У наставку се налажи све о ћелијским комплексима из Банетових белешки за курс Алгебарска топологија. Нема потребе све читати (мада није забрањено), довољно је погледати примере на странама 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10. Овај додатак је више информативног типа да се боље савладају ћелијски комплекси и неће нам бити потребан на вежбама.

III Ћелијски комплекси, ћелијска хомологија

III.1. Ћелијски комплекси

Дефинисаћемо ћелијске комплексе прво геометријски, на начин помоћу којег се „види" шта су то ћелијски комплекси. Индуктивно дефинишемо просторе X^n, $n\in\mathbb{N}_0$:

X^0 – дискретан топол. простор. X^0 – 0-скелетон ћелијског комплекса X

Тачке овог простора називамо 0-ћелијама.

$n\geq 1$ Пп. да је дефинисан X^{n-1} и нека је $\{\varphi_\alpha^n : S^{n-1}\to X^{n-1}\}_{\alpha\in A_n}$ нека дата фамилија непрекидних пресликавања.

$$\bigsqcup_{\alpha\in A_n}\varphi_\alpha^n : \bigsqcup_{\alpha\in A_n} S^{n-1}_{(\alpha)} \longrightarrow X^{n-1}$$

$$\begin{tikzcd} & \bigsqcup_{\alpha\in A_n} S^{n-1}_{(\alpha)} \arrow[dr, "\bigsqcup_{\alpha\in A_n}\varphi_\alpha^n"] & \\ S^{n-1} \arrow[ur, "k_{\alpha_0}"] \arrow[rr, "\varphi^n_{\alpha_0}"] & & X^{n-1} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{X^n := \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \cup_{\bigsqcup_{\alpha\in A_n}\varphi_\alpha^n} X^{n-1}}$$

X^n – n-скелетон ћелијског комплекса X

Дакле, на X^{n-1} лепимо дискове $D^n_{(\alpha)}$, $\alpha\in A_n$, помоћу пресликавања φ^n_α, $\alpha\in A_n$, која границе $\partial D^n_{(\alpha)} = S^{n-1}_{(\alpha)}$, $\alpha\in A_n$, некако идентификују с тачкама у X^{n-1}. Слике унутрашности дискова $D^n_{(\alpha)}$, $\alpha\in A_n$, при природној сурјекцији $\pi_n : \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} \twoheadrightarrow X^n$ називамо (отвореним) n-ћелијама и означавамо их са e^n_α. Дакле, $e^n_\alpha := \pi_n(\mathring{D}^n_{(\alpha)})$, $\alpha\in A_n$.

Приметимо да је, као скуп, $X^n = X^{n-1} \sqcup \bigsqcup_{\alpha\in A_n} e^n_\alpha$ (1) (као што је и уобичајено, X^{n-1} је идентификован са одговарајућим потпростором од X^n).

φ^n_α – функција лепљења ћелије e^n_α, $\alpha\in A_n$

Овај поступак лепљења ћелија можемо да завршимо након коначно много корака и да добијемо <u>коначно-димензион ћелијски комплекс</u> (или <u>CW-комплекс</u>) $\underline{X := X^m}$, $m \in \mathbb{N}_0$. $\underline{\dim X = m}$.

Друга могућност је да поступак индуктивно изведемо за све $n \in \mathbb{N}_0$ и да добијемо <u>бесконачно-димензион ћелијски комплекс</u> (<u>или CW-комплекс</u>) $\underline{X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^n}$ <u>као скуп</u>, док топологију дефинишемо на сл. начин:

$$\mathcal{T}_X := \left\{ A \subseteq X \;\middle|\; A \cap X^n \in \mathcal{T}_{X^n} \text{ за све } n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \cdots \subseteq X^n \subseteq X^{n+1} \subseteq \cdots$$

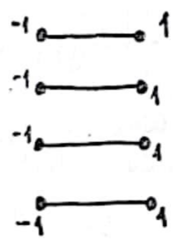
Дакле, $A \subseteq X$ је отворен (затворен) у X акко је $A \cap X^n$ отворен (затворен) у X^n за све $n \in \mathbb{N}_0$.

