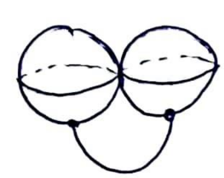
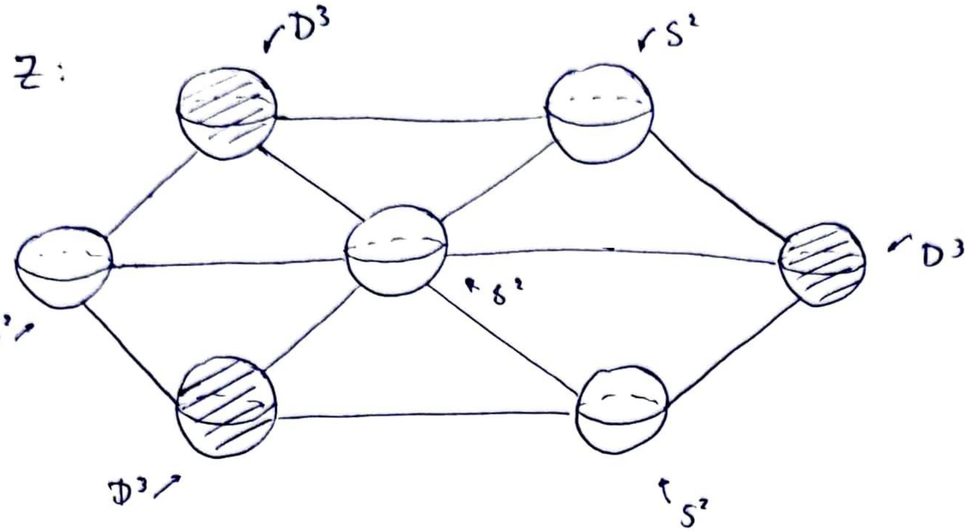
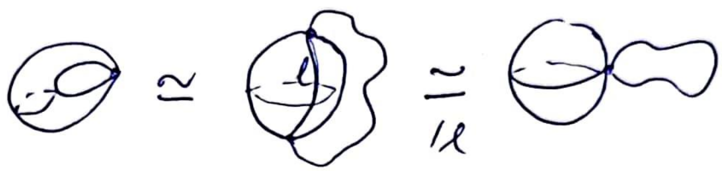
$\boxed{4.}$ Одредити фундаменталне групе простора

(а) $S^2/_{N\sim S}$; (б) X:  (в) Y: 

(г) Z:

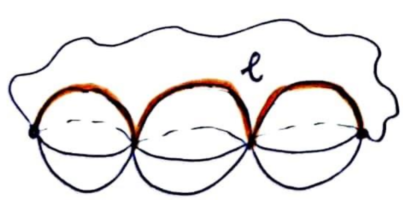
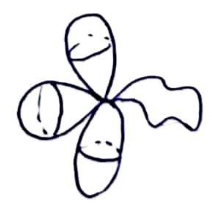


решење

(а) $S^2/_{N\sim S} \approx$  $\approx S^2 \vee S^1$

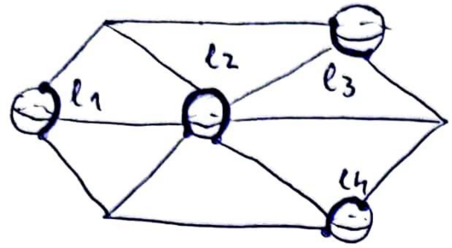
$$\Rightarrow \pi_1(S^2/_{N\sim S}) \cong \pi_1(S^2 \vee S^1) \cong \pi_1(S^2) * \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

S^1 и S^2 испуњавају услове претходне теореме

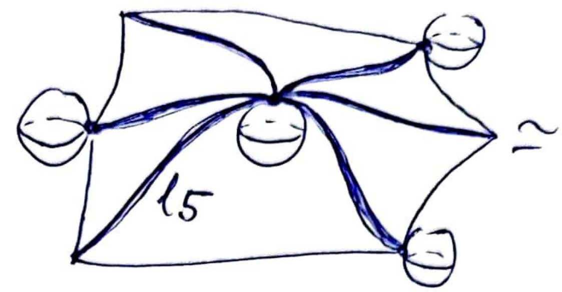
(б) $X \simeq$  $\underset{}{\overset{h}{\simeq}}$  $\approx S^1 \vee S^2 \vee S^2 \vee S^2$

$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^2) * \pi_1(S^2) * \pi_1(S^2) \cong \mathbb{Z}$$

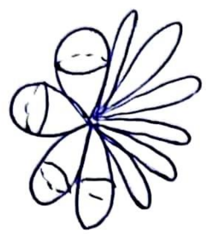
(в) $Y \simeq$  $\approx S^1 \vee S^2 \vee S^2 \Rightarrow \pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}$.

