ГЛАВА 7

Функције са вредностима у векторском простору

Геометријски, векторе у простору замишљамо као стрелице, односно „оријентисане дужи". При томе, идентификујемо векторе који су паралелни, исто оријентисани и једнаке дужине.

Формално говорећи, оријентисану дуж у n–димензионом еуклидском простору E^n можемо да поистоветимо са уређеним паром $(a, b) \in E^n \times E^n$; тачку a називамо њеном *почетном тачком*, а b *крајњом тачком*. На скупу оријентисаних дужи дефинисана је релација еквиваленције – две оријентисане дужи су еквивалентне ако постоји транслација еуклидског простора E^n која преводи једну од њих у другу. Елементе количничког простора у односу на ову релацију еквиваленције називамо *геометријским векторима*, а сам количнички простор *векторским простором геометријских вектора*.

Претпостављамо да је читалац упознат са геометријским дефиницијама векторских операција – сабирања вектора („правило паралелограма"), множења вектора скаларом, скаларног и векторског производа два вектора. У овој глави ћемо дати алгебарске дефиниције ових операција и испитати њихова аналитичка својства, по аналогији са аналитичким својствима алгебарских операција у пољу $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ – извод збира или производа функција, непрекидност количника непрекидних функција и сл. – којима смо се бавили у претходним главама.

1. Векторске операције у координатама

1.1. Вектори на правој. Нека је на правој дата тачка 0; идентификоваћемо је са нулом на реалној правој. Сваки вектор на тој правој може, транслацијом, да се доведе у положај у коме му је почетна тачка O. Одатле следи да је сваки вектор на (реалној) правој једнозначно одређен својом крајњом тачком – оријентисана дуж са почетном тачком x_0 и крајњом тачком x_1 идентификује се, транслацијом, са оријентисаном дужи са почетном тачком O и крајњом тачком $x_1 - x_0$.

Означимо са $\mathbf{i}$ вектор са почетном тачком O (нулом реалне праве) и крајњом тачком 1 (јединицом реалне праве). Сваки вектор $\mathbf{r}$ на реалној правој може да се напише у облику

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}, \quad \text{за неко} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Нека су $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i}$ два вектора на реалној правој и $a \in \mathbf{R}$ скалар. Тада су са

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i}, \quad a\mathbf{r}_1 = (ax_1)\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2$$

дефинисане операције сабирања вектора, множења вектора скаларом и скаларног производа два вектора.

Означимо са $\|\mathbf{r}\|$ дужину вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$, тј. број $\|\mathbf{r}\| := |x|$. Приметимо да је $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$.

1.2. Вектори у равни. Нека је у равни дата тачка O; идентификоваћемо је са нулом у комплексној равни. Сваки вектор ове равни може, транслацијом, да се доведе у положај у коме му је почетна тачка 0, па је, као и у случају реалне праве, сваки вектор на комплексној равни једнозначно одређен комплексним бројем z – његовом крајњом тачком, после транслације почетне тачке у O. Вектор са почетном тачком z_0 и крајњом тачком z_1 идентификује се, транслацијом, са оријентисаном дужи са почетном тачком O и крајњом тачком $z_1 - z_0$.

Означимо са $\mathbf{i}$ вектор са почетном тачком O (нулом комплексне равни) и крајњом тачком 1 (јединицом у $\mathbf{C}$) и са $\mathbf{j}$ вектор са почетном тачком O и крајњом тачком $i = \sqrt{-1}$ (имагинарна јединица у $\mathbf{C}$). Сваки вектор $\mathbf{r}$ у комплексној равни може да се напише у облику

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \text{за неке} \quad x, y \in \mathbf{R},$$

што одговара запису комплексног броја у облику $z = x + iy$. Ако идентификујемо комплексну раван $\mathbf{C}$ са $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, онда је $\mathbf{i}$ вектор са почетном тачком $(0, 0)$ и крајњом тачком $(1, 0)$, а $\mathbf{j}$ вектор са почетном тачком $(0, 0)$ и крајњом тачком $(0, 1)$.

Нека су $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ два вектора на реалној правој и $a \in \mathbf{R}$ скалар. Са

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j}, \quad a\mathbf{r}_1 = (ax_1)\mathbf{i} + (ay_1)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$

су дефинисане операције сабирања вектора, множења вектора скаларом и скаларног производа два вектора.

Ако уз векторе $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ посматрамо комплексне бројеве $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, можемо да приметимо да операцији сабирања вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ у равни одговара операција сабирања комплексних бројева z_1 и z_2, а множењу вектора $\mathbf{r}_1$ скаларом a операција множења комплексног броја z_1 реалним бројем a. О геометријској интерпретацији множења комплексних бројева нешто више ћемо да кажемо касније, у Примеру 3 на стр. 329.

Из Питагорине теореме следи да је дужина вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ број

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Лако се види да је и у овом случају, као и на реалној правој, $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$. Ако вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ идентификујемо са комплексним бројем $z = x + iy$, онда је

$$\|\mathbf{r}\| = |z|.$$

Општије – дужина вектора који спаја тачке z_0 и z_1 (односно, растојање између тих тачака) је $|z_1 - z_0|$.

Сви вектори који леже на правој L која спаја тачке z_0 и z_1 су колинеарни вектору $z_1 - z_0$, тј. све тачке те праве су облика

$$z = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Ово је *параметарска једначина праве* L која спаја тачке $z_0 = x_0 + iy_0$ и $z_1 = x_1 + iy_1$. Раздвајањем реалног и имагинарног дела добијамо параметарску једначину праве у облику

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \qquad y = y_0 + t(y_1 - y_0), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Пошто је сваки вектор на овој правој колинеаран вектору $z_1 - z_0$, тј. за произвољни вектор $\mathbf{v}$ на правој важи $\mathbf{v} = t_0((x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j})$, а параметар t у (1) узима све реалне вредности, свеједно је да ли у (1) уместо t стоји $t_0 t$, па једначина праве (1) може да се напише и у облику

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \tag{2}$$

где је $\mathbf{r}_0$ вектор који спаја координатни почетак са *произвољном фиксираном* тачком на правој L, а $\mathbf{v}$ *произвољни* вектор паралелан тој правој.

Нека је θ $(0 \le \theta \le \pi)$ угао између вектора $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$. Из елементарне тригонометрије следи да је

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1\|\,\|\mathbf{r}_2\|}.$$

Задатак 1. Доказати да је вектор $\mathbf{w} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ортогоналан на праву $ax + by = c$. Извести одатле формулу за угао између правих $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$. ✓

Задатак 2. Доказати да је једначина праве која спаја две тачке z_1, z_2 комплексне равни дата са

$$\bar{z} = az + b, \quad \text{где је} \quad a = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{z_1 - z_2}, \quad b = \frac{z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1}{z_2 - z_1}.$$

Доказати да осна рефлексија у односу на осу $\bar{z} = az + b$ пресликава тачку ζ у $\overline{a\zeta + b}$. ✓

1.3. Вектори у тродимензионом простору. Као и у случају вектора на правој или у равни, вектор у тродимензионом еуклидском простору можемо, после транслације која његову почетну тачку премешта у координатни почетак $O = (0, 0, 0)$, да идентификујемо са троком реалних бројева, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. За такав вектор пишемо

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где су $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ вектори са почетном тачком $(0, 0, 0)$ и крајњим тачкама $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$; другим речима, то су јединични вектори дуж x, y и z осе.

Ако су $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ два вектора на реалној правој и $a \in \mathbf{R}$ скалар, операције сабирања вектора, множења вектора скаларом и скаларног производа два вектора су дефинисане са

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j} + (z_1 + z_2)\mathbf{k}, \quad a\mathbf{r}_1 = (ax_1)\mathbf{i} + (ay_1)\mathbf{j} + (az_1)\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Вектор

$$\mathbf{O} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

је неутрал за операцију сабирања; овај вектор називамо *нула – вектором.*

Из Питагорине теореме следи да је дужина вектора $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ једнака

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}},$$

а из елементарне тригонометрије да је косинус угла θ између вектора $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ једнак

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1\|\,\|\mathbf{r}_2\|}.$$

Вектори $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ су ортогонални ако је угао између њих прав, тј. ако је $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$.

