СТАВ Ако је $p: E\to B$ наткривање, онда

E је површ $\Longleftrightarrow$ B је површ.

СТАВ Ако је $p: E\to B$ наткривање и B повезан, онда $(\forall b_1, b_2 \in B)\ \left|p^{-1}(\{b_1\})\right| = \left|p^{-1}(\{b_2\})\right|$.

ДЕФ Нека је $p: E\to B$ наткривање и B повезан. p је n-лисно ако је $|p^{-1}(\{b\})| = n$, за $b\in B$

ПР (1) $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ је дволисно наткривање;
(2) Свако једнолисно наткривање је хомеоморфизам.

Т Нека је $p: E\to B$ наткривање, B путно повезан, $e_0\in E$, $b_0 := p(e_0)\in B$. Тада је

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

мономорфизам и

$$[\pi_1(B, b_0) : \underbrace{p_*(\pi_1(E, e_0))}_{\cong\, \pi_1(E, e_0)}] = \underbrace{\left|p^{-1}(\{b_0\})\right|}_{\text{број листова}}$$

(Специјално $\pi_1(E, e_0) \leq \pi_1(B, b_0)$)

ПР $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ је дволисно

$$\Rightarrow [\pi_1(\mathbb{R}P^2) : \underbrace{\pi_1(S^2)}_{0}] = 2 \Rightarrow |\pi_1(\mathbb{R}P^2)| = 2 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$$

Теорема Нека је $p: E \to B$ наткривање, $f: X \to B$ непр. X путно и локално путно повезан, $x_0 \in X$, $e_0 \in E$, $p(e_0) = b_0 = f(x_0)$. Тада постоји подизање

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}: X \to E$ пресликавања f акко

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Последица Ако је додатно X просто повезан, онда постоји подизање.

Пример (1) $f: S^1 \to S^n$, $n > 1 \Rightarrow f \simeq const$

јер $[f] \in \pi_1(S^n) = 0$

(2) $f: S^n \to S^1$, $n > 1 \Rightarrow f \simeq const$

јер $\pi_1(S^n) = 0$ па постоји $\tilde{f}: S^n \to \mathbb{R}$ т.д. $p \circ \tilde{f} = f$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^n \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

(p = намотавање $\mathbb{R}$ на S^1).

f се факторише кроз $\mathbb{R} \simeq * \Rightarrow f \simeq const$

(3) $f: S^m \to S^n$, $m < n \Rightarrow f \simeq const$

Теорема [Борсук-Улам] Ако је $f: S^n \to \mathbb{R}^n$ непрекидно, онда $(\exists x_0 \in S^n)\ f(x_0) = f(-x_0)$.

Теорема [БУТ1] Не постоји непрекидно непарно пресликавање

$g : S^n \to S^{n-1}$.

БУТ $\Leftrightarrow$ БУТ1 (за $n = 2$ доказујемо)

доказ: $\Rightarrow$: пп. Нека је $g : S^2 \to S^1$ непр. и непарно,

тј. $g(-x) = -g(x)$, за свако $x \in S^2$.

Имамо наткривање $p : \mathbb{R} \to S^1$ и S^2 је просто повезан па постоји подизање $\tilde{g} : S^2 \to \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

На основу БУТ: $(\exists x_0 \in S^2)\ \tilde{g}(x_0) = \tilde{g}(-x_0)$

па је $p(\tilde{g}(x_0)) = p(\tilde{g}(-x_0))$, тј.

$$g(x_0) = g(-x_0) = -g(x_0) \Rightarrow g(x_0) = 0,$$

али $0 \notin S^1$ ↯

$\Leftarrow$: Нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}$ и пп. $(\forall x \in S^2)\ f(x) \neq f(-x)$.

Нека је $g : S^2 \to S^1$ дато са

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\| f(x) - f(-x) \|}$$

g је непр. и непарно ↯

$\Rightarrow (\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$. $\square$

Напомена: део $\Rightarrow$: из претходног доказа може се урадити и без натривања, само се не поштоизују $S^2 \xrightarrow{g} S^1 \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^2$ примени БУТ (тај доказ пролази за свако $n \in \mathbb{N}$).

