Хомолошка алгебра

1. [Змијска лема] Нека је дат комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"'] & E \arrow[r, "\psi"'] & F &
\end{tikzcd}$$

такав да су хоризонтале тачни низови. Тада постоји тачан низ:

$$\ker\alpha \xrightarrow{\tilde{f}} \ker\beta \xrightarrow{\tilde{g}} \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\bar{\varphi}} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\bar{\psi}} \operatorname{coker}\gamma .$$

(Ознака: за $h : X \to Y$ је $\operatorname{coker} h := Y/\operatorname{im} h$)

решење Познате информације:

$$\left.\begin{array}{ll} ① & \ker g = \operatorname{im} f \\ ② & g \text{ је „на"} \\ ③ & \ker\psi = \operatorname{im}\varphi \\ ④ & \varphi \text{ је „1-1"} \end{array}\right\} \text{тачности}$$

$$\left.\begin{array}{ll} ⑤ & \beta\circ f = \varphi\circ\alpha \\ ⑥ & \gamma\circ g = \psi\circ\beta \end{array}\right\} \text{комутативност}$$

Најпре дефинишемо пресликавања $\tilde{f}, \tilde{g}, \partial, \bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$.

$\tilde{f} : \ker\alpha \to \ker\beta$

$\ker\alpha \subseteq A$

$\tilde{f}(a) := f(a)$

Да ли је $\tilde{f}$ добро дефинисано, тј. да ли $f(a) \in \ker\beta$?

$\beta(f(a)) \overset{⑤}{=} \varphi(\alpha(a)) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow f(a) \in \ker\beta$ ✓

Очигледно је $\tilde{f}$ хомоморфизам.

$\tilde{g} : \ker\beta \to \ker\gamma$ – слично као $\tilde{f}$

$\tilde{g}(b) := g(b) \in \ker\gamma$, $\tilde{g}$ јесте хомоморфизам.

$\overline{\varphi} : \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta$

$$\operatorname{coker}\alpha = D/\operatorname{im}\alpha, \qquad \operatorname{coker}\beta = E/\operatorname{im}\beta$$

$$\overline{\varphi}([d]) := [\varphi(d)] \in \operatorname{coker}\beta$$

добра дефинисаност:

$[d_1] = [d_2] \Leftrightarrow d_1 - d_2 \in \operatorname{im}\alpha \Leftrightarrow (\exists a \in A)\ d_1 - d_2 = \alpha(a)$

$$\overline{\varphi}([d_1]) - \overline{\varphi}([d_2]) = [\varphi(d_1 - d_2)] = [\varphi(\alpha(a))] \overset{5}{=} [\beta(\underbrace{f(a)}_{})] = 0$$

$$\beta(f(a)) \in \operatorname{im}\beta$$

$\Rightarrow \overline{\varphi}([d_1]) = \overline{\varphi}([d_2])$, тј. $\overline{\varphi}$ је добро деф.

$\overline{\varphi}$ је хомоморфизам:

$$\overline{\varphi}([d_1] + [d_2]) = \overline{\varphi}([d_1 + d_2]) = [\varphi(d_1 + d_2)] = [\varphi(d_1) + \varphi(d_2)] =$$
$$= [\varphi(d_1)] + [\varphi(d_2)] = \overline{\varphi}([d_1]) + \overline{\varphi}([d_2])$$

$\overline{\psi} : \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma$ – слично као $\overline{\varphi}$

$$\operatorname{coker}\beta = E/\operatorname{im}\beta, \qquad \operatorname{coker}\gamma = F/\operatorname{im}\gamma$$

$\overline{\psi}([e]) := [\psi(e)]$ јесте добро дефинисан хомоморфизам.

