За $n=1$:

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, mapsto] & \alpha \\
\mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Z}_2\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}^4 \arrow[d] \\
 & \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
2\alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
 & 0
\end{tikzcd}
\quad \lightning$$

$\Rightarrow$ α није ретракт.

2. начин На основу задатка од раније, ако је α ретракт, онда

$$H_n(X) \cong H_n(\alpha) \oplus H_n(X,\alpha)$$

$$H_n(X,\alpha) \cong \tilde{H}_n(X/\alpha) = \tilde{H}_n(T^2 \vee T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^4, & n=1 \\ \mathbb{Z}^2, & n=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

За $n=1$: $\quad H_1(X) \cong H_1(\alpha) \oplus H_1(X,\alpha)$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^4 \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ α није ретракт. $\blacksquare$

Пројективни простори

$\mathbb{R}P^n$: $e^0, e^1, \dots, e^n$

$$C_*: \; 0 \to \mathbb{Z}\langle e^n\rangle \to \mathbb{Z}\langle e^{n-1}\rangle \to \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}\langle e^1\rangle \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$$

$$d_k(e^k) = (1+(-1)^k)\, e^{k-1} = \begin{cases} 0, & k \text{ непарно} \\ 2e^{k-1}, & k \text{ парно} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad H_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \text{ или } n=k \text{ непарно} \\ \mathbb{Z}_2, & 1 \le k \le n-1 \text{ непарно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

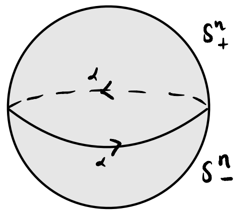
$$\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}P^n : e^0, e^1, e^2, \dots \quad \Rightarrow \quad H_k(\mathbb{R}P^\infty) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ \mathbb{Z}_2, & k \text{ непарно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

5. $X = S^n/_{x\sim -x,\ x\in S^{n-1}}$, $S^n_+ := \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\}$

(а) $H_k(X) = ?$

(б) Да ли је $S^n_+/_\sim$ ретракт или деформациони ретракт од X?

решење



(а) $X^{n-1} \approx S^{n-1}/_\sim \approx \mathbb{RP}^{n-1} : e^0, e^1, \dots, e^{n-1}$

(n-1) - скелет

$\Rightarrow X : e^0, e^1, \dots, e^{n-1}, \underbrace{e_1^n, e_2^n}$ лепе се на $\mathbb{RP}^{n-1}$ као n-ћелије у $\mathbb{RP}^n$

$$C_* : 0 \to \mathbb{Z}\langle e_1^n\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle e_2^n\rangle \to \mathbb{Z}\langle e^{n-1}\rangle \to \dots \to \mathbb{Z}\langle e^1\rangle \to \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$$

- За $k \leq n-2$ што је све као за $\mathbb{RP}^{n-1}$:

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & k \text{ непарно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- За $k \geq n+1$ је $H_k(X) = 0$
- Још $k = n-1$ и $k = n$

Знамо $d_n(e_1^n) = d_n(e_2^n) = (1 + (-1)^n)\, e^{n-1}$

1° n парно $\quad d_n(e_1^n) = d_n(e_2^n) = 2e^{n-1}$

$\ker d_n = \mathbb{Z}\langle e_1^n - e_2^n\rangle$

$\Rightarrow H_n(X) \cong \mathbb{Z}$

$H_{n-1}(X) \cong \mathbb{Z}\langle e^{n-1}\rangle / \mathbb{Z}\langle 2e^{n-1}\rangle \cong \mathbb{Z}_2$

Коначно, $H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, n \\ \mathbb{Z}_2, & 1 \leq k \leq n-1 \text{ непарно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

2° n непарно $\quad d_n = 0 \Rightarrow H_n(X) \cong \mathbb{Z}^2, \quad H_{n-1}(X) = 0$

Коначно, $H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ \mathbb{Z}_2, & 1 \le k \le n-1 \text{ непарно} \\ \mathbb{Z}^2, & k=n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

II начин Нека је $f: S^{n-1} \to \mathbb{R}P^n$ функција лепљења n-ћелије

Приметимо $X = D^n \cup_f \mathbb{R}P^n = C_f$

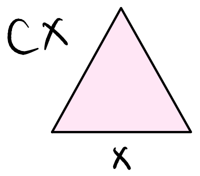
конус пресликавања f

ТОП Б: $f, g : X \to Y$, $f \simeq g \Rightarrow C_f \simeq C_g$

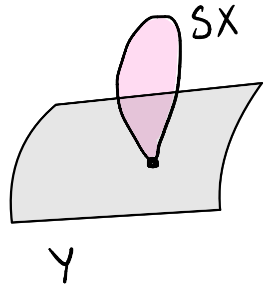
f се проширује на $CS^{n-1} = D^n$ (тако што D^n залепимо на n-ћелију у $\mathbb{R}P^n$) $\Rightarrow f \simeq const$

Шта је C_{const}?