Следећа теорема је још један еквивалент БУТ:

теорема Ако су $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}_{S^2}$ и $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, онда бар један од ова три скупа садржи пар антиподалних тачака са сфере, тј.

$$(\exists i \in \{1,2,3\})(\exists x_0 \in S^2) \quad x_0, -x_0 \in A_i.$$

доказ Нека су $d_1, d_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ дате са

$$d_1(x) = d(x, A_1), \quad d_2(x) = d(x, A_2)$$

и нека је $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са $f(x) = (d_1(x), d_2(x))$.

$\overset{\text{БУТ}}{\Longrightarrow} (\exists x_0 \in S^2)\ f(x_0) = f(-x_0)$

$\Rightarrow \quad d_1(x_0) = d_1(-x_0) \quad$ и $\quad d_2(x_0) = d_2(-x_0)$.

$1^\circ \ x_0 \in A_1 \Rightarrow d_1(x_0) = 0 = d_1(-x_0) \Rightarrow -x_0 \in A_1$

$2^\circ \ x_0 \in A_2 \Rightarrow d_2(x_0) = 0 = d_2(-x_0) \Rightarrow -x_0 \in A_2$

$3^\circ \ x_0 \notin A_1 \cup A_2 \Rightarrow x_0 \in A_3$ и $d_1(x_0) = d_1(-x_0) > 0 \Rightarrow -x_0 \notin A_1$,

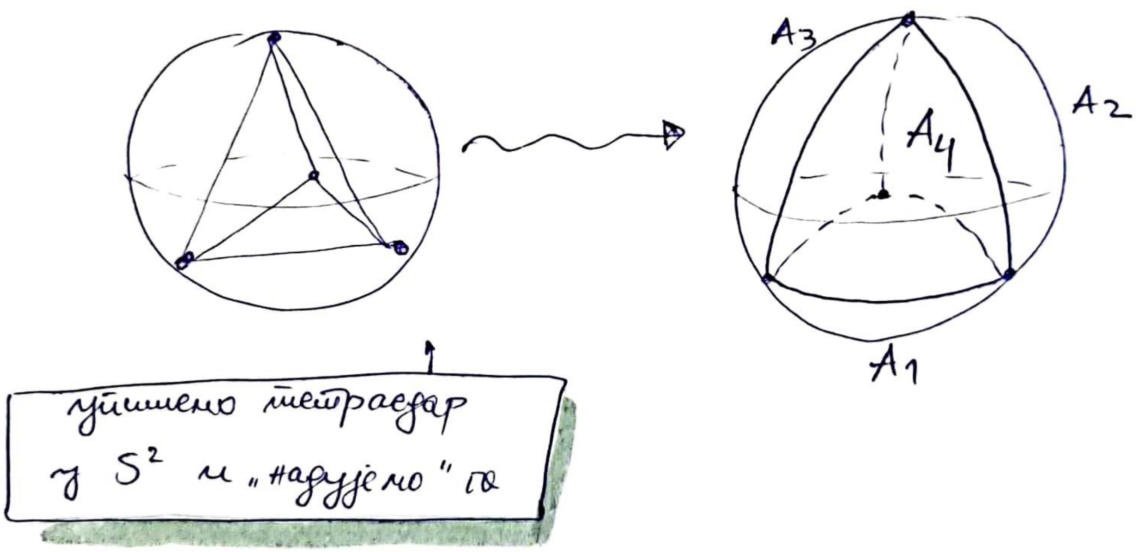
$d_2(x_0) = d_2(-x_0) > 0 \Rightarrow -x_0 \notin A_2$

$\Rightarrow -x_0 \in A_3$. $\square$

Напомена (1) Претходна теорема важи и за отворене скупове A_1, A_2, A_3;

(2) Теорема важи и за S^n покривен са $n+1$ затворених (или отворених) скупова, $n \in \mathbb{N}$.

(3) Са 4 скупа можемо покрити S^2 т.д. ниједан не садржи пар антиподалних тачака:



$\boxed{3.}$ Да ли постоје наткривања:

(а) $T^2 \to \mathbb{R}P^2$; (б) $\mathbb{R}P^2 \to T^2$; (в) $S^2 \to \mathbb{R}^2$;

(г) $\mathbb{R}^2 \to S^2$; (д) $C \to M$; (ђ) $M \to C$?