Вектор $\mathbf{r}$ називамо *јединичним вектором* ако је $\|\mathbf{r}\| = 1$.

Лема 1. *Скаларни производ има следећа својства:*

1. $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1$
2. $a(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = (a\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \cdot (a\mathbf{r}_2)$
3. $\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3$
4. $\mathbf{O} \cdot \mathbf{r}_1 = 0$.

$\triangle$ Доказ следи из дефиниције векторских операција у координатама. $\bigtriangledown$

Дефиниција 1. Вектор

$$\mathrm{P}_{\mathbf{r}_2}(\mathbf{r}_1) := \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|^2}\mathbf{r}_2$$

назива се *ортогоналном пројекцијом* вектора $\mathbf{r}_1$ на вектор $\mathbf{r}_2$. $\Diamond$

Приметимо да је

$$\mathrm{P}_{\mathbf{r}_2}(\mathbf{r}_1) = \|\mathbf{r}_1\| \cos\theta \frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|},$$

где је θ угао између вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а $\frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|}$ јединични вектор истог правца и смера као $\mathbf{r}_2$.

Пример 1. Косинусна теорема. Нека је $\triangle ABC$ произвољан троугао у равни, и нека је α угао код темена A. Нека је

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{CA}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}.$$

Тада је $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{O}$, тј. $\mathbf{a} = -(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, одакле следи

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Применом дистрибутивности скаларног производа на израз на десној страни добијам

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

где су $a = \|\mathbf{a}\|$, $b = \|\mathbf{b}\|$, $c = \|\mathbf{c}\|$ дужине страница троугла. $\sharp$

Ако вектори $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ нису паралелни, они одређују јединствену раван у тродимензионом простору. Нека је $\mathbf{n}$ јединствени јединични вектор који је ортогоналан на ту раван и усмерен *по правилу десне руке* у односу на векторе $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$: ако десном руком обухватимо праву којој припада вектор $\mathbf{n}$, тако да прсти показују од $\mathbf{r}_1$ према $\mathbf{r}_2$ по мањем углу, онда палац одређује правац вектора $\mathbf{n}$. *Векторски производ* вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ се дефинише са

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 := (\|\mathbf{r}_1\|\,\|\mathbf{r}_2\| \sin\theta)\,\mathbf{n}, \tag{3}$$

где је θ $(0 < \theta < \pi)$ угао између вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Ако су вектори $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ колинеарни $\theta = 0$ или π) њихов векторски производ је по дефиницији нула–вектор.

Из елементарне тригонометрије следи да је дужина векторског производа два вектора једнака површини паралелограма чије су они странице, односно двострукој површини троугла конструисаног над њима.

Пример 2. Синусна теорема. Нека су, као у Примеру 1, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ вектори одређени страницама троугла $\triangle ABC$ и a, b, c њихове дужине. Из чињенице да је дужина векторског производа једнака двострукој површини троугла $\triangle ABC$, следи да је

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}.$$

Одатле и из (3) следи

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

где су α, β, γ углови троугла наспрам страница $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ редом. $\sharp$

Ако су $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вектори у тродимензионом простору, њихов *мешовити производ* је *скалар*

$$[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3]:=(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3.$$

Лако се види да је запремина паралелепипеда чије су ивице ови вектори једнака апсолутној вредности мешовитог производа

$$V=|[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3]|.$$

Заиста, дужина вектора $\mathbf{N}=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2$ је једнака површини базе паралелепипеда. Пошто је вектор $\mathbf{N}$ ортогоналан на базу паралелепипеда, апсолутна вредност скаларног производа $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}_3$ једнака је производу дужине вектора $\mathbf{N}$ (тј. површине базе) и висине паралелепипеда.

У овом извођењу формуле за запремину, можемо да узмемо за базу паралелепипеда било која два вектора, тако да запремину можемо да изразимо, помоћу мешовитог производа, на три начина. Ако при томе поведемо рачуна и о знаку, добијамо идентитет

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3=(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)\cdot\mathbf{r}_1=(\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{r}_2. \tag{4}$$

Другим речима, вредност мешовитог производа се не мења ако аргументе циклично померамо:

$$[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3]=[\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_1]=[\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2].$$

Приметимо и да је, због комутативности скаларног производа,

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_3\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2).$$

Лема 2. *Векторски производ има следећа својства:*

1. $\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=-\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_1$
2. $a(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)=(a\mathbf{r}_1)\times\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1\times(a\mathbf{r}_2)$
3. $\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3, \quad (\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)\times\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3$
4. $\mathbf{O}\times\mathbf{r}_1=\mathbf{O}$.

$\triangle$ Доказ свих својстава сем дистрибутивности (својство 3) следи директно из дефиниције. За доказ дистрибутивности пођимо од вектора

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)-\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3. \tag{5}$$

Треба да докажемо да је $\mathbf{R}=\mathbf{O}$, што је еквивалентно са $\|\mathbf{R}\|^2=\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}=0$. Ако помножимо обе стране (5) са $\mathbf{R}$, добијамо

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot(\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3))-\mathbf{R}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)-\mathbf{R}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3).$$

Ако сада искористимо (4), добијамо

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}=(\mathbf{R}\times\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3)-(\mathbf{R}\times\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{r}_2-(\mathbf{R}\times\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{r}_3.$$

Тиме смо доказ свели на дистрибутивност скаларног производа (Лема 1), из које следи да је последњи израз једнак нули. $\triangledown$

Сада можемо да изразимо векторски производ у координатама. Приметимо, пре свега, да из дефиниције векторског производа следи да, за јединичне векторе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ важи

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{O}. \tag{6}$$

Нека је

$$\mathbf{r}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}\quad \text{и}\quad \mathbf{r}_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}.$$

Користећи дистрибутивност векторског производа и (6) добијамо, после краћег сређивања израза,

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=(y_1z_2-y_2z_1)\mathbf{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\mathbf{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Други начин да се напише овај израз је

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_1=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\mathbf{k} \tag{7}$$

или, најлакше за памћење,

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Скаларним множењем израза (7) са $\mathbf{r}_3=x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}$ добијамо израз за мешовити производ

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}z_3$$

или, у виду једне детерминанте

$$[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{8}$$

Запремина паралелепипеда чије су ивице вектори $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ једнака је апсолутној вредности ове детерминанте.

Задатак 3. Да ли тачке $A(2,3,1)$, $B(0,2,5)$, $C(6,-1,3)$, $D(-4,6,3)$ леже у истој равни? ✓

Задатак 4. Дате су тачке $O(0,0,0)$, $P(2,0,-1)$, $Q(2,-1,0)$, $R(1,4,0)$.

(а) Доказати да тачке O, P, Q, R не леже у истој равни и да тачке O, P, Q не леже на истој правој.

(в) Наћи растојање између тачке R и равни одређене тачкама O, P, Q.

(г) Наћи косинус угла код темена P троугла $\triangle OPQ$ и дужину ортогоналне пројекције странице OP на праву одређену тачкама P и R. ✓

Нека су $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ три вектора која не леже у истој равни. Тада је вектор $\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3$ ортогоналан на раван одређену векторима $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Другим речима, сваки вектор који је ортогоналан на $\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3$ припада равни одређеној векторима $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Пошто је $\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)$ ортогоналан на $\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3$ и на $\mathbf{r}_1$, следи да је

$$\mathbf{r}_1\times(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)=a\mathbf{r}_2+b\mathbf{r}_3$$

за неке $a, b \in \mathbf{R}$. Следећа лема даје експлицитан израз за скаларе a и b (без претпоставке да вектори не леже у истој равни).