$X \xrightarrow{const} Y$



$\cup_f \quad Y \quad \simeq$

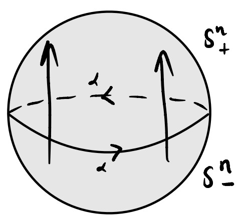


$= \quad SX \vee Y$

$\Rightarrow X \simeq C_f \simeq C_{const} \simeq SS^{n-1} \vee \mathbb{R}P^n \simeq S^n \vee \mathbb{R}P^n$

$\Rightarrow H_k(X) \cong H_k(S^n) \oplus H_k(\mathbb{R}P^n)$

(б) $S^n_+/\sim$ јесте ретракт:



$S^n_+/\sim$ није деф. ретракт:

$H_n(\underbrace{S^n_+/\sim}_{\cong \mathbb{R}P^n}) \neq H_n(X)$ ▨

$\mathbb{C}P^n: \; e^0, e^2, \dots, e^{2(n-1)}, e^{2n}$

$C_*: \; 0 \to \mathbb{Z}\langle e^{2n}\rangle \to 0 \to \mathbb{Z}\langle e^{2(n-1)}\rangle \to \dots \to \mathbb{Z}\langle e^2\rangle \to 0 \to \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$

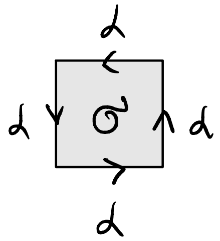
$$\Rightarrow \quad H_k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & 0 \le k \le 2n \text{ парно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathbb{C}P^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}P^n : \; e^0, e^2, e^4, \dots \quad \Rightarrow \quad H_k(\mathbb{C}P^\infty) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k \text{ парно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

6. Наћи тополошки простор тд.

(а) $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 4 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4, & n = 1 \\ \mathbb{Z}^2, & n = 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ (б) $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}_5, & n = 17 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & n = 22 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

решење

(а) $Y:$ 

$0 \to \mathbb{Z}\langle\sigma\rangle \to \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \to \mathbb{Z}\langle a\rangle \to 0$

$d_1(\alpha) = 0, \quad d_1(\sigma) = 4\alpha$

$$\left.\begin{array}{l} H_0(Y) \cong \mathbb{Z} \\ H_1(Y) \cong \mathbb{Z}_4 \\ H_2(Y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H_n(Y) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}_4, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$X := Y \vee Y \vee S^1 \vee S^2 \vee S^2 \vee S^4$

(б) слично. ▨

Муров простор

$M(\mathbb{Z}_k, n)$ је простор тд. $H_i(M(\mathbb{Z}_k,n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ \mathbb{Z}_k, & i=n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

конструкција: $f: S^n \to S^n$ „намотавање" k пута, тд. $\deg f = k$

$A := D^{n+1} \cup_f S^n : e^0, e^n, e^{n+1}$

$$0 \to \mathbb{Z}\langle e^{n+1}\rangle \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z}\langle e^n\rangle \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$$

$$H_n(A) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k$$

$$M(\mathbb{Z}_k, n) := A$$

Теорема Нека је $G \in Ab$ и $n \in \mathbb{N}$. Тада постоји топ. пр. X тд. $\tilde{H}_i(X) \cong \begin{cases} G, & i=n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Теорема Нека је $p: S^{2n-1} \to \mathbb{R}P^{2n-1}$ двослојно наткривање. Тада је $p_*: H_{2n-1}(S^{2n-1}) \to H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n-1})$ множење са 2.

1. Доказати да не постоји ненулто тангентно векторско поље $v: S^{2n-1} \to \mathbb{R}^{2n-1}$ на сфери S^{2n-1} тд. важи $v(x) = v(-x)$ за свако $x \in S^{2n-1}$.