решење (а) Ако би постојало, онда би било

$$\pi_1(T^2) \le \pi_1(\mathbb{R}P^2),$$

тј. $$\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}_{\text{бесконачна}} \le \underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{коначна}} \ \lightning$$

$\Rightarrow \boxed{T^2 \not\to \mathbb{R}P^2}$

(б) Ако би постојало, онда

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \le \pi_1(T^2),$$

тј. $$\underbrace{\mathbb{Z}_2}_{\text{има ел. коначног реда}} \le \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}_{\text{нема ел. коначног реда}} \ \lightning \Rightarrow \boxed{\mathbb{R}P^2 \not\to T^2}$$

(в) Ако би постојало наткривање $p: S^2 \to \mathbb{R}^2$, оно мора бити непрекидно и „на“, тј. $p(S^2) = \mathbb{R}^2$.

Како је S^2 компактан, онда је $p(S^2) = \mathbb{R}^2$ компактан $\lightning$

$\Rightarrow \boxed{S^2 \not\to \mathbb{R}^2}$

(г) $\pi_1(S^2) = 0 = \pi_1(\mathbb{R}^2)$. Ако постоји наткривање, онда оно има $[\pi_1(S^2) : \pi_1(\mathbb{R}^2)] = 1$ лист, тј. мора бити хомеоморфизам, али $S^2 \not\cong \mathbb{R}^2 \Rightarrow \boxed{\mathbb{R}^2 \not\to S^2}$

(д) Посматрајмо слободно дејство $\mathbb{Z}_2$ на C:

$$0 \longmapsto 1_C$$
$$1 \longmapsto a_C$$

Тада $C \to C/\mathbb{Z}_2$

$C/\mathbb{Z}_2 =$  $= M$

$\Rightarrow \boxed{C \to M}$

(ђ) Ако су X и Y многострукости са границом и $f: X \to Y$ локални хомеоморфизам и „на", онда је $f(\partial X) = \partial Y$.

Специјално ако постоји наткривање $p: M \to C$ оно је локални хомеоморфизам и „на", па је

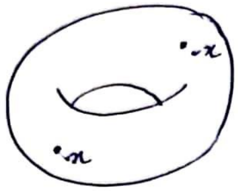
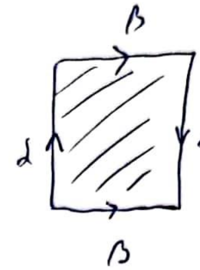
$$\underbrace{p(\partial M)}_{\text{повезан}} = \underbrace{\partial C}_{\text{неповезан}} \quad \lightning \quad \Rightarrow \boxed{M \not\to C}$$ □

4. Да ли постоје наткривања:
(а) $T^2 \to K$; (б) $K \to T^2$?

решење $\mathbb{Z}_2$ дејствује слободно на T^2

$0 \mapsto 1_{T^2}, \quad 1 \mapsto a_{T^2}$

$\Rightarrow \quad T^2 \to T^2/\mathbb{Z}_2$

$T^2/\mathbb{Z}_2 =$  $/\mathbb{Z}_2 \simeq$  $\simeq$  $= K$

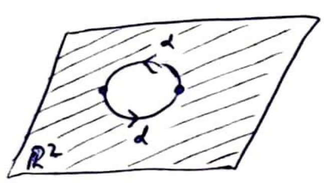
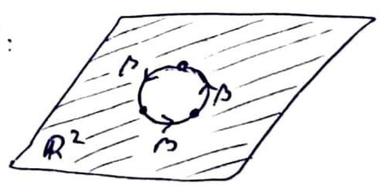
$\Rightarrow \quad \boxed{T^2 \to K}$

(б) Ако $K \to T^2$, онда $\pi_1(K) \le \pi_1(T^2)$, тј.

$\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2\beta^2 = 1 \rangle \le \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ↯

није Абелова — Абелова

$\Rightarrow \quad \boxed{K \not\to T^2}$ ■

5. X:  Y: 

Да ли постоје наткривања $X \to Y$ и $Y \to X$?

решење $\quad X \simeq S^1 \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(Y)$

Ако постоји наткривање $p: X \to Y$, оно је „на".

Приметимо X је површ, а Y није.

Нека је $y \in \beta \subseteq Y$ и $x \in X$ т.д. $p(x) = y$.

Како је p локални хомеоморфизам, то

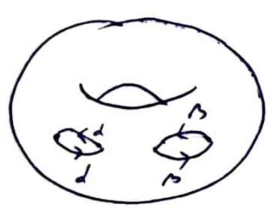
$$(\exists U_x \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{O}(x))\ U_x \cong p(U_x),$$

али $U_x =$  , $p(U_x) \cong$  $\lightning$

$\Rightarrow \boxed{X \not\to Y}$.

