2. $M_g \# N_h \approx N_{2g+h}$, за све $g \in \mathbb{N}_0$, $h \in \mathbb{N}$.

решење Индукција по g:

базa индукције:

$g=0$ ✓

$g=1$: показујемо $M_1 \# N_h \approx N_{2+h}$

индукција по h:

база индукције: $h=1$ ✓ (зад. 1.)

индукцијска хипотеза: $M_1 \# N_h \approx N_{2+h}$

индукцијски корак:

$$M_1 \# N_{h+1} \approx M_1 \# (N_h \# N_1) \approx N_{2+h} \# N_1 \approx N_{2+h+1}$$

индукцијска хипотеза: $M_g \# N_h \approx N_{2g+h}$

индукцијски корак:

$$M_{g+1} \# N_h \approx M_1 \# M_g \# N_h \overset{\text{и.х.}}{\approx} M_1 \# N_{2g+h} \overset{\text{б.и.}}{\approx} N_{2(g+1)+h}.$$

$\blacksquare$

Следујући, $H_{g,h} = M_g \# N_h \approx N_{2g+h}$.

Деф дефиниција Род површи је највеће d т.д. постоји d дисјунктних затворених кривих $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d \subset X$ т.д. је $X \setminus \bigcup_{i=1}^{d} \gamma_i$ повезан.

S^2 је рода 0, T^2 рода 1, M_g рода g, N_h рода h.

Ојлерова карактеристика:

$$\chi(X) = t - i + p$$

бр. темена, бр. ивица, бр. страна

M_g : 1 теме, $2g$ ивица, 1 страна $\Rightarrow$ $\boxed{\chi(M_g) = 2-2g}$

N_h : 1 теме, h ивица, 1 страна $\Rightarrow$ $\boxed{\chi(N_h) = 2-h}$

χ је тополошка инваријанта.

$\boxed{3.}$ Одредити тип површи

(а)  ; (б) 

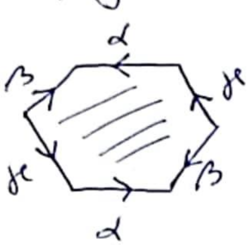
решење

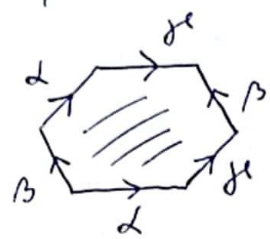
(а) $H_{3,2} \simeq N_{3\cdot 2+2} = N_8$

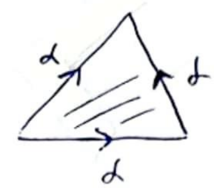
(б) није површ јер тачке на α немају околину:

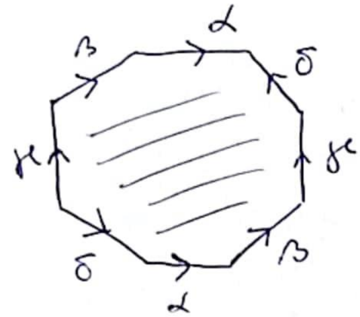
 $\not\simeq \operatorname{int} D^2$. ∎

4. Одредити тип површи

(а) 

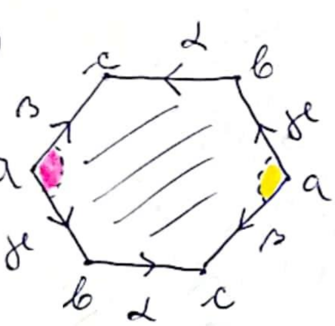
(б) 

(в) 

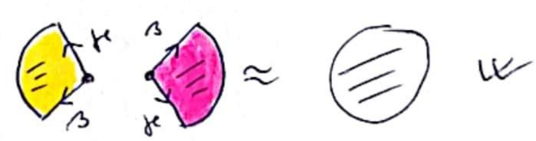
(г) 

решење

Увек прво проверимо да ли је дата површ (да ли свака тачка има околину хомеоморфну отвореном диску).