решење Пп. да постоји такво в. поље и да је јединично (нормирано га), тј. $v: S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ и важи

$$(\forall x \in S^{2n-1}) \quad v(x) = v(-x). \quad (*)$$

Дефинишимо $\bar{v}: \mathbb{R}P^{2n-1} \to S^{2n-1}$ са

$$\bar{v}([x]) := v(x)$$

$\bar{v}$ је добро деф. због $(*)$

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "v"] & \\ \mathbb{R}P^{2n-1} \arrow[r, "\bar{v}"] & S^{2n-1} \end{tikzcd}$$

$\left.\begin{array}{l} p \text{ је количничко} \\ v = \bar{v} \circ p \text{ је непр.} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{топ 6}} \bar{v}$ је непр.

$\rightsquigarrow H_{2n-1}$

$$\begin{tikzcd} H_{2n-1}(S^{2n-1}) \arrow[d, "p_*"'] \arrow[dr, "v_*"] & \\ H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n-1}) \arrow[r, "\bar{v}_*"] & H_{2n-1}(S^{2n-1}) \end{tikzcd} \quad \overset{\text{тј.}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[d, "\cdot 2"'] \arrow[dr, "\cdot 2k"] & \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot k"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow v_*$ је множење са $2k$, тј. $\deg v = 2k$.

Знамо од раније:

$f: S^m \to S^m$ непр. тд. $(\forall x)\ f(x) \neq -x \Rightarrow f \simeq 1_{S^m} \Rightarrow \deg f = 1$

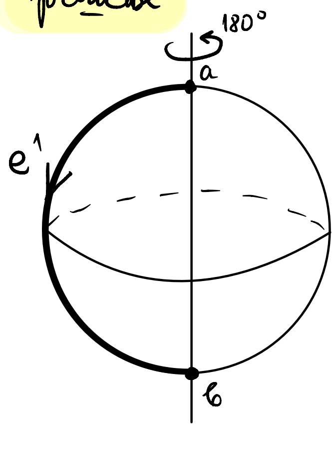
па како је $\deg v = 2k \neq 1 \Rightarrow (\exists x \in S^{2n-1})\ v(x) = -x$

v је тангентно в. поље, па мора да важи

$0 = \langle x, v(x)\rangle = \langle x, -x\rangle \Rightarrow x = 0 \notin S^{2n-1}$ ↯ ■

8. Нека је $X = D^3/_{x \sim \rho(x),\ x \in S^2}$ где је ρ ротација за $180°$ око вертикалне осе. Одредити хомологију од X.

решење



0-ћелије: a, b

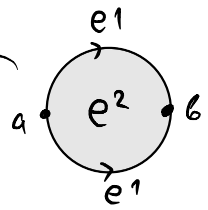
1-ћелија: e^1

2-ћелија: e^2 – намота се двапут око e^3

3-ћелија: e^3

$$0\to \mathbb{Z}\langle e^3\rangle \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\langle e^2\rangle \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}\langle e^1\rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b\rangle \to 0$$

$d_1(e^1) = b - a,\quad d_2(e^2) = e^1 - e^1 = 0$



$d_3(e^3) = 2e^2$

$H_0(X) = \mathbb{Z}$

$H_1(X) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = 0$

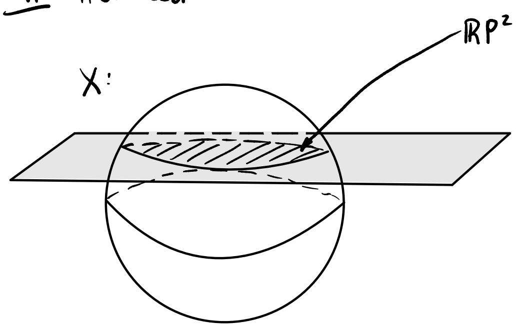
$H_2(X) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 = \mathbb{Z}\langle e^2\rangle / \mathbb{Z}\langle 2e^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2$

$H_3(X) = \ker d_3 / \operatorname{im} d_4 = 0$

Коначно, $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}_2, & n=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

II начин:

X:



На сваком нивоу је $\mathbb{R}P^2 \Rightarrow X = S(\mathbb{R}P^2)$

$\Rightarrow \tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}P^2)$

$\blacksquare$

Симплицијална хомологија

K = симплицијални комплекс (уређен скуп темена $v_0 < v_1 < \dots < v_m$)

$K_n = \{\sigma = (v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) \in K \mid \dim\sigma = n\}$ - скуп n-симплекса у K

