деф дефиниција: Тополошки простор X је контрактибилан ако је $X \simeq *$.

Шта то тачно значи:

$$X \simeq * \iff X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} * \quad \text{т.д.} \quad \varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_* \quad \text{и} \quad \psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$$

$\varphi : X \to *$, па је $\varphi = c_*$ па очигледно $\varphi \circ \psi = \mathbb{1}_*$

Услов $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$ у ствари каже

$$\mathbb{1}_X \simeq \psi \circ \varphi = \psi \circ c_* = c_{\psi(*)}$$

Закључак: $X \simeq * \iff (\exists x_0 \in X)\ \mathbb{1}_X \simeq c_{x_0}$

пр пример $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = 0$, $H : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$ дато са

$$H(x,t) \overset{\text{def}}{=} t \cdot x \quad \text{- јесте непр.}$$

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) &= 0 \\ H(x,1) &= x = \mathbb{1}_X(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow H : \mathbb{1}_X \simeq c_0 \Rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq *$$

теорема $X \simeq * \Rightarrow X$ је путно повезан.

доказ: $X \simeq * \Leftrightarrow \mathbb{1}_X \simeq c_{x_0}$

Нека је $H: \mathbb{1}_X \simeq c_{x_0}$. Тада $H(x,0)=x$, $H(x,1)=x_0$,

па је $u(t) := H(x,t)$, $u: I \to X$ пут од x до x_0.

Како свако $x \in X$ можемо спојити путем са x_0,

X је путно повезан. ◻

- Ако је X путно повезан, онда $(\forall x_1, x_2 \in X)\ c_{x_1} \simeq c_{x_2}$.

1. Нека су $f, g: X \to Y$, $Y \simeq *$. Доказати да је $f \simeq g$.

решење

$c_{y_0}: Y \to Y$

$Y \simeq * \Leftrightarrow H: \mathbb{1}_Y \simeq c_{y_0}$, $H: Y \times I \to Y$

Нека је $G: X \times I \to Y$ дато са

$$G(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} H(f(x), t)$$

G је непр. и $G(x,0) = H(f(x), 0) = f(x)$, $G(x,1) = H(f(x),1) = y_0$

$\Rightarrow G: f \simeq c_{y_0}$ $\quad c_{y_0}: X \to Y$

слично $g \simeq c_{y_0}$, па $f \simeq g$. ◻

$\boxed{2.}$ Нека су $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ непр. Тада $f \simeq g$.

решење

$H : f \simeq g$ је дато са $H(x,t) = (1-t)f(x) + t\,g(x)$.

(исто решење пролази и за $A \subseteq \mathbb{R}^n$ конвексан и $f, g : X \to A$) $\square$

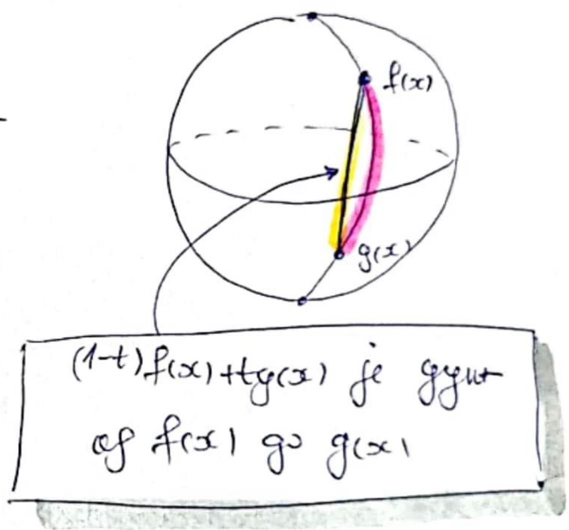
$\boxed{3.}$ Нека су $f, g : X \to S^n$ непр. и $(\forall x \in X)\ f(x) \neq -g(x)$.

Доказати да је $f \simeq g$.

