дефиниција X је тополошка група ако је тополошки простор и група и операције $*: X \times X \to X$ и $^{-1}: X \to X$ су непрекидне.

$\boxed{23.}$ Нека је Y путно повезана тополошка група, X тополошки простор, $x_0 \in X$, $e \in Y$ базне тачке (e је неутрал у групи). Тада је ϕ бијекција.

решење

ϕ је „на": Нека је $f: X \to Y$ непр. Тражимо $g: X \to Y$ непр. тд. $g(x_0) = e$ и $f \simeq g$.

Како је Y путно повезан, постоји пут $u: I \to Y$, $u(0) = f(x_0)$, $u(1) = e$. Нека је $H: X \times I \to Y$ дато са

$$H(x,t) \overset{\text{def}}{=} f(x) * \left(u(t)\right)^{-1}$$

Приметимо $H(x,1) = f(x) * e^{-1} = f(x)$. Узмимо $g(x) := H(x,0)$

Тада је $g(x_0) = H(x_0, 0) = f(x_0) * (u(0))^{-1} = f(x_0) * (f(x_0))^{-1} = e$

и $H: g \simeq f \Rightarrow \phi([g]_0) = [f] \Rightarrow \phi$ је „на".

Φ је „1-1": Нека су $[f]_0, [g]_0 \in [X, Y]_0$ т.д.

$\Phi([f]_0) = \Phi([g]_0)$, тј. $f, g : X \to Y$, $f(x_0) = g(x_0) = e$ и $f \simeq g$

Да ли је $[f]_0 = [g]_0$, тј. да ли је $f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ x_0)$?

Имамо $H : f \simeq g$, $H : X \times I \to Y$. Нека је $\tilde{H} : X \times I \to Y$

дато са $\tilde{H}(x,t) := H(x,t) * (H(x_0,t))^{-1}$

$\tilde{H}$ је непр. (јер су операције у групи непр., као и H).

$$\tilde{H}(x,0) = f(x) * (\underbrace{f(x_0)}_{e})^{-1} = f(x)$$

$$\tilde{H}(x,1) = g(x) * (\underbrace{g(x_0)}_{e})^{-1} = g(x)$$

$\tilde{H}(x_0,t) = H(x_0,t) * (H(x_0,t))^{-1} = e$ - не зависи од t

$\Rightarrow \tilde{H} : f \simeq g \ (\mathrm{rel}\ x_0)$

$\Rightarrow \Phi$ је „1-1". $\blacksquare$

Фундаментална група

Нека је (X, x_0) топ. пр. са базном тачком.

дефиниција Фундаментална група од (X, x_0) је

$$\pi_1(X, x_0) \overset{def}{=} \{ f : I \to X \mid f(0) = f(1) = x_0,\ f \text{ непр.} \} /_{\simeq\ (\text{rel } \{0,1\})}$$

Еквивалентно:

$$\pi_1(X, x_0) \overset{def}{=} \{ f : S^1 \to X \mid f(1) = x_0,\ f \text{ непр.} \} /_{\simeq\ (\text{rel } 1)} \cong [S^1, X]_0$$

Дакле, у $\pi_1(X, x_0)$ елементи су класе петљи.

Дефинишимо сабирање. Нека су $f, g : I \to X$ петље.

$$[f] + [g] := [u],$$

где је
$$u(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

u се добија надовезивањем петље g на петљу f

$(\pi_1(X, x_0), +)$ је група (не мора бити Абелова)

(неутрал је $[c_{x_0}]$, инверз $[u]^{-1} = [v]$, $v(t) := u(1-t)$)

• Ако је X путно повезан, онда

$$(\forall x_0, x_1 \in X) \quad \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

и тада пишемо само $\pi_1(X)$.

• $f : X \to Y$ тд. $f(x_0) = y_0$ индукује хомоморфизам

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [u] &\longmapsto [f \circ u] \end{aligned}$$

Особине

1. $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X, x_0)}$

2. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ онда $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, тј.

