Хомологија CW-комплекса

X - ћелијски комплекс

C_n = слободна Абелова гр. генерисана ћелијама димензије n

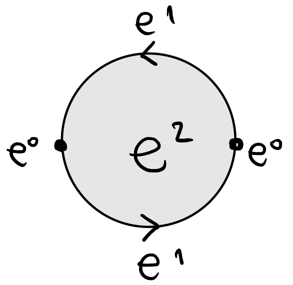
d_n = слика сваку ћелију у њену границу

Пример (1) S^2 : e^0, e^2

$$C_* : \quad 0 \to \mathbb{Z}\langle e^2\rangle \to 0 \to \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$$

$$\Rightarrow \quad H_n(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0,2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(2) $\mathbb{R}P^2$: e^0, e^1, e^2



$$C_* : \quad 0 \to \mathbb{Z}\langle e^2\rangle \xrightarrow{2} \mathbb{Z}\langle e^1\rangle \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\langle e^0\rangle \to 0$$

$$d_1(e^1) = e^0 - e^0 = 0$$

$$d_2(e^2) = e^1 + e^1 = 2e^1$$

$$\Rightarrow \quad H_0(\mathbb{R}P^2) = \ker d_0 / \operatorname{im} d_1 = \mathbb{Z}$$

$$H_1(\mathbb{R}P^2) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$$

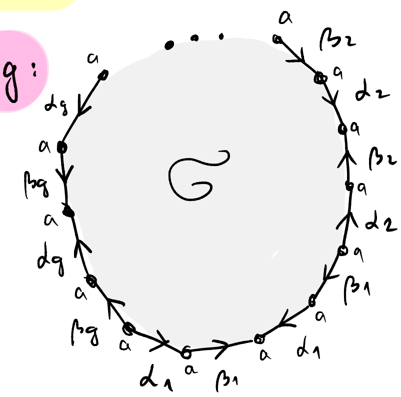
$$H_2(\mathbb{R}P^2) = \ker d_2 / \operatorname{im} d_3 = 0$$

$$H_n(\mathbb{R}P^2) = 0, \quad n \geq 3$$

1. Одредити хомологију површи M_g и N_h, $g \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{N}$.

решење

M_g:



0 - ћелија : a

1 - ћелије : $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$

2 - ћелија : σ

$$C_*: \quad 0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\langle\sigma\rangle \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{i=1}^{g}\left(\mathbb{Z}\langle\alpha_i\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta_i\rangle\right) \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a\rangle \xrightarrow{d_0} 0$$

- $d_0 = 0$
- $d_1 = ?$

$$\left.\begin{aligned} d_1(\alpha_i) &= a - a = 0 \\ d_1(\beta_i) &= a - a = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_1 = 0$$

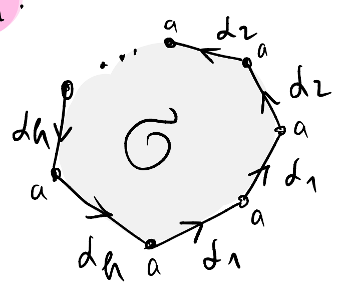
- $d_2 = ?$

$$d_2(\sigma) = \alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_1 + \dots + \alpha_g + \beta_g - \alpha_g - \beta_g = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

- $d_n = 0, \quad n \geq 3$

$$\Rightarrow H_n(M_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{специјално} \quad H_n(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

N_h:



0 - ћелије : a

1 - ћелије : $\alpha_1, \dots, \alpha_h$

2 - ћелије : σ

$$C_*: \quad 0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}\langle\sigma\rangle \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{i=1}^{h} \mathbb{Z}\langle\alpha_i\rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle a\rangle \xrightarrow{d_0} 0$$

- $d_0 = 0$
- $d_1 = ?$

$$d_1(\alpha_i) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 = 0$$

- $d_2 = ?$

$$d_2(\sigma) = \alpha_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_h + \alpha_h = 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_h)$$

- $d_n = 0, \ n \geq 3$

$n=0$: $\quad H_0(N_h) \cong \mathbb{Z}$

$n=1$: $\quad H_1(N_h) \cong \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 \cong \left(\mathbb{Z}\langle \alpha_1\rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\langle \alpha_h\rangle\right) / \mathbb{Z}\langle 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_h)\rangle$

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_h) = 0\rangle$$

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_h, \beta \mid \beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_h, \ 2\beta = 0\rangle$$

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \beta \mid 2\beta = 0\rangle$$

$$\cong \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2$$

$n=2$: $\quad H_2(N_h) = 0$

Коначно, $\quad H_n(N_h) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & n = 1 \\ 0, & иначе \end{cases}$

специјално $\quad H_n(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, & n = 1 \\ 0, & иначе \end{cases}$ $\blacksquare$

Став Нека је M затворена повезана n-многострукост. Тада

$$M \text{ је оријентабилна} \iff H_n(M) \cong \mathbb{Z}.$$

Теорема [Хуревич] Нека је X $(n-1)$-повезан простор и нека је $h: \pi_k(X) \to H_k(X)$ Хуревичев хомоморфизам.