решење

Нека је $H : X \times I \to S^n$ дато са

$$H(x,t) \overset{\text{def}}{=} \frac{(1-t)f(x) + t\,g(x)}{\|(1-t)f(x) + t\,g(x)\|}$$



Због услова да је $f(x) \neq -g(x)$, $H(x,t)$ је добро деф. (јер $\|\dots\|$ никад није 0) и H је непр.

$$H(x,0) = \frac{f(x)}{\underbrace{\|f(x)\|}_{=1}} = f(x), \quad H(x,1) = \frac{g(x)}{\underbrace{\|g(x)\|}_{=1}} = g(x)$$

$\Rightarrow H : f \simeq g$. $\square$

последица Ако је $f : S^n \to S^n$ непр. и нема фиксних тачака, онда је $f \simeq a_{S^n}$ $(a_{S^n}(x) = -x,\ x \in S^n)$.

$\boxed{4.}$ $\quad 2 \nmid n \Rightarrow \mathbb{1}_{S^n} \simeq a_{S^n}$ ← Важи и обрнуто и ради се у алгебарској топологији

решење

$n = 1$:

$H : S^1 \times I \to S^1$

$H(z,t) \overset{\text{def}}{=} e^{i\pi t} \cdot z\,, \quad z \in \mathbb{C}$

$\mathbb{1}_{S^n}$ - ротација за 0°

a_{S^1} - ротација за 180°

$$\left.\begin{array}{l} H(z,0) = z = \mathbb{1}_{S^1}(z) \\ H(z,1) = -z = a_{S^1}(z) \end{array}\right\} \Rightarrow H : \mathbb{1}_{S^1} \simeq a_{S^1}$$

Генерално за $n > 1$, $2 \nmid n$:

$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\underset{z}{\Downarrow} = (z_1, z_2, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}) \quad \text{и} \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_{\frac{n+1}{2}}|^2 = 1$$

$H : S^n \times I \to S^n$ је дато са

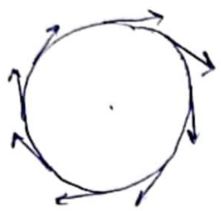
$$H\left((z_1, z_2, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}), t\right) = e^{i\pi t} \cdot (z_1, z_2, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}) \in S^n.$$

$\Rightarrow H : \mathbb{1}_{S^n} \simeq a_{S^n}$. ∎

Т теорема [о чешљању јежа / о чупавој лопти / hairy ball th.]

$2 \mid n \Leftrightarrow$ на сфери S^n не постоји ненулто непрекидно тангентно векторско поље.

Илустрација:



S^1 се може „очешљати"

S^2 се не може „очешљати"

деф ~~дефиниција~~ За $f: X \to Y$ кажемо да је хомотопски тривијално ако је $f \simeq \mathrm{const}$.

СТАВ ~~став~~ Нека су $f: X \to Y$ непр. Тада

$f \simeq \mathrm{const} \iff f$ се може непрекидно проширити на CX.

доказ

f се проширује на CX значи да постоји

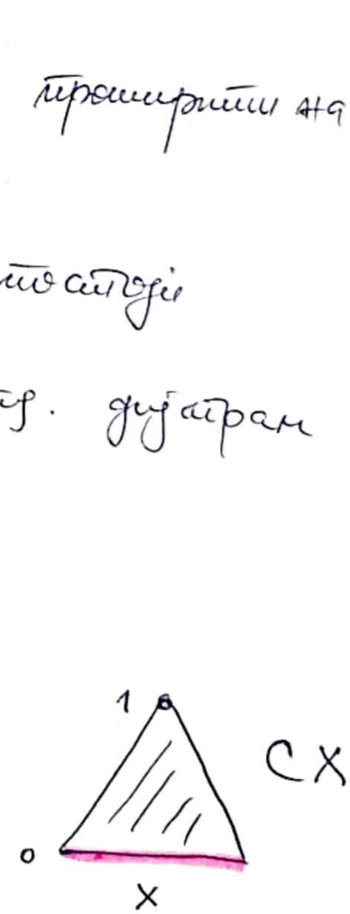
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ CX \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

$F: CX \to Y$ непр. дијаграм комутира.