$C_n = \mathbb{Z}[K_n]$ - слободна Абелова група генерисана ел. из K_n

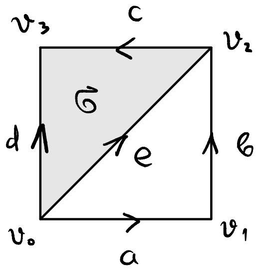
$C_n = \{\lambda_1\sigma_1 + \dots + \lambda_t\sigma_t \mid \dim\sigma_i = n,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$

$d_n : C_n \to C_{n-1}$ је дефинисано на генераторима са:

$$d_n(v_{i_0}, \dots, v_{i_n}) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (v_{i_0}, \dots, \hat{v}_{i_k}, \dots, v_{i_n})$$

$$H_n(K) := H(C_*(K)) = \ker d_n / \operatorname{im} d_n$$

1. K:



$H_n(K) = ?$

решење

$$C_* : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}^5 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^4 \to 0$$

генератори: σ; a, b, c, d, e; v_0, v_1, v_2, v_3

$H_0(K) = \mathbb{Z}$ (јер је K путно пов.)

- $\ker d_1 = ?$ Нека је $x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e \in \ker d_1$

$d_1(a) = v_1 - v_0$

$d_1(b) = v_2 - v_1$

$d_1(c) = v_3 - v_2$

$d_1(d) = v_3 - v_0$

$d_1(e) = v_2 - v_0$

$$d_1(x) = \alpha(v_1 - v_0) + \beta(v_2 - v_1) + \gamma(v_3 - v_2) + \delta(v_3 - v_0) + \varepsilon(v_2 - v_0) =$$
$$= v_0(-\alpha - \delta - \varepsilon) + v_1(\alpha - \beta) + v_2(\beta - \gamma + \varepsilon) + v_3(\gamma + \delta) = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -\alpha - \delta - \varepsilon &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \\ \beta - \gamma + \varepsilon &= 0 \\ \gamma + \delta &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\beta = \alpha \\ &\delta = -\gamma \\ &\varepsilon = \gamma - \alpha \\ &\alpha, \gamma \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \alpha a + \alpha b + \gamma c - \gamma d + (\gamma - \alpha)e =$$
$$= \alpha(a + b - e) + \gamma(c - d + e)$$
$$\Rightarrow \ker d_1 \cong \mathbb{Z}\langle a+b-e\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle c-d+e\rangle$$

- $\operatorname{im} d_2 = ?$

$$d_2(\sigma) = c - d + e \Rightarrow \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle c-d+e\rangle$$
$$\ker d_2 = 0$$

$$H_1(K) \cong \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 \cong \mathbb{Z}\langle a+b-e\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle c-d+e\rangle \Big/ \mathbb{Z}\langle c-d+e\rangle \cong \mathbb{Z}$$

$$H_2(K) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 = 0$$

Закључак: $H_n(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ ▨

Лема A, B слободне и коначно генерисане и $f: A \to B$ хомоморфизам. Тада је $A \cong \ker f \oplus \operatorname{im} f$, $\ker f$ и $\operatorname{im} f$ су слободне и кон. ген. и $\dim A = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$.

доказ $0 \to \ker f \hookrightarrow A \to \operatorname{im} f \to 0$ је КТН. који се цепа ▨

Ако је σ n-симплекс, са $K(\sigma)$ означимо с.к. састављен од свих страна од σ.

Знамо $H_i(K(\sigma)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

2. Нека је σ n-симплекс, $K = K(\sigma)$ и $K^{(m)} = \{\tau \in K \mid \dim \tau \le m\}$ m-скелет од K. Одредити $H_i(K^{(m)})$, $1 \le m \le n-1$.

Решење

$$C_*(K): \quad \cdots \to 0 \to C_n(K) \to C_{n-1}(K) \to \cdots \to C_{m+1}(K) \to C_m(K) \xrightarrow{d_m} \cdots \to C_1(K) \xrightarrow{d_1} C_0(K) \to 0$$

$$C_*(K^{(m)}): \cdots \to 0 \to 0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to C_m(K^{(m)}) \xrightarrow{d_m'} \cdots \to C_1(K^{(m)}) \xrightarrow{d_1'} C_0(K^{(m)}) \to 0$$

($C_m(K) = C_m(K^{(m)})$, $C_1(K) = C_1(K^{(m)})$, $C_0(K) = C_0(K^{(m)})$)