- За $n=1$, $h: \pi_1(X) \to H_1(X)$ је епиморфизам (биће изоморфизам ако је $\pi_1(X)$ Абелова).

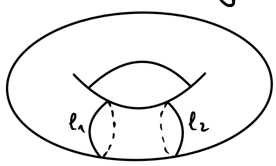
- За $n \geq 2$, $h : \pi_n(X) \to H_n(X)$ је изоморфизам,

  $h : \pi_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X)$ је епиморфизам.

(X је $(n-1)$-повезан значи $\pi_k(X) = 0$ за $k \leq n-1$, па стеујално имамо $H_k(X) = 0$ за $k \leq n-1$.)

Последица $H_1(X) \cong \pi_1^{ab}(X)$.

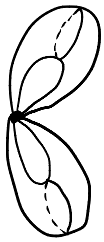
2. Нека су ℓ_1 и ℓ_2 кружнице на торусу:

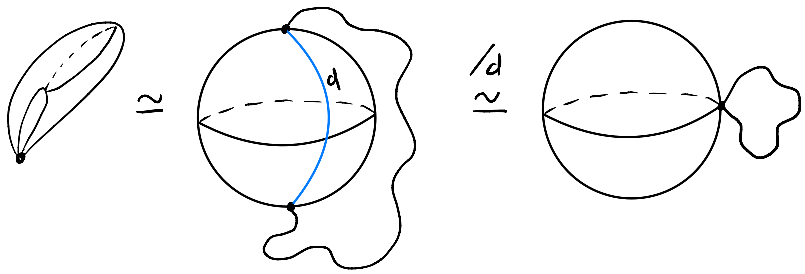


Одредити хомологију простора:

(а) $X = T^2/_{\ell_1 \cup \ell_2}$ (б) $Y = (T^2/_{\ell_1})/_{\ell_2}$.

решење

(а) $X \simeq$  букет две уштинуте сфере

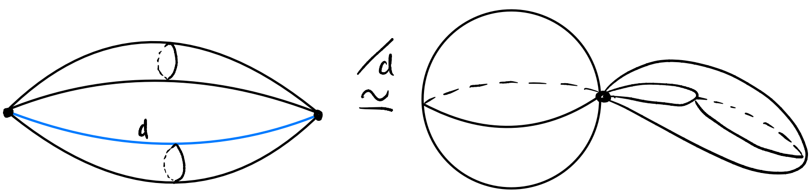


$\simeq S^1 \vee S^2$

$\Rightarrow X \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^2 \vee S^2$

$$\Rightarrow H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1, 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

(б) $Y \simeq$



$\simeq S^1 \vee S^2 \vee S^2$

$$\Rightarrow H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

∎

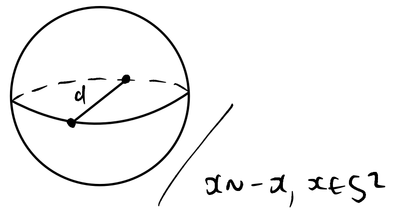
3. Нека је d пречник сфере S^2 и $X = (S^2 \vee d)/_{x\sim -x,\ x\in S^2}$.

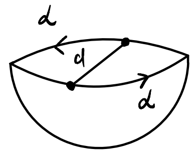
(а) $H_n(X) = ?$

(б) Да ли је $d/_\sim$ ретракт или деформациони ретракт од X?

(в) Да ли X има својство фиксне тачке?

решење (а)

X: 

$\approx$ 

$\approx S^1 \vee \mathbb{RP}^2$ (d)

$$\Rightarrow H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, & n=1 \\ 0, & n\geq 2 \end{cases}$$

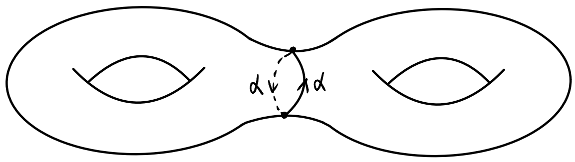
(могли смо радити и помоћу CW-декомпозиције, али било би компликовање)

(б) $d/_\sim$ јесте ретракт јер је у букету (ретракција: $\mathbb{RP}^2$ се слика у тачку)

$d/_\sim$ није деф. ретракт јер би онда било $X \simeq d/_\sim$, али
$H_1(X) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z} \cong H_1(d/_\sim)$

(в) X нема СФТ јер је $S^1 = d/_\sim$ ретракт од X, а S^1 нема СФТ.