комутира:
$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"'] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[d, "g_*"] \\ & \pi_1(Z, z_0) \end{tikzcd}$$

3. $f, g : X \to Y$ и $f \simeq g \Rightarrow f_* = g_*$

4. $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$

доказ:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\varphi"] & Y \arrow[l, shift left, "\psi"] \end{tikzcd} \qquad \varphi \circ \psi \simeq 1_Y, \quad \psi \circ \varphi \simeq 1_X$$

$\Rightarrow \varphi_* \circ \psi_* = 1_{\pi_1(Y)}, \quad \psi_* \circ \varphi_* = 1_{\pi_1(X)} \Rightarrow \varphi_*$ је изоморфизам. $\square$

Користићемо:

(1) $X \simeq * \Rightarrow \pi_1(X) = 0$

О је ознака за тривијалну групу која садржи само неутрал, тј. $0 = \{e\}$.

нпр. $\pi_1(*) \cong \pi_1(D^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$

(2) $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ (одавде и $\pi_1(C) \cong \pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ јер $C \simeq M \simeq S^1$)

(3) $\pi_1(S^n) = 0$, $n \geq 2$

деф дефиниција X је просто повезан ако је путно повезан и $\pi_1(X) = 0$.

Представљање групе преко генератора и релација

$\langle \alpha \mid - \rangle$ = скуп свих речи над скупом симбола α, α^{-1}

$\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ - скуп носач

нпр. $\alpha^2 \alpha^7 \alpha^{-3} = \alpha^6 \in \langle \alpha \mid - \rangle$

Имамо релацију еквиваленције $\alpha\alpha^{-1} \sim 1$

Примећујемо: $\langle \alpha \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$.

$\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$ = скуп свих речи над скупом симбола $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$

$\{\alpha^k, \beta^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ - скуп носач

Рел. екв.: $\alpha\alpha^{-1} \sim 1$, $\beta\beta^{-1} \sim 1$

нпр. $\alpha\beta\underbrace{\alpha^{-1}\alpha}_{1}\alpha^{-1}\underbrace{\beta\beta^{-1}}_{1}\underbrace{\beta^{-1}\beta}_{1}\alpha \sim \alpha\beta\underbrace{\alpha^{-1}\alpha}_{1} \sim \alpha\beta$ ← $\boxed{\text{редуковане речи}}$

1 = празна реч

$\alpha\beta \neq \beta\alpha$ - нема комутативности

Дефинишемо операцију надовезивања $*$:

$$\alpha\beta\beta^{-1} * \beta\beta \stackrel{def}{=} \alpha\beta\beta^{-1}\beta\beta \sim \alpha\beta^2$$

$\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$ је у ствари слободна група са два генератора.

Генерално, ако је S скуп, $\langle S \mid - \rangle$ је слободна група са скупом генератора S. Пишемо и $F[S]$.

Теорема Нека је $f: S \to G$. Тада постоји јединствено проширење $\bar{f}: F[S] \to G$ (тј. $\bar{f}|_S = f$).

$$\begin{tikzcd} F[S] \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & G \\ S \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Ово значи да је свако пресликавање $\bar{f}$ са доменом $F[S]$ у потпуности одређено сликама елемената из S.

Најопштије :

$\langle S \mid R \rangle$

релације

исто што и $\alpha\beta\gamma^2\beta^{-3}=1$

нпр. $\langle \alpha,\beta,\gamma \mid \alpha^2=1,\ \alpha\beta\gamma^2=\beta^3 \rangle := \langle \alpha,\beta,\gamma \mid - \rangle \big/ N\langle \alpha^2, \alpha\beta\gamma^2\beta^{-3}\rangle$

нормална подгрупа генерисана са α^2 и $\alpha\beta\gamma^2\beta^{-2}$

нпр. $\langle \alpha \mid \alpha^2=1 \rangle = \langle \alpha \mid - \rangle \big/_{N\langle \alpha^2\rangle} \cong \mathbb{Z}_2$

За сваку групу G постоје S и R тд. $G \cong \langle S \mid R\rangle$, али ова репрезентација не мора бити јединствена. Наиме, ако је $G_1 = \langle S_1 \mid R_1\rangle$ и $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ и

$S_1 \neq S_2,\ R_1 \neq R_2 \not\Rightarrow G_1 \not\cong G_2$.

Тицеове трансформације

Ако из неке релације можемо да изразимо један елемент преко осталих, онда:

(1) избришемо ту релацију;

(2) избришемо тај елемент;

(3) у осталим релацијама га заменимо.