<u>Примери:</u> $\boxed{1)}$ X^0: $\quad a \quad b \quad c$ <u>три 0-ћелије</u>

<u>четири 1-ћелије</u>: ф-је лепљења $\varphi_i : S^0 \to X^0$, $i = \overline{1,4}$

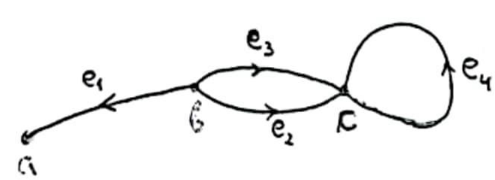
$\varphi_1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, $\varphi_2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$, $\varphi_3 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$, $\varphi_4 : \Big(\begin{matrix} -1 \\ c \end{matrix}$

$\coprod_{i=1}^{4} D^1_{(i)}$:



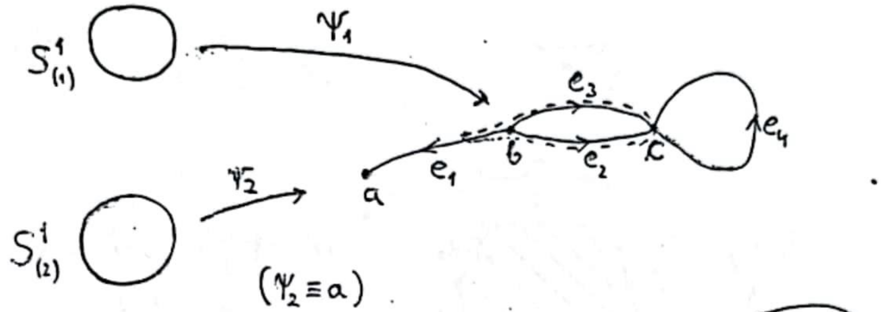
$a \quad b \quad c \quad : X^0$

X^1:

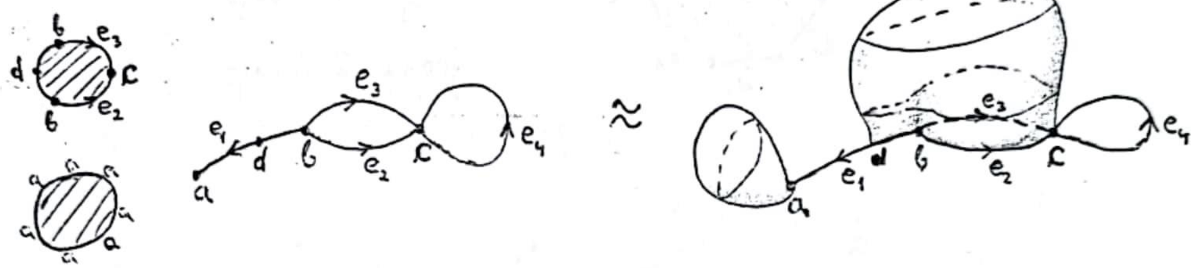


(Једнодимензионе CW-комплексе називамо и графовима.)

две 2-ћелије: фје лепљења $\psi_i : S^1 \to X^1$, $i=1,2$



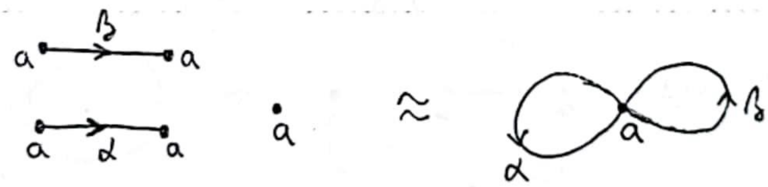
X^2:



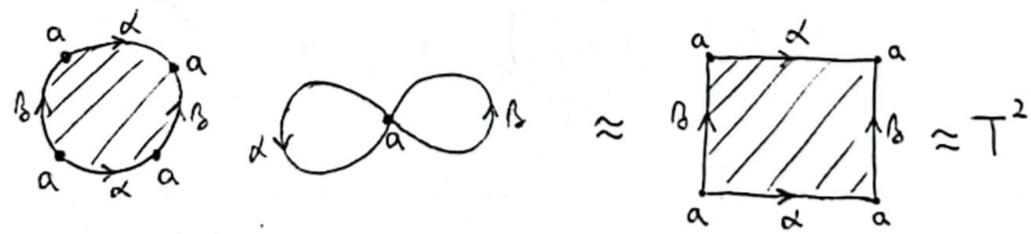
$X = X^2$ дводимензиони CW-комплекс с три 0-ћелије, четири 1-ћелије и две 2-ћелије

$\boxed{2)}$ X^0: $\cdot a$

X^1:



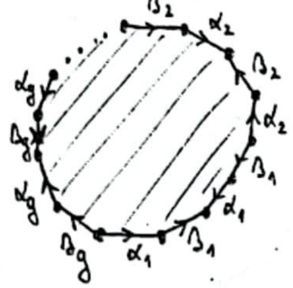
$X = X^2$:



Дакле, X је један CW-комплекс хомеоморфан торусу. Тада се каже да је ово једна ћелијска декомпозиција (или CW-декомпозиција) торуса. У којој имамо једну 0-ћелију, две 1-ћелије и једну 2-ћелију.

На сличан начин се могу добити CW-декомпозиције свих затворени површи:

M_g :

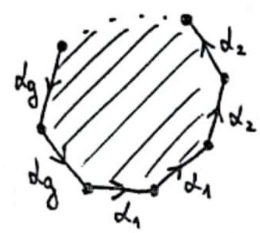


једна 0-ћелија

$2g$ 1-ћелија

једна 2-ћелија

N_g :



једна 0-ћелија

g 1-ћелија

једна 2-ћелија

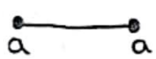
$\boxed{3)}$ X^0 : $\overset{\bullet}{a}$

$\underline{\underline{n \in \mathbb{N}}}$ $X^{n-1} = X^{n-2} = \cdots = X^1 = X^0$

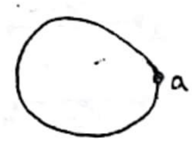
$\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X^0 = \{a\} = X^{n-1}$

$$X := X^n = D^n \cup_\varphi \{a\} \approx D^n / S^{n-1} \approx S^n$$

Нпр. за $\underline{n=1}$:

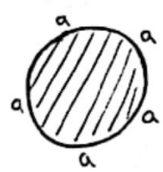


$\overset{\bullet}{a}$ $\approx$



$\approx S^1$;

за $\underline{n=2}$:



$\overset{\bullet}{a}$ $\approx$

$\approx S^2$.

Дакле, сфера S^n има ћелијску декомпозицију од само две ћелије – једна је димензије 0, а друга димензије n. То често записујемо и овако:

$$S^n = e^0 \cup e^n.$$

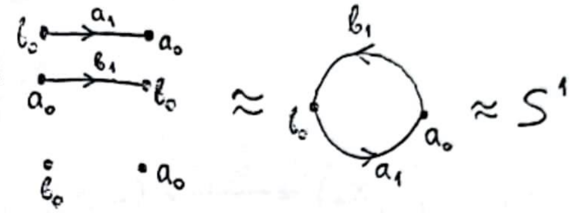
Иначе, сваки CW-комплекс је, <u>као скуп</u>, дисјунктна унија својих (отворен ћелија (в. (у) на [illegible] [illegible]).

$\boxed{4)}$ X^0: $\overset{\bullet}{b_0}$ $\overset{\bullet}{a_0}$ $\approx S^0$ ...