(?) $Z \simeq$ 

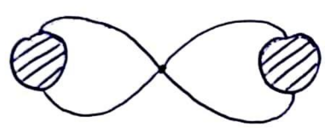
$/D^3$

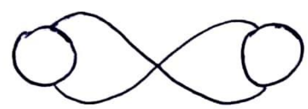
$\simeq$ $/l_1$ $/l_2$ $/l_3$ $/l_4$ 

$\simeq$

$\simeq$ $/l_5$  $\simeq \underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{6} \vee \underbrace{S^2 \vee \cdots \vee S^2}_{4}$

$\Rightarrow \quad \pi_1(Z) \cong \mathbb{Z}^{*6}$. ■

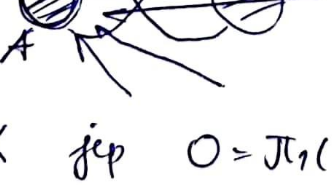
5. X:  D: 

A:  B:  C: 

Који од ових простора су ретракти, а који ДР?

Одредити $\pi_1(X)$.

решење $\quad X \simeq S^1 \vee S^1 \Rightarrow \pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

A јесте ретракт: 

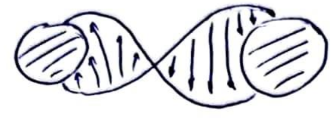
све пројектујемо на A

није ДР јер $A \simeq X$ јер $0 = \pi_1(A) \neq \pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

B није ретракт: тпс. нека је $r: X \to B$ ретракција и ρ ретракција B на S^1: 

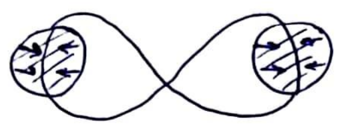
Онда је рестрикција $(r \circ \rho)\big|$ $: D^2 \to S^1$ ретракција ↯

$\Rightarrow$ B није ретракт па ни ДР.

$\boxed{C}$ јесте ретракт : 

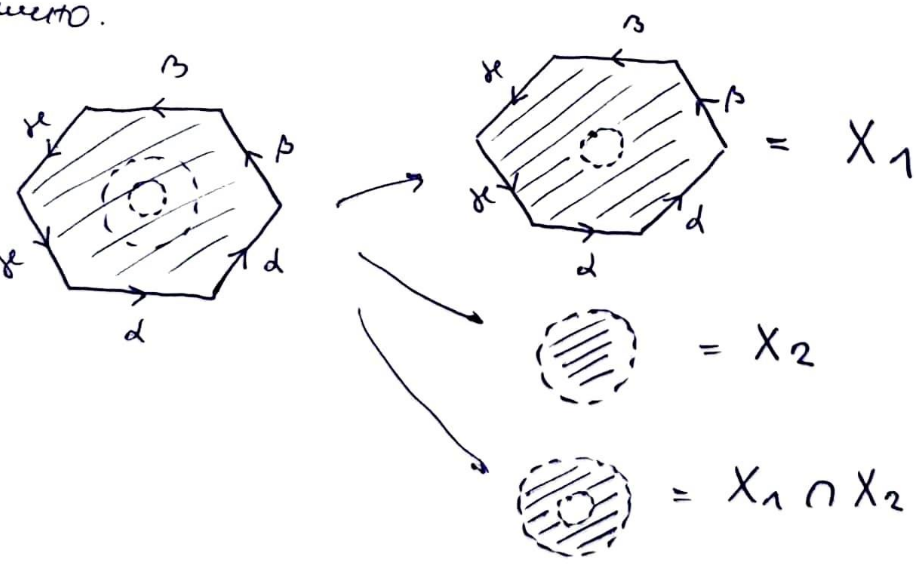
није ДР јер $C \simeq *$ па $\pi_1(C) = 0 \neq \pi_1(X)$

па $C \not\simeq X$.

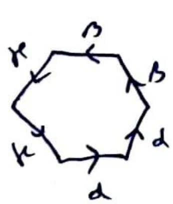
$\boxed{D}$ јесте ДР :  ■

$\boxed{6.}$ Одредити $\pi_1(M_g)$, $\pi_1(N_h)$, $g \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{N}$.

