ nije rekurzivno nabrojiv, a relacija $e\cdot t\downarrow$ ekvivalentna je sa $(\exists y)\ T(1,e,t,y)$, pa direktno vidimo da je u pitanju presek rekurzivno nabrojivih skupova koji je indeksiran sa $\mathbb{N}$ (koji je takodje rekurzivno nabrojiv).

(6.29) Zadatak. Ako je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ rekurzivno nabrojiv, onda su i:

$$\{(\bar{x},z) \mid (\exists y < z)\ S(\bar{x},y)\} \ \text{ i } \ \{(\bar{x},z) \mid (\forall y < z)\ S(\bar{x},y)\}$$

rekurzivno nabrojivi.

Rešenje. Neka je S definisano sa $(\exists u)\ R(\bar{x},y,u)$, gde je R rekurzivan.

Označimo sa $A = \{(\bar{x},z) \mid (\exists y < z)\ S(\bar{x},y)\}$. Tada je $A(\bar{x},z)$ definisan sa $(\exists yu)(y < z \wedge R(\bar{x},y,u))$. Kako je relacija $y < z \wedge R(\bar{x},y,u)$ rekurzivna, A je rekurzivno nabrojiv.

Neka je sada $B = \{(\bar{x},z) \mid (\forall y < z)\ S(\bar{x},y)\}$. $B(\bar{x},z)$ definisano je sa $(\forall y < z)(\exists u)\ R(\bar{x},y,u)$. Primetimo da je ovo ekvivalentno sa $(\exists w)(\forall y < z)\ R(\bar{x},y,(w)_y)$. Jasno je da $(\exists w)(\forall y < z)\ R(\bar{x},y,(w)_y)$ povlači $(\forall y < z)(\exists u)\ R(\bar{x},y,u)$. Sa druge strane, ako $(\forall y < z)(\exists u)\ R(\bar{x},y,u)$, onda za svako $y < z$ izaberimo u_y tako da $R(\bar{x},y,u_y)$. Tada $w = \langle u_0,\dots,u_{z-1}\rangle$ svedoči da $(\exists w)(\forall y < z)\ R(\bar{x},y,(w)_y)$.

Sada, $(\forall y < z)\ R(\bar{x},y,(w)_y)$ je rekurzivna relacija jer je data ograničenom univerzalnom kvantifikacijom, pa je B rekurzivno nabrojiv jer je opisan sa $(\exists w)(\forall y < z)\ R(\bar{x},y,(w)_y)$. □

Sledeći zadatak pojačava prethodno tvrdjenje. Ostavljamo ga za vežbu.

(6.30) Zadatak. Dokazati da postoje primitivno rekurzivne funkcije $F(t)$ i $G(t)$ takve da:

$$W_{F(t)} = \{(\bar{x},z) \mid (\exists y < z)\ W_t(\bar{x},z)\} \ \text{ i } \ W_{G(t)} = \{(\bar{x},z) \mid (\forall y < z)\ W_t(\bar{x},z)\}.$$

(6.31) Zadatak. Za k-arnu funkciju F, graf od F je $\Gamma(F) = \{(\bar{x},F(\bar{x})) \mid \bar{x} \in Dom(F)\}$. Dokazati da je F parcijalna rekurzivna funkcija akko je $\Gamma(F)$ rekurzivno nabrojiv.

Rešenje. Neka je F parcijalno rekurzivna funkcija i neka je f njen indeks. Kako $(\bar{x},y) \in \Gamma(F)$ akko $f\cdot\bar{x} = y$, tj. akko $(\exists z)(T(k,f,\kappa^k(\bar{x}),z) \wedge U(z) = y)$, pa je $\Gamma(F)$ jasno rekurzivno nabrojiv. Obratno, pretpostavimo da je $(\bar{x},y) \in \Gamma(F)$ akko $(\exists z)\,R(\bar{x},y,z)$, za neki rekurzivan R. Tada je $F(\bar{x}) \simeq \kappa_0((\mu u)\,R(\bar{x},\kappa_0(u),\kappa_1(u)))$ parcijalno rekurzivna. □

D. Postova teorema i posledice

(6.32) Postova teorema. Skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan akko su i S i S^c rekurzivno nabrojivi.

Dokaz. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivan. Tada je i $R = S \times S \subseteq \mathbb{N}^{2k}$ rekurzivan jer $\chi_R(\bar{x},\bar{y}) = \chi_S(\bar{x})\chi_S(\bar{y})$. Jasno je $S = \{\bar{x} \mid (\exists\bar{y})\ R(\bar{x},\bar{y})\}$, pa je S rekurzivno nabrojiv. (Alternatinvo, kako smo već videli, S je rekurzivan akko $S = \varnothing$ ili $S = Ran(F)$ za neku neopadajuću totalnu rekurzivnu funkciju F; u oba slučaja S je rekurzivno nabrojiv.) Kako S rekurzivan povlači S^c rekurzivan, to prethodni argument povlači da je i S^c rekurzivno nabrojiv.

