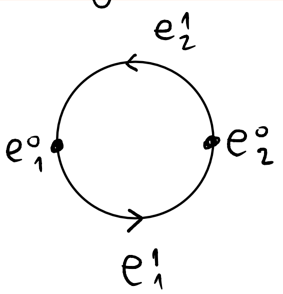
# Реални пројективни простори

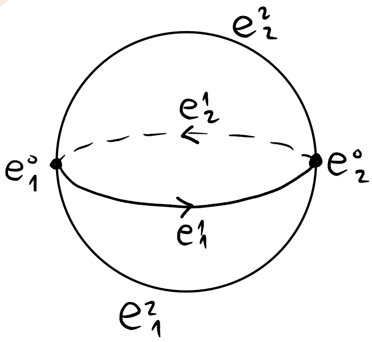
$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}/_{x\sim\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}} \approx D^n/_{x\sim -x,\ x\in S^{n-1}} \approx S^n/_{x\sim -x}$$

## Ћелијска декомпозиција сфере

$S^1$




$S^2$

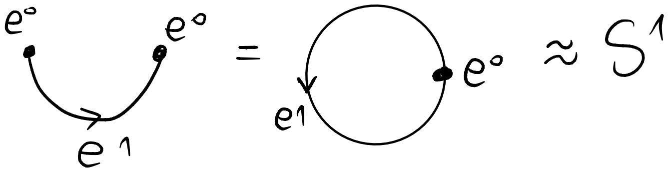



$S^n$: $e_1^0, e_2^0, e_1^1, e_2^1, \ldots, e_1^n, e_2^n$

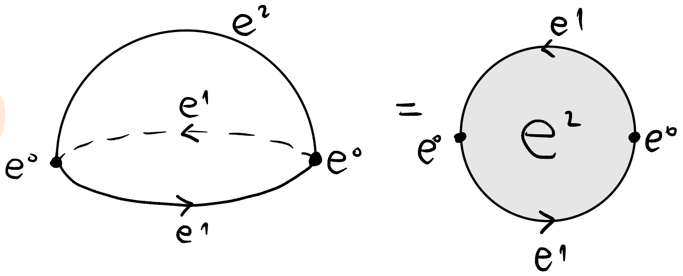
## Ћелијска декомпозиција $\mathbb{R}P^n \approx S^n/_{x\sim -x}$

Сваке две $k$-ћелије у $S^n$ $(0\le k\le n)$ нам дају једну $k$-ћел. у $\mathbb{R}P^n$ и ћелије лепимо као у $S^n$.

$\mathbb{R}P^1$




$\mathbb{R}P^2$




$\mathbb{R}P^n$: $e^0, e^1, e^2, \ldots, e^n$

$\mathbb{R}P^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}P^n$ : $e^0, e^1, e^2, \ldots, e^n, \ldots$

по једна ћелија за свако $n\in\mathbb{N}_0$

# Комплексни пројективни простори

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} /_{z \sim \lambda z,\ \lambda \in \mathbb{C}} \approx S^{2n+1} /_{z \sim \lambda z,\ \lambda \in S^1}$$

**Став** $D^{2n} /_{w \sim \lambda w,\ w \in S^{2n-1},\ \lambda \in S^1} \approx \mathbb{C}P^n$

**доказ** Нека је $f: D^{2n} \to S^{2n+1}$ дато са $f(w) = \left(w, \sqrt{1-\|w\|^2}\right)$ и $p: S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ природна пројекција.

Означимо $g := p \circ f : D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$.

Покажимо да је $g$ количничко.

(1) $g$ је непрекидно и

(2) $g$ је „на":

Нека је $a \in \mathbb{C}P^n$, $a = [z] = p(z)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$

$1^\circ$ $z_{n+1} = 0$: означимо $w := (z_1, \dots, z_n) \in D^{2n}$

$$\|w\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1 \Rightarrow w \in S^{2n-1}$$

$$\Rightarrow g(w) = \left[\left(w, \sqrt{1-\|w\|^2}\right)\right] = [(z_1, \dots, z_n, 0)] = [z] = a \Rightarrow g \text{ је „на"}$$

$2^\circ$ $z_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \overline{z_{n+1}} \neq 0$ и $\dfrac{\overline{z_{n+1}}}{|z_{n+1}|} \in S^1$

Како је $\|z\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1 \Rightarrow |z_{n+1}| = \sqrt{1 - |z_1|^2 - \dots - |z_n|^2}$