решење Урадићемо детаљно за N_3, све остало је слично.

N_3 : 

$N_3 = X_1 \cup X_2$, X_1, X_2 и $X_1 \cap X_2$ су путно повезани

$X_1 \simeq$  $\approx$  $= S^1 \vee S^1 \vee S^1$

$\Rightarrow \pi_1(X_1) \cong \langle \alpha \mid - \rangle * \langle \beta \mid - \rangle * \langle \gamma \mid - \rangle \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid - \rangle$

$X_2 \simeq * \Rightarrow \pi_1(X_2) \cong 0 = \langle - \mid - \rangle$

$X_1 \cap X_2 \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \mathbb{Z} \cong \langle \delta \mid - \rangle$

Ван Кампен:

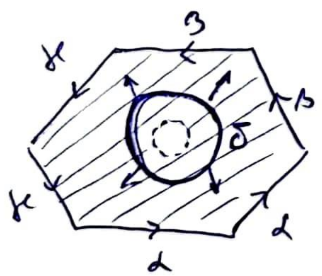
$$\pi_1(N_3) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid (j_1)_*(\delta) = (j_2)_*(\delta) \rangle$$

$j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1, \quad j_2 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$

Шта је δ:

то је генератор од $\pi_1(X_1 \cap X_2)$ тј. петља која се једном „намота" око рупе

Шта је $(j_1)_*(\delta)$: то је класа петље $j_1 \circ \delta$ у $\pi_1(X_1)$ тј. гледано са њим је δ уметнуто у X_1 експлицитно (хоћемо то да изразимо некако преко α, β, γ)



Видимо $j_1 \circ \delta \simeq \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$, тј $(j_1)_*(\delta) = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$

Шта је $(j_2)_*(\delta)$: то је исто класа петље $j_2 \circ \delta$ у $\pi_1(X_2)$, али $\pi_1(X_2) = 0 = \{1\}$, па је $(j_2)_*(\delta) = 1$

(1 је неутрал групе $\pi_1(X_2)$)

Коначно,

$$\pi_1(N_3) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^2\beta^2\gamma^2 = 1 \rangle$$

Слично, $\pi_1(N_h) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle$

$$\pi_1(M_g) \cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle$$

$\blacksquare$

Из претходног задатка имамо

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\pi_1(K) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2\beta^2 = 1 \rangle$$

$$\pi_1(T^2) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \rangle = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$\boxed{7.}$ Показати да међу M_g и N_h нема хомеоморфних површи ($g \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{N}$).

решење

Фундаменталне групе од M_g и N_h имају различите репрезентације, али одатле не можемо да закључимо да нису изоморфне. Одредимо π_1^{ab}.

$$\pi_1^{ab}(M_g) \cong Ab\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1 \rangle \cong$$

сви α_i, β_i комутирају па се скрате

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

$$\pi_1^{ab}(N_h) \cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_h^2 = 1 \rangle \cong$$

јер α_i комутирају

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \mid (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_h)^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_h, \beta \mid (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_h)^2 = 1,\ \beta = \alpha_1 \cdots \alpha_h \rangle \cong$$

избацимо $\alpha_h = \beta \alpha_1^{-1} \cdots \alpha_{h-1}^{-1}$

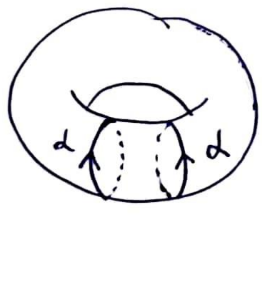
$$\cong Ab\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2$$

Очигледно ниједна од ових π_1^{ab} није изоморфна, па су све M_g, N_h нехомеоморфне површи. $\square$

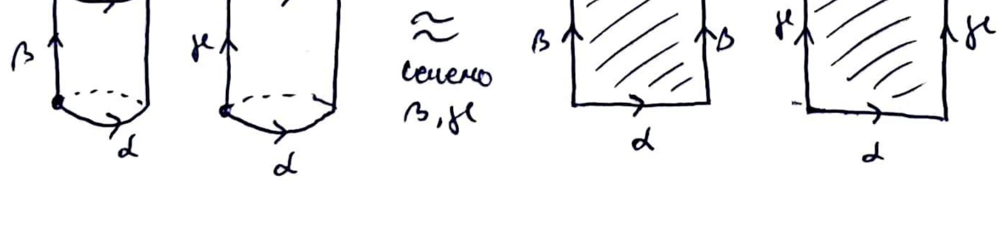
$\boxed{8.}$ Нека је дат простор X. Одредити $\pi_1(X)$.