Лема 3. *Нека су* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ *произвољна три вектора у тродимензионом простору. Тада је*

$$\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3)\mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)\mathbf{r}_3.$$

△ Доказ следи из записа векторског и скаларног производа у координатама: нека је

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}.$$

Тада је компонента уз $\mathbf{i}$ у $\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$ једнака

$$y_1(x_2y_3 - y_2x_3) - z_1(z_2x3 - x_2z_3) = x_2(y_1y_3 + z_1z_3) - x_3(y_1y_2 + z_1z_2).$$

Ако овом изразу додамо и одузмемо $x_1x_2x_3$ добијамо да је $\mathbf{i}$ компонента троструког векторског производа једнака

$$x_2(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - x_3(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3)x_2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)x_3.$$

На исти начин се израчунавају и остале две компоненте. ▽

Из Леме 3 следи да векторски производ *није* асоцијативна операција – вектор $\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)$ лежи у равни одређеној векторима $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$, а вектор $(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{r}_3 = -\mathbf{r}_3 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$ у равни одређеној векторима $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Уместо асоцијативности, троструки векторски производ задовољава следећу релацију.

Последица 1. *Нека су* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ *произвољна три вектора у тродимензионом простору. Тада је*

$$\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = 0.$$

△ Доказ следи из Леме 3. ▽

Једнакост из Последице 1 назива се *Јакобијевим*[1] *идентитетом* за векторски производ.

Пример 3. Множење комплексних бројева. Нека су

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$$

два вектора у $\mathbf{R}^3$. Ако израчунамо њихов скаларни и векторски производ у координатама, добијамо

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k}.$$

Ако уз векторе $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ посматрамо и комплексне бројеве

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

примећујемо да је производ комплексних бројева $\bar{z}_1$ и z_2 једнак

$$\bar{z}_1z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1),$$

тј. реални део овог производа одговара скаларном, а имагинарни векторском производу вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Другим речима

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathrm{Re}\,(\bar{z}_1z_2) = \frac{1}{2}(\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2), \qquad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathrm{Im}\,(\bar{z}_1z_2)\,\mathbf{k} = \frac{1}{2i}(\bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2)\,\mathbf{k}.$$

♯

[1] Јакоби (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851), немачки математичар

Пример 4. Кватерниони. Проширењем система комплексних бројева са скупа $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ на скуп $\mathbf{H} := \mathbf{R}^4$ добијамо *кватернионе*, алгебарску структуру која, осим имагинарне јединице i има још две имагинарне јединице j и k. Прецизније, кватерниони су изрази облика $a + ib + jc + kd$, који се сабирају по правилу

$$(a_1+ib_1+jc_1+kd_1)+(a_2+ib_2+jc_2+kd_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2)+j(c_1+c_2)+k(d_1+d_2),$$

а множење је дефинисано дистрибутивним и асоцијативним законом и правилима

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Из ових релација следи и

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Структура $(\mathbf{H}, +, \cdot)$ је тело (прстен који задовољава све аксиоме поља сем комутативности множења, видети дефиницију у Глави 1). По аналогији са комплексним бројевима, кватернионе облика $ib + jc + kd$ зовемо *чисто имагинарним* кватернионима. *Конјугована вредност* кватерниона $q = a + ib + jc + kd$ је кватернион

$$\overline{a + ib + jc + kd} = a - ib - jc - kd.$$

Из дефиниције множења кватерниона следи да је $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Позитивни реални број

$$|q| := \sqrt{q\bar{q}}$$

назива се *апсолутном вредношћу* кватерниона q.

Приметимо да је

$$(a + ib + jc + kd) = (a + ib) + (c + id)j,$$

а $a+ib$ и $c+id$ су комплексни бројеви, па кватернионе можемо да идентификујемо са елементима из $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Тело кватерниона можемо да опишемо и помоћу операција скаларног и векторског производа у $\mathbf{R}^3$. Посматрајмо $\mathbf{H}$ као $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ и идентификујмо кватернион $q = a + ib + jc + kd$ са *формалним збиром* скалара и вектора

$$a + \mathbf{r}, \quad \text{где је} \quad \mathbf{r} = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Тада је сабирање кватерниона дефинисано са

$$(a_1 + \mathbf{r}_1) + (a_2 + \mathbf{r}_2) = (a_1 + a_2) + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2),$$

а множење са

$$(a_1 + \mathbf{r}_1)(a_2 + \mathbf{r}_2) = (a_1a_2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + (a_1\mathbf{r}_2 + a_2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2).$$

Ознака $\mathbf{H}$ за тело кватерниона користи се у част Хамилтона[2], који их је увео као средство за проучавање механике тродимензионог система. Његов оригинални покушај, који није уродио плодом, је био да систем комплексних бројева прошири на тродимензиони простор. Не успевши у томе, проширио га је на четвородимензиони простор. Не улазећи у детаље прецизније формулације, споменимо да је данас познато да се систем бројева, сем у $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ где је он асоцијативан и комутативан, може проширити само још на $\mathbf{R}^4 = \mathbf{H}$ ако желимо да остане асоцијативан иако није комутативан, и у $\mathbf{R}^8$ ако се одрекнемо и асоцијативности. Ово тврђење доказали су методама алгебарске топологије,

[2]Хамилтон (William Rowan Hamilton, 1805–1865), ирски математичар

независно један од другог, 1958. године Кервер[3] и Милнор[4]. Напоменимо да је алгебарска структура која проширује систем бројева на $\mathbf{R}^8$ позната као алгебра *октава*, или *октаниона*. Увели су је, независно један од другог, Грејвс[5] (који јој је и дао име октаве) и Кејли[6], по коме се она некад назива и *Кејлијевим бројевима*. ♯

Пример 5. Једначине праве и равни. Нека су дате две различите тачке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $P_1(x_1, y_1, z_1)$ у $\mathbf{R}^3$ и

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$$

њима придружени вектори. Тада права L која садржи тачке P_0 и P_1 дата параметарском једначином

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{9}$$

или, у координатама,

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \qquad y = y_0 + t(y_1 - y_0), \qquad z = z_0 + t(z_1 - z_0), \qquad t \in \mathbf{R},$$

која уопштава једначину (2) и изводи се на исти начин. Као и у (2), и у (9) уместо вектора $\mathbf{r}_0$ може да стоји произвољан вектор који спаја координатни почетак са неком тачком на правој L, а уместо $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ било који вектор $\mathbf{v}$ који је паралелан правој L.

Нека је дата још једна тачка $P_2(x_2, y_2, z_2)$ која није колинеарна са тачкама P_0 и P_1, и нека је $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$. Тада су вектори $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0$ паралелни равни Σ којој припадају тачке P_0, P_1, P_2, па је вектор

$$\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$$

ортогоналан на ту раван. Нека је $S(x, y, z)$ произвољна тачка равни Σ и нека је

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Тада је вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ паралелан равни Σ, тј. ортогоналан на $\mathbf{n}$, па је

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Ово је „једначина равни у $\mathbf{R}^3$; пошто је $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$, она може да се напише у облику мешовитог производа

$$[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0].$$

Имајући у виду запис (8) мешовитог производа у координатама, једначину равни која садржи тачке P_0, P_1, P_2 можемо да запишемо и у облику

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Дакле, ако је раван дата једначином $Ax+By+Cz = D$, вектор $\mathbf{v} = A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ је ортогоналан на њу (упоредити са Задатком 1). ♯

[3] Кервер (Michel Kervaire, 1927–2007), француски математичар

[4] Милнор (John Willard Milnor, 1931), амерички математичар

[5] Грејвс (John Thomas Graves, 1806–1870), ирски правник и математичар

[6] Кејли (Arthur Cayley, 1821–1895), британски математичар

Задатак 5. Наћи параметарску једначину праве по којој се секу равни

$$x - y + 2z + 8 = 0 \quad \text{и} \quad x + 2y + z = 1$$

и наћи растојање између те праве и тачке $(0, 1, 2)$.