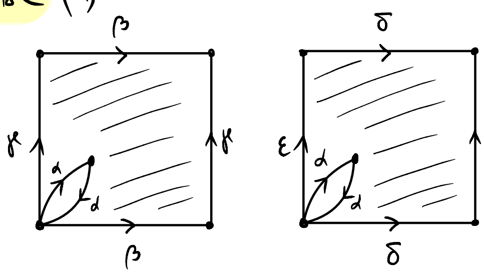
(2. начин: $A\vee B$ има СФТ акко A и B имају СФТ. Како $\mathbb{RP}^2$ нема СФТ и $X = \mathbb{RP}^2 \vee S^1 \Rightarrow X$ нема СФТ.) ∎

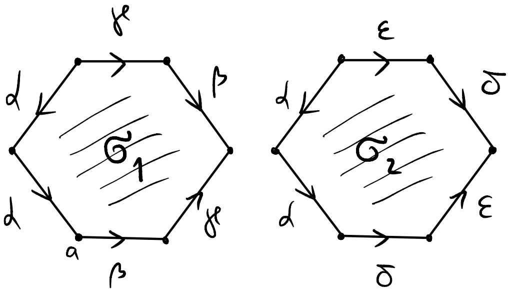
4. X: 

(а) $H_n(X) = ?$

(б) Да ли је α ретракт од X?

решење (а)

X: 

$\approx$ 

0-ћелија: a

1-ћелије: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$

2-ћелије: σ_1, σ_2

$$C_* : \; 0 \to \mathbb{Z}\langle\sigma_1\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\sigma_2\rangle \to \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\gamma\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\delta\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\varepsilon\rangle \to \mathbb{Z}\langle a\rangle \to 0$$

- $d_0 = 0$
- $d_1(\alpha) = d_1(\beta) = d_1(\gamma) = d_1(\delta) = d_1(\varepsilon) = a - a = 0 \Rightarrow d_1 = 0$
- $d_2(\sigma_1) = \beta + \gamma - \beta - \gamma + \alpha + \alpha = 2\alpha$

  $d_2(\sigma_2) = \delta + \varepsilon - \delta - \varepsilon + \alpha + \alpha = 2\alpha$

  $\operatorname{im} d_2 = ?$

  $d_2(k\sigma_1 + l\sigma_2) = 2(k+l)\alpha \Rightarrow \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle$

  $\ker d_2 = ?$

  генератор

  $0 = d_2(k\sigma_1 + l\sigma_2) = 2(k+l)\alpha \Rightarrow k + l = 0 \Rightarrow l = -k$

  $\Rightarrow \ker d_2 = \mathbb{Z}\langle\sigma_1 - \sigma_2\rangle$

$n=0$: $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

$n=1$: $H_1(X) = \ker d_1 / \operatorname{im} d_2 = \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\beta\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\gamma\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\delta\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\varepsilon\rangle / \mathbb{Z}\langle 2\alpha\rangle$

$\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4$

$n=2$: $H_2(X) = \ker d_2 / \underbrace{\operatorname{im} d_3}_{0} \cong \mathbb{Z}$

Коначно, $H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4, & n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

(б) 1. начин пос. α јесте ретракт

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\Uparrow"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & \alpha \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{H_n} \quad \begin{tikzcd} H_n(\alpha) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\Uparrow"'] & H_n(X) \arrow[d, "r_*"] \\ & H_n(\alpha) \end{tikzcd}$$

За $n=1$:

$$\begin{tikzcd} \alpha \arrow[r, mapsto] & \alpha \\ \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Z}_2\langle\alpha\rangle \oplus \mathbb{Z}^4 \arrow[d] \\ & \mathbb{Z}\langle\alpha\rangle \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} 2\alpha \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\ & 0 \end{tikzcd} \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ α није ретракт.

2. ~~начин~~ На основу задатка од раније, ако је α ретракт, онда

$$H_n(X) \cong H_n(\alpha) \oplus H_n(X,\alpha)$$

$$H_n(X,\alpha) \cong \tilde{H}_n(X/\alpha) = \tilde{H}_n(T^2 \vee T^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^4, & n=1 \\ \mathbb{Z}^2, & n=2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

За $n=1$: $\quad H_1(X) \cong H_1(\alpha) \oplus H_1(X,\alpha)$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^4 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^4 \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ α није ретракт. ▨