X:



решење

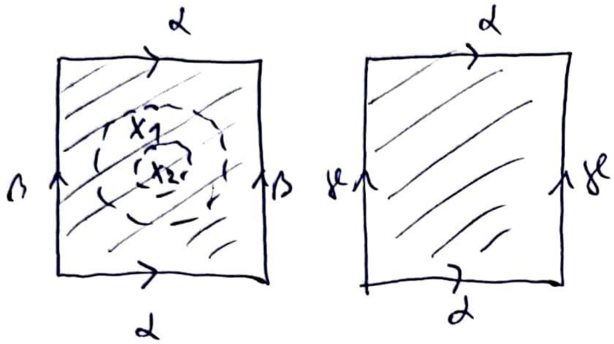
$X \approx$



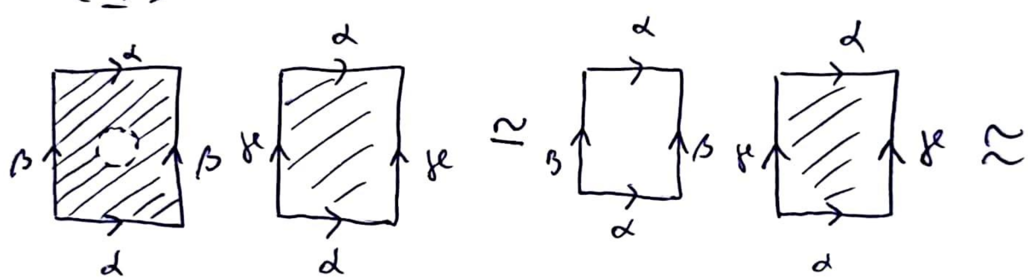
Очекујемо сличан резултат као за $\pi_1(M_g)$, $\pi_1(N_n)$:

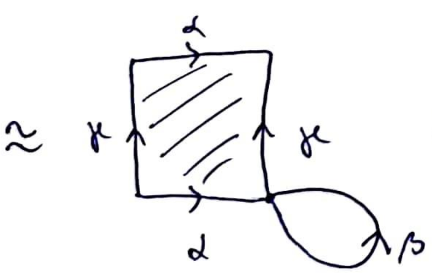
$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} = 1 \rangle$$

Формално, користимо Ван Кампенову теорему.

X:


$X_1 =$  $\simeq *$

$X_2 =$ 

$\simeq$ 

$\simeq T^2 \vee S^1$

$X_1 \cap X_2 =$  $\simeq S^1$

$X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ су путно повезани и

$$\pi_1(X_1) = \langle - \mid - \rangle$$

$$\pi_1(X_2) = \underbrace{\langle \alpha, \gamma \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha \rangle}_{\pi_1(T^2)} * \underbrace{\langle \beta \mid - \rangle}_{\pi_1(S^1)} \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha \rangle$$

$$\pi_1(X_1 \cap X_2) = \langle \delta \mid - \rangle$$

$$\overset{BK}{\Longrightarrow} \pi_1(X) \cong \left\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha,\ (j_1)_*(\delta) = (j_2)_*(\delta) \right\rangle$$

Слично као у зад. 6. (рачунање $\pi_1(M_g), \pi_1(N_g)$)

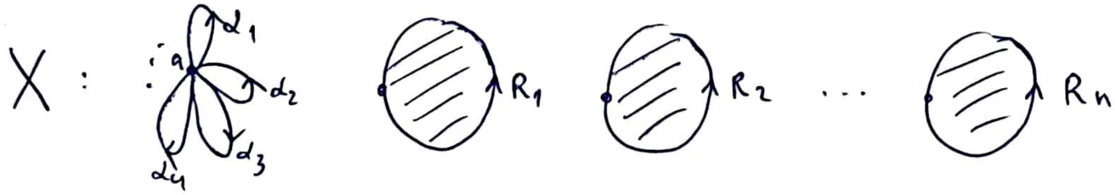
$$(j_1)_*(\delta) = 1$$

$$(j_2)_*(\delta) = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$$

$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\gamma = \gamma\alpha,\ \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \quad \blacksquare$$

Претходни резултат можемо генерализовати.