Упутство: За налажење вектора праве употребити векторски производ вектора равни, а за растојање пројекцију из Дефиниције 1. ✓

1.4. Вектори у k–димензионом простору. По аналогији са тродимензионим простором, тачке у $\mathbf{R}^k$ зваћемо *векторима* у k–димензионом простору. Ако су $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ и $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ два таква вектора, а $a \in \mathbf{R}$ реални број, онда су са

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} := (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_k + w_k) \quad \text{и} \quad a\mathbf{v} := (av_1, av_2, \dots, av_k)$$

дефинисане операције сабирања вектора и множења вектора скаларом, које на природан начин уопштавају одговарајуће операције у тродимензионом простору. Слично, скаларни производ је дефинисан са

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_k w_k,$$

а дужина вектора са

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_k^2} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Еуклидским растојањем (или, краће, *растојањем*[7]) између тачака

$$A(a_1, a_2, \dots, a_k) \quad \text{и} \quad B(b_1, b_2, \dots, b_k)$$

називамо број

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_k - b_k)^2}.$$

Растојање између тачака A и B је једнако дужини $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ вектора $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, где је $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$.

Из Коши–Шварцове неједнакости (Теорема 25 на стр. 85) следи да је

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \le \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|,$$

па постоји јединствени угао $\theta \in [0, \pi]$ за који је

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|}.$$

Тај угао називамо *углом између вектора* $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Вектори $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ су *ортогонални* ако је $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Пример 6. Вектори

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

у $\mathbf{R}^4$ су међусобно ортогонални. Свака два од њих су неколинеарна, тј. не постоји $a \in \mathbf{R}$ за које је $a\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j$ за $i \neq j$. ♯

---

[7] У Додатку 1 разматраћемо општији концепт растојања, односно метрике, који укључује и растојања која нису еуклидска. За сада ћемо се ограничити само на еуклидска растојања, па ћемо придев „еуклидско” често да изостављамо.

Приметимо да бинарну операцију $\times$ векторског производа из $\mathbf{R}^3$ не можемо да поновимо за k–димензиони простор – при дефинисању векторског производа $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ у тродимензионом простору користили смо чињеницу да су сви вектори који су ортогонални на $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ колинеарни (па је векторски производ био једнозначно одређен тим правцем, дужином једнаком површини паралелограма над $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и смером одређеним правилом десне руке). Међутим, као што смо видели у Примеру 6, већ у $\mathbf{R}^4$ постоји више неколинеарних вектора који су ортогонални на пар вектора – нпр. и $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ су ортогонални на пар вектора $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$.

Међутим, користећи запис векторског производа у координатама, можемо да дефинишемо $(k-1)$–*арну* операцију $\bigwedge$, која уопштава *бинарну* операцију $\times$ из случаја $k=3$ (тада је $k-1=2$), на следећи начин. Посматрајмо јединичне векторе

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_k = (0,0,0,\ldots,1),$$

који на очигледан начин уопштавају векторе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ $\mathbf{k}$ из тродимензионог простора. Нека су $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ вектори из $\mathbf{R}^k$, са координатама

$$\mathbf{v}_j = (v_1^j, v_2^j, \ldots, v_k^j) \quad \text{за} \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Њихов *спољашњи* или *клинасти производ* $\bigwedge$ је дефинисан са

$$\bigwedge(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}) := \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_k \\ v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_k^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^{k-1} & v_2^{k-1} & \cdots & v_k^{k-1} \end{vmatrix}.$$

Уместо $\bigwedge(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1})$ користи се и ознака $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_{k-1}$.

Сада можемо да дефинишемо и *мешовити производ* k вектора $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ са

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k] := (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{v}_{k-1}) \cdot \mathbf{v}_k,$$

који уопштава мешовити производ из $\mathbf{R}^3$. Очигледно је да је он једнак детерминанти

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k] := \begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_k^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_k^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^k & v_2^k & \cdots & v_k^k \end{vmatrix}.$$

Апсолутну вредност ове детерминанте, по аналогији са тродимензионим случајем, називамо *запремином k–димензионог паралелепипеда* конструисаног над векторима $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

2. Лимеси, изводи и интеграли

Подсетимо се да смо у Глави 4 дефинисали лимес низа z_n комплексних бројева на следећи начин:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_\infty \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, n > n_0 \;\Rightarrow\; |z_n - z_\infty| < \varepsilon. \tag{10}$$

Одатле смо извели појмове лимеса и непрекидности функције (Теорема 2 на стр. 169 и Последица 4 иза ње).

Израз $|z_n - z_\infty|$ у (10) је растојање између комплексних бројева z_n и z_∞, односно дужина вектора одређеног комплексним бројем $z_n - z_\infty$, тако да ова дефиниција, као и дефиниције лимеса и непрекидности, има природно уопштење у векторским просторима.

Дефиниција 2. Нека је $\mathbf{r}_n$ низ вектора у $\mathbf{R}^k$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_\infty \quad \iff \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})\, n > n_0 \;\Rightarrow\; \|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_\infty\| < \varepsilon.$$

Ако је ово испуњено, кажемо да низ $\mathbf{r}_n$ *конвергира* ка $\mathbf{r}_\infty$.

Нека је $\mathbf{r} : T \to \mathbf{R}^k$ пресликавање скупа $T \subset \mathbf{R}$ у векторски простор $\mathbf{R}^k$ и нека је a тачка нагомилавања скупа T. Тада је $A = \lim\limits_{t\to a} f(t)$ ако и само ако за сваки низ $t_n \in T \setminus \{a\}$ важи

$$\lim_{n\to\infty} t_n = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{r}(t_n) = A.$$

Функција $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ је непрекидна у тачки $\tau \in T$ ако за сваки низ $t_n \in T$ важи

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \tau \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{r}(t_n) = \mathbf{r}(\tau).$$

$\Diamond$

Из дефиниције следи да је функција $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ непрекидна у тачки τ ако и само ако је

$$\mathbf{r}(\tau) = \lim_{t\to\tau} \mathbf{r}(t).$$

Приметимо да смо у дефиницији извода функције, датој у Глави 3,

$$f'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

користили појам лимеса (који смо управо дефинисали и за функције са вредностима у векторском простору) и операције сабирања, одузимања и множења скаларом $1/h$, које имамо на располагању и у векторском простору. То нам омогућава следећу дефиницију.

Дефиниција 3. Нека $t_0 \in I$ унутрашња тачка интервала $I \subset \mathbf{R}$. Функција $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$ је *диференцијабилна у тачки* t_0 ако постоји лимес

$$\mathbf{r}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\mathbf{r}(t_0+h) - \mathbf{r}(t_0)),$$

који називамо *изводом функције* $\mathbf{r}$ у тачки t_0. $\Diamond$

Напомена 1. Приметимо да није могуће овако једноставно уопштити појам извода ако претпоставимо да је *домен*, уместо кодомена, функције у векторском простору, јер израз $1/h$ нема смисла ако h није скалар. Изучавање извода функција са *доменом* у векторском простору је предмет диференцијалног рачуна функција више промењљивих. $\diamond$

Слично се уопштава и појам Кошијевог интеграла непрекидне функције $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbf{R}^k$; резултат је *вектор*

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\, dt \in \mathbf{R}^k.$$

У претходним главама смо видели да лимес комплексне функције (и са њим везани појмови непрекидности, лимеса низа, извода, интеграла) може да се сведе на лимес реалног и имагинарног дела (видети нпр. Лему 12 на стр. 118). Та тврђења се, са практично истим доказом, уопштавају на функције са кодоменом у $\mathbf{R}^k$.

