$$\mathrm{Tor}(G,H) := H_1(\mathcal{F}\otimes H) = \ker(f_1\otimes \mathbb{1})/\mathrm{im}(f_2\otimes \mathbb{1})$$

Теорема $\mathrm{Tor}(G,H)$ не зависи од избора резолвенте $\mathcal{F}$.

Ако узмемо канонску резолвенту: $\mathcal{F}: 0 \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f} G \to 0 \quad / \otimes H$

$$\mathcal{F}\otimes H: \quad 0 \to F_1\otimes H \xrightarrow{f_1\otimes \mathbb{1}} F_0\otimes H \xrightarrow{f\otimes \mathbb{1}} G\otimes H \to 0$$ (← не мора бити тачан)

$$\mathrm{Tor}(G,H) \cong \ker(f_1 \otimes \mathbb{1})$$

$\Rightarrow$ имамо тачан низ:

$$0 \to \mathrm{Tor}(G,H) \hookrightarrow F_1\otimes H \to F_0\otimes H \to G\otimes H \to 0$$

Особине (1) A или B слободна $\Rightarrow \mathrm{Tor}(A,B)=0$

(специјално $\mathrm{Tor}(A,\mathbb{Z}) = \mathrm{Tor}(\mathbb{Z},B) = 0$)

(2) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, B) \cong \ker(B \xrightarrow{\cdot n} B)$

(3) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\text{нзд}(n,m)}$

(4) $\mathrm{Tor}(A,B) \cong \mathrm{Tor}(B,A)$

(5) $\mathrm{Tor}\left(\bigoplus_{\alpha\in A} A_\alpha, B\right) \cong \bigoplus_{\alpha\in A} \mathrm{Tor}(A_\alpha, B)$.

1. Нека је $0\to B\to C\to D\to 0$ ктн. и A Абелова. Доказати да постоји тачан низ облика:

$$0\to \mathrm{Tor}(A,B)\to \mathrm{Tor}(A,C)\to \mathrm{Tor}(A,D)\to A\otimes B\to A\otimes C\to A\otimes D\to 0$$

Решење Означимо $0\to B\to C\to D\to 0$ са $\mathcal{C}$ и нека је $\mathcal{F}: 0\to F_1\to F_0\to A\to 0$ канонска рез. F_1 и F_0 су слободне па су хоризонтале у следећем дијаграму тачне:

$$\begin{tikzcd}
F_1\otimes\mathcal{C}: & 0 \arrow[r] & F_1\otimes B \arrow[r] \arrow[d, "f_1\otimes 1_B"'] & F_1\otimes C \arrow[r] \arrow[d, "f_1\otimes 1_C"'] & F_1\otimes D \arrow[r] \arrow[d, "f_1\otimes 1_D"'] & 0 \\
F_0\otimes\mathcal{C}: & 0 \arrow[r] & F_0\otimes B \arrow[r] & F_0\otimes C \arrow[r] & F_0\otimes D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Применимо змијску лему на овај дијаграм и добијамо тачан низ:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \ker(f_1\otimes 1_B) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ker(f_1\otimes 1_C) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ker(f_1\otimes 1_D) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{coker}(f_1\otimes 1_B) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \operatorname{coker}(f_1\otimes 1_C) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \operatorname{coker}(f_1\otimes 1_D) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{Tor}(A,B) & \operatorname{Tor}(A,C) & \operatorname{Tor}(A,D) & A\otimes B \arrow[r] & A\otimes C \arrow[r] & A\otimes D &
\end{tikzcd}$$

Користили смо зад. 2 на стр. 10:

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ тачан $\Rightarrow$ постоји природан изо. $\operatorname{coker} f \cong C$

$F_1\otimes B \xrightarrow{f_1\otimes 1_B} F_0\otimes B \to A\otimes B \to 0$ је тачан $\Rightarrow$ $\operatorname{coker}(f_1\otimes 1_B) \cong A\otimes B$

(и слично за C и D). ▨

2. A, B Абелове $\Rightarrow$ $\operatorname{Tor}(A,B) \cong \operatorname{Tor}(B,A)$

решење $\mathcal{F}: 0 \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} B \to 0$ слободна рез.