Ако се X састоји од k кружница $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ лепљених на границе n дискова



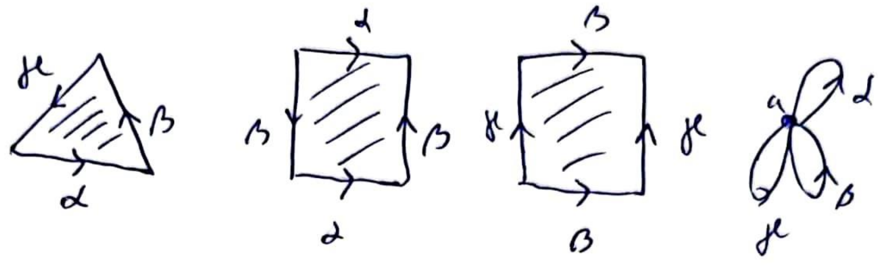
(R_i се састоји од ових кружница $\alpha_1 \ldots \alpha_k$)

онда је

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_n = 1 \rangle.$$

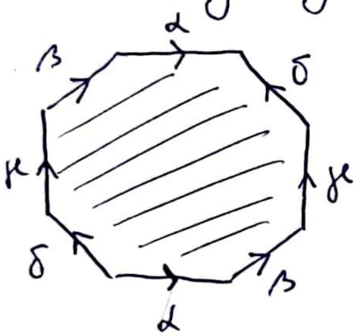
Овај резултат се добија применом Ван Кампенове т.

ПР пример X:



$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta\gamma = 1,\ \alpha\beta\alpha^{-1}\beta = 1,\ \beta\gamma\beta^{-1}\gamma^{-1} = 1 \rangle$$

$\boxed{9.}$ Доказати да је X површ и одредити која.



решење

X јесте површ (свака тачка има околину $\approx \mathrm{int}\, D^2$)

Сва темена остала су иста, тј. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ су кружнице, па је

$$\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1} = 1 \rangle$$

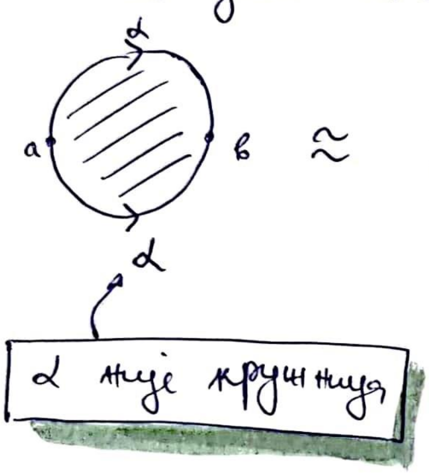
ово нам не говори ништа

$$\pi_1^{ab}(X) \cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \alpha\beta\gamma\delta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1}=1\rangle \cong$$

$$\cong Ab\langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}^4 \cong \pi_1^{ab}(M_2)$$

$\Rightarrow X \approx M_2.$ $\square$

пример Када одређујемо π_1 помоћу комплексног модела, битно је да су сви генератори кружнице! Шта се деси ако нису:



$\approx S^2$

Знамо $\pi_1(S^2)=0$, али

$\langle \alpha \mid \alpha\alpha^{-1}=1\rangle \cong \langle \alpha \mid -\rangle \cong \mathbb{Z}$,

па очигледно није $\pi_1(S^2) \ncong \langle \alpha \mid \alpha\alpha^{-1}=1\rangle$

$\boxed{10.}$ Наћи неки простор X т.д. је

(а) $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$;

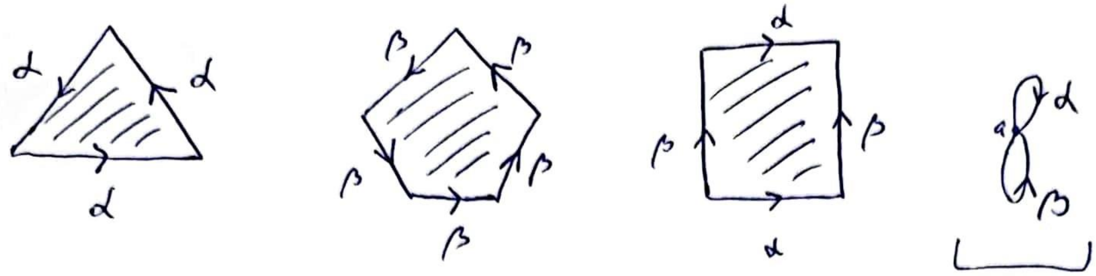
(б) $\pi_1(X) \cong (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4) * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_3$