Лема 4. *Низ* $\mathbf{r}_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n)$ *низ у* $\mathbf{R}^k$ *конвергира ако и само ако конвергира по координатама, тј. ако и само ако конвергирају сви низови* x_j^n*,* $1 \le j \le k$*, и тада важи*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{r}_n = \big(\lim_{n\to\infty} x_1^n, \lim_{n\to\infty} x_2^n, \dots, \lim_{n\to\infty} x_k^n\big).$$

Функција $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))$ *има лимес у тачки нагомилавања домена* a *ако и само ако све функције* $t \mapsto x_j(t)$*,* $1 \le j \le k$*, имају лимес у тачки* a *и тада важи*

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \big(\lim_{t\to a} x_1(t), \lim_{t\to a} x_2(t), \dots, \lim_{t\to a} x_k(t)\big).$$

Функција $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))$ *је непрекидна ако и само ако су све функције* $t \mapsto x_j(t)$*,* $1 \le j \le k$*, непрекидне. У том случају, њен Кошијев интеграл је вектор*

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x_1(t)\,dt, \int_a^b x_2(t)\,dt, \dots, \int_a^b x_k(t)\,dt\right).$$

Ова функција је диференцијабилна у унутрашњој тачки домена t_0 *ако и само ако су све функције* $t \mapsto x_j(t)$*,* $1 \le j \le k$*, диференцијабилне у тој тачки и тада важи*

$$\mathbf{r}'(t_0) = \big(x_1'(t_0), x_2'(t_0), \dots, x_k'(t_0)\big).$$

$\triangle$ За вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k) \in \mathbf{R}^k$ важе очигледне неједнакости

$$|v_j| \le \|\mathbf{v}\| \le \sqrt{k}\max\{|v_1|, |v_2|, \dots |v_k|\} \quad \text{за све} \quad j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

из којих следи доказ тврђења за низове, а одатле и остала тврђења, будући да су она изведена из појма лимеса низа. $\triangledown$

3. Правила диференцирања

Нека је $I \subset \mathbf{R}$ интервал.

Ако је $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилна функција са вредностима у векторском простору и $f : I \to \mathbf{R}$ диференцијабилна скаларна функција, онда је $t \mapsto \mathbf{r}(f(t))$ диференцијабилна функција са вредностима у векторском простору и важи

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{r}(f(t))\big) = f'(t)\mathbf{r}'(f(t)). \tag{11}$$

Ово правило следи из правила за извод сложене функције, примењеног на сваку координату посебно, и Леме 4.

Ако су функције $\mathbf{r}_1 : I \to \mathbf{R}^k$ и $\mathbf{r}_2 : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилне, онда је такав и њихов збир и важи

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)\big) = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t). \tag{12}$$

Ако је функција $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилна и $c \in \mathbf{R}$ константа, онда је

$$\frac{d}{dt}\big(c\mathbf{r}(t)\big) = c\mathbf{r}'(t). \tag{13}$$

Ако је $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилна функција са вредностима у векторском простору и $f : I \to \mathbf{R}$ диференцијабилна реална функција, онда је

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\mathbf{r}(t)\big) = f'(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\mathbf{r}'(t). \tag{14}$$

Ако су функције $\mathbf{r}_1 : I \to \mathbf{R}^k$ и $\mathbf{r}_2 : I \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилне, онда је диференцијабилан и њихов скаларни производ $t \mapsto \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ и важи

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)\big) = \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t). \tag{15}$$

Ако су функције $\mathbf{r}_1 : I \to \mathbf{R}^3$ и $\mathbf{r}_2 : I \to \mathbf{R}^3$ диференцијабилне, онда је диференцијабилан и њихов векторски производ $t \mapsto \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ и важи

$$\frac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)\big) = \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t). \tag{16}$$

Ако је, уз то, и $\mathbf{r}_3 : I \to \mathbf{R}^3$ диференцијабилна функција, онда је диференцијабилан и мешовити производ $t \mapsto [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)]$ и важи

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)] = [\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3(t)] + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t), \mathbf{r}_3(t)] + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \mathbf{r}_3'(t)]. \tag{17}$$

Општије, ако су $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k \to \mathbf{R}^k$ диференцијабилне функције, онда је су диференцијабилне и функције

$$t \mapsto \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1} \quad \text{и} \quad t \mapsto [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k]$$

и важи

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\big(\mathbf{r}_1(t) \wedge \mathbf{r}_2(t) \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1}(t)\big) = \mathbf{r}_1'(t) \wedge \mathbf{r}_2(t) \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1}(t) \\ &+\mathbf{r}_1(t) \wedge \mathbf{r}_2'(t) \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1}(t) + \cdots + \mathbf{r}_1(t) \wedge \mathbf{r}_2(t) \wedge \ldots \wedge \mathbf{r}_{k-1}'(t) \end{aligned} \tag{18}$$

и, слично за мешовити производ,

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \ldots, \mathbf{r}_k(t)] = [\mathbf{r}_1'(t), \mathbf{r}_2(t), \ldots, \mathbf{r}_k(t)] \\ &+[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2'(t), \ldots, \mathbf{r}_k(t)] + \cdots + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \ldots, \mathbf{r}_k'(t)]. \end{aligned} \tag{19}$$

Правила (12)– (19) могу да се изведу из записа одговарајућих операција у координатима и применом Леме 4 (што остављамо читаоцу за вежбу), али је корисно извести их имајући у виду и општији приступ, за који ће нам бити потребна следећа дефиниција.

Дефиниција 4. Пресликавање

$$L : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$$

је *линеарно* ако важи

$$L(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = aL(\mathbf{v}) + bL(\mathbf{w})$$

за све векторе $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^k$ и све скаларе $a, b \in \mathbf{R}$. Пресликавање

$$L : \big(\mathbf{R}^{k_1}\big) \times \big(\mathbf{R}^{k_2}\big) \to \mathbf{R}^m$$

је *билинеарно* ако је линеарно по свакој компоненти, тј. ако су за све $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{k_1}$ и $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{k_2}$ пресликавања

$$\mathbf{x} \to L(\mathbf{x}, \mathbf{b}) \quad \text{и} \quad \mathbf{y} \to L(\mathbf{a}, \mathbf{y})$$

линеарна пресликавања. Општије, пресликавање

$$L : \big(\mathbf{R}^{k_1}\big) \times \big(\mathbf{R}^{k_2}\big) \times \cdots \times \big(\mathbf{R}^{k_n}\big) \to \mathbf{R}^m$$

је *вишелинеарно* или *n–линеарно* ако је линеарно по свакој компоненти. Специјално, линеарна пресликавања су 1–линеарна, билинеарна 2–линеарна.

Пример 7. Ако је $c \in \mathbf{R}$ фиксирана константа, са $\mathbf{v} \mapsto c\mathbf{v}$ је дефинисано линеарно пресликавање $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$. Пресликавање

$$L : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k, \qquad L(x, \mathbf{v}) = x\mathbf{v}$$

је билинеарно. Скаларни производ је билинеарно пресликавање

$$\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \ \ni \ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ \in \ \mathbf{R},$$

а векторски производ је билинеарно пресликавање

$$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \ \ni \ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w} \ \in \ \mathbf{R}^3.$$

Општије, клинасти производ је $(k-1)$–линеарно пресликавање

$$\underbrace{\mathbf{R}^k \times \cdots \times \mathbf{R}^k}_{k-1} \to \mathbf{R}^k,$$

а мешовити производ је k–линеарно пресликавање

$$\underbrace{\mathbf{R}^k \times \cdots \times \mathbf{R}^k}_{k} \to \mathbf{R}.$$

♯

Пример 8. Нека је

$$L : \mathbf{R}^{k_1} \times \mathbf{R}^{k_2} \to \mathbf{R}^m$$

билинеарно пресликавање и $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \in \mathbf{R}^{k_1}$, $\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{R}^{k_2}$. Тада је, за $h \in \mathbf{R}$

$$L(\mathbf{v}_1 + h\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + h\mathbf{w}_2) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + h(L(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2) + L(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2)) + h^2 L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2).$$