$\partial : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$

$$\ker\gamma \subseteq C, \qquad \operatorname{coker}\alpha = D/\operatorname{im}\alpha$$

Нека је $c \in \ker\gamma$. Како је g „на" (2), то постоји $b \in B$ тд. $g(b) = c$

$$\psi(\beta(b)) \overset{6}{=} \gamma(g(b)) = 0$$

$$\Rightarrow \beta(b) \in \ker \psi \overset{3}{=} \operatorname{im} \varphi$$

$$\Rightarrow (\exists d \in D)\ \varphi(d) = \beta(b)$$

Дефинишемо $\partial(c) := [d] \in \operatorname{coker} \alpha$

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, mapsto, "\beta"'] & c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\gamma"] & 0 \\ d \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \beta(b) \arrow[r, mapsto, "\psi"'] & 0 & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"'] & E \arrow[r, "\psi"'] & F & \end{tikzcd}$$

добра дефинисаност

Нека је $\left.\begin{array}{ll} g(b_1) = c, & \varphi(d_1) = \beta(b_1) \\ g(b_2) = c, & \varphi(d_2) = \beta(b_2) \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} [d_1] = [d_2]$

$\Leftrightarrow d_1 - d_2 \in \operatorname{im} \alpha$

$$\begin{tikzcd} & b_1 \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, mapsto, "\beta"'] & c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\gamma"] & 0 \\ d_1 \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \beta(b_1) \arrow[r, mapsto, "\psi"'] & 0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & b_2 \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, mapsto, "\beta"'] & c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\gamma"] & 0 \\ d_2 \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \beta(b_2) \arrow[r, mapsto, "\psi"'] & 0 & \end{tikzcd}$$

$$g(b_1 - b_2) = c - c = 0 \Rightarrow b_1 - b_2 \in \ker g \overset{1}{=} \operatorname{im} f \Rightarrow (\exists a \in A)\ f(a) = b_1 - b_2$$

$\varphi(\alpha(a)) \overset{5}{=} \beta(f(a)) = \beta(b_1 - b_2) = \varphi(d_1 - d_2)$ и φ је „1-1" (4)

$$\Rightarrow d_1 - d_2 = \alpha(a) \Rightarrow d_1 - d_2 \in \operatorname{im} \alpha \Rightarrow [d_1] = [d_2]$$

∂ је хомоморфизам

Нека је $\begin{array}{ll} g(b_1) = c_1, & \varphi(d_1) = \beta(b_1) \\ g(b_2) = c_2, & \varphi(d_2) = \beta(b_2) \end{array}$

$$\begin{tikzcd} & b_1 \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, mapsto, "\beta"'] & c_1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\gamma"] & 0 \\ d_1 \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \beta(b_1) \arrow[r, mapsto, "\psi"'] & 0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & b_2 \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, mapsto, "\beta"'] & c_2 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\gamma"] & 0 \\ d_2 \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \beta(b_2) \arrow[r, mapsto, "\psi"'] & 0 & \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(b_1 + b_2) = c_1 + c_2 \\ \varphi(d_1 + d_2) = \beta(b_1 + b_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \partial(c_1 + c_2) = d_1 + d_2 = \partial(c_1) + \partial(c_2)$$

Сада доказујемо тачност низа

$$\ker\alpha \xrightarrow{\tilde f} \ker\beta \xrightarrow{\tilde g} \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\bar\varphi} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\bar\psi} \operatorname{coker}\gamma$$

$\ker\tilde g = \operatorname{im}\tilde f$

$\subseteq$: Нека је $b \in \ker\tilde g \subseteq \ker\beta$, тј. $\tilde g(b)=0$, $\beta(b)=0$

$0=\tilde g(b) = g(b) \Rightarrow b\in\ker g \overset{(1)}{=} \operatorname{im} f \Rightarrow (\exists a\in A)\ f(a)=b$

Да ли је $a\in\ker\alpha$?

$\varphi(\alpha(a)) \overset{(5)}{=} \beta(f(a)) = \beta(b)=0$ и φ је „1-1" ((4))

$\Rightarrow \alpha(a)=0 \Rightarrow a\in\ker\alpha \Rightarrow b = f(a)=\tilde f(a) \Rightarrow b\in\operatorname{im}\tilde f$

$\supseteq$: Нека је $b\in\operatorname{im}\tilde f$, тј. $b=\tilde f(a)$ за неко $a\in\ker\alpha$.

$\tilde g(b) = \tilde g(\tilde f(a)) = g(f(a)) \overset{(1)}{=} 0 \Rightarrow b\in\ker\tilde g$

$\ker\partial = \operatorname{im}\tilde g$

$\subseteq$: Нека је $c\in\ker\partial \subseteq \ker\gamma$, тј. $\partial(c)=0$ и $\gamma(c)=0$.