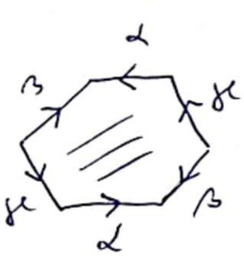
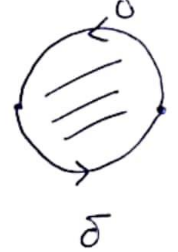
(а) 

околина од a:

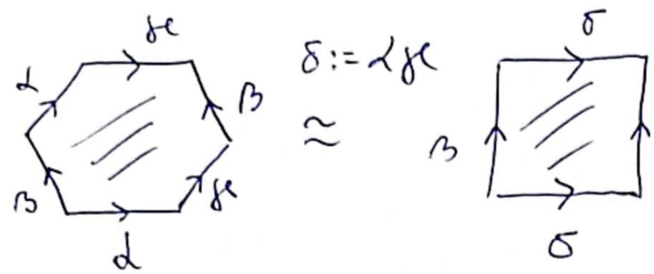


и слично се провери за остале тачке (нећемо то детаљно проверавати већ „у глави").

Која је ово површ?

 $б := аб^{-1}ц$ $\approx$  $= \mathbb{R}P^2$.

(б) јесте површ



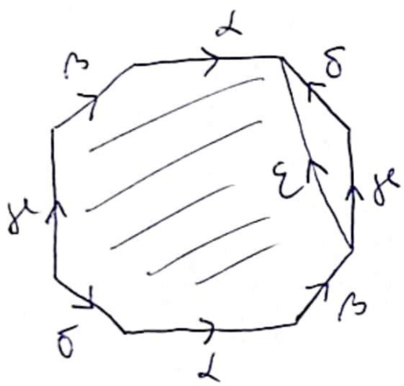
$\simeq T^2$

(в) није површ

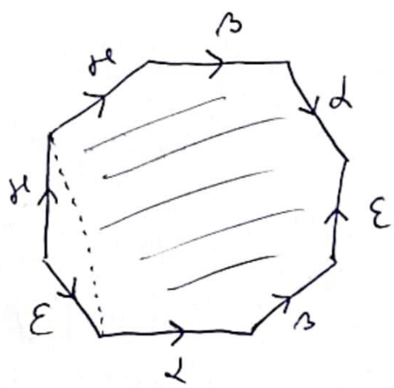
околина од a:

$\not\simeq \operatorname{int} D^2$

(г) јесте површ



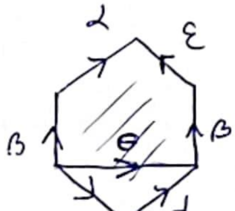
сечено ε $\approx$ лепљено δ



$\simeq$

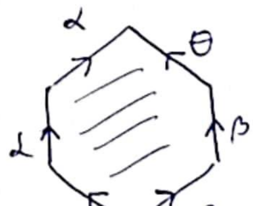
$\simeq$

$\#$



сечено θ $\approx$ лепљено ε

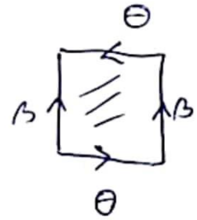
$N_1 \#$



$\simeq$

$\simeq N_1 \#$

$\#$



$\simeq N_1 \# N_1 \# N_2 \simeq N_4$. ■

Дејства група

Нека је G група и X скуп. Дејство G на X можемо дефинисати на више начина.

1. начин: Дејство је хомоморфизам $\varphi : G \to S_X$,

 где је $S_X = \{ f : X \to X \mid f \text{ је бијекција} \}$

 ознака: $\varphi_g := \varphi(g)$

2. начин: Дејство је пресликавање $\mu : G \times X \to X$ т.д.