Општије, за n–линеарно пресликавање L са кодоменом у $\mathbf{R}^m$ израз $L(\mathbf{v}_1 + h\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n + h\mathbf{w}_n)$ је полином n–тог степена по h са коефицијентима у $\mathbf{R}^m$. ♯

Задатак 6. Нека је

$$L : \mathbf{R}^{k_1} \times \mathbf{R}^{k_2} \times \mathbf{R}^{k_3} \to \mathbf{R}^m$$

3–линеарно пресликавање, и нека су $\mathbf{v}_j, \mathbf{w}_j \in \mathbf{R}^{k_j}$ фиксирани вектори. Да ли постоји лимес

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(L(\mathbf{v}_1 + h\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + h\mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3 + h\mathbf{w}_3) - L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3))?$$

✓

Теорема 1. *Нека је I интервал у $\mathbf{R}$ и нека је*

$$L : \left(\mathbf{R}^{k_1}\right) \times \left(\mathbf{R}^{k_2}\right) \times \cdots \times \left(\mathbf{R}^{k_n}\right) \to \mathbf{R}^m$$

n–линеарно пресликавање. Ако су функције

$$\mathbf{r}_j : I \to \mathbf{R}^{k_j}$$

диференцијабилне, и важи

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} L(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_j'(t), \dots, \mathbf{r}_n(t))$$

$\triangle$ По дефиницији првог извода је

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{r}_1(t),\dots,\mathbf{r}_n(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Delta L(h),$$

где је

$$\Delta L(h) := \big(L(\mathbf{r}_1(t+h),\dots,\mathbf{r}_n(t+h)) - L(\mathbf{r}_1(t),\dots,\mathbf{r}_n(t))\big).$$

Пошто су све функције $\mathbf{r}_j$ диференцијабилне, важи

$$\mathbf{r}_j(t+h) - \mathbf{r}_j(t) = \mathbf{r}_j'(t)h + o(h), \quad \text{кад} \quad h \to 0.$$

Ако ове изразе уврстимо у $L(\mathbf{r}_1(t+h),\dots,\mathbf{r}_n(t+h))$, применом n–линеарности пресликавања L и Примера 8 закључујемо да је

$$\Delta L(h) = h\sum_{j=1}^{n} L(\mathbf{r}_1(t),\dots,\mathbf{r}_j',\dots,\mathbf{r}_n(t)) + h^2R,$$

где су са R означени сви сабирци у којима се h појављује више од једном. Дељењем са h и лимесом кад $h \to 0$ добијамо тражени резултат (упоредити са Задатком 6). $\bigtriangledown$

Задатак 7. Доказати (12)– (19), уз помоћ Примера 7 и Теореме 1. ✓

Задатак 8. Нека су $f, g : I \to \mathbf{C}$ диференцијабилне функције. Извести Лајбницово правило за извод прозивода

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

применом Теореме 1 на билинеарно пресликавање

$$L : \mathbf{C}\times\mathbf{C} \to \mathbf{C}, \quad L(\zeta,\eta) = \zeta\eta.$$

Општије, извести формулу за извод $(f_1f_2\cdots f_n)'$ производа n функција. ✓

Задатак 9. Урадити Задатак 22 (а) на стр. 143 применом Теореме 1. ✓

4. Брзина и убрзање

Схватимо $\mathbf{R}$ као временску осу и интервал I као временски интервал у коме проучавамо кретање материјалне тачке[8]. Нека двапут диференцијабилна функција

$$\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^3, \quad t \mapsto \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{20}$$

описује положај те тачке у тренутку $t \in I$. Тада се вектори

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$

називају *вектором брзине* и *вектором убрзања*. Дужине ових вектора $v = \|\mathbf{v}\|$ и $a = \|\mathbf{a}\|$ зовемо *скаларном брзином* и *скаларним убрзањем* или, кад не постоји могућност забуне, само *брзином* и *убрзањем*. Некад, међутим, кад је из контекста јасно о чему се ради, термин *брзина* се користи и за вектор брзине[9]

Напомена 2. За извод неке физичке величине по времену (или математичке по параметру t) често се користи и тачка изнад слова којим је означена та величина. Тако се користе ознаке $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$. $\diamond$

---

[8] Појам *материјална тачка* је апстрактна идеализација која означава тело које нема димензије, већ само положај и масу. Користи за описивање проблема кретања у којима нам је довољно да опишемо кретање центра масе тела, тј. у којима можемо да занемаримо обртање тела око сопствених оса у току кретања.

[9] У литератури на енглеском, velocity означава вектор $\mathbf{v}$, а speed његов интензитет v.

Ако се кретање одвија под утицајем *векорског поља силе*[10] $\mathbf{F}$, оно је описано *Другим Њутновим законом*

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad \text{односно} \quad \mathbf{r}''(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}. \tag{21}$$

За задато, тј. познато, $\mathbf{F}$ ово је диференцијална једначина другог реда по непознатој $\mathbf{r}$. Њено решење описује кретање материјалне тачке.

Уколико се кретање одвија по једној правој или у једној равни, логично је поједноставти (20) и посматрати $\mathbf{r}$ као функцију са вреднностима у $\mathbf{R}$ или $\mathbf{R}^2$. Ако посматрамо кретање две материјалне тачке у тродимензионом простору, њихово кретање је описано пресликавањем

$$\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \cong \mathbf{R}^6.$$

Зато је правилно Други Њутнов закон (21) у општем случају посматрати као диференцијалну једначину по непознатој функцији

$$\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^k$$

са вредностима у k–димензионом простору.

Пример 9. Тангента на криву. Вектор брзине $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)$ је тангентан на криву $\mathbf{r}(I) \subset \mathbf{R}^k$ у тачки $r(t_0)$. Параметарска једначина тангентне праве на криву $\mathbf{r}(I)$ у тачки $\mathbf{r}(t_0)$ је $t \mapsto \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{v}(t_0)$. $\sharp$

Задатак 10. Нека је γ крива у $\mathbf{R}^3$ по којој се секу два цилиндра

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \text{и} \quad y^2 + z^2 = 8.$$

Наћи једначину праве L која је тангентна на γ у тачки $P(1, 2, -2)$ и једначину равни кроз P која је нормална на L. ✓

Пример 10. Кретање у одсуству силе – Први Њутнов закон. Ако је $\mathbf{F} = \mathbf{O}$, Други Њутнов закон (21) гласи

$$\mathbf{r}''(t) = \mathbf{O}, \quad \text{тј.} \quad \mathbf{v}'(t) = \mathbf{O}.$$

Одатле следи (Применом Последице 4 на стр. 141 на сваку координату посебно) $\mathbf{v} = \mathbf{c}_1$, где је $\mathbf{c}_1$ константан вектор. Другим речима, важи

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{c}_1,$$

одакле следи да је путања тела описана једначином праве

$$\mathbf{r} = t\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2,$$

Видимо да се тело на које не делује никаква сила креће равномерно (константном брзином) и праволинијски. То је садржај Првог Њутновог закона. $\sharp$

Пример 11. Кретање са константним убрзањем. Ако $\mathbf{a}$ не зависи од t, решавањем једначине

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$$

добијамо

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + t\mathbf{a}, \tag{22}$$

[10] Формално говорећи, *векторско поље* на скупу D је пресликавање $\mathbf{F} : D \to \mathbf{R}^k$ скупа D у k–димензиони векторски простор $\mathbf{R}^k$; замишљамо га као скуп стрелица постављених у свакој тачки скупа D. У нашем случају је $k = 3$, а $D \subset \mathbf{R}^3$ подскуп еуклидског простора у коме се кретање одвија.