Neka su sada i S i S^c rekurzivno nabrojivi. Tada postoje rekurzivni skupovi $R_0, R_1 \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ takvi da $S = \{\bar{x} \mid (\exists y)\ R_0(\bar{x},y)\}$ i $S^c = \{\bar{x} \mid (\exists y)\ R_1(\bar{x},y)\}$. Tada je $R_0 \cup R_1$ takodje rekurzivan, i posmatrajmo $F(\bar{x}) = (\mu y)\ (R_0 \cup R_1)(\bar{x},y)$. F je jasno parcijalno rekurzivna, ali zapravo ona je i totalna: ako $\bar{x} \in S$, onda postoji y tako da $R_0(\bar{x},y)$, a ako $\bar{x} \in S^c$, onda postoji y tako da $R_1(\bar{x},y)$; u oba slučaja $F(\bar{x})\downarrow$. Sad primetimo da važi $S(\bar{x})$ akko $R_0(\bar{x},F(\bar{x}))$ (kako je R_0 rekurzivan, ovo završava dokaz da je S rekurzivan). Ako $R_0(\bar{x},F(\bar{x}))$, onda direktno po definiciji važi $S(\bar{x})$. Ako $\neg R_0(\bar{x},F(\bar{x}))$, kako $(R_0 \cup R_1)(\bar{x},F(\bar{x}))$, dobijamo $R_1(\bar{x},F(\bar{x}))$, odakle po definiciji $S^c(\bar{x})$, tj. $\neg S(\bar{x})$. □

(6.33) Posledica. $\mathcal{K}^c$ i $\mathcal{H}^c$ nisu rekurzivno nabrojivi.

Dokaz. Kako smo videli, $\mathcal{K}$ i $\mathcal{H}$ nisu rekurzivni, ali jesu rekurzivno nabrojivi. Prema Postovoj teoremi direktno zaključujemo da $\mathcal{K}^c$ i $\mathcal{H}^c$ nisu rekurzivno nabrojivi. $\square$

(6.34) Zadatak. Dokazati da sledeći skupovi nisu rekurzivno nabrojivi:

(a) $A = \{e \mid 5 \notin W_e\}$;

(b) $B = \{e \mid W_e$ je konačan$\}$;

(c) $C = \{e \mid E_e \neq \mathbb{N}\}$.

Rešenje. (a) Svešćemo $\mathcal{K}^c$ na A. Treba da nadjemo totalnu rekurzivnu funkciju F takvu da $e \cdot e \uparrow$ akko $F(e) \cdot 5 \uparrow$, tj. $e \cdot e \downarrow$ akko $F(e) \cdot 5 \downarrow$. Uočimo funkciju $G(u,x) = \begin{cases} 0 & u \cdot u \downarrow \wedge x = 5 \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Funkcija G je parcijalno rekurzivna prema (6.22) (Zašto?). Neka je g indeks za G i $F(u) = S_1^1(g,u)$. Tada $F(u) \cdot x = \begin{cases} 0 & u \cdot u \downarrow \wedge x = 5 \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Očigledno $u \cdot u \downarrow$ akko $F(e) \cdot 5 \downarrow$.

(b) Ponovo svodimo $\mathcal{K}^c$ na B. Treba nam F takva da $e \cdot e \uparrow$ akko $W_{F(e)}$ je konačan, tj. $e \cdot e \downarrow$ akko $W_{F(e)}$ je beskonačan. Uočimo funkciju $G(u,x) = \begin{cases} 0 & u \cdot u \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Funkcija G je parcijalno rekurzivna prema (6.22). Neka je g indeks za G i $F(u) = S_1^1(g,u)$. Tada $F(u) \cdot x = \begin{cases} 0 & u \cdot u \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Ako $e \cdot e \downarrow$, onda $F(e) \cdot x \downarrow$ za sve x, pa $W_{F(e)} = \mathbb{N}$ je beskonačan. Ako $e \cdot e \uparrow$, onda $F(e)\dot{x} \uparrow$ za sve x, pa $W_{F(e)} = \varnothing$ nije beskonačan.

(c) Svodimo $\mathcal{K}^c$ na C . Treba nam F takva da $e \cdot e \uparrow$ akko $E_{F(e)} \neq \mathbb{N}$, tj. $e \cdot e \downarrow$ akko $E_{F(e)} = \mathbb{N}$. Uočimo $G(u,x) = \begin{cases} x & u \cdot u \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. G je parcijalno rekurzivna prema (6.22). Neka je g njen indeks i $F(u) = S_1^1(g,u)$. Tada je $F(u) \cdot x = \begin{cases} x & u \cdot u \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Ako $e \cdot e \downarrow$, tada $F(e)$ indeksira identitetu pa je $E_{F(e)} = \mathbb{N}$. Ako $e \cdot e \uparrow$, tada $F(e)$ indeksira praznu funkciju pa je $E_{F(e)} = \varnothing \neq \varnothing$. $\square$

(6.35) Zadatak. Ako je F totalna rekurzivna k-arna funkcija, dokazati da je graf $\Gamma(F)$ rekurzivan.