решење

$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^3=1, \beta^5=1, \alpha\beta=\beta\alpha\rangle$

Ово нам даје мотивацију за X:

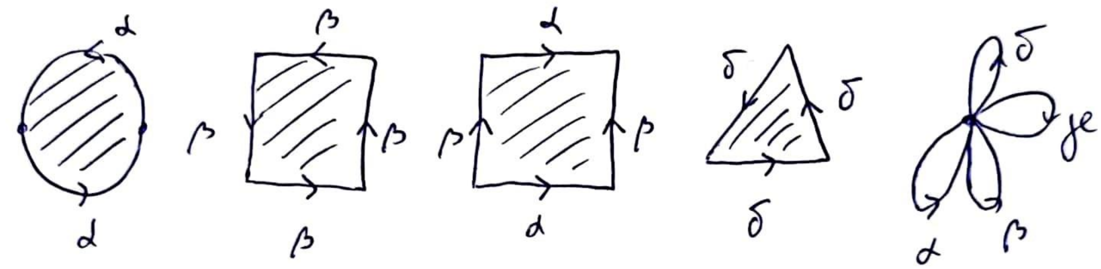
X:



овај део модела је овде сувишан јер се из прва 3 дела већ види да су α и β кружнице у a

(б) $\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha^2 = 1, \beta^4 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, \delta^3 = 1 \rangle$

X:



$\boxed{11.}$ $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = ?$

решење $\mathbb{R}P^1 \approx S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$

$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$

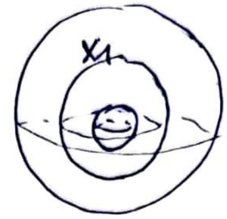
Покажимо $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$ индукцијом.

база индукције: $n = 2$ ✓

индукцијска хипотеза: $\pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z}_2$, $n \geq 3$

индукцијски корак: показујемо $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

$$\mathbb{R}P^n \approx D^n /_{x \sim -x,\ x \in \partial D^n}$$



$\mathbb{R}P^n$

Нека је X_1 = мали отворен диск у $\mathbb{R}P^n$:  $\simeq *$

$X_2 = \mathbb{R}P^n \setminus$ мањег затвореног диска:

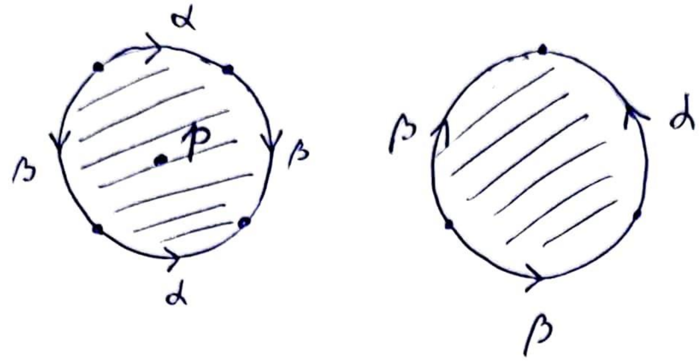
 $\simeq S^{n-1}/_{x \sim -x} \approx \mathbb{R}P^{n-1}$

$X_1 \cap X_2 \simeq S^{n-1}$ - просто повезан

посл. 2
$$\overset{BK}{\Longrightarrow} \quad \pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

Дакле, $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \\ \mathbb{Z}_2, & n \geq 2 \end{cases}$ ■

12.

X : 

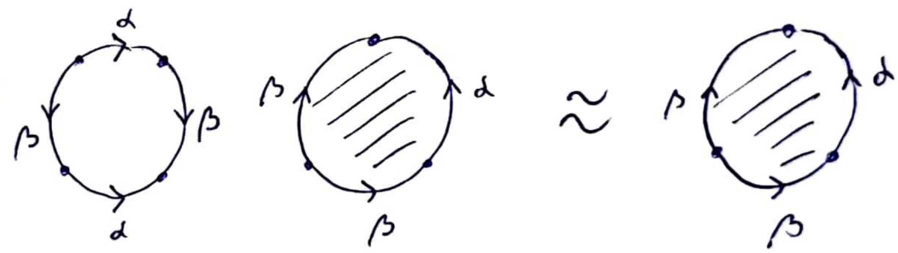
(а) Доказати да $X \not\simeq *$;

(б) Да ли је $X \setminus \{p\} \simeq S^1$?