$d_i' = d_i$ за $i \le m$

Ако $i \ge m+1$: $H_i(K^{(m)}) = 0$

Ако $i \le m-1$: $H_i(K^{(m)}) \cong H_i(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Још остаје да одредимо $H_m(K^{(m)}) = \ker d_m' / \underbrace{\operatorname{im} d_{m+1}'}_{0} = \ker d_m \overset{\text{лема}}{\cong} \mathbb{Z}^{a_m}$

Приметимо: $\operatorname{im} d_{m+1} = \ker d_m$ (јер $H_m(K) = \ker d_m / \operatorname{im} d_{m+1} = 0$)

$a_m = ?$ $\quad a_m = \dim(\ker d_m) = \dim(\operatorname{im} d_{m+1})$

$C_k(K) = \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{k+1}}$ ← бр. k-симплекса у K

лема $\Rightarrow$ $\dim C_k(K) = \dim(\ker d_k) + \dim(\operatorname{im} d_k)$

тј. $\binom{n+1}{k+1} = a_k + a_{k-1}$

$k=n$: $0 \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{C_n(K)}} \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(K) \to \cdots$

$\Rightarrow 1 = \underbrace{\dim(\ker d_n)}_{0 \text{ јер } \ker d_n = H_n(K) = 0} + \dim(\operatorname{im} d_n) = a_{n-1}$

$\Rightarrow a_n = 0, \quad a_{n-1} = 1$

$k=n-1$: $\binom{n+1}{n} = a_{n-1} + a_{n-2} \Rightarrow a_{n-2} = n$

итд. индукцијом добијемо да је $a_k = \binom{n}{k+1}$

$\Rightarrow H_m(K^{(m)}) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{m+1}}$

Коначно, $H_i(K^{(m)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ \mathbb{Z}^{\binom{n}{m+1}}, & i=m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ ∎

Специјално, за $m=n-1$ је $K^{(m)} \approx S^{n-1}$, па је

$$H_i(S^{n-1}) \cong H_i(K^{(n-1)}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0, n-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тензорски производ

A, B - Абелове групе

$F(A,B) := F[A\times B] = Ab\langle A\times B \mid - \rangle$ - слободна Абелова гр. генерисана елементима из $A\times B$

$R(A,B) \leq F(A,B)$

подгрупа генерисана са:

$(a_1+a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$ и $(a, b_1+b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$,

где су $a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$.

$$A \otimes B := F(A,B)/R(A,B)$$

$a\otimes b := [(a,b)]$ - ознака

$\{a\otimes b \mid a\in A, b\in B\}$ је генератриса од $A\otimes B$ (није база)

У $A\otimes B$ важи:

$(a_1+a_2)\otimes b = a_1\otimes b + a_2\otimes b$ и $a\otimes(b_1+b_2) = a\otimes b_1 + a\otimes b_2$

Произвољан елемент из $A\otimes B$ је облика $\sum_{i=1}^{m} k_i\, a_i\otimes b_i$, $a_i\in A$, $b_i\in B$, $k_i\in\mathbb{Z}$.

Став $a\in A$, $b\in B$, $k\in\mathbb{Z}$

(1) $a\otimes 0 = 0\otimes b = 0$

(2) $(ka)\otimes b = k(a\otimes b) = a\otimes(kb)$

Став Нека су A, B Абелове и $\varphi: A\times B \to A\otimes B$ дато са $\varphi(a,b) = a\otimes b$. Тада за сваку Абелову групу C и свако билинеарно пресликавање $\psi: A\times B\to C$ постоји јединствен хомоморфизам $\Psi: A\otimes B \to C$ тд. $\Psi\circ\varphi = \psi$, тј. комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \\
A\otimes B \arrow[ur, dashed, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Теорема (1) $A \otimes B \cong B \otimes A$

(2) $\left(\bigoplus_{\alpha \in A} A_\alpha \right) \otimes B \cong \bigoplus_{\alpha \in A} (A_\alpha \otimes B)$

$A \otimes \left(\bigoplus_{\beta \in B} B_\beta \right) \cong \bigoplus_{\beta \in B} (A \otimes B_\beta)$

(3) $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$

Ако су $f : A \to C$ и $g : B \to D$ хомоморфизми Абелових група, онда дефинишемо $f \otimes g : A \otimes B \to C \otimes D$ са

$$(f \otimes g)(a, b) := f(a) \otimes g(b)$$

У претходној теореми сви изоморфизми су природни.
Нпр. за (1) то значи да ако је $f : A \to A'$ и $g : B \to B'$, онда комутира:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "f \otimes g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A' \otimes B' \arrow[d] \\
B \otimes A \arrow[r, "g \otimes f"] & B' \otimes A'
\end{tikzcd}$$

Теорема $G \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \otimes G \cong G$

- f, g изо. $\Rightarrow$ $f \otimes g$ изо.
- f, g епи. $\Rightarrow$ $f \otimes g$ епи.
- f, g моно. $\not\Rightarrow$ $f \otimes g$ моно.