Rešenje. Neka je f indeks za F. Imamo $(\bar{x}, y) \notin \Gamma(F)$ akko $f \cdot \bar{x} \neq y$, što je ekvivalentno sa $(\exists z)(T(k, f, \kappa^k(\bar{x}), z) \wedge U(z) \neq y)$ (smer $\Rightarrow$ važi jer je F totalna). Dakle, $\Gamma(F)^c$ je rekurzivno nabrojiv, a kako je i $\Gamma(F)$ rekurzivno nabrojiv prema (6.31), $\Gamma(F)$ je rekurzivan prema Postovoj teoremi. $\square$

E. Rajs-Šapirova teorema

(6.36) Notacija. Neka su F i G parcijalno rekurzivne k-arne funkcije. Sa $F \subseteq G$ označavamo da je $Dom(F) \subseteq Dom(G)$ i za svako $\bar{x} \in Dom(F)$ važi $F(\bar{x}) = G(\bar{x})$. Funkcija F je konačna ako je $Dom(F)$ konačan.

(6.37) Rajs-Šapirova teorema. Neka je $\mathcal{F}$ neka familija parcijalno izračunljivih k-arnih funkcija i $I_{\mathcal{F}} = \{e \mid \phi_e^{(k)} \in \mathcal{F}\}$. Pretpostavimo da je $I_{\mathcal{F}}$ rekurzivno nabrojiv. Tada važi:

$$F \in \mathcal{F} \text{ akko postoji konačna funkcija } F_0 \in \mathcal{F} \text{ tako da } F_0 \subseteq F.$$

Za dokaz Rajs-Šapirove teoreme biće nam potrebna jedna lema. Za početak fiksiraćemo sledeću notaciju. Videli smo da je standardan skup $\mathcal{K}$ rekurzivno nabrojiv skup, pa postoji parcijalno izračunljiva unarna funkcija K^* takva da $Dom(K^*) = \mathcal{K}$. Fiksirajmo neki, bilo koji, indeks k^* funkcije K^*. Dakle, k^* je kod nekog fiksiranog programa koji računa funkciju K^*. Fiksirajmo i $m^* = \mathfrak{m}(k^*)$.

(6.38) Lema. Predikat $P^*(x,t) =$,,izračunavanje $k^* \cdot x$, tj. $K^*(x)$, se završava u najviše t koraka" je primitivno rekurzivan.

Dokaz. Ideja dokaza je da uvedemo funkciju koja prati izračunavanje $k^* \cdot x$ korak-po-korak. Definišaćemo funkciju $F(x,t)$ takvu da $F(x,t) = \langle n^t, r_1^t, \ldots, r_{m^*}^t \rangle$, gde je n^t broj naredbe koja se sledeća primenjuje i $(r_1^t, \ldots, r_{m^*}^t)$ stanje u registrima u t-tom koraku izračunavanja $k^* \cdot x$. (Ako $k^* \cdot x \uparrow$, onda izračunavanje nije konačno, pa je ova funkcija definisana za sve t; ako $k^* \cdot x \downarrow$, onda je izračunavanje konačno, ali ćemo nakon njegovog kraja nastaviti da ponavljamo poslednje stanje za svako sledeće t.)

Dakle, treba da definišemo $F(x,0) = \langle 0, x, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m^*-1} \rangle$, a $F(x,t+1)$ definišemo sledećim razdvajanjem po slučajevima:

- ako $n := (F(x,t))_0 < \ell(k^*)$, tj. ako naredba koju izvršavamo postoji:

•• ako $\ell((k^*)_n) = 2$, tj. naredba koju izvršavamo je $R_i^+(m)$, gde $i := ((k^*)_n)_0$ i $m := ((k^*)_n)_1$:

$$F(x,t+1) = \langle m,\ (F(x,t))_1 + \chi_=(1,i),\ (F(x,t))_2 + \chi_=(2,i), \ldots,\ (F(x,t))_{m^*} + \chi_=(m^*,i) \rangle;$$

•• ako $\ell((k^*)_n) = 3$, tj. naredba koju izvršavamo je $R_i^-(m,m')$, gde $i := ((k^*)_n)_0$, $m := ((k^*)_n)_1$ i $m' := ((k^*)_n)_2$, onda:

••• ako $(F(x,t))_i > 0$:

$$F(x,t+1) = \langle m,\ (F(x,t))_1 \dot{-} \chi_=(1,i),\ (F(x,t))_2 \dot{-} \chi_=(2,i), \ldots,\ (F(x,t))_{m^*} \dot{-} \chi_=(m^*,i) \rangle;$$

••• ako $(F(x,t))_i = 0$:

$$F(x,t+1) = \langle m',\ (F(x,t))_1 \dot{-} \chi_=(1,i),\ (F(x,t))_2 \dot{-} \chi_=(2,i), \ldots,\ (F(x,t))_{m^*} \dot{-} \chi_=(m^*,i) \rangle;$$

- ako $n \geqslant \ell(k^*)$, tj. ako naredba koju izvršavamo ne postoji, samo prepišemo:

$$F(x,t+1) = F(x,t).$$

Jasno je da je definisana funkcija primitivno rekurzivna. Takodje je jasno da $P^*(x,t)$ važi akko $(F(x,t))_0 \geqslant \ell(k^*)$. Prema tome, ovaj predikat je primitivno rekurzivan. □

Dokaz Rajs-Šapirove teoreme. I dalje fiksiramo prethodnu notaciju.