 (1) $(\forall g_1, g_2 \in G)(\forall x \in X)\ \mu(g_2, \mu(g_1, x)) = \mu(g_2 g_1, x)$

 (2) $(\forall x \in X)\ \mu(e, x) = x \quad (e \in G \text{ неутрал})$

 Пишемо: $\mu(g, x) = g \cdot x$.

Дејство индукује релацију еквиваленције $\sim$ на X:

$$x \sim y \overset{def}{\iff} (\exists g \in G)\ y = g \cdot x$$

Орбита од $x \in X$ је $\Omega_x \overset{def}{=} \{ g \cdot x \mid g \in G \}$ (класе екв.)

Дејство је слободно ако за све $g \in G \setminus \{e\}$ важи

 $(\forall x \in X)\ g \cdot x \neq x$ (тј. φ_g нема фиксних тачака)

Дејство групе G на тополошки простор X је хомоморфизам $\varphi : G \longrightarrow Homeo(X)$

$\boxed{\text{сви хомеоморфизми из } X \text{ у } X}$

$X/G \overset{def}{=} X/_{\sim}$ је простор орбита.

$\boxed{1.}$ Доказати да је са $\mu(k,z) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot z$ дато дејство групе $\mathbb{Z}_n$ на

(а) S^1;

(б) D^2;

и одредити њихове просторе орбита као и да ли су ова дејства слободна.

решење

(а) (1) $\mu(k, \mu(l,z)) = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot \left(e^{i\frac{2l\pi}{n}} \cdot z\right) =$

$$= e^{i\frac{2(k+_n l)\pi}{n}} \cdot z = \mu(k +_n l, z)$$

$+_n$ је сабирање у $\mathbb{Z}_n$

(2) $\mu(0,z) = e^0 \cdot z = z$

$\Rightarrow$ μ јесте дејство.

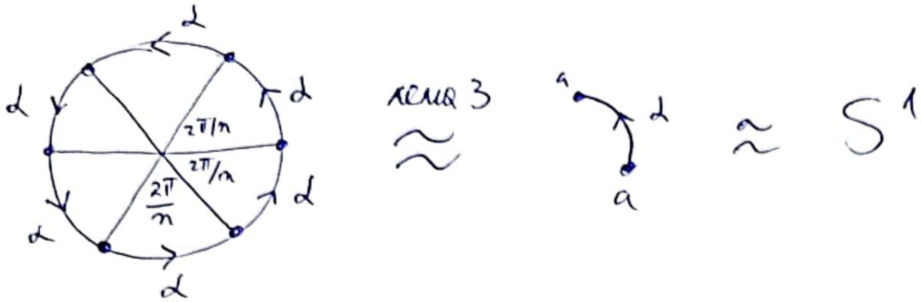
Да ли је слободно?

За $k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, φ_k је ротација за $\frac{2k\pi}{n}$, а

што нема фиксних тачака (јер се ротира S^1).

$\Rightarrow$ јесте слободно.

Шта је $S^1/\mathbb{Z}_n$?



Дакле, $S^1/\mathbb{Z}_n \approx S^1$.

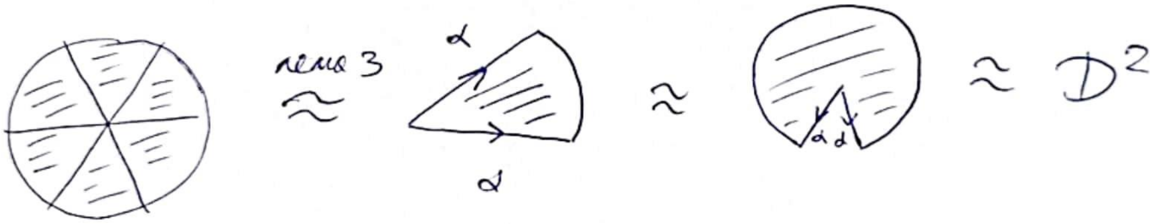
(б) μ јесте дејство (као под (а))

Да ли је слободно?

