доказ [змијске леме 2]:

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{C_*} \arrow[d, dotted] & \boxed{D_*} \arrow[d, dotted] & \boxed{E_*} \arrow[d, dotted] & \\
2: & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
1: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0: & 0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
-1: & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Имамо ктн. л.к.

$$0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$$

Цик-цак лема нам даје дтн.

$$\cdots \to \underset{\underset{0}{\parallel}}{H_2(E_*)} \to \underset{\underset{\ker\alpha}{\parallel}}{H_1(C_*)} \to \underset{\underset{\ker\beta}{\parallel}}{H_1(D_*)} \to \underset{\underset{\ker\gamma}{\parallel}}{H_1(E_*)} \to \underset{\underset{\operatorname{coker}\alpha}{\parallel}}{\underset{D/\operatorname{im}\alpha}{\parallel}}{H_0(C_*)} \to \underset{\underset{\operatorname{coker}\beta}{\parallel}}{\underset{E/\operatorname{im}\beta}{\parallel}}{H_0(D_*)} \to \underset{\underset{\operatorname{coker}\gamma}{\parallel}}{\underset{F/\operatorname{im}\gamma}{\parallel}}{H_0(E_*)} \to \underset{\underset{0}{\parallel}}{H_{-1}(C_*)} \to \cdots$$

∎

1. Нека је $\{C_*^\alpha\}_{\alpha\in A}$ фамилија л.к. и $C_* := \bigoplus_{\alpha\in A} C_*^\alpha$, где је $C_n := \bigoplus_{\alpha\in A} C_n^\alpha$ и $d_n := \bigoplus_{\alpha\in A} d_n^\alpha$. Тада је

$$H_n(C_*) \cong \bigoplus_{\alpha\in A} H_n(C_*^\alpha), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

решење По дефиницији је $H_n(C_*) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$

Дефинишемо пресликавање $\phi : \ker d_n \to \bigoplus_{\alpha\in A} H_n(C_*^\alpha)$ са

$$\phi\Big(\sum_{\alpha\in A} x^\alpha\Big) := \sum_{\alpha\in A} [x^\alpha]$$

добра дефинисаност:

$$\sum_{\alpha\in A} x^\alpha \in \ker d_n \subseteq \bigoplus_{\alpha\in A} C_n^\alpha \iff d_n\Big(\sum_{\alpha\in A} x^\alpha\Big) = 0$$

сви сем коначно много x^α су 0

$$\iff \sum_{\alpha\in A} d_n^\alpha(x^\alpha) = 0$$

$$\iff (\forall \alpha\in A)\ d_n^\alpha(x^\alpha) = 0$$

$$\iff (\forall \alpha\in A)\ x^\alpha \in \ker d_n^\alpha$$

ϕ је очигледно епиморфизам. Применимо 1. теорему о изоморфизму на ϕ:

$$\ker d_n / \ker\phi \cong \operatorname{im}\phi \overset{\phi \text{ је „на"}}{=} \bigoplus_{\alpha\in A} H_n(C_*^\alpha)$$

Још да покажемо да је $\ker\phi = \operatorname{im} d_{n+1}$.

$\subseteq$: Нека је $\sum_{\alpha\in A} x^\alpha \in \ker\phi \subseteq \ker d_n \subseteq \bigoplus_{\alpha\in A} C_n^\alpha$

$$0 = \phi\left(\sum_{\alpha\in A} x^\alpha\right) = \sum_{\alpha\in A} [x^\alpha] \iff (\forall \alpha\in A)\ [x^\alpha] = 0$$

Елементи у $\bigoplus_{\alpha\in A} C_n^\alpha$ су коначне суме, па су сви сем коначно много x^α једнаки нули. Нека је $B\subseteq A$ коначан скуп т.д. $x^\alpha = 0$ за свако $\alpha\in A\setminus B$.