($\Rightarrow$) Neka je $F \in \mathcal{F}$. Pretpostavimo suprotno, neka za svaku konačnu funkciju $F_0 \subseteq F$ važi $F_0 \notin \mathcal{F}$. Posmatrajmo funkciju $G(e,\bar{x})$ datu sa:

$$G(e,\bar{x}) = \begin{cases} F(\bar{x}) & \neg P^*(e, x_0 + \cdot + x_{k-1}) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}.$$

Primetimo da je G parcijalno rekurzivna funkcija (Zašto?), pa ima indeks g. Tada je $S_k^1(g,e) \cdot \bar{x} = g \cdot (e,\bar{x}) = G(e,\bar{x}) = \begin{cases} F(\bar{x}) & \neg P^*(e, x_0 + \cdot + x_{k-1}) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Dakle, jasno je $\phi^{(k)}_{S_k^1(g,e)} \subseteq F$.

Ako $e \in \mathcal{K}^c$, tj. $k^* \cdot e \uparrow$, tada $\neg P^*(e, x_0 + \cdot + x_{k-1})$ za svako $\bar{x}$, pa u stvari $\phi^{(k)}_{S_k^1(g,e)} = F \in \mathcal{F}$, odakle $S_k^1(g,e) \in I_{\mathcal{F}}$.

Neka $e \in \mathcal{K}$, tj. $k^* \cdot e \downarrow$, i neka je t broj koraka u kome se izračunava $k^* \cdot e$. Tada $\neg P^*(e, x_0 + \cdot + x_{k-1})$ akko $x_0 + \cdot + x_{k-1} < t$. Kako imamo samo konačno mnogo $\bar{x}$ sa $x_0 + \cdot + x_{k-1} < t$, $Dom(\phi^{(k)}_{S_k^1(g,e)})$ je konačan, tj. funkcija $\phi^{(k)}_{S_k^1(g,e)}$ je konačna, pa kako je i $\phi^{(k)}_{S_k^1(g,e)} \subseteq F$, onda $\phi^{(k)}_{S_k^1(g,e)} \notin \mathcal{F}$ po pretpostavci. Prema tome, $S_k^1(g,e) \notin I_{\mathcal{F}}$.

Dakle, $e \in \mathcal{K}^c$ akko $S_k^1(g,e) \in I_{\mathcal{F}}$, pa $S_k^1(g,e)$ svodi $\mathcal{K}^c$ na $I_{\mathcal{F}}$. Kako $\mathcal{K}^c$ nije rekurzivno nabrojiv, nije ni $I_{\mathcal{F}}$. Kontradikcija.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo suprotno. Neka je F parcijalno rekurzivna funkcija takva da $F \notin \mathcal{F}$, ali postoji konačna funkcija $F_0 \in \mathcal{F}$ takva da $F_0 \subseteq F$. Neka je f_0 neki indeks funkcije f_0. Definišimo funkciju $H(e,\bar{x})$ sa:

$$H(e,\bar{x}) = \begin{cases} F(\bar{x}) & f_0 \cdot \bar{x} \downarrow \text{ ili } k^* \cdot e \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}.$$

Kako je „$f_0 \cdot \bar{x} \downarrow$ ili $k^* \cdot e \downarrow$" ekvivalentno sa $(\exists y)(T(k, f_0, \kappa^k(\bar{x}), y) \vee T(1, k^*, e, y))$, H je parcijalno rekurzivna prema (5.3), i neka je h neki njen indeks. Tada je $S^1_k(h, e) \cdot \bar{x} = h \cdot (e, \bar{x}) = H(e, \bar{x}) = \begin{cases} F(\bar{x}) & f_0 \cdot \bar{x} \downarrow \text{ ili } k^* \cdot e \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Opet je jasno, $\phi^{(k)}_{S^1_k(h,e)} \subseteq F$.

Ako $e \in \mathcal{K}^c$, tj. $k^* \cdot e \uparrow$, onda $S^1_k(h, e) \cdot \bar{x} \downarrow$ akko $f_0 \cdot \bar{x} \downarrow$, pa $Dom(\phi^{(k)}_{S^1_k(h,e)}) = Dom(F_0)$, a kako $\phi^{(k)}_{S^1_k(h,e)}, F_0 \subseteq F$, zaključujemo $\phi^{(k)}_{S^1_k(h,e)} = F_0 \in \mathcal{F}$, pa $S^1_k(h, e) \in I_{\mathcal{F}}$.

Ako $e \in \mathcal{K}$, tj. $k^* \cdot e \downarrow$, onda je jasno $\phi^{(k)}_{S^1_k(h,e)} = F \notin \mathcal{F}$, pa $S^1_k(h, e) \notin I_{\mathcal{F}}$.

Dakle, ponovo imamo $e \in \mathcal{K}^c$ akko $S^1_k(h, e) \in I_{\mathcal{F}}$, pa $S^1_k(h, e)$ svodi $\mathcal{K}^c$ na $I_{\mathcal{F}}$. Kako $\mathcal{K}^c$ nije rekurzivno nabrojiv, nije ni $I_{\mathcal{F}}$. Kontradikcija. □

(6.39) Komentar. Obrat Rajs-Šapirove ne važi, tj. može se desiti da je zadovoljen uslov: $F \in \mathcal{F}$ akko postoji konačna funkcija $F_0 \in \mathcal{F}$ tako da $F_0 \subseteq F$, ali da $I_{\mathcal{F}}$ ne bude rekurzivno nabrojiv. Npr. za bilo koji skup $A \subseteq \mathbb{N}$ koji nije rekurzivno nabrojiv možemo da uzmemo $\mathcal{F} = \{F \mid Dom(F) \cap A \neq \varnothing\}$.