Из зад. 1 имамо тачан низ:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}(A,F_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Tor}(A,F_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Tor}(A,B) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & A\otimes F_1 \arrow[r, "1\otimes f_1"] \arrow[d, "g"'] & A\otimes F_0 \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & A\otimes B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}(B,A) \arrow[r, "\delta"] & F_1\otimes A \arrow[r, "f_1\otimes 1"] & F_0\otimes A \arrow[r] & B\otimes A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

тачан по деф. $\operatorname{Tor}(B,A)$

Хоћемо да дефинишемо φ т.д. овај дијаграм комутира.

$\varphi: \operatorname{Tor}(A,B) \to \operatorname{Tor}(B,A)$?

Нека је $x \in \operatorname{Tor}(A,B)$.

$$((f_1\otimes 1)\circ g\circ\partial)(x) = \Big(h\circ \underbrace{(1\otimes f_1)\circ\partial}_{0}\Big)(x) = 0 \quad \text{из тачности горњег низа}$$

$$\Rightarrow (g\circ\partial)(x) \in \ker(f_1\otimes 1) = \operatorname{im}\delta \Rightarrow (\exists y\in \operatorname{Tor}(B,A))\ \delta(y) = (g\circ\partial)(x)$$

Дефинишимо $\varphi(x) := y$.

φ је добро дефинисан хомоморфизам (јер је δ „1-1") и дијаграм комутира $\Rightarrow$ φ је изоморфизам на основу Стинродове 5-леме. $\blacksquare$

Теорема о универзалним коефицијентима и Кинетова формула

ТОУК Нека је X т.пр., G Абелова. Тада је следећи низ тачан: $0 \to H_n(X) \otimes G \to H_n(X;G) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G) \to 0$ и цепа се, тј. $H_n(X;G) \cong (H_n(X) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G)$.

1. Одредити $H_n(X;\mathbb{Z}_5)$, ако је $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_5, & n=17 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, & n=22 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

решење За $n \notin \{0,1,17,18,22,23\}$ је $H_n(X) = 0 = H_{n-1}(X)$, па је и $H_n(X;\mathbb{Z}_5) = 0$. Још њих 6 треба да одредимо.

$$H_0(X;\mathbb{Z}_5) \cong H_0(X) \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_1(X;\mathbb{Z}_5) \cong (H_1(X) \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \mathrm{Tor}(H_0(X), \mathbb{Z}_5) \cong 0 \oplus \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_5) = 0$$

$$H_{17}(X;\mathbb{Z}_5) \cong (H_{17}(X) \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \mathrm{Tor}(\underbrace{H_{16}(X)}_{0}, \mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_5 \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_{18}(X;\mathbb{Z}_5) \cong (\underbrace{H_{18}(X)}_{0} \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \mathrm{Tor}(H_{17}(X), \mathbb{Z}_5) \cong \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_{22}(X;\mathbb{Z}_5) \cong (H_{22}(X) \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \mathrm{Tor}(\underbrace{H_{21}(X)}_{0}, \mathbb{Z}_5) \cong (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_5$$

$$H_{23}(X;\mathbb{Z}_5) \cong (\underbrace{H_{23}(X)}_{0} \otimes \mathbb{Z}_5) \oplus \mathrm{Tor}(H_{22}(X), \mathbb{Z}_5) \cong \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5) = 0 \quad \blacksquare$$

Кинетова формула

$$H_n(X\times Y)\cong\left(\bigoplus_{i=0}^{n} H_i(X)\otimes H_{n-i}(X)\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1}\mathrm{Tor}\left(H_i(X),\, H_{n-1-i}(X)\right)\right)$$

2. $H_k(\mathbb{R}P^3\times N_4)=?$

решење

$$H_k(\mathbb{R}P^3)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=0,3\\ \mathbb{Z}_2, & k=1\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}\qquad H_k(N_4)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & k=0\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3, & k=1\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

Означимо $X:=\mathbb{R}P^3\times N_4$. За $k\geqslant 6$ је $H_k(X)=0$.