Свака ротација диска фиксира центар диска, тј.

$(\forall k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\})\ \mu(k, 0) = 0 \Rightarrow$ није слободно.

Шта је $D^2/\mathbb{Z}_n$?



Дакле, $D^2/\mathbb{Z}_n \approx D^2$. ■

2. Нека је $C = S^1 \times [-1,1]$ и $\mu : \mathbb{Z}_2 \times C \to C$ дато са

$\mu(k, (z,t)) = (-1)^k (z,t)$.

Доказати да је μ дејство и одредити $C/\mathbb{Z}_2$.

решење

$\varphi_0 = \mathbb{1}_C$, $\varphi_1 = a_C$ - централна симетрија
(антиподално пресл.)

Да ли је φ хомоморфизам?

$$\varphi(k_1 + k_2)(x) \stackrel{?}{=} (\varphi_{k_1} \circ \varphi_{k_2})(x)$$

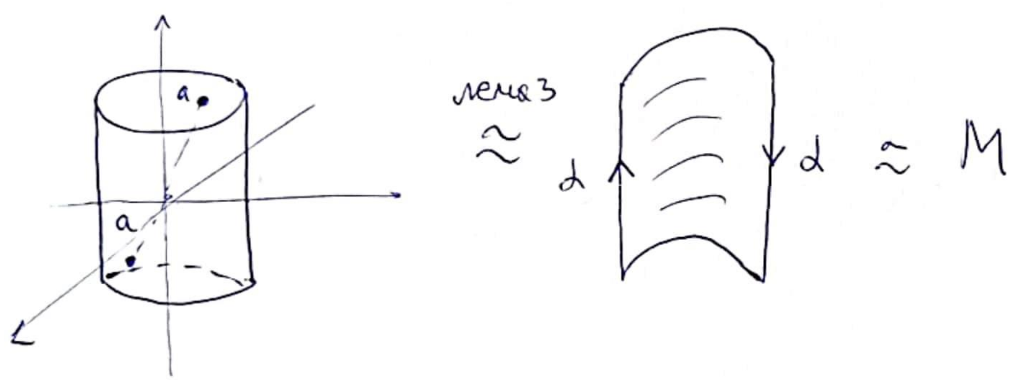
1° $k_1 = 0$ или $k_2 = 0$ ✓

2° $k_1 = k_2 = 1$

$$\varphi(1+1)(x) = \varphi(0)(x) = \mathbb{1}_C(x) = (a_C \circ a_C)(x) = (\varphi_1 \circ \varphi_1)(x) \checkmark$$

$\Rightarrow$ φ јесте дејство.

Шта је $C/\mathbb{Z}_2$?



Дакле, $C/\mathbb{Z}_2 \approx M$. $\square$

$\boxed{3.}$ Нека је p прост, X тополошки простор и $\varphi: X \to X$ хомеоморфизам. Група $\mathbb{Z}_p$ дејствује на X и дејство је дато са $k \longmapsto \varphi^k$, $k \in \mathbb{Z}_p$.

Доказати да је ово дејство слободно ако и само ако φ нема фиксних тачака.

решење Како изгледа дејство:

$$\begin{aligned}
1 &\longmapsto \varphi \\
2 &\longmapsto \varphi \circ \varphi = \varphi^2 \\
3 &\longmapsto \varphi^3 \\
&\vdots \\
p-1 &\longmapsto \varphi^{p-1} \\
0 = p &\longmapsto \varphi^p = \mathbb{1}_X
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$: тривијално важи (по деф. слободног дејства)

$\Longleftarrow$: Показујемо $(\forall k \in \mathbb{Z}_p)$ φ^k нема фиксних тачака

птс. нека φ^k има ф.т. тј. $\varphi^k(x) = x$ за неко $x \in X$ и $k \in \{2, 3, \dots, p-1\}$. Како је p прост, постоји $l \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ т.д. $k \cdot l \equiv_p 1$.