Tada $\mathcal{F}$ zadovoljava traženi uslov: Neka $F \in \mathcal{F}$, tj. $Dom(F) \cap A \neq \varnothing$, i izaberimo $a \in Dom(F) \cap A$. Funkcija definisana sa $F_0(x) = \begin{cases} F(x) & x = a \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$ je parcijalno rekurzivna, konačna, i zadovoljava $F_0 \subseteq F$ i $F_0 \in \mathcal{F}$. Obratno, ako je $F_0 \in \mathcal{F}$ konačna i $F_0 \subseteq F$, direktno imamo $F \in \mathcal{F}$.

Medjutim, $I_{\mathcal{F}}$ nije rekurzivno nabrojiv. Uočimo funkciju $G(t, x) = \begin{cases} 0 & t = x \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. G je očigledno parcijalno rekurzivna, i neka je g njen indeks. Tada $S^1_1(g, t) \cdot x = g \cdot (t, x) = G(t, x) = \begin{cases} 0 & t = x \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Primetimo da za svako a imamo $Dom(\phi_{S^1_1(g,a)}) = \{a\}$, pa $a \in A$ akko $\phi_{S^1_1(g,a)} \in \mathcal{F}$ akko $S^1_1(g, a) \in I_{\mathcal{F}}$. Prema tome sveli smo A na $I_{\mathcal{F}}$, pa kako A nije rekurzivno nabrojiv, ni $I_{\mathcal{F}}$ nije rekurzivno nabrojiv.

(6.40) Komentar. Primetimo da je Rajsova teorema specijalan slučaj Rajs-Šapirove teoreme. Naime, neka je I rekurzivan i zatvoren za indekse. Setimo se da je tada i I^c rekurzivan i zatvoren za indekse. Neka je e indeks prazne funkcije. Možemo da pretpostavimo da $e \in I$. Primetimo da je zbog zatvorenosti za indekse, $I = I_{\mathcal{F}}$, gde $\mathcal{F} = \{\phi_e \mid e \in I\}$. Kako je $I_{\mathcal{F}}$ rekurzivno nabrojiv i F sadrži praznu funkciju, po Rajs-Šapirovoj teoremi F sadrži sve funkcije, tj. $I = \mathbb{N}$.

(6.41) Zadatak. Dokazati da sledeći skupovi nisu rekurzivno nabrojivi.

(a) $A = \{e \mid W_e$ je konačan$\}$;

(b) $B = \{e \mid W_e$ je beskonačan$\}$;

(c) $C = \{e \mid W_e$ je kokonačan$\}$;

(d) $D = \{e \mid W_e$ je rekurzivan$\}$;

(e) $E = \{e \mid \phi_e$ je totalna$\}$;

(f) $F = \{e \mid \phi_e$ nije totalna$\}$;

(g) $G = \{e \mid \phi_e$ je totalna i konstantna$\}$;

(h) $H = \{e \mid \phi_e$ se može proširiti do totalne rekurzivne funkcije$\}$.

Rešenje. Dokazaćemo deo (a). Neka je $\mathcal{A} = \{\phi_e \mid e \in A\}$. Kako je A očigledno zatvoren za indekse, to je $I_{\mathcal{A}} = A$. Primetimo da zaključak Rajs-Šapirove teoreme ne važi za $\mathcal{A}$. Zaista, bilo koja konačna funkcija ima beskonačno parcijalno rekurzivno proširenje (čak primitivno rekurzivno), ali nijedna od ovih funkcija ne pripada $\mathcal{A}$. Prema tome $A = I_{\mathcal{A}}$ ne može biti rekurzivno nabrojiv. □

Kao što vidimo primena Rajs-Šapirove teoreme po pravilu je laka, ali i njen dokaz nam je dao jednu zanimljivu ideju.

(6.42) Zadatak. Bez korišćenja Rajs-Šapirove teoreme dokazati da sledeći skupovi nisu rekurzivno nabrojivi:

(a) $A = \{e \mid W_e \text{ je beskonačan}\}$;

(b) $B = \{e \mid E_e = \mathbb{N}\}$.

Rešenje. (a) Svešćemo $\mathcal{K}^c$ na A. Treba nam totalno rekurzivna funkcija F takva da $e \cdot e \uparrow$ akko $W_{F(e)}$ je beskonačan, tj. $e \cdot e \downarrow$ akko $W_{F(e)}$ je konačan. Setimo se da je $e \cdot e \downarrow$ ekvivalentno sa $k^* \cdot e \downarrow$. Uočimo funkciju $G(u,x) = \begin{cases} 0 & \neg P^*(u,x) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Prema (6.38) i (6.22) ona je parcijalno rekurzivna. Neka je g njen indeks i $F(u) = S^1_1(g,u)$. Tada $F(u) \cdot x = \begin{cases} 0 & \neg P^*(u,x) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Ako $e \cdot e \downarrow$, tj. $k^* \cdot e \downarrow$, tada $F(e) \cdot x \downarrow$ akko se izračunavanje $k^* \cdot e$ ne završava u x koraka, pa $F(e) \cdot x \uparrow$ za sve x počevši od nekog, tj. $W_{F(e)}$ je konačan. Ako $e \cdot e \uparrow$, tj. $k^* \cdot e \uparrow$, tada $\neg P^*(e,x)$ za sve x, pa $F(e) \cdot x \downarrow$ za sve x, pa $W_{F(e)} = \mathbb{N}$ je beskonačan.