где је $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$, односно

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}_0 + t\mathbf{a}.$$

Решавањем ове једначине добијамо

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}_0 + \frac{t^2}{2}\mathbf{a}, \tag{23}$$

где је $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ почетни положај тела. Ако је, при томе, вектор $\mathbf{v}_0$ почетне брзине колинеаран са $\mathbf{a}$, из (22) следи да је вектор $\mathbf{v}(t)$ колинеаран са $\mathbf{a}$ за свако t, па из (23) добијамо израз за пређени пут $s(t) := \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0\|$

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где је $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ и $a = \|\mathbf{a}\|$. ♯

Пример 12. Коси хитац. Претпоставимо да је из координатног почетка лансиран пројектил под углом θ_0 у односу на хоризонталну раван и са почетном брзином $\mathbf{v}_0$. Ако игноришемо ветар који дува и сл, можемо да претпоставимо да се кретање одвија у једној равни; изаберимо је тако да x–оса буде хоризонтална, а y–оса вертикална. На пројектил дејствује сила гравитације, усмерена вертикално наниже:

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}, \quad \text{где је} \quad g = 9,80665 m/s^2.$$

Одатле, и из Другог Њутновог закона, закључујемо да је кретање пројектила описано диференцијалном једначином

$$\mathbf{r}''(t) = -g\mathbf{j}.$$

Из ње следи да је

$$\mathbf{r}'(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{v}_0,$$

а одатле

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0,$$

где су $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ почетни положај и почетна брзина. По претпоставци је

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{O} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta_0 \mathbf{i} + v_0 \sin\theta_0 \mathbf{j},$$

где је $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$. Одатле добијамо једначину кретања у координатама

$$x(t) = v_0 \cos\theta_0 t, \qquad y(t) = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Специјално, за $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi/2$ добијамо једначине кретања за хоризонтални и вертикални хитац. ♯

Задатак 11. Лопта је бачена вертикално у вис почетном брзином $10m/s$. Одредити максималну висину коју она достиже, тренутак у коме је достиже и тренутак у коме ће да падне на земљу. ✓

Задатак 12. Лопта је бачена са светионика високог $15m$, у вис под углом $\pi/4$ у односу на хоризонталну раван, почетном брзином $10m/s$.

(а) Израчунати хоризонталну у вертикалну компоненту брзине лопте после две секунде.

(б) Када ће лопта да падне у море?

(в) Колико далеко од подножја светионика ће лопта да падне у море?

(г) Коју највећу висину изнад површине мора ће лопта да достигне?

(д) Када лопта достиже највећу висину изнад површине мора?

(ђ) У ком тренутку и на ком растојању од подножја светионика се лопта креће најбрже?

(е) Колика је брзина лопте у тренутку кад падне у море? ✓

Пример 13. Просте хармонијске осцилације. Посматрајмо тег масе m који је причвршћен за опругу, тако да осцилује без трења у хоризонталној равни. Према *Хуковом*[11] *закону*, сила која на делује на тег је

$$F = -kx$$

где је x растојање тега од равнотежног положаја, а k константа еластичности опруге (пошто се кретање одвија по правој, силу F можемо да третирамо као скалар). Из Другог Њутновог закона следи да је кретање тега описано једначином

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \tag{24}$$

Лако је проверити да

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad \text{где је} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

задовољава (24). Решење $x(t)$ може да се напише и у облику

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \quad \text{где је} \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \varphi = \arctan(c_2/c_1).$$

Број A се назива *амплитудом*, ω *угаоном фреквенцијом*, φ *фазом*, а $T = 2\pi/\omega$ *периодом* осцилација. ♯

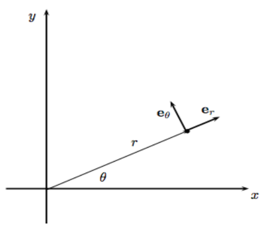
Задатак 13. У ком положају тег из Примера 13 има највећу брзину, а у ком највеће убрзање? ✓

5. Покретни координатни системи

Видели смо како кретање путника (кога смо звали материјалном тачком) може да се схвати као крива у фиксираном координатном систему. Некад је, међутим, корисно да путник има свој координатни систем, који носи са собом и помоћу њега описује свет у околини тачке у којој се нашао. Даћемо неколико таквих примера.

Пример 14. Поларни координатни систем у равни. Посматрајмо, у тачки са поларним координатама (r, θ), векторе

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}.$$



[11] Хук (Robert Hooke, 1635–1703), енглески физичар

Приметимо да је вектор $\mathbf{e}_r$ у тачки P колинеаран вектору положаја $\overrightarrow{OP}$ тачке P. Очигледно је да су ови вектори ортогонални, тј. да је $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$, и јединични, ($\|\mathbf{e}_r\| = \|\mathbf{e}_\theta\| = 1$). Они у свакој тачки равни формирају ортогонални координатни систем, који се назива *поларним координатним системом.* $\sharp$

Задатак 14. Доказати да се брзина и убрзање тела које се креће по трајекторији $\mathbf{r}(t)$ у поларном координатном систему изражавају (уз ознаке из Напомене 2) у форми

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta,$$

где је $r = \|\mathbf{r}\|$.

Упутство: Приметити да је $\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r = r(t)(\cos\theta(t)\mathbf{i} + \sin\theta(t)\mathbf{j})$ и диференцирати. ✓

Задатак 15. Нека је кретање материјалне тачке описано са

$$\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}.$$

Изразити вектор брзине $\mathbf{v}$ преко $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$. ✓

Пример 15. **Цилиндрички координатни систем у простору.** Вектори

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{k}.$$

формирају ортогонални координатни систем у простору, који се назива *цилиндричким координатним системом.* $\sharp$

Задатак 16. Извести формуле за брзину и убрзање у цилиндричком координатном систему, по аналогији са Задатком 14. ✓

Пример 16. **Сферни координатни систем у простору.** Приметимо да је тачка у тродимензионом простору једнозначно одређена тројком (ρ, ϕ, θ), где је ρ растојање тачке од координатног почетка, ϕ угао између вектора положаја тачке и позитивног дела z–осе и θ угао између пројекције вектора положаја тачке на $0xy$–раван и позитивног дела x–осе (тј. θ је поларна координата пројекције тачке на $0xy$–раван). Вектори

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}\\
\mathbf{e}_\phi &= \cos\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \cos\phi\sin\theta\,\mathbf{j} - \sin\phi\,\mathbf{k}\\
\mathbf{e}_\theta &= -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}
\end{aligned}$$

формирају ортогонални координатни систем у простору, који се назива *сферним координатним системом.* $\sharp$

Задатак 17. Доказати да је $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\theta$. ✓

Задатак 18. Извести формуле за брзину и убрзање у сферном координатном систему, по аналогији са Задатком 14. ✓

Пример 17. **Френе**[12] **– Сереов**[13] **координатни систем.** Нека је

$$\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^3$$

---

[12]Френе (Jean Frédéric Frenet, 1816–1900), француски математичар и астроном

[13]Сере (Joseph Alfred Serret, 1818–1885), француски математичар

глатко пресликавање дефинисано на интервалу $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$. У Глави 6 смо видели да је дужина криве $\mathbf{r}(I)$

$$L = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| \, dt,$$

где је $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$. Ако је за свако t вектор $\mathbf{v}(t)$ различит од нуле, кажемо да је крива *регуларна.* У том случају је

$$t \mapsto \int_a^t \|\mathbf{v}(u)\| \, du$$

дифеоморфизам интервала $[a, b]$ на $[0, L]$, јер је (због регуларности) његов први извод $\|\mathbf{v}\| > 0$ (извод интеграла по горњој граници). Овај дифеоморфизам дефинише репараметризацију криве параметром

$$s = \int_a^t \|\mathbf{v}(u)\| \, du$$

који се назива *природним параметром* регуларне криве. Из $ds/dt = \|d\mathbf{r}/dt\|$ следи да је

$$\mathbf{T}(s) := \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}$$

јединични вектор за свако $s \in [0, L]$, зовемо га *јединичним тангентним вектором* на криву $\mathbf{r}(I)$. Величина

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s_0) \right\|$$

назива се *кривином криве* $\mathbf{r}(I)$ у тачки $\mathbf{r}(s_0)$. Ако је $\mathbf{T}$ дато као функција произвољног параметра t, тј.

$$\mathbf{T}(t) = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|^{-1} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \|\mathbf{v}\|^{-1}\mathbf{v},$$

онда је

$$\kappa(t_0) = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) \right\|^{-1} \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt}(t_0) \right\|.$$

Реципрочна величина $1/\kappa(t_0)$ назива се *полупречником кривине.*

Диференцирањем израза $\|\mathbf{T}(s)\|^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ по природном параметру s и применом Лајбницовог правила добијамо

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0,$$

што значи да је вектор $d\mathbf{T}/ds$ ортогоналан на T. Из дефиниције кривине следи да је

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

јединични вектор, зовемо га *јединичним нормалним вектором* криве $\mathbf{r}(I)$.