X путно пов. $\Rightarrow$ $H_0(X)\cong\mathbb{Z}$. Још за $k\in\{1,2,3,4,5\}$.

$$H_1(X)\cong\left(H_0(\mathbb{R}P^3)\otimes H_1(N_4)\right)\oplus\left(H_1(\mathbb{R}P^3)\otimes H_0(N_4)\right)\oplus\mathrm{Tor}\left(H_0(\mathbb{R}P^3),H_0(N_4)\right)\cong$$

$$\cong\left(\mathbb{Z}\otimes(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3)\right)\oplus\left(\mathbb{Z}_2\otimes\mathbb{Z}\right)\oplus\underbrace{\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})}_{=0}\cong\mathbb{Z}_2^2\oplus\mathbb{Z}^3$$

$$H_2(X)\cong\left(H_0(\mathbb{R}P^3)\otimes H_2(N_4)\right)\oplus\left(H_1(\mathbb{R}P^3)\otimes H_1(N_4)\right)\oplus\left(H_2(\mathbb{R}P^3)\otimes H_0(N_4)\right)\oplus$$

$$\oplus\,\mathrm{Tor}\left(H_0(\mathbb{R}P^3),H_1(N_4)\right)\oplus\mathrm{Tor}\left(H_1(\mathbb{R}P^3),H_0(N_4)\right)\cong$$

$$\cong 0\oplus\left(\mathbb{Z}_2\otimes(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3)\right)\oplus 0\oplus 0\oplus 0\cong\mathbb{Z}_2^4$$

$$H_3(X)\cong(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z})\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$$

$$H_4(X)\cong(\mathbb{Z}\otimes(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3))\oplus\mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}^3$$

$H_5(X)=0$. ▨

3. Доказати да не постоје $m,n,\ell\in\mathbb{N}_0$ т.д. $S^m\simeq S^n\times S^\ell$.

решење 1° $0\in\{m,n,\ell\}$

Ако $n=0\Rightarrow S^m\simeq S^0\times S^\ell\approx S^\ell\sqcup S^\ell$ – неповезан $\Rightarrow m=0$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \ell=0\Rightarrow S^0\simeq S^0\times S^0\ \ \lightning\\ \bullet\ \ell\geqslant 1\Rightarrow S^0\simeq S^\ell\sqcup S^\ell\ \ \lightning\end{array}\right\}\Rightarrow n\neq 0$$

Слично се добије $m \neq 0$, $l \neq 0$, па је 1° немогуће.

2° $0 \notin \{m, n, l\}$

тпс. $S^m \simeq S^n \times S^l \Rightarrow H_k(S^m) \cong H_k(S^n \times S^l)$

- $k = l$: $H_l(S^m) \overset{\text{Кинет}}{\cong} H_0(S^n) \otimes H_l(S^l) \oplus \dots \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \neq 0$
- $k = n+l > l > 0$: $H_{n+l}(S^m) \cong H_n(S^n) \otimes H_l(S^l) \oplus \dots \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \neq 0$

$\Rightarrow H_k(S^m) \neq 0$ за $k \in 0, l, n+l$, али знамо да је

$$H_k(S^m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$ тј. $H_k(S^m) \neq 0$ само за две вредности k. $\lightning$

$\Rightarrow S^m \not\simeq S^n \times S^l$. $\blacksquare$

Борсук – Уламова теорема

(1) **БУТ1а:** $f: S^n \to \mathbb{R}$ непр. $\Rightarrow (\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$

(2) **БУТ1б:** $f: S^n \to \mathbb{R}$ непр. и непарно $\Rightarrow (\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = 0$

(3) **БУТ2а:** Не постоји непр. непарно $g: S^n \to S^{n-1}$

(4) **БУТ2б:** Не постоји непр. $g: D^n \to S^{n-1}$ т.д. $(\forall x \in S^{n-1})\ g(-x) = -g(x)$

(5) **ЛШ1:** Ако су $F_1, \dots, F_{n+1}$ затворени на S^n и $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$, онда постоји i т.д. F_i садржи пар антиподалних тачака

(6) **ЛШ2:** Ако су $U_1, \dots, U_{n+1}$ отворени на S^n и $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, онда постоји i т.д. U_i садржи пар антиподалних тачака

(ЛШ = Лустерник – Шнирелман = Lusternik-Schnirelmann)

Теорема Тврђења (1) - (6) су еквивалентна.