(b) Svodimo $\mathcal{K}^c$ na B. Treba nam totalno rekurzivna funkcija F takva da $e \cdot e \uparrow$ akko $E_{F(e)} = \mathbb{N}$, tj. $e \cdot e \downarrow$ akko $E_{F(e)} \neq \mathbb{N}$. POnovo ćemo iskoristiti da $e \cdot e \downarrow$ akko $k^* \cdot e \downarrow$. Uočimo funkciju $G(u,x) = \begin{cases} x & \neg P^*(u,x) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Prema (6.38) i (6.22) ona je parcijalno rekurzivna, neka je g njen indeks i $F(u) = S^1_1(g,u)$. Tada $F(u) \cdot x = \begin{cases} x & \neg P^*(u,x) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Ako $e \cdot e \downarrow$, tj. $k^* \cdot e \downarrow$, kao u (a) $W_{F(e)}$ je konačan, pa je i $E_{F(e)}$ konačan, specijalno $E_{F(e)} \neq \mathbb{N}$. Ako $e \cdot e \uparrow$, tj. $k^* \cdot e \uparrow$, tada $\neg P^*(e,x)$ za sve x, pa $F(e) \cdot x = x$ za sve x, odakle $E_{F(e)} = \mathbb{N}$. □

7 Svodjenje

Podsetimo se definicije svodjenja (6.4).

(7.1) Svodjenje. Neka $A \subseteq \mathbb{N}^k$ i $B \subseteq \mathbb{N}^l$. Skup A se svodi na B ako postoje totalne rekurzivne k-arne funkcije $F_0, \dots, F_{l-1}$ tako da: $\bar{x} \in A$ akko $(F_0(\bar{x}), \dots, F_{l-1}(\bar{x})) \in B$.

Za skupove $A \subseteq \mathbb{N}^k$ i $B \subseteq \mathbb{N}^l$ pišemo $A \leqslant_m B$ ako se A svodi na B.

Kako smo videli u (6.5) i (6.23), $A \leqslant_m B$ i B je rekurzivan (rekurzivno nabrojiv) povlači da je i A rekurzivan (rekurzivno nabrojiv).

Lako je videti da je relacija $\leqslant_m$ refleksivna i tranzitivna, tj. u pitanju je preduredjenje. Za dva skupa A i B kažemo da su ekvivalentni, $A \equiv_m B$, ako $A \leqslant_m B$ i $B \leqslant_m A$, tj. ako se A i B svode jedan na drugog. Jasno je da je $\equiv_m$ relacija ekvivalencije. Kao u dokazu (6.11), za svako $A \subseteq \mathbb{N}^k$ imamo $A \equiv_m \{\kappa^k(\bar{x}) \mid \bar{x} \in A\} \subseteq \mathbb{N}$, pa su relacije $\leqslant_m$ i $\equiv_m$ potpuno odredjene na podskupovima od $\mathbb{N}$. Od sada posmatramo samo podskupove od $\mathbb{N}$.

(7.2) Stepen. Stepen skupa A, u oznaci $d_m(A)$, je $\equiv_m$-klasa skupa A. Relacija $\leqslant_m$ odredjuje parcijalno uredjenje medju stepenima.

Kroz sledeće zadatke videćemo osnovne osobine uvedenih pojmova.

(7.3) Zadatak. $A \leqslant_m B$ akko $A^c \leqslant_m B^c$.

Rešenje. Dovoljno je da dokažemo samo $(\Rightarrow)$. Neka je F totalna rekurzivna funkcija takva da $x \in A$ akko $F(x) \in B$. Tada očigledno $x \notin A$ akko $F(x) \notin B$, tj. $A^c \leqslant_m B^c$. □

(7.4) Zadatak. $d_m(\varnothing) = \{\varnothing\}$ i $d_m(\mathbb{N}) = \{\mathbb{N}\}$. Stepeni $d_m(\varnothing)$ i $d_m(\mathbb{N})$ su minimalni u uredjenju $\leqslant_m$. Štaviše, za svaki $A \neq \varnothing, \mathbb{N}$, $d_m(\varnothing), d_m(\mathbb{N}) <_m d_m(A)$.

Rešenje. Dovoljno je da dokažemo sledeće ekvivalencije:

1. $A \leqslant_m \varnothing$ akko $A = \varnothing$;

2. $A \leqslant_m \mathbb{N}$ akko $A = \mathbb{N}$;

3. $\varnothing \leqslant_m A$ akko $A \neq \mathbb{N}$;

4. $\mathbb{N} \leqslant_m A$ akko $A \neq \varnothing$.

1. $A \leqslant_m \varnothing$ znači da postoji totalna rekurzivna funkcija F takva da $x \in A$ akko $F(x) \in \varnothing$. Ovo je ekvivalentno sa $A = \varnothing$. (Za smer $(\Leftarrow)$ uočite npr. funckiju $F(x) = x$.)

2. sledi iz 1. prelaskom na komplement prema prethodnom zadatku.