Раван разапета векторима $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}$ назива се *оскулаторном равни* криве $\mathbf{r}(I)$.

Векторски производ јединичних вектора је јединични вектор нормалан на њих; вектор

$$\mathbf{B} := \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

називамо *јединичним бинормалним вектором* криве $\mathbf{r}(I)$; $\mathbf{B}$ је вектор оскулаторне равни те криве. Вектори $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ дефинишу у свакој тачки криве ортогонални координатни систем; овај систем се назива *Френе – Сереовим системом.* Диференцирањем последњег израза, којим је дефинисан вектор $\mathbf{B}$, по природном параметру s добијамо (применом Лајбницовог правила на билинеарно множење $\times$)

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds},$$

јер је $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = 0$. Одатле следи да је вектор $d\mathbf{B}/ds$ ортогоналан на $\mathbf{T}$. Диференцирањем израза $\|\mathbf{B}\|^2 = 1$ закључујемо да је он ортогоналан и на $\mathbf{B}$, па је пропорционалан вектору $\mathbf{N}$:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

Коефицијент τ у претходној формули називамо *торзијом* криве $\mathbf{r}(I)$. ♯

Задатак 19**.** Доказати да се кривина κ криве $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ изражава, у терминима брзине $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ и убрзања $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ као

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3}$$

Закључити да кривина криве мери колико крива одступа од праве (крива је права ако и само ако је $\kappa = 0$). Доказати да торзија мери одступање криве од равни (крива лежи у једној равни ако и само ако је $\tau = 0$). ✓

Задатак 20**.** Наћи једначину нормалне и оскулаторне равни криве

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

у тачки $(1, 1, 1)$. ✓

Задатак 21**.** Доказати да убрзање $\mathbf{a}$ може да се изрази у Френе – Сереовом координатном систему $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ као

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N},$$

где је

$$a_T = \frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|, \quad a_N = \kappa\|\mathbf{v}\|^2.$$

Извести одатле следеће закључке:

(а) Вектор убрзања увек лежи у равни $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ и не садржи информацију о томе колико кретање одступа од те равни.

(б) Тангентна промена убрзања мери промену интензитета брзине.

(в) Нормална компонента убрзања мери промену правца кретања.

(г) Теже је остати у седишту мотоцикла у оштријој кривини (са већим κ) и при већој брзини $v = \|\mathbf{v}\|$, јер те величине одређују интензитет центрипеталне силе $\mathbf{F}_N = m\mathbf{a}_N$. ✓

Задатак 22**.** (а) Нека се материјална тачка креће под дејством силе $\mathbf{F}$ константном скаларном брзином ($v = \|\mathbf{v}\| = const$). Доказати да је вектор силе $\mathbf{F}$ у свакој тачки колинеаран вектору нормале $\mathbf{N}$ на трајекторију те материјалне тачке.

(б) Нека се материјална тачка креће под дејством силе која је у свакој тачки нормална на њену трајекторију. Доказати да је скаларна брзина ове материјалне тачке константна ($v = \|\mathbf{v}\| = const$). ✓

6. Вежбе

(1) Кретање материјалне тачке је дато, у поларним координатама, са

$$r = e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}, \qquad \theta = t.$$

Наћи вектор убрзања у моменту $t = 0$.

(2) Крива, задата у $\mathbf{R}^3$ двема једначинама

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

(тј. као пресек сфере и цилиндра) се назива *Вивијанијевом*[14] *кривом.*

(а) Скицирати ову криву у $0xyz$ – координатном систему.

(б) Скицирати пројекције ове криве на све три координатне равни.

(в) Доказати да је

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 2\sin(t/2)\mathbf{k}$$

параметарска једначина Вивијанијеве криве.

(г) Изразити дужину Вивијанијеве криве преко елиптичких интеграла (стр. 254).

(д) Доказати да су кривина и торзија Вивијанијеве криве једнаке

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{13 + 3\cos t}}{(3 + \cos t)^{3/2}}, \qquad \tau(t) = \frac{6\cos(t/2)}{13 + 3\cos t}.$$

(3) Материјална тачка се креће по елипси

$$r = \frac{x}{1 - e\cos\theta}$$

под дејством поља силе $\mathbf{F}$ које је у свакој тачки усмерено ка координатном почетку. Доказати да је интензитет силе $F = \|\mathbf{F}\|$ пропорционалан величини $1/r^2$.

(4) Кретање материјалне тачке је описано са

$$\mathbf{r} = 4\cos t\mathbf{i} + 4\sin t\mathbf{j} + 4\cos t\mathbf{k}.$$

(а) Израчунати вектор брзине и убрзања.

(б) Израчунати кривину ове путање.

(в) Доказати да се кретање одвија у једној равни и наћи једначину те равни у Декартовим координатама.

(г) Доказати да је путања елипса.

(5) Лопта $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 99$ ротира око праве која садржи тачке $(0,0,0)$ и $(1,1,1)$ константном угаоном брзином $6\,\mathrm{rad}/s$. Описати трајекторију центра $(1,2,3)$ лопте и наћи њен вектор брзине.

(6) Наћи кривину криве

$$x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}.$$

(7) У којим тачкама елипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

(односно $x = a\cos t$, $y = b\sin t$) има највећу, а у којим најмању кривину?

---

[14]Вивијани (Vincenzo Viviani, 1622–1703), италијански математичар

(8) (а) Скицирати криву $x = \rho^2 \cos t$, $y = \rho^2 \sin t$, $z = ct$ у $\mathbf{R}^3$. Оваква крива назива се *навојницом.* Доказати да она има константну кривину. Ако је c фиксирано, за које ρ се достиже највећа вредност кривине (тј. око ког цилиндра се навојница задатог вертикалног нагиба највише закривљује)? Доказати да је торзија навојнице $\tau = c/(\rho^2+c^2)$. Која је највећа вредност торзије навојнице, ако је ρ фиксирано, а c се мења? Каква је геометријска интерпретација овог резултата?

(б) Нека је L_1 тангента на навојницу $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ у тачки $(1, 0, 0)$, а L_2 тангента у тачки $(0, 1, \pi/2)$. Доказати да су L_1 и L_2 мимоилазне праве. Наћи растојање између L_1 и L_2 и једначину (јединствене) праве L која је ортогонална на L_1 и L_2. Наћи једначину (јединствене) праве која садржи тачку $(0, 0, 1/2)$ и сече праве L_1 и L_2.

(9) Дата је крива у комплексној равни, параматризацијом

$$z(t) = \int_0^t e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\,du.$$

Наћи њену кривину κ као функцију дужине лука s, мерене од координатног почетка $(0, 0)$.

(10) Две лопте истовремено су бачене хоризонтално са торња висине 15 m. Прва је имала почетну брзину 10 m/s а друга 15 m/s.

(а) После колико времена је свака од ове две лопте пала на земљу?

(б) Колико далеко од подножја торња је свака од ове две лопте пала на земљу?