решење

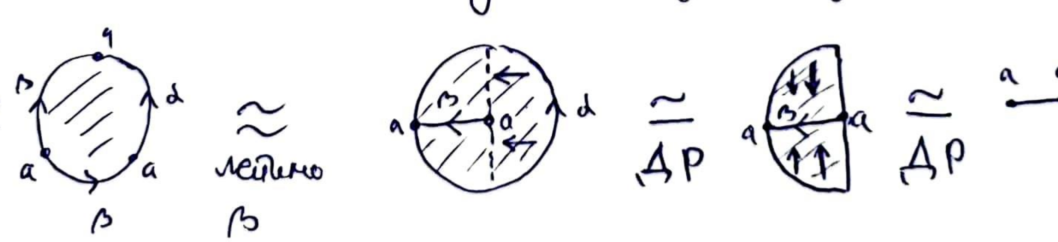
(а) $\pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}\beta = 1, \underbrace{\beta^{-1}\beta\alpha = 1}_{\Downarrow\ \alpha = 1} \rangle \cong$

$$\cong \langle \beta \mid - \rangle \cong \mathbb{Z} \neq 0 \Rightarrow X \not\simeq *$$

(б) $X \setminus \{p\} \simeq$ 

$\Rightarrow \pi_1(X \setminus \{p\}) \cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^{-1}\beta\alpha = 1 \rangle \cong \langle \beta \mid - \rangle \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$

Одавде не можемо закључити да ли је $X \setminus \{p\} \simeq S^1$.

$X \setminus \{p\} \simeq$  $\simeq S^1$

Дакле, $X \setminus \{p\} \simeq S^1$. ∎

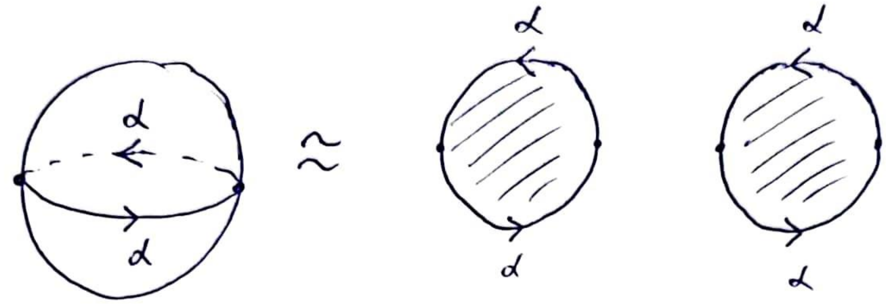
$\boxed{13.}$ Нека је $X = S^2 /_{(x,y,0)\sim(-x,-y,0)}$

(а) Да ли је $X \approx \mathbb{R}P^2$?

(б) Ако је A екватор, да ли је $A/_\sim$ ретракт од X?

решење

X :



$\pi_1(X) \cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1, \alpha^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ } ово нам не говори ништа

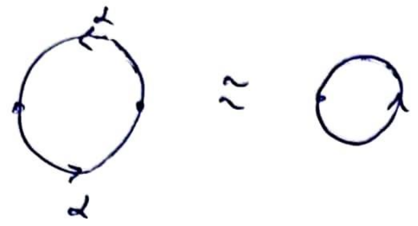
$\pi_1(\mathbb{R}P^2)$

1. начин:

X није површ јер тачке на α имају околину хомеоморфну  $\not\approx \operatorname{int} D^2$, а $\mathbb{R}P^2$ јесте површ

2. начин:

пп с. $X \approx \mathbb{R}P^2 \Rightarrow \underset{\mathbb{R}P^2}{\underset{\cong}{X\setminus\{N\}}} \approx \underset{S^1}{\underset{\cong}{\mathbb{R}P^2\setminus *}} \Rightarrow \underset{\mathbb{Z}_2}{\underset{\|}{\pi_1(\mathbb{R}P^2)}} \cong \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|}{\pi_1(S^1)}}$ ↯

(б) A:  $\simeq S^1$

ппс. да постоји ретракција $r : X \to A$.