Слично $\boxed{Y \not\to X}$ ■

Лема Нека је $p: E \to B$ наткривање, E компактан, B T_1 и повезан. Тада је број листова коначан.

6. X: 

Да ли $S^2 \to X$?

решење

$$X = M_1 \# N_1 \# N_1 \approx N_4 \Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2 = 1 \rangle$$

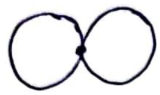
На основу леме имамо да је број листова коначан

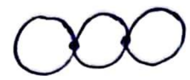
$\Rightarrow [\pi_1(N_4) : \pi_1(S^2)] = |\pi_1(N_4)| =$ коначан,

али $\pi_1^{ab}(N_4) \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_2$ - бесконачна $\Rightarrow \pi_1(N_4)$ - бесконачна $\lightning$

$\Rightarrow \boxed{S^2 \not\to X}$. ■

7. Да ли постоје наткривања $X \to Y$ и $Y \to X$:

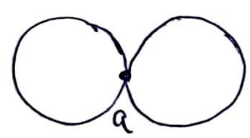
(а) X:  Y: 

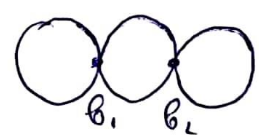
(б) X:  Y: 

решење

(а) Наткривање је локални хомеоморфизам.
У X имамо тачку са околином , а тога нема у Y па та тачка нема у шта да се слика.
Слично, у Y имамо чега нема у X.

$\Rightarrow X \not\to Y$ и $Y \not\to X$

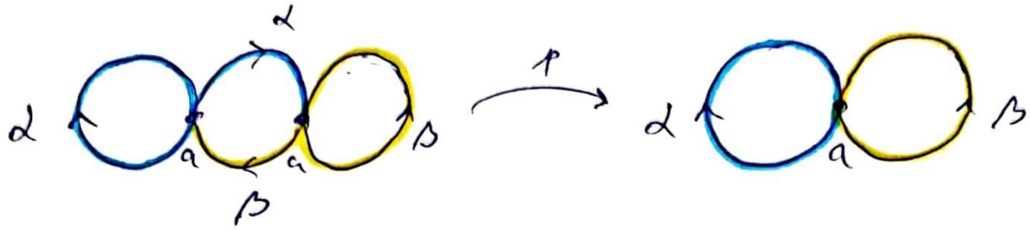
(б) X: 

Y: 

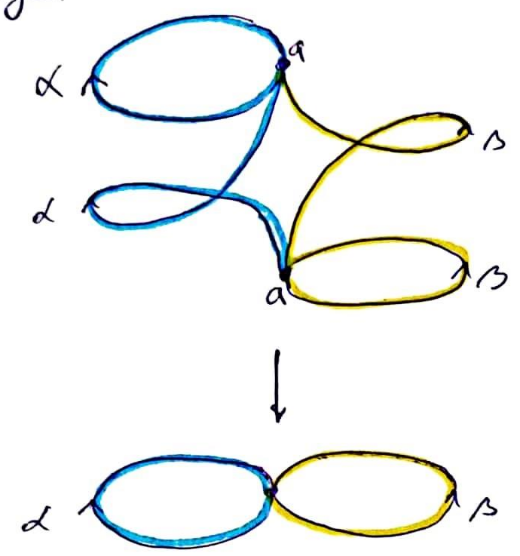
ако постоји $p: X \to Y$ оно мора и у $в_1$ и у $в_2$ да слика тачке са околинама , али у X имамо само једну такву тачку, па p не постоји
$\Rightarrow X \not\to Y$.

Обрнуто, ако $p: Y \to X$ онда $p(в_1) = p(в_2) = a$
па наткривање мора бити дволисно.

$\boxed{Y \to X}$ и изгледа овако:



илустрација:

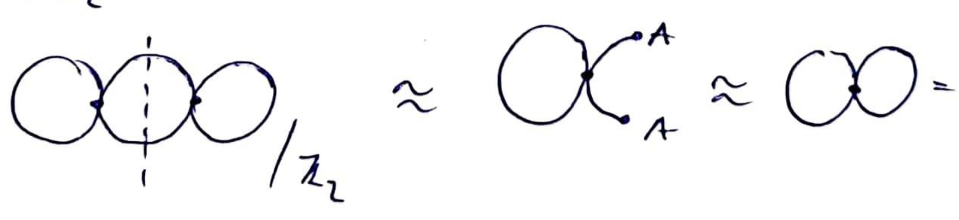


2. начин: $\mathbb{Z}_2$ слободно дејствује на Y

$$0 \mapsto 1_Y, \quad 1 \mapsto a_Y$$

$\Rightarrow Y \to Y/\mathbb{Z}_2$

$Y/\mathbb{Z}_2 =$



$= X$

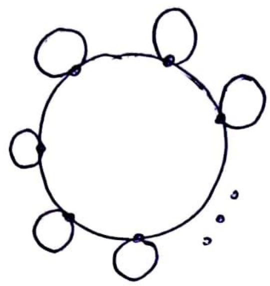
$\Rightarrow Y \to X.$ ■

Из претходног задатка имамо $\pi_1(Y) \le \pi_1(X)$,

тј. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \le \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, а следећи задатак је уопштење тога:

$\boxed{8.}$ За свако $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ има подгрупу изоморфну $\mathbb{Z}^{*n}$.

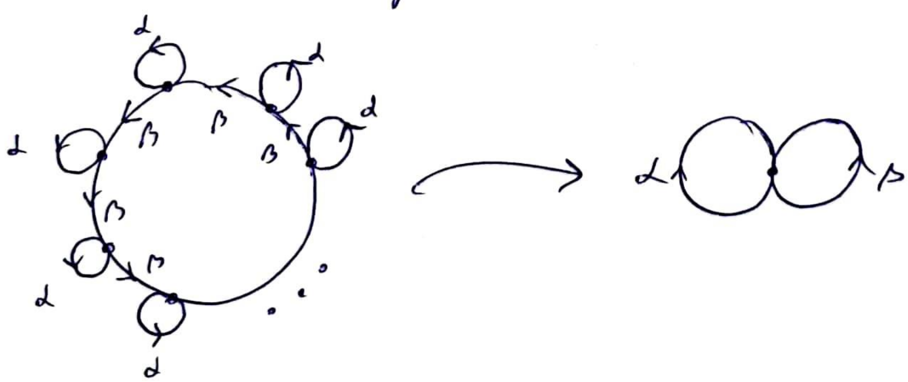
решење Нека је X:



$X = S^1$ са још $(n-1)$ закачених кругова.

$X \simeq \underbrace{S^1 \vee \dots \vee S^1}_{n} \Rightarrow \pi_1(X) \cong \mathbb{Z}^{*n}$.

Имамо наткривање



тј. $X \to S^1 \vee S^1 \Rightarrow \pi_1(X) \le \pi_1(S^1 \vee S^1)$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^{*n} \le \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(2. начин $\mathbb{Z}_{n-1}$ слободно дејствује на X ...) ■

Нека је $f: G \to H$ хомоморфизам група

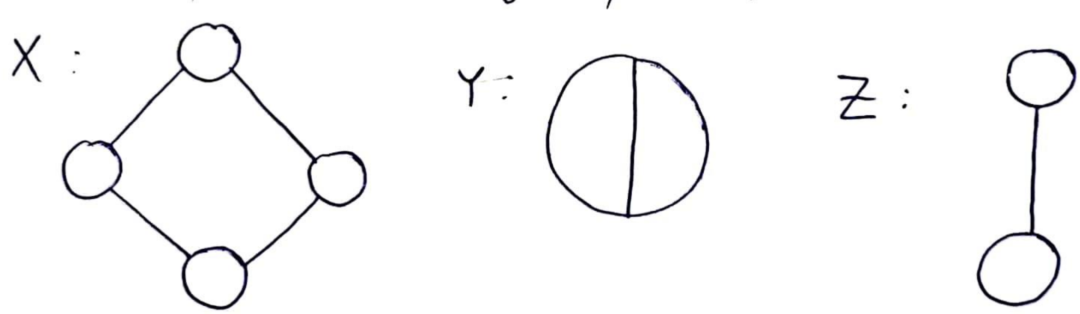
(1) f изоморфизам $\Rightarrow f^{ab}$ изоморфизам;

(2) f епиморфизам $\Rightarrow f^{ab}$ епиморфизам;

(3) f мономорфизам $\not\Rightarrow f^{ab}$ мономорфизам.

нпр. $p_* : \mathbb{Z}^{*3} \longrightarrow \mathbb{Z}^{*2}$ је мономорфизам (из зад. 7), али $p_*^{ab} : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ није мономорфизам (јер $\mathbb{Z}^3 \not\leq \mathbb{Z}^2$).