- за $\alpha\in A\setminus B$: $y^\alpha := 0$
- за $\alpha\in B$: $[x^\alpha] = 0 \in H_n(C_*^\alpha) \Rightarrow x^\alpha \in \operatorname{im} d_{n+1}^\alpha$

$$\Rightarrow (\exists y^\alpha \in C_{n+1}^\alpha)\ d_{n+1}^\alpha(y^\alpha) = x^\alpha.$$

Нека је $y := \sum_{\alpha\in A} y^\alpha$. Тада $\sum_{\alpha\in A} x^\alpha = d_{n+1}(y) \Rightarrow \sum_{\alpha\in A} x^\alpha \in \operatorname{im} d_{n+1}$.

$\supseteq$: Нека је $x\in \operatorname{im} d_{n+1}$, тј. $x = d_{n+1}\left(\sum_{\alpha\in A} y^\alpha\right)$.

$$\phi(x) = (\phi\circ d_{n+1})\left(\sum_{\alpha\in A} y^\alpha\right) = \phi\left(\sum_{\alpha\in A} d_{n+1}^\alpha(y^\alpha)\right) = \sum_{\alpha\in A} \underbrace{[d_{n+1}^\alpha(y^\alpha)]}_{0} = 0$$

$\Rightarrow x\in\ker\phi$. ▨

Сингуларна хомологија

Нека је X тополошки простор.

$$\Delta_n := \{\sigma : \Delta^n \to X \mid \sigma \text{ непрекидно}\}$$

n-симплекс

$$S_n(X) := \mathbb{Z}[\Delta_n]$$

Може се дефинисати $d_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$, па добијамо л.к.

$$S_*(X) : \cdots \to S_{n+1}(X) \to S_n(X) \to S_{n-1}(X) \to \cdots$$

Сингуларна хомологија топ. пр. X је:

$$H_n(X) := H_n(S_*(X)), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Ако је (X,A) тополошки пар $(A \subseteq X)$, имамо ктн.

$$0 \to S_*(A) \xrightarrow{i} S_*(X) \xrightarrow{j} S_*(X,A) \to 0$$

па нам цик-цак лема даје дтн.

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \cdots \to H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X,A) \to 0$$

1. Нека је A ретракт од X. Доказати да је

$$H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X,A), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Решење Имамо:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Посматрајмо дтн. пара (X,A):

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

$r \circ i = \mathbb{1}_A \Rightarrow r_* \circ i_* = \mathbb{1}_{H_n(A)} \Rightarrow i_*$ је „1-1“ $\Rightarrow \partial = 0$

Како је $\partial = 0$, горњи дтн. можемо да поделимо на ктн. за $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "i_*"] & H_n(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[l, bend left, "r_*"] & H_n(X,A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Како је $r_* \circ i_* = \mathbb{1}_{H_n(A)}$, то се овај низ цепа, тј.

$$H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X,A), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad ▨$$

2. Нека је $A \subseteq X$ и $i : A \hookrightarrow X$ хомотопска еквиваленција. Тада је $H_n(X,A) = 0$ за $n \in \mathbb{N}$.

решење Посматрајмо дтн. пара (X,A):

$$\cdots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Како је i хомотопска еквиваленција, то постоји $\varphi : X \to A$ т.д.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "i"] & X \arrow[l, bend left, "\varphi"] \end{tikzcd} \qquad \varphi \circ i \simeq \mathbb{1}_A, \quad i \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$$

$\Rightarrow \varphi_* \circ i_* = \mathbb{1}_{H_n(A)}, \quad i_* \circ \varphi_* = \mathbb{1}_{H_n(X)}$

$\Rightarrow i_*$ је изоморфизам.

Из дтн. имамо:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \ker i_* = \operatorname{im} \partial \Rightarrow \partial = 0 \Rightarrow j_* \text{ је „на"} \\ H_n(X) = \operatorname{im} i_* = \ker j_* \Rightarrow j_* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H_n(X,A) = 0 \quad ▨$$

- Ако је $A \subseteq X$, онда важи:

  $H_0(X,A) = 0 \iff$ A сече све компоненте путне повезаности од X.