подсетник: $CX = X \times I /_{(x_1,1) \sim (x_2,1)}$

$X \hookrightarrow CX$

$x \longmapsto [(x,0)]$



$\Rightarrow$: $H : f \simeq c_{y_0}$, $\quad H : X \times I \to Y$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "x \mapsto (x,0)"'] & Y \\ X \times I \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, "H"] & CX \arrow[u, dashed, "F"'] \end{tikzcd}$$

Нека је $F : CX \to Y$ дато са

$F([x,t]) \overset{\text{def}}{=} H(x,t)$

– F добро деф.?

једине проблематичне класе су $[(x_1,1)] = [(x_2,1)]$,

али $H(x_1,1) = y_0 = H(x_2,1)$

– F непрекидно?

$F \circ \pi = H$, π је количничко, H непр. $\overset{\text{лема 1}}{\Longrightarrow}$ F је непр.

$\Rightarrow$ F је тражено пресликавање.

$\Leftarrow$: Нека је $F : CX \to Y$ т.д. $F|_X = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ X \times I \arrow[r, "\pi"] \arrow[ur, dashed, "H"] & CX \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

Дефинишемо $H : X \times I \to Y$

$H(x,t) \overset{\text{def}}{=} (F \circ \pi)(x,t) = F([x,t])$

H је непр.

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) &= (F \circ \pi)([x,0]) = f(x) \\ H(x,1) &= F([x,1]) = y_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \simeq c_{y_0}. \quad \blacksquare$$

последица $X \simeq * \iff \mathbb{1}_X$ се може продужити на CX.

последица $f : S^n \to Y$ је хомотопски тривијално акко $(\exists \bar{f} : D^{n+1} \to Y)\ \bar{f}|_{S^n} = f$. $(CS^n = D^{n+1})$

$\boxed{5.}$ Ако је $f : X \to Y$ непр. и факторише се кроз контрактибилан простор, онда је $f \simeq const$.

решење

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Имамо: $f = h \circ g$ и $Z \simeq *$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, bend left, "\varphi"] & * \arrow[l, bend left, "\psi"] \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \varphi \circ \psi &= \mathbb{1}_* \\ \psi \circ \varphi &\simeq \mathbb{1}_Z \end{aligned}$$

$$f = h \circ g = h \circ \mathbb{1}_Z \circ g \simeq h \circ \underbrace{\psi \circ \varphi}_{= \, const} \circ g = const$$

$\Rightarrow f \simeq const.$ ■

$\boxed{6.}$ Нека је $f : X \to S^n$ непр. и није „на". Тада је $f \simeq const$.

решење Нека је $y_0 \in S^n \setminus f(X)$ и нека је

$\tilde{f} : X \to S^n \setminus \{y_0\}$, $\tilde{f}(x) := f(x)$ (смањили смо кодомен).

Имамо:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & & S^n \\ & S^n \setminus \{y_0\} \simeq \mathbb{R}^n \simeq * \arrow[ur] & \end{tikzcd} \xRightarrow{\text{зад. } 5} f \simeq const$$

II начин: користимо зад. 3 стр. 41.

$$(\forall x \in X) \quad f(x) \neq y_0 = -(-y_0) = -c_{-y_0}(x)$$

$$\overset{\text{зад 3.}}{\Longrightarrow} \quad f \simeq c_{-y_0}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{7.}$ Нека је X тополошки простор, $A \subseteq X$, $H : X \times I \to X$ непр. т.д.

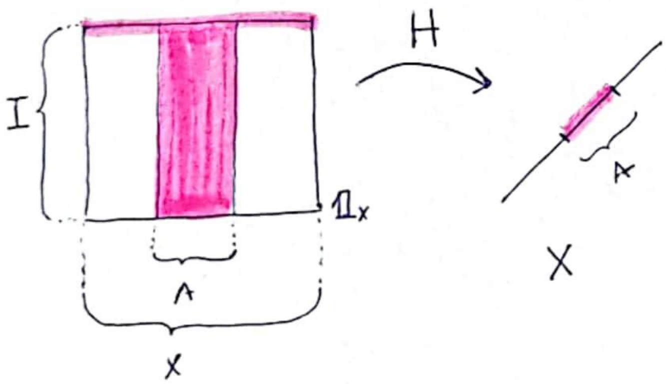
(1) $(\forall x \in X)\ H(x,0) = x$;

(2) $H(X \times \{1\}) \subseteq A$;

(3) $H(A \times I) \subseteq A$.

