За $1 \leq k \leq m-1$, φ_k заротира сваку координату за угао $k \cdot \frac{2\pi}{m}$, па очигледно нема фиксних тачака.

$\Rightarrow$ дејство је слободно.

1. Ако G дејствује слободно на S^{2n}, онда је $G = 0$ или $G = \mathbb{Z}_2$.

решење Нека је $\varphi : G \to Homeo(S^{2n})$ слободно дејство

За $g \in G$, φ_g је хомеоморфизам, па је $\varphi_g \circ \varphi_g^{-1} = \mathbb{1}_{S^n}$ одакле је $\deg \varphi_g \cdot \deg \varphi_g^{-1} = 1 \Rightarrow \deg \varphi_g \in \{-1, 1\}$. Дакле, имамо композицију:
$$G \xrightarrow{\varphi} Homeo(S^{2n}) \xrightarrow{\deg} \{-1,1\} = \mathbb{Z}_2$$

Покажимо да је $\deg \circ \varphi$ „1-1".

Нека је $e \neq g \in \ker(\deg \circ \varphi)$, тј. $\deg \varphi_g = 1$.

Како је дејство слободно, φ_g нема фиксних тачака

$\Rightarrow \varphi_g \simeq a_{S^{2n}} \Rightarrow \deg \varphi_g = (-1)^{2n+1} = -1$ $\lightning$

$\Rightarrow \ker(\deg \circ \varphi) = \{e\}$

$\Rightarrow \deg \circ \varphi$ је „1-1"

$\Rightarrow G \leq \mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow G$ је 0 или $\mathbb{Z}_2$. $\blacksquare$

Лекасти простори (lens space)

Имали смо слободно дејство $\mathbb{Z}_m \curvearrowright S^{2n-1}$:
$$\varphi_1 : z \longmapsto e^{i\frac{2\pi}{m}} \cdot z, \qquad z \in S^{2n-1}$$

Лекасти простор је простор орбита:
$$L_m^{2n-1} := S^{2n-1} / \mathbb{Z}_m$$

Како је ово дејство слободно, природна пројекција $S^{2n-1} \to L_m^{2n-1}$ је натктривање и важи $\pi_1(L_m^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}_m$.
Слично се дефинише и

$$L_m^\infty := S^\infty / \mathbb{Z}_m$$

и важи да је $L_m^\infty = K(\mathbb{Z}_m, 1)$.
$K(G,n)$ је Ајленберг-Меклејнов простор тј.

$$\pi_i(K(G,n)) = \begin{cases} G, & i=n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Дакле $\pi_i(L_m^\infty) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_m, & i=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Дејство $\mathbb{Z}_m \curvearrowright S^{2n-1}$ није јединствено. Можемо посматрати и:

$$\varphi_1 : (z_1, \dots, z_n) \longmapsto \left(e^{i\frac{2\ell_1\pi}{m}} z_1, \dots, e^{i\frac{2\ell_n\pi}{m}} z_n\right),$$

где су $\ell_1, \dots, \ell_n$ узајамно прости са m. Ово је такође слободно дејство и простор

$$L_m^{2n-1}(\ell_1, \dots, \ell_n) := S^{2n-1} / \mathbb{Z}_m$$

такође називамо лечастим. (Дакле, $L_m^{2n-1} = L_m^{2n-1}(1, \dots, 1)$)
L_m^{2n-1} и $L_m^{2n-1}(\ell_1, \dots, \ell_n)$ имају све исте хомотопске и хомолошке групе, али могу се одабрати $\ell_1, \dots, \ell_m$ т.д. ова два простора не буду хомотопски еквивалентна.

Пример (1) За затворене повезане површи важи

$$M \approx N \iff \pi_1(M) \cong \pi_1(N).$$

Ово не важи за n-многострукости:

$$\pi_1(L^3_5(1,1)) \cong \pi_1(L^3_5(1,2)), \quad \text{али} \quad L^3_5(1,1) \not\approx L^3_5(1,2)$$