$\boxed{9.}$ Да ли постоји неко од 6 могућих наткривања међу просторима:



решење Генерално, ако у простору W имамо k тачака са неком специфичном околином (нпр), а у T имамо l таквих тачака и $W \to T$, онда је наткривање n-лисно где је $k = n \cdot l$.

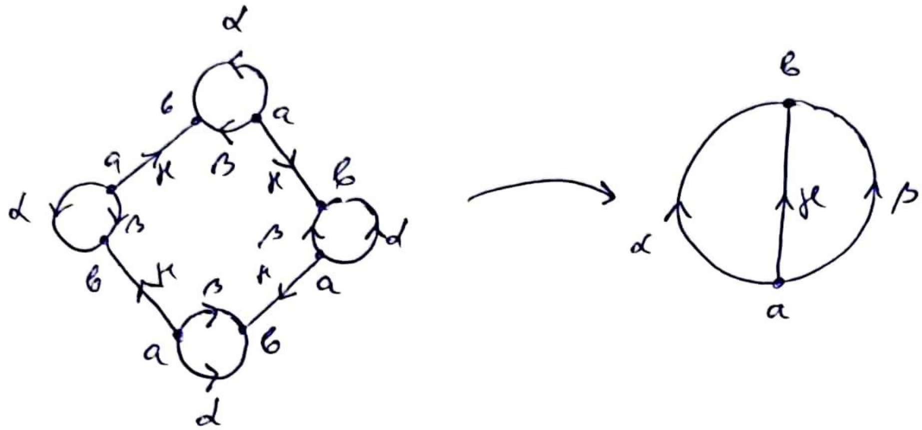
Специјално, $l \mid k$.

$X \to Y$?

$k = 8$ (8 тачака у X има околину $\curlywedge$)

$l = 2$

$8 = 2 \cdot n \Rightarrow$ наткривање мора бити 4-лисно



$\Rightarrow \boxed{X \to Y}$

2. начин: $\mathbb{Z}_4$ слободно дејствује на X

(φ_k = ротација за $\frac{k\pi}{2}$, $k \in \{0,1,2,3\}$)

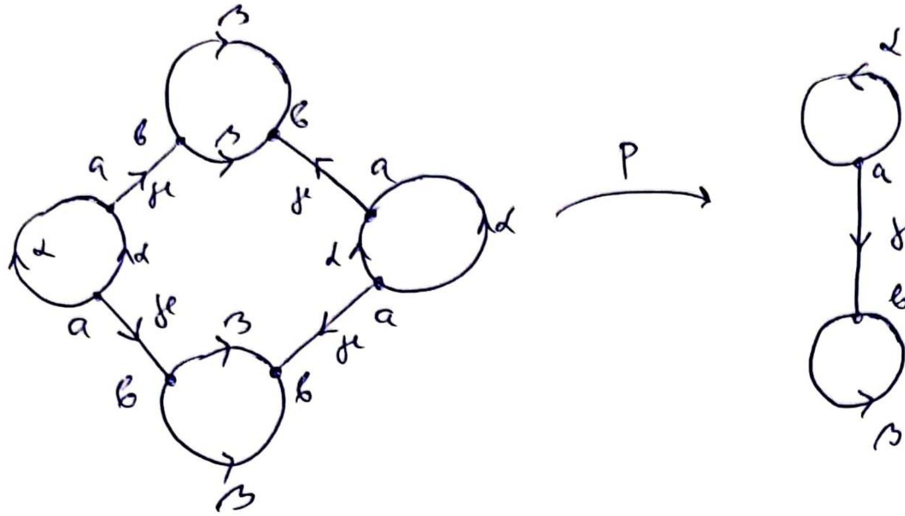
$\Rightarrow X \to X/\mathbb{Z}_4 \cong Y$

$Y \to X$?

$\left.\begin{array}{l} k = 2 \\ l = 8 \end{array}\right\} \quad 8 \nmid 2 \Rightarrow \boxed{Y \not\to X}$

$X \to Z$?

$\left.\begin{array}{l} k = 8 \\ l = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ наткривање мора бити 4-лисно



$\Rightarrow \boxed{X \to Z}$

$Z \to X$?

$\left.\begin{array}{l} k=2 \\ l=8 \end{array}\right\}$ $8 \nmid 2 \Rightarrow Z \not\to X$

$Y \to Z$?