Нека је $w := \dfrac{\overline{z_{n+1}}}{|z_{n+1}|} \cdot (z_1, \dots, z_n)$. Тада

$$\|w\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \le 1 \Rightarrow w \in D^{2n}.$$

$$g(w) = \left[\left(w, \sqrt{1-\|w\|^2}\right)\right] = \left[\frac{\overline{z_{n+1}}}{|z_{n+1}|}(z_1, \dots, z_n),\ |z_{n+1}|\right] =$$

$$= \Bigg[\underbrace{\frac{\overline{z_{n+1}}}{|z_{n+1}|}}_{\in S^1} \underbrace{\left(z_1, \dots, z_n, \frac{|z_{n+1}|}{\overline{z_{n+1}}} \cdot |z_{n+1}|\right)}_{z}\Bigg] = [\lambda z] = [z] = a$$

$\Rightarrow$ $g$ је „на".

(3) $g$ слика компакт у $T_2$ простор $\Rightarrow$ $g$ је затворено

(1) + (2) + (3) : $g$ је непрекидно, „на" и затворено $\Rightarrow$ $g$ је количничко

$$\Rightarrow \quad D^{2n}/g \approx \mathbb{C}P^n.$$

Још да покажемо да је $D^{2n}/g \approx D^{2n}/\sim$, тј. показујемо

$$g(w) = g(w') \Leftrightarrow \underbrace{w = w'}_{(*)} \vee \underbrace{\left(w, w' \in S^{2n-1} \text{ и } w' = \lambda w \text{ за } \lambda \in S^1\right)}_{(**)}$$

$\Rightarrow$: $\left[\left(w, \sqrt{1-\|w\|^2}\right)\right] = \left[\left(w', \sqrt{1-\|w'\|^2}\right)\right]$

$\Rightarrow \left(w', \sqrt{1-\|w'\|^2}\right) = \lambda \left(w, \sqrt{1-\|w\|^2}\right)$, за неко $\lambda \in S^1$

$\Rightarrow w' = \lambda w$ и $\sqrt{1-\|w'\|^2} = \lambda \sqrt{1-\|w\|^2}$ $\diamond$

1° $\|w\| = 1 \Rightarrow \|w'\| = 1$ и $w' = \lambda w \Rightarrow$ важи $(**)$

2° $\|w\| < 1 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda \geq 0$ због $\diamond$ $\Rightarrow \lambda = 1$

$\Rightarrow w = w' \Rightarrow$ важи $(*)$

$\Leftarrow$: Нека су $w, w' \in S^{2n-1}$, $w' = \lambda w$ за неко $\lambda \in S^1$.

$$g(w') = g(\lambda w) = \left[\left(\lambda w, \underbrace{\sqrt{1-\|\lambda w\|^2}}_{0}\right)\right] = \left[\lambda (w, 0)\right] = \left[(w, 0)\right] = g(w).$$

Коначно, $\mathbb{C}P^n \approx D^{2n}/g \approx D^{2n}/\sim$. ∎

**Став** Нека је $p: S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ природна пројекција. Тада

$$D^{2n} \cup_p \mathbb{C}P^{n-1} \approx \mathbb{C}P^n.$$

**доказ** Ако су $X, Y$ тополошки простори, $A \subset X$, $f: A \to Y$ непр. количничко, онда је $X \cup_f Y \approx X/_\sim$, где је $\sim$ дато са:

$$a_1, a_2 \in A: \quad a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2)$$

Специјално, када ово применимо на $p$:

$$D^{2n} \cup_p \mathbb{C}P^{n-1} \approx D^{2n}/_\sim \approx D^{2n}/_{w \sim \lambda w,\ w \in S^{2n-1},\ \lambda \in S^1} \approx \mathbb{C}P^n. \quad \blacksquare$$

Претходни став нам даје ћелијску декомпозицију $\mathbb{C}P^n$.

$\mathbb{C}P^0 = S^1/S^1 = * : \quad e^0$

$\mathbb{C}P^1 \approx D^2 \cup_p \mathbb{C}P^0 = D^2 \cup_p * \approx D^2/S^1 \approx S^2 : \quad e^0, e^2$

$\vdots$

$\mathbb{C}P^{n-1} : e^0, e^2, e^4, \dots, e^{2n-2}$

$\mathbb{C}P^n \approx D^{2n} \cup_p \mathbb{C}P^{n-1} : \quad e^0, e^2, e^4, \dots, e^{2n-2}, e^{2n}$

$\mathbb{C}P^\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}P^n : \quad e^0, e^2, e^4, \dots, e^{2n}, e^{2n+2}, \dots$

по једна ћелија у свакој парној димензији $2k$, $k \in \mathbb{N}_0$