(2) $L^3_7(1,1) \simeq L^3_7(1,2)$, али $L^3_7(1,1) \not\approx L^3_7(1,2)$

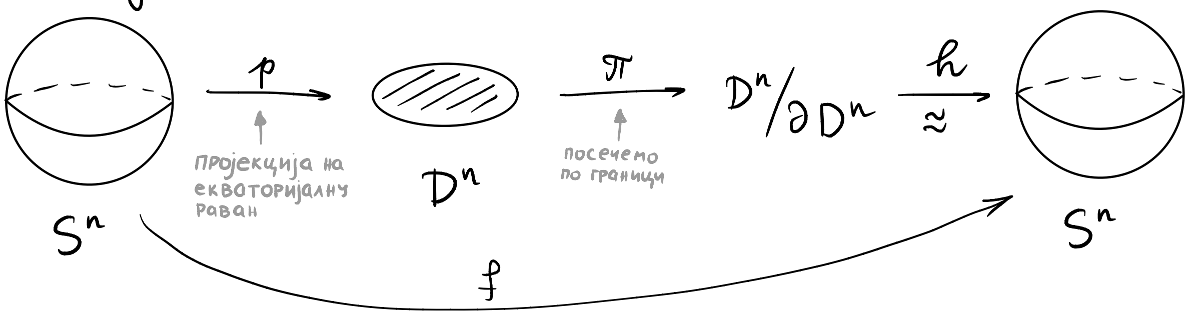
(3) M, N затворене повезане n-многострукости т.д. $\pi_1(M) \cong \pi_1(N)$ и $H_i(M) \cong H_i(N)$, $i \in \mathbb{N}_0$ $\not\Rightarrow$ $M \approx N$

контрапример: $L^3_5(1,1) \not\approx L^3_5(1,2)$.

ТОП Б: $f: S^n \to S^n$ није „на" $\Rightarrow$ $f \simeq const$ ($\Rightarrow \deg f = 0$)

2. Конструисати непрекидно и „на" пресликавање $f: S^n \to S^n$ т.д. је $\deg f = 0$.

решење



$f := h \circ \pi \circ p$ се факторише кроз $D^n \simeq *$ $\Rightarrow$ $f \simeq const \Rightarrow \deg f = 0$. ▨

ТОП Б: n непарно $\Rightarrow$ $\mathbb{1}_{S^n} \simeq a_{S^n}$

Сад имамо и обрнуто:

$$\mathbb{1}_{S^n} \simeq a_{S^n} \Rightarrow \deg \mathbb{1}_{S^n} = \deg a_{S^n} \Rightarrow 1 = (-1)^{n+1} \Rightarrow n \text{ непарно.}$$

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$.

(а) $f : S^{2n} \to S^{2n}$ непр. $\Rightarrow \left(\exists x_0 \in S^{2n}\right) f(x_0) = x_0 \ \vee \ f(x_0) = -x_0$.

(б) $\mathbb{R}P^{2n}$ има својство фиксне тачке.

решење (а) пс. $(\forall x \in S^n) \ f(x) \neq x \ \wedge \ f(x) \neq -x$

$\Rightarrow \ f \simeq 1_{S^{2n}}$ и $f \simeq a_{S^{2n}}$

$\Rightarrow \ \deg f = \deg 1_{S^{2n}} = \deg a_{S^{2n}}$

$\Rightarrow \ 1 = (-1)^{2n+1}$ ↯

(б) Нека је $f : \mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ непр. и нека је $p : S^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ двослојно наткривање. Посматрајмо дијаграм:

$$\begin{tikzcd} & & S^{2n} \arrow[d, "p"] \\ S^{2n} \arrow[r, "p"] \arrow[urr, dashed, "\bar{f}"] & \mathbb{R}P^{2n} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}P^{2n} \end{tikzcd}$$

Како је $\pi_1(S^{2n}) = 0$, то постоји подизање $\bar{f} : S^{2n} \to S^{2n}$.

На основу (а) постоји $x_0 \in S^{2n}$ такво да је $\bar{f}(x_0) = x_0$ или $\bar{f}(x_0) = -x_0$. Коначно,

$$p(\bar{f}(x_0)) = f(p(x_0))$$

$$[x_0] = f([x_0]) \ \Rightarrow \ f \text{ има фиксну тачку.} \ \blacksquare$$

4. Нека су $f, g : S^n \to S^n$ непр. и $|\deg f| \neq |\deg g|$. Тада

$(\exists x \in S^n) \ \measuredangle\left(\overline{Of(x)}, \overline{Og(x)}\right) = \frac{12\pi}{17}$.

решење Показујемо да постоје $x_1, x_2 \in S^n$ тј. $f(x_1) = g(x_1)$ и $f(x_2) = -g(x_2)$.

пс. $(\forall x \in S^n) \ f(x) \neq g(x) \Rightarrow f \simeq a_{S^n} \circ g \Rightarrow |\deg f| = |\deg g|$ ↯

пс. $(\forall x \in S^n) \ f(x) \neq -g(x) \Rightarrow f \simeq g \Rightarrow |\deg f| = |\deg g|$ ↯

Нека је $\varphi : S^n \to \mathbb{R}$ дата са $\varphi(x) = \measuredangle\left(\overline{Of(x)}, \overline{Og(x)}\right) \in [0, \pi]$.