- $$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

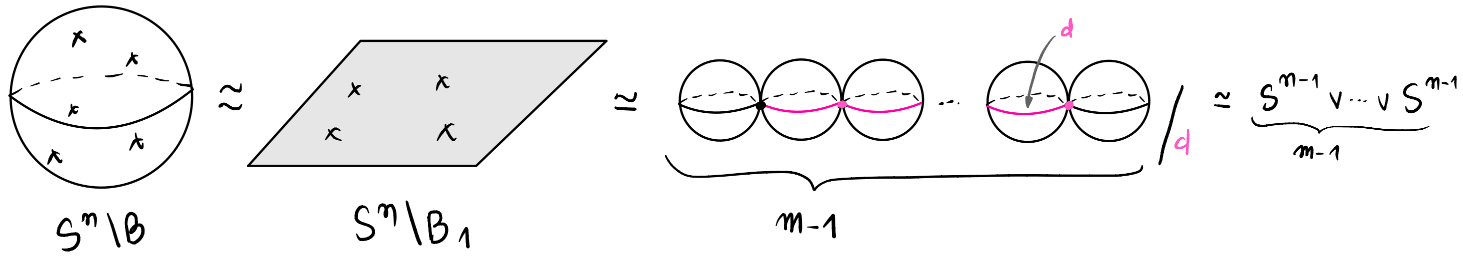
Став $\tilde{H}_i(X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_k) \cong \tilde{H}_i(X_1) \oplus \tilde{H}_i(X_2) \oplus \cdots \oplus \tilde{H}_i(X_k)$.

3. Нека је $B \subset S^n$, $|B| = m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Одредити

(а) $H_i(S^n \setminus B)$; (б) $H_i(S^n, B)$.

решење (а) $S^n \setminus B \approx \mathbb{R}^n \setminus B_1 \simeq \underbrace{S^{n-1} \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}}_{m-1}$

$|B_1| = m-1$



$$\Rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus B) \cong \tilde{H}_i(\underbrace{S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}}_{m}) \cong \bigoplus_{j=1}^{m-1} \tilde{H}_i(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{m-1}, & i = n-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(б) Посматрамо дтн. пара (S^n, B).

$$\cdots \to H_i(B) \to H_i(S^n) \to H_i(S^n, B) \to H_{i-1}(B) \to \cdots$$

Приметимо $H_i(B) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^m, & i = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

За $i \geq 2$ је $H_i(B) = 0$ и $H_{i-1}(B) = 0$, па је $H_i(S^n, B) \cong H_i(S^n)$

За $i = 0$ је $H_0(S^n, B) = 0$ јер B сече све компоненте путне пов. од S^n.

За $i = 1$ имамо:

$$\cdots \to \underset{0}{\underset{\|}{\tilde{H}_1(B)}} \to \tilde{H}_1(S^n) \to H_1(S^n, B) \to \tilde{H}_0(B) \to \underset{0}{\underset{\|}{\tilde{H}_0(S^n)}} \to \cdots$$

тј. имамо ктн. који се цепа (јер је $H_0(B)$ слободна):

$$0 \to \tilde{H}_1(S^n) \to H_1(S^n, B) \to \underset{\text{слободна}}{\mathbb{Z}^{m-1}} \to 0$$

$$\Rightarrow H_1(S^n, B) \cong \tilde{H}_1(S^n) \oplus \mathbb{Z}^{m-1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^m, & n = 1 \\ \mathbb{Z}^{m-1}, & n \geq 2 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

- Ако је (X, A, B) тополошка тројка, $B \xhookrightarrow{j} A \xhookrightarrow{i} X$, имамо дтн.

$$\cdots \to H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A, B) \to \cdots$$

Лема [о исецању] Нека су $A, B \subseteq X$ т.д. $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B = X$. Тада инклузија $i : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ индукује изоморфизам:

$$i_* : H_n(B, A \cap B) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow H_n(X, A), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

4. Нека је $X = X_1 \cup X_2$, $X_1, X_2 \in \mathcal{F}_X$, $\overline{X_1 \setminus X_2} \cap \overline{X_2 \setminus X_1} = \emptyset$.