3. $\varnothing \leqslant_m A$ znači da postoji totalna rekurzivna funkcija takva da $x \in \varnothing$ akko $F(x) \in A$. Ovo je ekvivalentno sa $A \neq \mathbb{N}$. (Za smer $(\Leftarrow)$ uočite npr. konstantnu funkciju $F(x) = b$, gde $b \notin A$.)

4. sledi iz 3. prelaskom na komplement prema prethodnom zadatku. □

(7.5) Zadatak. Neka je $A \neq \varnothing, \mathbb{N}$ rekurzivan skup. Tada je $d_m(A)$ familija svih rekurzivnih skupova različitih od $\varnothing$ i $\mathbb{N}$. Štaviše, $d_m(A)$ je najmanji stepen različit od $d_m(\varnothing)$ i $d_m(\mathbb{N})$.

Rešenje. Već znamo da $B \leqslant_m A$ povlači da je B rekurzivan (vidi (6.5)). Dovoljno je da još dokažemo da za $B \neq \varnothing, \mathbb{N}$ imamo $A \leqslant_m B$. Neka $b \in B$ i $b' \notin B$ i uočimo: $F(x) = \begin{cases} b & A(x) \\ b' & \neg A(x) \end{cases}$. Kako je A rekurzivan, i F je totalna rekurzivna funkcija. Takodje, $x \in A$ akko $F(x) = b$ akko $F(x) \in B$, pa smo sveli A na B. □

(7.6) Zadatak. Skup A je rekurzivno nabrojiv akko $A \leqslant_m \mathcal{K}$.

Rešenje. Smer $(\Leftarrow)$ nam je poznat iz (6.19) i (6.23). Dokazujemo $(\Rightarrow)$. Pretpostavimo da je A rekurzivno nabrojiv. Treba nam totalna rekurzivna funkcija F takva da $x \in A$ akko $F(x) \cdot F(x) \downarrow$. Uočimo funkciju $G(x,t) = \begin{cases} 0 & A(x) \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Kako je $A(x)$ rekurzivno nabrojiv, G je parcijalno rekurzivna prema (6.22). Neka je g neki indeks funkcije G. Tada je $S^1_1(g,x) \cdot t = g \cdot (x,t) = G(x,t)$. Uzmimo $F(x) = S^1_1(g,x)$. Primetimo $F(x) \cdot F(x) \downarrow$ akko $G(x, F(x)) \downarrow$ akko $A(x)$, što smo i želeli. □

(7.7) m-kompletni skupovi. Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od $\mathbb{N}$. Element $A \in \mathcal{F}$ je m-kompletan u $\mathcal{F}$ ako za svaki $X \in \mathcal{F}$ važi $X \leqslant_m A$ (A je $\leqslant_m$-najveći u $\mathcal{F}$).

Prema prethodnom zadatku imamo da je $\mathcal{K}$ m-kompletan medju rekurzivno nabrojivim skupovima.

(7.8) Zadatak. Dokazati da su sledeći skupovi $\equiv_m$-ekvivalentni: $A = \{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\}$, $B = \{e \mid W_e \text{ je beskonačan}\}$ i $C = \{e \mid E_e \text{ je beskonačan}\}$.

Rešenje. Dovoljno je da dokažemo $A \leqslant_m B \leqslant_m C \leqslant_m A$.

$A \leqslant_m B$: Treba da nadjemo totalnu rekurzivnu funkciju F takvu da: ϕ_e je totalna akko $W_{F(e)}$ je beskonačan. Ideja je da nadjemo F koja zadovoljava sledeće: $F(e) \cdot x \downarrow$ akko $e \cdot y \downarrow$ za sve $y \leqslant x$. Tada ϕ_e je totalna povlači $\phi_{F(e)}$ je totalna, specijalno $W_{F(e)}$ je beskonačan. Obratno, ϕ_e nije totalna povlači da $\phi_{F(e)}(y)$ nije definisana počevši od nekog x, pa je $W_{F(e)}$ konačan. Prema tome F svodi A na B.

Sada ćemo definisati F. Uočimo funkciju $G(t,x) = \begin{cases} 0 & (\forall y \leqslant x)\ t \cdot y \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Primetimo da je relacija $(\forall y \leqslant x)\ t \cdot y \downarrow$ ekvivalentna sa $(\forall y \leqslant x)(\exists z)\ T(1,t,y,z)$. Relacija $(\exists z)\ T(1,t,y,z)$ je rekurzivno nabrojiva, pa je i $(\forall y \leqslant x)(\exists z)\ T(1,t,y,z)$ rekurzivno nabrojiva prema (6.29), odakle sledi da je G parcijalno rekurzivna. Neka je g indeks od G, pa imamo $S^1_1(g,t) \cdot x = g \cdot (t,x) = G(t,x)$. Sada uzmimo $F(t) = S^1_1(g,t)$ i primetimo: $F(e) \cdot x \downarrow$ akko $(\forall y \leqslant x)\ t \cdot y \downarrow$. Time smo završili ovaj deo zadatka.

$B \leqslant_m C$: Treba da nadjemo totalnu rekurzivnu funkciju F takvu da: W_e je beskonačan akko $E_{F(e)}$ je beskonačan. Ideja je da namestimo da je $W_e = E_{F(e)}$, tj. $e \cdot x \downarrow$ akko $(\exists y)\ F(e) \cdot y = x$, što je očigledno dovoljno.