$\left.\begin{array}{l} k=2 \\ l=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $n=1 \Rightarrow$ наткривање је хомеоморфизам,

али $Y \not\cong Z$

$\Rightarrow \boxed{Y \not\to Z}$

$Z \to Y$?

слично $\boxed{Z \not\to Y}$ $\blacksquare$

Ако је $p: E \to B$ наткривање са n листова и E и B имају дефинисане Ојлерове карактеристике, онда

$$\boxed{\chi(E) = n \cdot \chi(B)}$$

подсетник:

M_g - 1 теме, $2g$ ивица, 1 страна

$\Rightarrow \chi(M_g) = 2-2g$

N_h - 1 теме, h ивица, 1 страна

$\Rightarrow \chi(N_h) = 2-h$

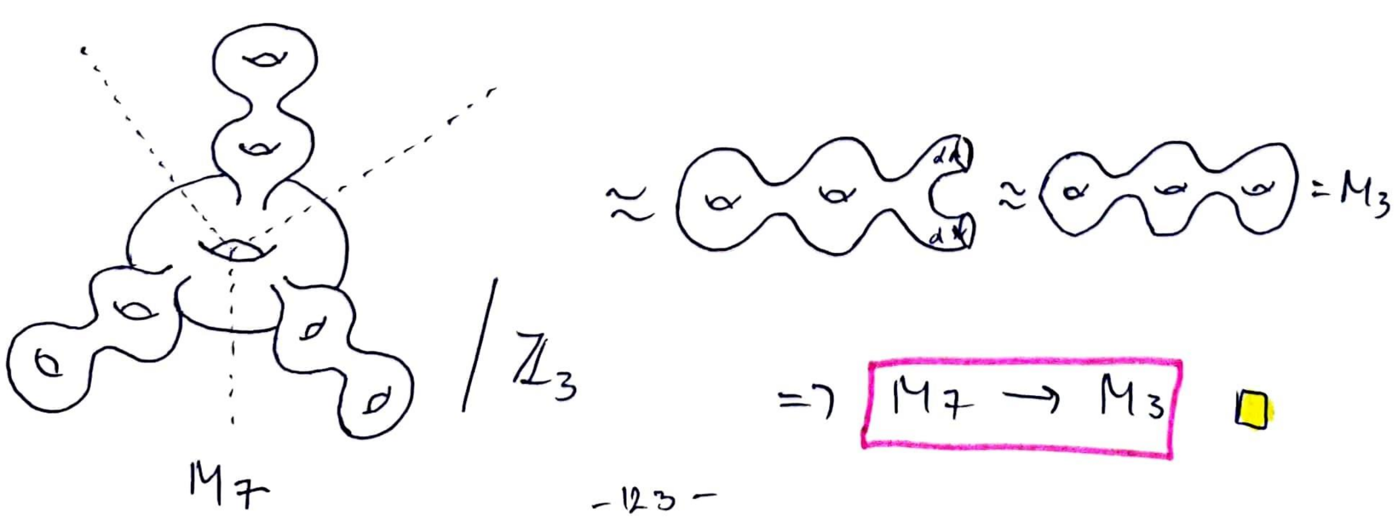
10. Да ли постоји наткривање $M_7 \to M_3$?

решење

$$\left.\begin{aligned} \chi(M_7) &= 2-14 = -12 \\ \chi(M_3) &= 2-6 = -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n = 3$$

ако наткривање постоји оно је тролисно.

Дејствујемо са $\mathbb{Z}_3$ на M_7



$\Rightarrow \boxed{M_7 \to M_3}$ ■

11. $M_g \to M_h$ акко $g = n(h-1)+1$ за неко $n \in \mathbb{N}$.