Доказати да је $i_A : A \to X$ хомотопска еквиваленција.

решење



Тражимо $\varphi : X \to A$ т.д. $\varphi \circ i_A \simeq 1_A$ и $i_A \circ \varphi \simeq 1_X$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "i_A"] & X \arrow[l, bend left, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Нека је $\varphi(x) \overset{\text{деф}}{=} H(x,1) \overset{\text{због (2)}}{\in} A \Rightarrow \varphi : X \to A$

$$\left.\begin{aligned} (i_A \circ \varphi)(x) &= i_A(H(x,1)) = H(x,1) \\ H(x,0) &\overset{(1)}{=} x = \mathbb{1}_X(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow H : \mathbb{1}_X \simeq i_A \circ \varphi$$

Још да ли је $\varphi \circ i_A \simeq \mathbb{1}_A$?

Нека је $G : A \times I \to A$ дато са

$$G(a,t) \overset{def}{=} H(a,t) \in A \quad \text{(због (3))}$$

$$\left.\begin{aligned} G(a,0) &= H(a,0) = a = \mathbb{1}_A(a) \\ G(a,1) &= H(a,1) = \varphi(a) = (\varphi \circ i_A)(a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow G : \mathbb{1}_A \simeq \varphi \circ i_A$$

$\Rightarrow$ i_A јесте хомотопска еквиваленција. ■

Деф дефиниција Нека су $f, g : X \to Y$ и $A \subseteq X$.

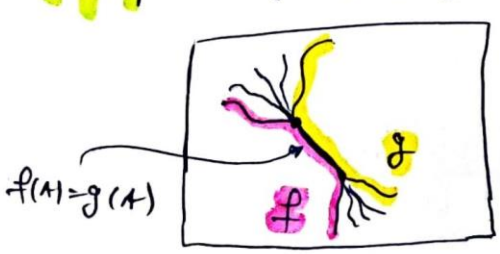
$f \simeq g$ (rel A) $\overset{def}{\iff}$ постоји непрекидно $H : X \times I \to Y$ т.д.

$$(\forall x \in X)\, H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x)$$

$$(\forall a \in A)(\forall s,t \in I)\ H(a,s) = H(a,t).$$

Специјално, $f \simeq g$ (rel A) $\Rightarrow$ $f|_A = g|_A$.

ПР пример $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $f \simeq g$ (rel A)



f се помоћу H непрекидно трансформише до g, али $f(A) = g(A)$ се не помера.

дефиниција $A \subseteq X$ је ретракт од X ако постоји непрекидно $r : X \to A$ т.д. $r|_A = \mathbb{1}_A$, тј. $r \circ i_A = \mathbb{1}_A$, тј. комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "\mathbb{1}_A"'] & X \arrow[d, "r"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

дефиниција $A \subseteq X$ је деформациони ретракт од X ако постоји непрекидно $r : X \to A$ т.д. $r \circ i_A = \mathbb{1}_A$ и $i_A \circ r \simeq \mathbb{1}_X$.

дефиниција $A \subseteq X$ је јаки (строги) деформациони ретракт од X ако постоји непрекидно $r : X \to A$ т.д. $r \circ i_A = \mathbb{1}_A$ и $i_A \circ r \simeq \mathbb{1}_X \ (\mathrm{rel}\ A)$.

став Ако је A деформациони ретракт од X, онда $A \simeq X$.

Oznake: ДР = деформациони ретракт

ЈДР = јаки деформациони ретракт

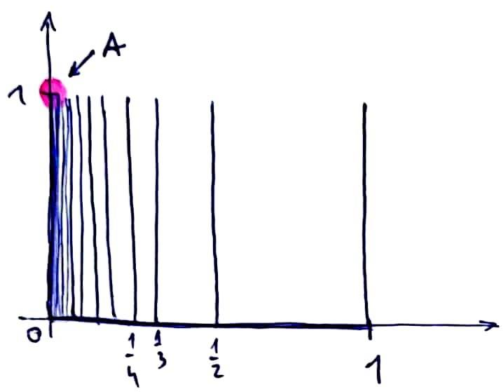
пример $*$ није ДР од S^1, али јесте ретракт од било ког простора (па и S^1).