Нпр. $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathbb{Z}_2$ су мономорфизми, али

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z}_2 & & 0 \end{array}$$

није моно.

$$\left(q \otimes 1 = \frac{q}{2} \otimes \overset{0 \in \mathbb{Z}_2}{\overset{\|}{2}} = 0 \right)$$

Став $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ тачан, G Абелова

$\Rightarrow$ $A \otimes G \xrightarrow{f \otimes \mathbb{1}} B \otimes G \xrightarrow{g \otimes \mathbb{1}} C \otimes G \to 0$ је тачан.

Претходни став каже да је $\cdot \otimes G$ десно тачан функтор.

Став $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{НЗД(n,m)}$

Пример $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } 2} \mathbb{Z}_2 \to 0$ је кон., али

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 & \to & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 & \to & \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 & \to 0 \\ & \| & & \| & & \| & \\ & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 & \end{array}$$ није

Теорема Нека је $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ тачан. Ако се овај низ цепа или ако је G слободна или торзионо слободна, онда је и $0 \to A \otimes G \xrightarrow{f \otimes 1} B \otimes G \xrightarrow{g \otimes 1} C \otimes G \to 0$ тачан.

Tor функтор

G - Абелова

- Слободна резолвента од G је тачан низ:

$$\mathcal{F}: \quad \cdots \to F_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} F_n \to \cdots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \to G \to 0 \quad (*)$$

тд. су све групе F_n слободне.

- Канонска резолвента од G:

$F_0 := Ab\langle G \mid - \rangle = F[G]$, $\quad f_0 : F_0 \to G$ је дато са $f(g) = g$

$F_1 := \ker f_0$, $\quad f_1 = i$ инклузија

$F_n = 0$, $n \geq 2$

$$0 \to \ker f_0 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{f_0} G \to 0$$

Нека је H Абелова и тензоришемо $(*)$ са H:

$$\mathcal{F} \otimes H: \quad \cdots \to F_2 \otimes H \xrightarrow{f_2 \otimes 1} F_1 \otimes H \xrightarrow{f_1 \otimes 1} F_0 \otimes H \xrightarrow{f_0 \otimes 1} G \otimes H \to 0$$

не мора да буде тачан

тачан

$$\mathrm{Tor}(G,H) := H_1(\mathcal{F}\otimes H) = \ker(f_1\otimes 1)/\mathrm{im}(f_2\otimes 1)$$

Теорема $\mathrm{Tor}(G,H)$ не зависи од избора резолвенте $\mathcal{F}$.

Ако узмемо каноничку резолвенту: $\mathcal{F}: 0 \to F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f} G \to 0 \;/\otimes H$

$$\mathcal{F}\otimes H: \; 0 \to F_1\otimes H \xrightarrow{f_1\otimes 1} F_0\otimes H \xrightarrow{f\otimes 1} G\otimes H \to 0$$ (← не мора бити тачан)

$$\mathrm{Tor}(G,H) \cong \ker(f_1\otimes 1)$$

$\Rightarrow$ имамо тачан низ:

$$0 \to \mathrm{Tor}(G,H) \hookrightarrow F_1\otimes H \to F_0\otimes H \to G\otimes H \to 0$$

Особине (1) A или B слободна $\Rightarrow \mathrm{Tor}(A,B) = 0$

(специјално $\mathrm{Tor}(A,\mathbb{Z}) = \mathrm{Tor}(\mathbb{Z},B) = 0$)

(2) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n,B) \cong \ker(B \xrightarrow{\cdot n} B)$

(3) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\text{НЗД}(n,m)}$

(4) $\mathrm{Tor}(A,B) \cong \mathrm{Tor}(B,A)$

(5) $\mathrm{Tor}\left(\bigoplus_{\alpha\in A} A_\alpha, B\right) \cong \bigoplus_{\alpha\in A} \mathrm{Tor}(A_\alpha,B)$.