Definišimo funkciju F. Uočimo funkciju $G(t,x) = \begin{cases} x & t \cdot x \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$; G je očigledno parcijalno rekurzivna, pa ima indeks g. Tada $S^1_1(g,t) \cdot x = g \cdot (t,x) = G(t,x)$, i uzmimo $F(t) = S^1_1(g,t)$. Tada $F(e) \cdot x \downarrow$ akko $F(e) \cdot x = x$ akko $e \cdot x \downarrow$. Ovo lako povlači $W_e = E_{F(e)}$.

$C \leqslant_m A$: Treba da nadjemo totalnu rekurzivnu funkciju F takvu da: E_e je beskonačan akko $\phi_{F(e)}$ je totalna. Ideja je da iskoristimo da je E_e beskonačan akko je neograničen, tj. akko za svako x postoji $v > x$ takav da $v \in E_e$, ili drugim rečima za svako x postoji u tako da $e \cdot u > x$. Definišimo

$G(t,x) = \begin{cases} 0 & (\exists u)\ e\cdot u > x \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$. Relacija $e{\cdot}u > x$ je rekurzivna (drugačije zapisano, ona je $\Phi(1,e,u) > x$), pa je $G(t,x)$ parcijalno rekurzivna. Neka je g njen indeks. Opet imamo $S^1_1(g,t)\cdot x = g\cdot(t,x) = G(t,x)$, i opet uzmimo $F(t) = S^1_1(g,t)$. Ako je E_e beskonačan, kao što smo već primetili, za svako x postoji u tako da $e\cdot u > x$, pa $F(e)\cdot u\downarrow$, tj. $\phi_{F(e)}$ je totalna. Ako je E_e konačan, onda je $Ran(\phi_e)$ ograničen sa nekim x, pa $F(e)\cdot x\uparrow$ i $\phi_{F(e)}$ nije totalna. Ovo završava rešenje. □

(7.9) Zadatak. Neka $A, B \subseteq \mathbb{N}$ i neka je $A * B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\}$. Dokazati da je $A * B$ supremum od A i B u smislu preduredjenja $\leqslant_m$. (Tj. dokazati da $A, B \leqslant_m A * B$ i da $A, B \leqslant_m C$ povlači $A * B \leqslant_m C$.)

Rešenje. Neka je $F(x) = 2x$ i $G(x) = 2x+1$. Tada očigledno F svodi A na $A * B$, a G svodi B na $A * B$.

Pretpostavimo sada da F svodi A na C i G svodi B na C. Treba da svedemo $A * B$ na C. Uočimo funkciju $H(y) = \begin{cases} F(qt(y,2)) & y \text{ paran} \\ G(qt(y,2)) & y \text{ neparan} \end{cases}$. Jasno je da je H totalno rekurzivna. Ako $y \in A * B$ imamo dva slučaja. Prvi, ako $y = 2x$ za neko $x \in A$, onda $H(y) = F(x) \in C$. Drugi, ako $y = 2x+1$ za neko $x \in B$, onda $H(y) = G(x) \in C$. Pretpostavimo sada da $y \notin A * B$, i opet razmotrimo dva slučaja. Ako je $y = 2x$, onda $x \notin A$ i $H(y) = F(x) \notin C$. Ako je $y = 2x+1$, onda $x \notin B$ i $H(y) = G(x) \notin B$. □

Dva skupa ne moraju da imaju infimum u smislu preduredjenja $\leqslant_m$, npr. videli smo da $\varnothing$ i $\mathbb{N}$ nemaju infimum. Ipak neki skupovi imaju infimum.

(7.10) Zadatak. Neka je $A \neq \varnothing, \mathbb{N}$ rekurzivno nabrojiv i neka je $R \neq \varnothing, \mathbb{N}$ rekurzivan skup. Tada je R infimum od A i A^c, tj. $R \leqslant_m A, A^c$ i $B \leqslant_m A, A^c$ povlači $B \leqslant_m R$.

Rešenje. U rešenju (7.5) smo videli da $R \leqslant_m A, A^c$, za $A \neq \varnothing, \mathbb{N}$. Ako $B \leqslant_m A, A^c$, tada $B, B^c \leqslant_m A$, pa kako je A rekurzivno nabrojiv, to su i B, B^c rekurzivno nabrojivi. Prema Postovoj teoremi B je rekurzivan. Ako je $B = \varnothing$ ili $B = \mathbb{N}$, onda $B \leqslant_m R$ prema (7.4), a ako je $B \neq \varnothing, \mathbb{N}$, onda $B \equiv_m R$ prema (7.5). □

(7.11) Zadatak. Neka je $\mathcal{F}$ neka familija parcijalno izračunljivih funkcija i neka je $I = \{e \mid \phi_e \in \mathcal{F}\}$. Dokazati da $I \nleqslant_m I^c$.

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, neka je F totalna rekurzivna funkcija takva da $x \in I$ akko $F(x) \in I^c$. Prema teoremi o fiksnoj tački postoji e tako da $\phi_e = \phi_{F(e)}$. Tada ili i e i $F(e)$ pripadaju I ili i e i $F(e)$ pripadaju I^c. U oba slučaja dolazimo do kontradikcije. □