Нпр.

$$\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\underbrace{\delta}\gamma^{-1} = \underbrace{\delta^2}\beta,\ \beta\delta = \gamma^2\beta^{-3} \rangle \cong$$

$\delta = \beta^{-1}\gamma^2\beta^{-3}$

$$\cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\underbrace{\beta^{-1}\gamma^2\beta^{-3}}\gamma^{-1} = \underbrace{\beta^{-1}\gamma^2\beta^{-3}\beta^{-1}\gamma^2\beta^{-3}}\beta \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta^{-1}\gamma^2\beta^{-3}\gamma^{-1} = \beta^{-1}\gamma^2\beta^{-4}\gamma^2\beta^{-2} \rangle$$

Можемо по потреби и да додамо генератор:

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \mid \alpha\beta = \beta\alpha,\ \delta = \alpha\gamma \rangle$$

Абелизација групе

$$G^{ab} \overset{def}{=} G / N\langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$$

додамо релације да свака два елемента комутирају

Ако је G Абелова, онда $G^{ab} = G$.

Ако је $f: G \to H$, дефинишемо $f^{ab}: G^{ab} \to H^{ab}$

са $f^{ab}([\underset{G}{x}]) = [\underset{H}{f(x)}]$

Особине:

(1) $\mathbb{1}_G^{ab} = \mathbb{1}_{G^{ab}}$

(2) $(g \circ f)^{ab} = g^{ab} \circ f^{ab}$

Из (1) и (2) следи: $G \cong H \Rightarrow G^{ab} \cong H^{ab}$

Нпр. $G = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \beta^2 = \gamma^{-2} \rangle$

$G^{ab} = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \beta^2 = \gamma^{-2}, \alpha\beta = \beta\alpha, \alpha\gamma = \gamma\alpha, \beta\gamma = \gamma\beta \rangle$

пример (1) $\mathbb{Z} \cong \langle \alpha \mid - \rangle$

(2) $\mathbb{Z}_m \cong \langle \alpha \mid \alpha^m = 1 \rangle$

(3) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha \rangle = Ab\langle \alpha, \beta \mid - \rangle$

(4) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6 \cong \langle \alpha, \beta \mid \beta^6 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$

Слободни производ група

$$G_1 \times G_2 \times \dots = \prod_{n=1}^{\infty} G_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \;\middle|\; g_n \in G_n \right\}$$

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \dots = \bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \;\middle/\; g_n \in G_n,\ (\exists m \in \mathbb{N})(\forall k \geq m)\, g_k = 0 \right\}$$

коначне суме

Приметимо: $\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n \leq \prod_{n=1}^{\infty} G_n$.

У коначном случају ове две ствари су исте:

$$\bigoplus_{k=1}^{n} G_k \cong \prod_{k=1}^{n} G_k$$

Ако је $G \cong \langle S_1 | R_1 \rangle$, $K \cong \langle S_2, R_2 \rangle$, онда

$$G \oplus K \cong G \times K \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{ s_1 s_2 = s_2 s_1 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \} \rangle$$

сви из S_1 комутирају са свима из S_2

Коначно, слободни производ група G и K је

$$G * K \overset{def}{=} \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle$$

пример $|\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2| = 4$

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle \alpha | \alpha^2 = 1 \rangle * \langle \beta | \beta^2 = 1 \rangle \cong \langle \alpha, \beta | \alpha^2 = 1, \beta^2 = 1 \rangle$$

$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \{ \alpha\beta, \alpha\beta\alpha, \alpha\beta\alpha\beta, \alpha\beta\alpha\beta\alpha, \dots \}$ − бесконачан скуп

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 .$$

Ако су G и K Абелове, онда $(G * K)^{ab} \cong G \oplus K$

ПР пример $D_n \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^n = 1, \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha^{n-1} \rangle$

$\boxed{\text{диједарска група}}$

$$D_n^{ab} \cong \langle \alpha, \beta \mid \underbrace{\alpha^n = 1}, \beta^2 = 1, \underbrace{\alpha\beta = \beta\alpha^{n-1}, \alpha\beta = \beta\alpha}_{\alpha^{n-2} = 1} \rangle \cong$$

$$\alpha^2 = 1$$

$$\cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1, \alpha^n = 1, \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha^{n-1}, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$$

1° $2 \nmid n$: $\alpha^2 = 1$ и $\alpha^n = 1 \Rightarrow \alpha = 1$

$$\Rightarrow D_n^{ab} \cong \langle \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

2° $2 \mid n$: $\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^n = 1$ - сувишна релација

$$D_n^{ab} \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1, \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle \cong$$

$$\cong \langle \alpha \mid \alpha^2 = 1 \rangle \oplus \langle \beta \mid \beta^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

теорема $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$.