Очигледно: ЈДР $\Rightarrow$ ДР $\Rightarrow$ ретракт

пример Нека је X тополошки чешаљ:

$$X = \{0\}\times[0,1] \cup [0,1]\times\{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\tfrac{1}{n}\}\times[0,1]$$

и $A = \{(0,1)\}$. Тада је A ДР од X, а није ЈДР од X.



јесте ДР:

H пројектује прво све на x-осу, па у коорд. почетак, па подигне до $(0,1)$

није ЈДР: Не можемо непрекидно „стаковати" X до A, а да A (тј. $(0,1)$), остане у месту. X је превише густ око $(0,1)$ да би могло то да се уради.

$\boxed{8.}$ Доказати да је

(а) D^n ЈДР од $\mathbb{R}^n$; $(\Rightarrow \mathbb{R}^n \simeq D^n \simeq *)$

(б) S^{n-1} ЈДР од $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ $(\Rightarrow S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n\setminus\{0\})$

решење Нека је $r: \mathbb{R}^n \to D^n$ дато са

$$r(x) = \begin{cases} x, & x\in D^n \\ \frac{x}{\|x\|}, & x \in \overline{\mathbb{R}^n\setminus D^n} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} r|_{D^n} \text{ је нейр.} \\ r|_{\overline{\mathbb{R}^n \setminus D^n}} \text{ је нейр.} \end{array}\right\} \Rightarrow r \text{ је нейрекидна}$$

(лема о лепљењу јер су D^n и $\overline{\mathbb{R}^n \setminus D^n}$ затворени)

$r \circ i_{D^n} = \mathbb{1}_{D^n}$ ✓

$i_{D^n} \circ r \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \ (\text{rel } D^n)$?

Како је $\mathbb{R}^n \simeq *$, знамо да је $i_{D^n} \circ r \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$, али нама треба $(\text{rel } D^n)$ па правимо хомотопију:

Нека је $H: \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ дато са

$$H(x,t) = (1-t)\left(i_{D^n} \circ r\right)(x) + tx \quad \text{- нейр.} ✓$$

$H(x,0) = (i_{D^n} \circ r)(x)$

$H(x,1) = x = \mathbb{1}_X(x)$

$$\underset{a \in D^n}{H(a,t)} = (1-t)\underbrace{i_{D^n}(\underbrace{r(a)}_{a})}_{a} + ta = (1-t)a + ta = a$$

$\Rightarrow (\forall s,t \in I) \ H(a,s) = a = H(a,t)$

$\Rightarrow H: i_{D^n} \circ r \simeq \mathbb{1}_X \ (\text{rel } A)$, па D^n јесте ЈДР од $\mathbb{R}^n$.

(б) Нека је $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ дато са

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{- нeпр.}$$

Очигледно $r \circ i_{S^{n-1}} = \mathbb{1}_{S^{n-1}}$.

Нека је $H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ дато са

$$H(x,t) = (1-t)(i_{S^{n-1}} \circ r)(x) + tx. \quad \text{- непр.}$$

$$\left.\begin{aligned} H(x,0) &= (i_{S^{n-1}} \circ r)(x) \\ H(x,1) &= x = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}(x) \\ H(\underset{a \in S^{n-1}}{a}, t) &= a \end{aligned}\right\} \Rightarrow H : i_{S^{n-1}} \circ r \simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$$

$$\Downarrow$$

S^{n-1} је ЈДР од $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ■

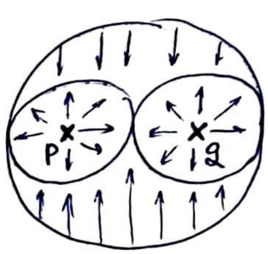
$\boxed{9.}$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\} \simeq ?$, $p \neq q$

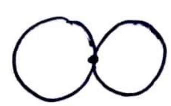
решење

1. корак $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow D^2$ (D^2 је ЈДР од $\mathbb{R}^2$)

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\} \simeq D^2 \setminus \{p, q\}$$