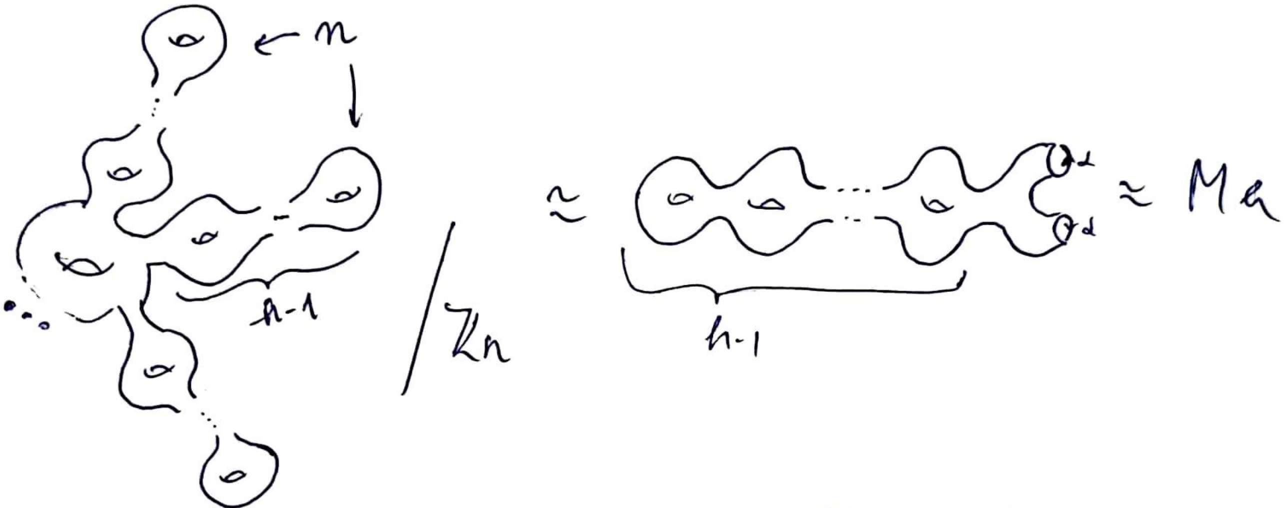
решење

$\Rightarrow$: $\chi(M_g) = n \cdot \chi(M_h)$, $n =$ бр. листова

$$2-2g = n(2-2h)$$

$$g = n(h-1)+1$$

$\Leftarrow$: $\mathbb{Z}_n$ дејствује слободно на $M_g = M_{n(h-1)+1}$ (као зад. 10)



M_g

$\Rightarrow M_g \to M_h$ ■

12. Доказати да $N_5 \to N_3$.

решење

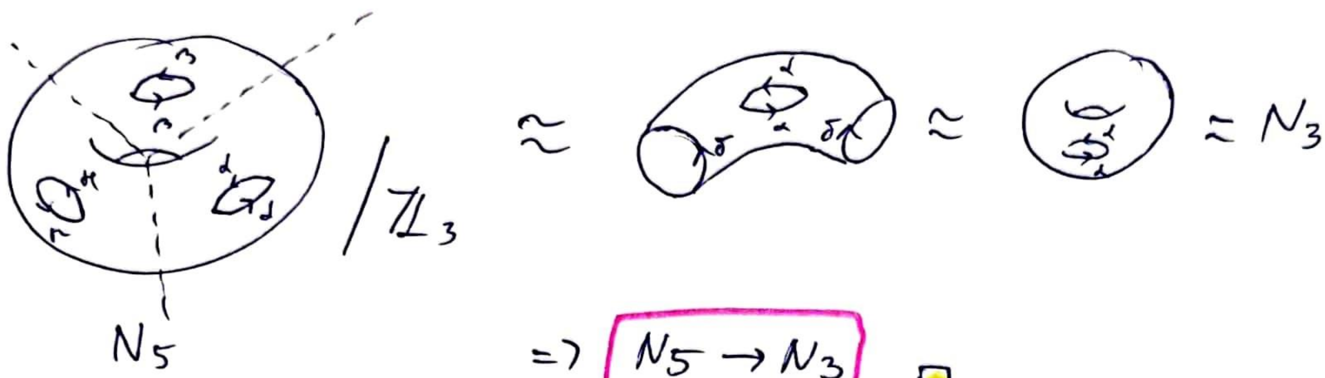
$\chi(N_5) = 2-5 = -3$, $\chi(N_3) = 2-3 = -1$

$\Rightarrow$ наткривање је трослојно.

Приметимо $N_5 \simeq M_1 \# N_1 \# N_1 \# N_1$

$N_3 \simeq M_1 \# N_1$

$\mathbb{Z}_3$ дејствује слободно на N_5



$\Rightarrow$ $\boxed{N_5 \to N_3}$ $\square$

За вежбу:

(1) $g, h, n \in \mathbb{N}$ т.д. $g = n(h-2)+2$, онда $N_g \to N_h$;

(2) $g \in \mathbb{N}_0$, $h, n \in \mathbb{N}$ т.д. $g = n(h-2)+1$, онда $M_g \to N_h$.