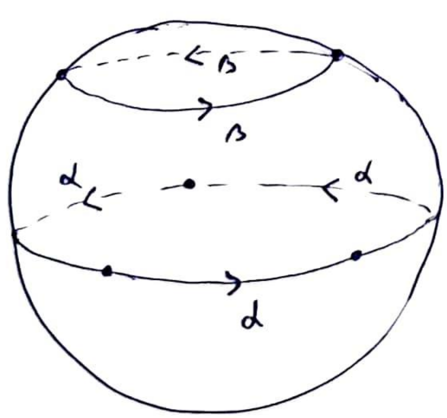
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & A \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "r_*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \lightning$$

Ово је контрадикција јер $r_* \circ i_* = \mathbb{1} \Rightarrow r_*$ је „на",

али $r_* : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ не може бити „на".

(Други аргумент би био да сваки хомоморфизам из $\mathbb{Z}_2$ у $\mathbb{Z}$ мора бити тривијалан, па $r_* = 0$, па $\mathbb{1} = r_* \circ i_* = 0$ $\lightning$) ■

$\boxed{14.}$ X:



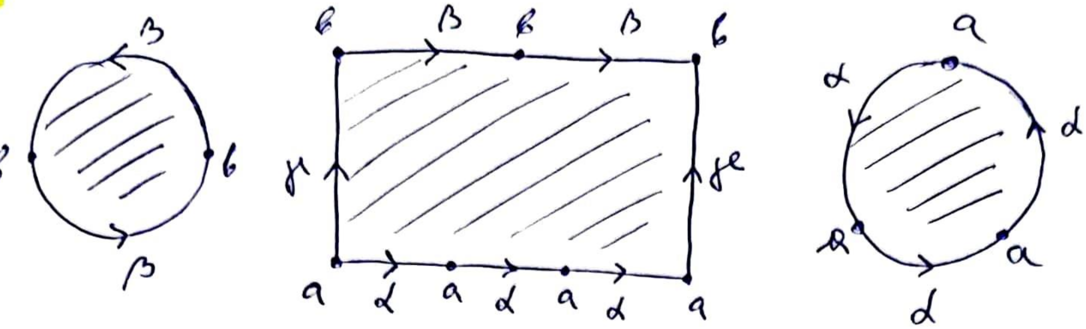
(а) $\pi_1(X) = ?$

(б) $A/\sim$ да ли је ретракт?

(A = екватор)

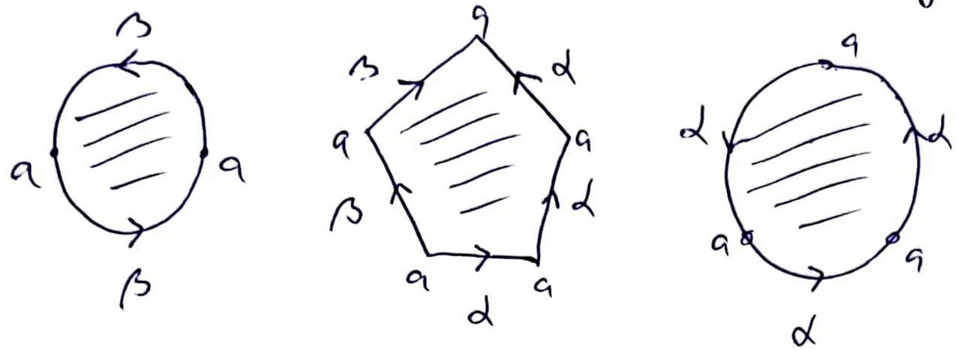
решење

(а) X:



нису сва темена иста, па посечемо то је $\simeq *$:

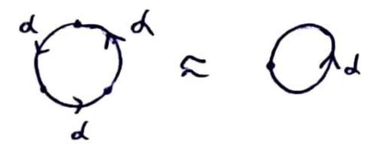
$X \simeq$



$$\Rightarrow \pi_1(X) \cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1,\ \underbrace{\alpha^3 = \beta^2}_{\text{сувишно}},\ \alpha^3 = 1 \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1,\ \alpha^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

(б) птс. да постоји ретракција $r : X \to A/\sim$

$A/\sim \;\simeq$  $\simeq S^1$

$$\begin{tikzcd}
A/\sim \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & X \arrow[d, "r"] \\
& A/\sim
\end{tikzcd}
\quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \arrow[d, "r_*"] \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\quad \overset{ab}{\rightsquigarrow} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "i_*^{ab}"] \arrow[dr, "\mathbb{1}"'] & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \arrow[d, "r_*^{ab}"] \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

још увек немамо контрадикцију па радимо ab

↯

$\Rightarrow$ није ретракт $\blacksquare$