1. Нека је $f: S^n \to S^n$ непр. и „1-1" $\Rightarrow$ f је хомеоморфизам.

решење

- f је „на":

пцс. $(\exists y \in S^n)\ y \notin f(S^n)$

Нека је $\bar{f}: S^n \to S^n \setminus \{y\} \xrightarrow[h]{\approx} \mathbb{R}^n$

$\qquad\qquad x \longmapsto f(x)$

$\overset{\text{БУТ1а}}{\Longrightarrow} (\exists x_0 \in S^n)\ h(\bar{f}(x_0)) = h(\bar{f}(-x_0))$

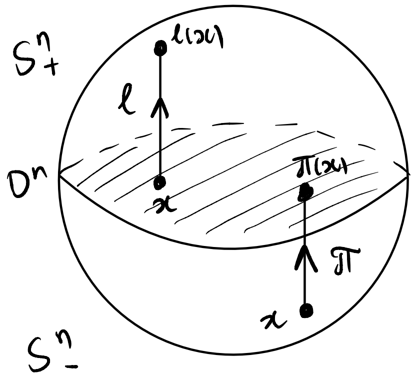
$\Rightarrow f(x_0) = f(-x_0) \Rightarrow f$ није „1-1" ↯

- f је затворено: f слика компакт у T_2

f непр. затворена бијекција $\Rightarrow$ f је хомеоморфизам. ∎

2. Нека је $f: S^n_+ \to S^n_-$ непр. Доказати да постоји $x \in (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n_+$ т.д. $f(x) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$.

решење



Нека је $l: D^n \to S^n_+$ дато са:

$$l(x_1, \dots, x_n, 0) := (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$

и $\pi: S^n_- \to D^n$ дато са:

$$\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := (x_1, \dots, x_n, 0)$$

Посматрајмо $g := \pi \circ f \circ l : D^n \to D^n$.

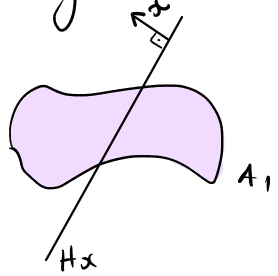
На основу Брауерове теореме постоји $a \in D^n$ т.д. $g(a) = a$.

$\Rightarrow$ $l(a)$ је тражена тачка. ∎

Теорема Нека су $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ мерљиви скупови коначне мере. Тада постоји хиперраван која полови меру сваког од ових скупова. (Претпостављамо да су скупови A_i и мера „лепи", тј. $\mu(\text{хиперравни}) = 0$, A_i повезани, $\mu(\text{отвореног}) > 0$).

доказ Свака хиперраван одређена је својим вектором нормале. Ако је $x \in S^{n-1}$, означимо са H_x хиперраван ортогоналну на x која полови скуп A_1, тј.

$$\mu(H_x^+ \cap A_1) = \mu(H_x^- \cap A_1)$$



Приметимо да је ова раван јединствена.

Нека је $\varphi: S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ дато са

$$\varphi(x) := \left(\mu(H_x^+ \cap A_2), \dots, \mu(H_x^+ \cap A_n)\right)$$

$\overset{\text{БУТ}}{\Longrightarrow} (\exists\, x_0 \in S^{n-1})\ \ \varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$

$$\Rightarrow (\forall i \geq 2)\ \mu(H_{x_0}^+ \cap A_i) = \mu(H_{-x_0}^+ \cap A_i) = \mu(H_{x_0}^- \cap A_i)$$

$\Rightarrow$ H_{x_0} полови све скупове $A_1, \ldots, A_n$. ▨