Сада је

$$\varphi(x) = \varphi^{k \cdot l}(x) = \left(\varphi^k\right)^l(x) = \underbrace{\varphi^k(\varphi^k(\dots(\varphi^k(x))))}_{l} = x \ \lightning$$

јер φ нема ф.т. Дакле, дејство је слободно. ■

$\boxed{4.}$ Нека је $\mu : (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са

$$\mu((k,l),(x,y)) = (k+x,\ l+y).$$

Доказати да је μ дејство групе $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ на $\mathbb{R}^2$ и одредити $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

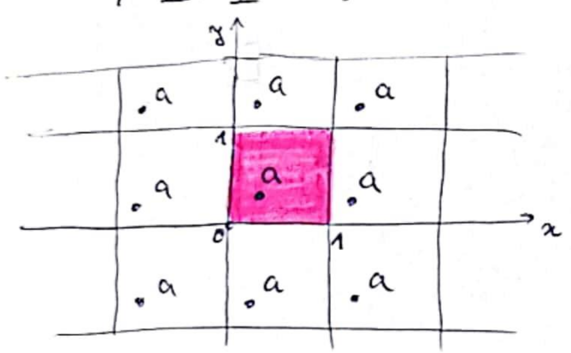
решење $0, i, j, k, l \in \mathbb{Z}$, $x, y \in X$

(1) $\mu\big((i,j), \mu((k,l),(x,y))\big) = \mu\big((i+k, j+l), (x,y)\big)$

(2) $\mu\big((0,0),(x,y)\big) = (x,y)$

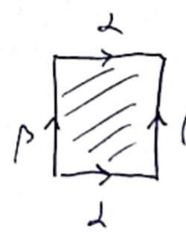
(1) + (2) $\Rightarrow$ јесте дејство (и слободно је)

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = ?$



$\sim$ је рестрикција релације на $[0,1]^2$

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \overset{\text{Лема 3}}{\approx} [0,1]^2/_{\sim} \approx$$

$\approx$ 

$= T^2$ ■

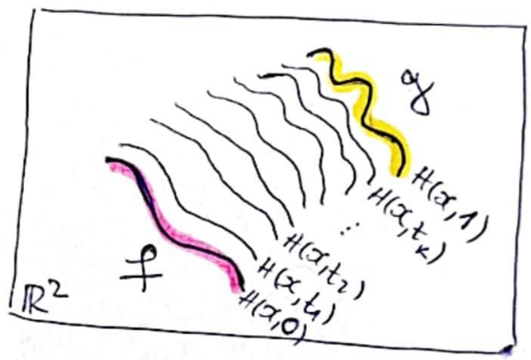
Хомотопија

деф **дефиниција** Нека су $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања. Пресликавање f је хомотопно са g (ознака $f \simeq g$) ако постоји непрекидно $H : X \times I \longrightarrow Y$ т.д.

$$(\forall x \in X) \; H(x,0) = f(x), \; H(x,1) = g(x).$$

$\simeq$ је релација еквиваленције на $C(X,Y)$

пр **пример** $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ тј. f и g су путеви и $f \simeq g$, што записујемо овако:



ови „међупутеви" су $H(x,t)$ за фиксирано $t \in I$ ($H(\cdot,t)$ је пут)

Дакле, хомотопија нам непрекидно „претвара" једну функцију у другу.

с **став** Нека су $f_1, f_2 : X \to Y$, $g_1, g_2 : Y \to Z$, $f_1 \simeq f_2$ и $g_1 \simeq g_2$, онда је $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2$.

деф **дефиниција** Нека су X и Y тополошки простори. X и Y су хомотопски еквивалентни ако постоје $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ т.д. $\varphi \circ \psi \simeq \mathbb{1}_Y$, $\psi \circ \varphi \simeq \mathbb{1}_X$

Тада пишемо $X \simeq Y$.

- $X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$ (обрнуто не важи, нпр. $\mathbb{R} \simeq *$)