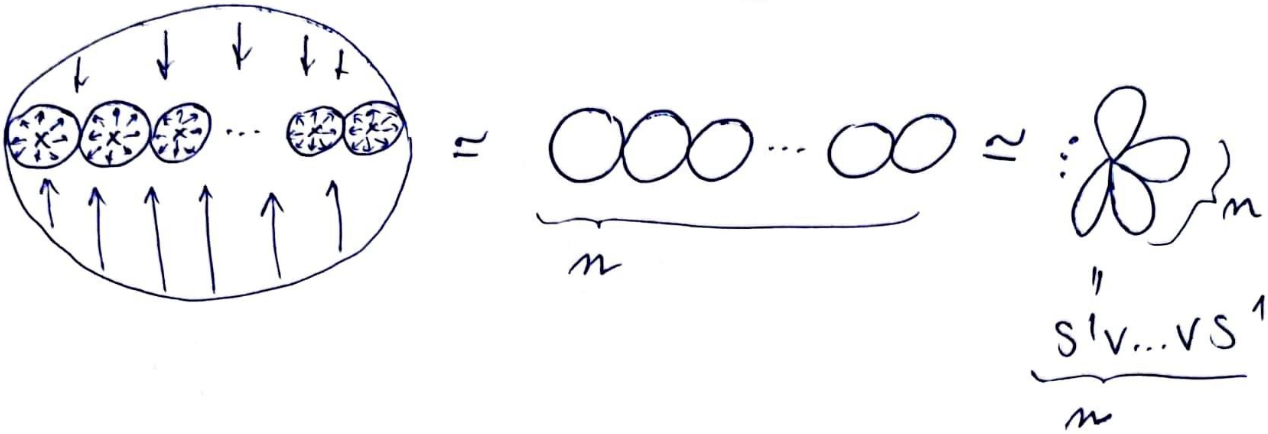
2. корак $D^2 \setminus \{p, q\} \rightsquigarrow S^1 \times S^1$



$\rightsquigarrow$  $= S^1 \vee S^1$

Дакле, $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\} \simeq S^1 \vee S^1$ ■

Слично, $|A| = n \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus A \simeq \underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \ldots \vee S^1}_{n}$



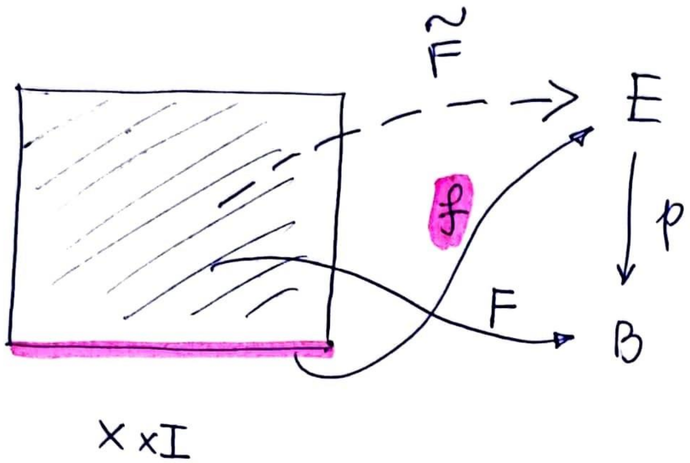
дефиниција: Кажемо да је $p: E \to B$ фибрација, тј. да има својство подизања хомотопије (HLP = homotopy lifting property) ако <u>за сваки</u> тополошки простор X и свака два непр. пресл. F и f тд. следећи дијаграм комутира, тј.

$$
\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & B
\end{tikzcd}
$$

$p \circ f = F \circ i$,

<u>постоји</u> $\tilde{F}: X \times I \to E$ т.д. комутирају оба троугла, тј. $p \circ \tilde{F} = F$ и $\tilde{F} \circ i = f$. (Каже се и да је $\tilde{F}$ решење овог дијаграма).

Ілюстрація:



маємо: $(\forall x\in X)\ \ p(f(x)) = F(x,0)$

хочемо: $p(\tilde{F}(x,t)) = F(x,t)$

$$\tilde{F}(x,0) = f(x)$$