$\partial(c)=0$ значи да имамо b и d као раније:

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ d \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \beta(b) \arrow[r, mapsto, "\psi"'] & 0 & \end{tikzcd}$$

и да је $[d]=0\in\operatorname{coker}\alpha = D/\operatorname{im}\alpha$, тј. $d\in\operatorname{im}\alpha$

$\Rightarrow (\exists a\in A)\ \alpha(a)=d$.

Означимо $b' := b - f(a)$.

$$\beta(b') = \beta(b) - \beta(f(a)) \overset{(5)}{=} \beta(b) - \varphi(\alpha(a)) = \beta(b)-\varphi(d) = 0$$

$\Rightarrow b'\in\ker\beta$ и $g(b') = g(b-f(a)) = g(b) - \underbrace{g(f(a))}_{0} = c$

$\Rightarrow c = \tilde g(b') \Rightarrow c\in\operatorname{im}\tilde g$.

$\supseteq$: Нека је $c\in\operatorname{im}\tilde g$, тј. $c=g(b)$ за неко $b\in\ker\beta$

Имамо:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, mapsto, "\beta"'] & c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\gamma"] & 0 \\ d \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \beta(b) \arrow[r, mapsto, "\psi"'] & 0 \end{tikzcd}$$

$\beta(b) = 0$

$\varphi(d)=0$, а φ је „1-1" (4), па је $d=0$ и одатле $\partial(c) = [d] = 0 \Rightarrow c \in \ker\partial$.

$\ker\bar\varphi = \operatorname{im}\partial$

$\subseteq$: Нека је $[d] \in \ker\bar\varphi \subseteq \operatorname{coker}\alpha$, тј. $\bar\varphi([d]) = [\varphi(d)] = 0 \in \operatorname{coker}\beta$

$\Rightarrow \varphi(d) \in \operatorname{im}\beta \Rightarrow (\exists\, b\in B)\ \beta(b) = \varphi(d)$

Означимо $c := g(b)$, тј. имамо:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, mapsto, "\beta"'] & c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\gamma"] & 0 \\ d \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \beta(b) \arrow[r, mapsto, "\psi"'] & 0 \end{tikzcd}$$

па је $\partial(c) = [d]$

$\Rightarrow [d] \in \operatorname{im}\partial$

$\supseteq$: Нека је $[d] \in \operatorname{im}\partial \subseteq \operatorname{coker}\alpha$, тј. имамо b и c:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, mapsto, "\beta"'] & c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\gamma"] & 0 \\ d \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \beta(b) \arrow[r, mapsto, "\psi"'] & 0 \end{tikzcd}$$

$\bar\varphi([d]) = [\varphi(d)] = [\beta(b)] = 0$ (јер $\beta(b) \in \operatorname{im}\beta$)

$\Rightarrow [d] \in \ker\bar\varphi$.

$\ker\bar\psi = \operatorname{im}\bar\varphi$

$\subseteq$: $[e] \in \ker\bar\psi \subseteq \operatorname{coker}\beta$, тј. $\bar\psi([e]) = [\psi(e)] = 0 \in \operatorname{coker}\gamma$

$\Rightarrow \psi(e) \in \operatorname{im}\gamma \Rightarrow (\exists\, c\in C)\ \gamma(c) = \psi(e)$

g је „на" (2) $\Rightarrow (\exists\, b\in B)\ g(b) = c$

Означимо $e' := e - \beta(b)$

$\psi(e') = \psi(e) - \psi(\beta(b)) \overset{6}{=} \gamma(c) - \gamma(g(b)) = 0$

$\Rightarrow e' \in \ker\psi = \operatorname{im}\varphi \Rightarrow (\exists\, d\in D)\ \varphi(d) = e'$

$\Rightarrow \bar\varphi([d]) = [\varphi(d)] = [e'] = \underbrace{[e-\beta(b)]}_{\in E/\operatorname{im}\beta} = [e] \Rightarrow [e] \in \operatorname{im}\bar\varphi$

$\supseteq$: Нека је $[e] \in \operatorname{im} \bar{\varphi}$, тј. $[e] = \bar{\varphi}([d]) = [\varphi(d)]$, $d \in D$.