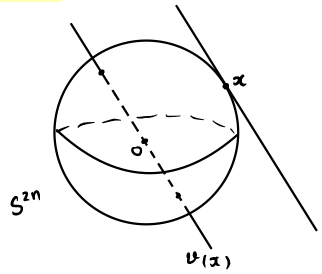
Приметимо $\varphi(x_1) = 0$ и $\varphi(x_2) = \pi$ и φ је непрекидна

$\Rightarrow (\exists x \in S^n) \ \varphi(x) = \frac{12\pi}{17}$, тј. $\measuredangle\left(\overline{Of(x)}, \overline{Og(x)}\right) = \frac{12\pi}{17}$. $\blacksquare$

Теорема [о чешљању јежа / о чупавој лопти]: Не постоји непрекидно ненулто тангентно векторско поље на S^{2n}.

5. Доказати да на S^{2n} не постоји непрекидно поље тангентних праваца.

Решење пп. нека је $\nu: S^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ непр. т.д. $x \perp \nu(x)$ и нека је $p: S^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ дволисно наткривање.



Посматрајмо дијаграм:

$$\begin{tikzcd} & S^{2n} \arrow[d, "p"] \\ S^{2n} \arrow[ur, dashed, "\bar{\nu}"] \arrow[r, "\nu"] & \mathbb{R}P^{2n} \end{tikzcd}$$

$\pi_1(S^{2n}) = 0 \Rightarrow$ постоји подизање $\bar{\nu}: S^{2n} \to S^{2n}$ т.д. $p \circ \bar{\nu} = \nu$.

$\Rightarrow (\forall x \in S^{2n}) \quad [\bar{\nu}(x)] = \nu(x)$

$\Rightarrow \quad \nu(x) \cap S^{2n} = \{\bar{\nu}(x), -\bar{\nu}(x)\}$

$\Rightarrow \bar{\nu}$ је непр. ненулто тангентно векторско поље на S^{2n} ↯ ∎

За непарне сфере: $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ па постоји непрекидно ненулто тангентно векторско поље $\nu: S^{2n-1} \to S^{2n-1}$

$$\nu(x_1, \dots, x_{2n}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}).$$

Мајер–Вијеторисов низ Нека су $X_1, X_2 \subseteq X$ т.д. $\operatorname{int} X_1 \cup \operatorname{int} X_2 = X$. Тада имамо природан дтн.

$$\dots \to H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{((i_1)_*, (i_2)_*)} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{(j_1)_* - (j_2)_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \to \dots$$

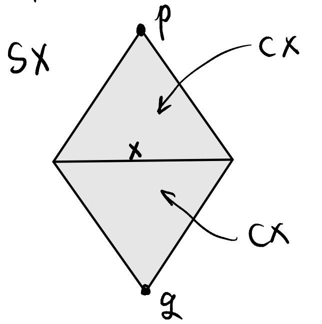
где су

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\ X_1 \cap X_2 \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] & & X \\ & X_2 \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

инклузије.

Нека је X топ. пр. и применимо M-B низ на SX и покривач сачињен од два конуса, тј. $X_1 = SX \setminus \{p\} \simeq CX$,

$X_2 = SX \setminus \{q\} \simeq CX$



Приметимо: $X_1, X_2 \simeq *$,

$X_1 \cap X_2 = SX \setminus \{p,q\} \simeq X$

$$\cdots \to \underset{0}{\underset{\|}{\tilde{H}_{n+1}(CX)}} \oplus \underset{0}{\underset{\|}{\tilde{H}_{n+1}(CX)}} \to \tilde{H}_{n+1}(SX) \to \tilde{H}_n(X) \to \underset{0}{\underset{\|}{\tilde{H}_n(CX)}} \oplus \underset{0}{\underset{\|}{\tilde{H}_n(CX)}} \to \cdots$$

$\Rightarrow$ добијамо изоморфизам $\tilde{H}_{n+1}(SX) \cong \tilde{H}_n(X)$.

Нека је Y неки други топ. пр. и $f : X \to Y$ непр.