Означимо $A := X_1 \cap X_2$ и инклузије

$$i : (X_1, A) \hookrightarrow (X, A), \qquad j : (X_2, A) \hookrightarrow (X, A).$$

Доказати да су i_* и j_* мономорфизми и да је

$$H_k(X, A) \cong H_k(X_1, A) \oplus H_k(X_2, A).$$

решење Означимо инклузије:

$$\begin{tikzcd}
 & (X, X_2) & \\
(X_1, A) \arrow[ur, hook, "k"] \arrow[r, hook, "i"'] & (X, A) \arrow[u, hook, "j'"'] \arrow[ul, phantom, "①"] \arrow[r, "i'"] \arrow[dr, phantom, "②"] & (X, X_1) \\
 & (X_2, A) \arrow[u, hook, "j"] \arrow[ur, hook, "k'"'] &
\end{tikzcd}$$

Тополошке тројке (X, X_1, A) и (X, X_2, A) нам дају два дтн.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \\
 & H_k(X, X_2) \arrow[u] & & \\
\cdots \arrow[r] & H_k(X_1, A) \arrow[u, "k_*"] \arrow[r, "i_*"'] & H_k(X, A) \arrow[ul, "j'_*"'] \arrow[ull, phantom, "③"] \arrow[r, "i'_*"] & H_k(X, X_1) \arrow[r] & \cdots \\
 & & H_k(X_2, A) \arrow[u, "j_*"] \arrow[ur, "k'_*"'] \arrow[ur, phantom, "④"] & & \\
 & & \vdots \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

① комутира $\Rightarrow$ ③ комутира, ② комутира $\Rightarrow$ ④ комутира

Лема о исецању примењена на k и k' нам даје да су k_* и k'_* изоморфизми.

(Из услова задатка се може показати да смемо да применимо лему о исецању.)

$k_* = j'_* \circ i_*$ изо. $\Rightarrow$ i_* је „1-1"

$k'_* = i'_* \circ j_*$ изо. $\Rightarrow$ j_* је „1-1"

Још да покажемо да је $H_k(X,A) \cong H_k(X_1,A) \oplus H_k(X_2,A)$.

Ако имамо дијаграм:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, tail, two heads, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & C \\ & B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$
онда је $B \cong \ker h \oplus \operatorname{im} g$. (A)

Заиста, имамо ктн.
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker h \arrow[r] & B \arrow[r, "h"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "g\circ f^{-1}"] & 0 \end{tikzcd}$$
и како је $h\circ g\circ f^{-1} = f\circ f^{-1} = 1_C$, то се овај низ цепа, па је
$$B \cong \ker h \oplus C$$
Како је $f = h\circ g$ изо., то је g „1-1", па је $C \overset{f}{\cong} A \underset{g\ „1\text{-}1"}{\cong} \operatorname{im} g$, тј.
$$B \cong \ker h \oplus \operatorname{im} g.$$
Применимо ову чињеницу (A) на дијаграм:
$$\begin{tikzcd} & H_k(X,X_2) \\ H_k(X_1,A) \arrow[ur, tail, "k_*"] \arrow[r, "i_*"'] \arrow[ur, phantom, shift right=4ex, "3"] & H_k(X,A) \arrow[u, "j'_*"'] \end{tikzcd}$$
добијамо:
$$H_k(X,A) \cong \ker j'_* \oplus \operatorname{im} i_* \cong \operatorname{im} j_* \oplus \operatorname{im} i_* \underset{i_* \text{ и } j_* \text{ су „1-1"}}{\cong} H_k(X_1,A) \oplus H_k(X_2,A). \quad \blacksquare$$

Степен пресликавања

Нека је $f: S^n \to S^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тада имамо

$$\begin{array}{ccc} f_*: \tilde{H}_n(S^n) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(S^n) \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

деф. Степен пресликавања f је $\deg f := f_*(1)$.