пример $T^2 = S^1 \times S^1 \Rightarrow \pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Ван Кампенова теорема

теорема Нека је $X = X_1 \cup X_2$, $X_1, X_2 \in \mathcal{T}_X$. Нека су X_1, X_2 и $X_1 \cap X_2$ путно повезани и $x_0 \in X_1 \cap X_2$.

Ако је
$$\pi_1(X_1, x_0) \cong \langle S_1 \mid R_1 \rangle,$$
$$\pi_1(X_2, x_0) \cong \langle S_2 \mid R_2 \rangle,$$
$$\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \cong \langle S_0 \mid R_0 \rangle,$$

онда је

$$\pi_1(X, x_0) \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{ (j_1)_*(z) = (j_2)_*(z) \mid z \in S_0 \} \rangle,$$

где су $j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1$, $j_2 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$ инклузије.

последица 1 Ако су X_1 и X_2 просто повезани, онда је и X просто повезан

доказ: $\pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2) \cong 0 = \langle - \mid - \rangle \Rightarrow \pi_1(X) = 0$ ∎

последица 2 Ако је $X_1 \cap X_2$ просто повезан онда
$$\pi_1(X) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2).$$

$\boxed{1.}$ $\pi_1(S^n) = 0, \quad n \geq 2$

решење

$$\left.\begin{array}{l} X_1 := S^n \setminus \{S\} \approx \mathbb{R}^n \simeq * \\ X_2 := S^2 \setminus \{N\} \approx \mathbb{R}^n \simeq * \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 \text{ и } X_2 \text{ су просто повезани}$$

$S^n = X_1 \cup X_2$

$\overset{\text{посл.}1}{\Longrightarrow} \pi_1(S^n) = 0$ ■

Напомена: решење зад. 1 не би прошло за S^1 јер $X_1 \cap X_2 = S^1 \setminus \{S, N\}$ – није путно повезан!

$\boxed{2.}$ $\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}^2$ за $n > 2$.

решење

ппс. $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underset{S^{n-1}}{\underset{\simeq}{\mathbb{R}^n \setminus *}} \approx \underset{S^1}{\underset{\simeq}{\mathbb{R}^2 \setminus *}} \Rightarrow S^{n-1} \simeq S^1 \Rightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{\pi_1(S^{n-1})}} \cong \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\parallel}{\pi_1(S^1)}}$

↯ ■

$\boxed{3.}$ Доказати

(а) $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(б) $S \subseteq \mathbb{R}^2, |S| = n \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \cong \mathbb{Z}^{*n}$

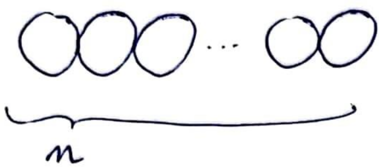
(в) $S \subseteq S^2, |S| = n \Rightarrow \pi_1(S^2 \setminus S) \cong \mathbb{Z}^{*(n-1)}$

решење (а) $X = S^1 \vee S^1 =$ 

$X_1 =$  $\simeq$  $= S^1$, $X_2 =$  $\simeq$  $= S^1$, $X_1 \cap X_2 =$  $\simeq *$

$X_1 \cap X_2$ је просто повезан $\Rightarrow \pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) \cong$

$\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

(б) $\mathbb{R}^2 \setminus S \simeq$  $\simeq$  $\approx \underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{n}$

Индукцијом помоћу (а) добијамо:

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus S) \cong \pi_1(\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{n}) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n} = \mathbb{Z}^{*n}$$

(в) $S^2 \setminus S \approx \mathbb{R}^2 \setminus (S \setminus *) \overset{(б)}{\Rightarrow} \pi_1(S^2 \setminus S) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n-1} = \mathbb{Z}^{*(n-1)}$ ■

Користимо $S^2 \setminus * \approx \mathbb{R}^2$

Теорема Ако је $x_0 \in X$ т.д. постоји $U_{x_0} \in \mathcal{T}_X$ и $\{x_0\}$ је ЈДР од U_{x_0} и ако је $y_0 \in Y$ т.д. постоји $V_{y_0} \in \mathcal{T}_Y$ и $\{y_0\}$ је ЈДР од V_{y_0}, и ако су X и Y путно повезани, онда

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y).$$