Из природности M-B низа следи да комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_{n+1}(SX) \arrow[r, two heads, tail] \arrow[d, "(Sf)_*"'] & \tilde{H}_n(X) \arrow[d, "f_*"] \\
\tilde{H}_{n+1}(SY) \arrow[r, two heads, tail] & \tilde{H}_n(Y)
\end{tikzcd}$$

Специјално, за $X = Y = S^n$ комутира:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) \arrow[d, "(\overline{Sf})_*"'] & \tilde{H}_{n+1}(SS^n) \arrow[l, two heads, tail, "h_*"'] \arrow[r, two heads, tail] \arrow[d, "(Sf)_*"'] & \tilde{H}_n(S^n) \arrow[d, "f_*"] \\
\tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) & \tilde{H}_{n+1}(SS^n) \arrow[l, two heads, tail, "h_*"'] \arrow[r, two heads, tail] & \tilde{H}_n(S^n)
\end{tikzcd}$$

где је $h : SS^n \to S^{n+1}$ хомеоморфизам, а $\overline{Sf} = h \circ Sf \circ h^{-1}$.

Знамо да је f_* множење са $\deg f$, па из дијаграма видимо да је и $(\overline{Sf})_*$ множење са $\deg f$, тј. $\deg \overline{Sf} = \deg f$.

(Пишемо и $\deg Sf = \deg f$ имајући у виду $h : SS^n \approx S^{n+1}$.)

Видели смо раније лему о исецању:

Лема [о исецању] Нека су $A, B \subseteq X$ т.д. $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B = X$. Тада инклузија $i : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индукује изоморфизам:

$$i_* : H_n(B, A\cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Сада наводимо њену другу верзију:

Лема [о исецању]: Нека је $Z \subseteq B \subseteq X$ т.д. $\overline{Z} \subset \operatorname{int} B$. Тада инклузија $(X \setminus Z, B \setminus Z) \xhookrightarrow{i} (X, B)$ индукује изоморфизам:

$$i_* : H_n(X\setminus Z, B \setminus Z) \longrightarrow H_n(X, B), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема [о инваријантности димензије] Нека је $U \neq \emptyset$ отворен у $\mathbb{R}^k$ и $V \neq \emptyset$ отворен у $\mathbb{R}^m$. Ако је $U \approx V$, онда $k = m$.

деф. (X, A) је добар пар ако је X топ. пр., $A \in \mathcal{F}_X$ и ако постоји $V \in \mathcal{T}_X$, $A \subseteq V$ т.д. је A јаки деформациони ретракт од V.

Пример (1) X CW-комплекс, A поткомплекс $\Rightarrow (X, A)$ је добар пар

(2) (CX, X) је добар пар (спец. (D^n, S^{n-1}) је добар пар)

(3) M - многострукост, N затворена подмнож. $\Rightarrow (M, N)$ је добар пар

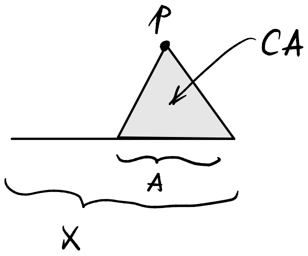
Став Нека је (X, A) добар пар. Тада $q : X \twoheadrightarrow X/A$ индукује изоморфизам $q_* : H_n(X, A) \xrightarrow{\cong} H_n(X/A, \underset{*}{\underset{\parallel}{A/A}})$.

Из дуг. т. н. пара $(X/A, *)$ имамо да је $H_n(X/A, *) \cong \tilde{H}_n(X/A)$

Дакле, $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$.

Ако (X, A) није добар пар, имамо следећи задатак.

6. Доказати $H_n(X,A) \cong \tilde{H}_n(X \cup CA)$.



Решење Посматрајмо дтн. за пар $(X \cup CA, CA)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & \tilde{H}_n(CA) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \tilde{H}_n(X \cup CA) \arrow[r] & H_n(X \cup CA, CA) \arrow[r] & \tilde{H}_{n-1}(CA) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \cdots \\
& 0 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{H}_n(X \cup CA) \cong H_n(X \cup CA, CA) \cong H_n(X \cup CA \setminus \{p\}, CA \setminus \{p\})$ (★), где је

други изо. из 2. верзије леме о исецању.

Нека је $r : CA \setminus \{p\} \to A$ деформациона ретракција. Тада је r_* изо.
Из природности дтн. имамо

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & H_n(CA \setminus \{p\}) \arrow[r] \arrow[d, "r_*"'] & H_n(X \cup CA \setminus \{p\}) \arrow[r] \arrow[d, "r_*"'] & H_n(X \cup CA \setminus \{p\}, CA \setminus \{p\}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}(CA \setminus \{p\}) \arrow[r] \arrow[d, "r_*"'] & H_{n-1}(X \cup CA \setminus \{p\}) \arrow[r] \arrow[d, "r_*"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

На основу Стинродове 5-леме је

$$H_n(X \cup CA \setminus \{p\}, CA \setminus \{p\}) \cong H_n(X,A)$$

(★) $\Longrightarrow$ $H_n(X,A) \cong \tilde{H}_n(X \cup CA)$. ■