Приметимо: f_* је множење са $\deg f$:

$$f_*(x) = f_*(x \cdot 1) = x \cdot f_*(1) = x \cdot \deg f$$

Особине: $f, g: S^n \to S^n$ непрекидна

(1) $f \simeq g \Rightarrow \deg f = \deg g$

(2) $\deg \mathbb{1}_{S^n} = 1$

(3) $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$

доказ: $\deg(g \circ f) = (g \circ f)_*(1) = g_*(f_*(1)) = g_*(\deg f) = \deg g \cdot \deg f$ ∎

(4) $f \simeq \text{const} \Rightarrow \deg f = 0$

доказ: f се проширује на $CS^n \approx D^{n+1}$

$$\begin{tikzcd} D^{n+1} \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & S^n & & 0 \arrow[r, "\bar{f}_*"] & \mathbb{Z} \\ S^n \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \arrow[r, squiggly, "\tilde{H}_n"] & {} & \mathbb{Z} \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, "f_*"'] & \end{tikzcd}$$

$f_* = \bar{f}_* \circ i_* = 0 \Rightarrow \deg f = 0$. ∎

(5) Ако је $\rho_i: S^n \to S^n$ рефлексија у односу на координатну хиперраван $\rho_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$, онда је $\deg \rho_i = -1$.

(6) $\deg a_{S^n} = (-1)^{n+1}$ $\quad$ ($a_{S^n}: S^n \to S^n$ антиподално пресликавање)

ТОП Б:

$\left[f, g : S^n \to S^n \text{ тд. } (\forall x \in S^n)\ f(x) \neq g(x) \right] \Rightarrow f \simeq a_{S^n} \circ g$

Последица 1 Ако је $f : S^n \to S^n$ непрекидно и $\deg f \neq (-1)^{n+1}$, онда f има фиксну тачку.

доказ пп. $f(x) \neq x = 1\!\!1_{S^n}(x)$ за свако $x \in S^n$

$\Rightarrow f \simeq a_{S^n} \circ 1\!\!1_{S^n} = a_{S^n} \Rightarrow \deg f = \deg a_{S^n} = (-1)^{n+1}$ $\lightning$ ▨

Последица 2 Ако је $f : S^n \to S^n$ непрекидно и $\deg f \neq 1$, онда постоји $x_0 \in S^n$ тд. $f(x_0) = -x_0$.

доказ пп. $f(x) \neq -x = a_{S^n}(x)$ за свако $x \in S^n$

$\Rightarrow f \simeq a_{S^n} \circ a_{S^n} = 1\!\!1_{S^n} \Rightarrow \deg f = \deg 1\!\!1_{S^n} = 1$ $\lightning$ ▨

Подсетник: Дејство групе G на топ. пр. X је хомоморфизам $\varphi : G \to \mathrm{Homeo}(X)$ (тј. $\varphi(e) = 1\!\!1_X$ и $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$)

Користићемо ознаку $\varphi_g := \varphi(g)$.

Дејство је слободно ако за $g \neq e$, φ_g нема фиксних тачака.

Једно дејство $\mathbb{Z}_m$ на $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ је дато са:

$$\varphi_1 \underbrace{(z_1, \dots, z_n)}_{\substack{\cap \\ S^{2n-1}}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{m}} z_1, \dots, e^{i\frac{2\pi}{m}} z_n \right)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_1$$

$$\vdots$$

$$\varphi_k = \underbrace{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_1}_{k}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_m = \underbrace{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_1}_{m} = 1\!\!1_{S^n}$$

За $1 \leq k \leq n-1$, φ_k заротира сваку координату за угао $k \cdot \frac{2\pi}{n}$, па очигледно нема фиксних тачака.

$\Rightarrow$ Дејство је слободно.