$\Rightarrow [e - \varphi(d)] = 0 \in \operatorname{coker} \beta \Rightarrow e - \varphi(d) \in \operatorname{im} \beta \Rightarrow (\exists b \in B)\ \beta(b) = e - \varphi(d)$

$$\bar{\psi}([e]) = [\psi(e)] = [\psi(\beta(b) + \varphi(d))] = [\psi(\beta(b)) + \underbrace{\psi(\varphi(d))}_{0}] =$$

$$\overset{6}{=} [\gamma(g(b))] = 0$$

$\Rightarrow [e] \in \ker \bar{\psi}$. ▨

Лема [змијска лема 2] Нека је дат комутативан дијаграм Абелових група и хомоморфизама:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\varphi"'] & E \arrow[r, "\psi"'] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

таквав да су хоризонтале тачни низови. Тада постоји тачан низ:

$$0 \to \ker \alpha \xrightarrow{\tilde{f}} \ker \beta \xrightarrow{\tilde{g}} \ker \gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} \alpha \xrightarrow{\bar{\varphi}} \operatorname{coker} \beta \xrightarrow{\bar{\psi}} \operatorname{coker} \gamma \to 0.$$

2. Нека је $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ тачан низ. Тада постоји природан изоморфизам $\operatorname{coker} f \cong C$.

решење 1. теорема о изоморфизму примењена на g нам даје:

$$B/_{\ker g} \cong \operatorname{im} g.$$

Из тачности низа имамо да је $\ker g = \operatorname{im} f$ и $\operatorname{im} g = C$, па добијамо $B/\operatorname{im} f \cong C$, тј. $\operatorname{coker} f \cong C$.

Природност значи да за сваки комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

тачне врсте

комутира и:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker} f \arrow[r, tail, two heads, "\varphi"] \arrow[d, "\bar\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ \operatorname{coker} f' \arrow[r, tail, two heads, "\varphi'"] & C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[b]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & g(b) \arrow[d, mapsto] \\ & \gamma(g(b)) \\ {[\beta(b)]} \arrow[r, mapsto] & g'(\beta(b)) \arrow[u, phantom, "\parallel"] \end{tikzcd}$$

$$\gamma(\varphi([b])) = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) = \varphi'([\beta(b)]) = \varphi'(\bar\beta([b])) \checkmark$$

$\Rightarrow$ изоморфизам јесте природан $\blacksquare$

За вежбу: Ако је $0 \to A \to B \xrightarrow{f} C$ тачан низ, онда постоји природан изоморфизам $A \cong \ker f$.

Хомологија ланчастих комплекса

$C_* : \cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$ ← ланчасти комплекс

C_n = Абелове групе

d_n = хомоморфизми т.д. $d_n \circ d_{n+1} = 0$

$Z_n := \ker d_n \subseteq C_n$

$B_n := \operatorname{im} d_{n+1} \subseteq C_n$

n-та хомолошка група л. к. C_*:

$$H_n(C_*) := Z_n / B_n$$

скраћенице:

л.к. = ланчасти комплекс

дтн. = дуги тачни низ

ктн. = кратки тачни низ

Лема [цик-цак] Нека је дат тачан низ л.к.

$$0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$$

Тада имамо дтн.

$$\cdots \to H_n(C_*) \to H_n(D_*) \to H_n(E_*) \to H_{n-1}(C_*) \to \cdots$$

доказ [змијске леме 2]:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & & \boxed{C_*} \arrow[d, dotted] & \boxed{D_*} \arrow[d, dotted] & \boxed{E_*} \arrow[d, dotted] & \\
2: & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
1: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0: & 0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
-1: & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Имамо к.т.н. л.к.

$$0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$$

Цик-цак лема нам даје д.т.н.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\cdots \to & H_2(E_*) & \to & H_1(C_*) & \to & H_1(D_*) & \to & H_1(E_*) & \to & H_0(C_*) & \to & H_0(D_*) & \to & H_0(E_*) & \to & H_{-1}(C_*) & \to \cdots \\
& \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\
& 0 & & \ker\alpha & & \ker\beta & & \ker\gamma & & D/\operatorname{im}\alpha & & E/\operatorname{im}\beta & & F/\operatorname{im}\gamma & & 0 & \\
& & & & & & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & \\
& & & & & & & & & \operatorname{coker}\alpha & & \operatorname{coker}\beta & & \operatorname{coker}\gamma & & & \blacksquare
\end{array}$$