Нека су $\varphi_{a_1}, \varphi_{b_1} : S^0 \to X^0$ неки хомеоморфизми, на пример

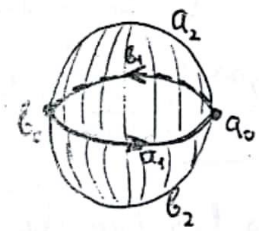
$$\varphi_{a_1} : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b_0 & a_0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{b_1} : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

$X^1 = \left(D^1_{(a_1)} \sqcup D^1_{(b_1)}\right) \cup_{\varphi_{a_1} \sqcup \varphi_{b_1}} X^0$:



$\varphi_{a_2}, \varphi_{b_2} : S^1 \to X^1$ хомеоморфизми

$X^2 = \left(D^2_{(a_2)} \sqcup D^2_{(b_2)}\right) \cup_{\varphi_{a_2} \sqcup \varphi_{b_2}} X^1$:



$\approx S^2$

$\vdots$

$X^{n-1} \approx S^{n-1}$

$\varphi_{a_n}, \varphi_{b_n} : S^{n-1} \to X^{n-1}$ хомеоморфизми (неки)

$$X^n = \left(D^n_{(a_n)} \sqcup D^n_{(b_n)}\right) \cup_{\varphi_{a_n} \sqcup \varphi_{b_n}} X^{n-1} \approx S^n$$

На овај начин смо добили још једну CW-декомпозицију сфере S^n. Она има укупно $\underline{\underline{2n+2}}$ ћелије, по две у свакој од димензија $0, 1, 2, \dots, n$.

Дакле, исти тополошки простор може имати више CW-декомпозиција.

Штавише, и CW-декомпозиција сфере S^n из овог примера није једнозначно одређена, јер вршимо избор хомеоморфизама (ф-ја лепљења) φ_{a_k} и φ_{b_k}, $1 \le k \le n$. Неки други хомеоморфизми дају другу CW-декомпозицију, која такође има две ћелије у димензијама $0, 1, 2, \dots, n$ [illegible]

Поступак из овог примера можемо (индуктивно) да наставимо и да добијемо бесконачно-димензион CW-комплекс $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} X^n$. Тада је за свак. $n \in \mathbb{N}_0$ $X^n \approx S^n$, а може се показати и да је $\boxed{X \approx S^\infty.}$

S^∞ је <u>бесконачно-димензиона сфера</u>, <u>јединична сфера у $\mathbb{R}^\infty$</u>:

$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n \quad , \qquad \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \cdots$$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; (\forall_{k>n}) \ x_k = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \xleftrightarrow{\ \approx\ } (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty$$

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^\infty} := \left\{ U \subseteq \mathbb{R}^\infty \;\middle|\; U \cap \mathbb{R}^n \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n} \text{ за све } n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$S^\infty := \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 1 \right\} \text{ с топологијом наслеђеном од } \mathbb{R}^\infty.$$

Следећу лему смо већ (имплицитно) користили у досадашњим примерима, а користићемо је и у наредним.

<u>Лема 62:</u> Нека је $A \subseteq X$ и $f: A \to Y$ непрекидно. Уочимо релацију еквиваленције $\sim$ на простору X одређену са: за $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \sim a_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} f(a_1) = f(a_2)$$

(тачке из $X \setminus A$ су у релацији само са собом). Ако је f количничко, онда је

$$X \cup_f Y \approx X/_\sim .$$

Δ: Нека су $\pi: X \sqcup Y \longrightarrow X \cup_f Y$ и $q: X \longrightarrow X/_\sim$ природне сурјекције, а $i_X: X \hookrightarrow X \sqcup Y$ природна инклузија.

Јасно је да за тачке $x_1, x_2 \in X$ важи еквиваленција:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, "q"'] & X \sqcup Y \arrow[d, "\pi"] \\ X/\sim & X \sqcup_f Y \end{tikzcd}$$

$$q(x_1) = q(x_2) \iff \pi(x_1) = \pi(x_2)$$
$$\iff \pi(i_X(x_1)) = \pi(i_X(x_2)).$$

Зато је довољно да докажемо да је $\pi \circ i_X$ количничко пресликавање (за q знамо да јесте количничко). Наиме, тада је

$$X \sqcup_f Y \approx X/_{\pi \circ i_X} = X/q = X/\sim .$$

$\underline{\pi \circ i_X \text{ је непрекидно}}$. ✓

f је „на" $\Longrightarrow$ $\underline{\pi \circ i_X \text{ је „на"}}$. ✓

$W \subseteq X \sqcup_f Y$ т. д. је $(\pi \circ i_X)^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$

$\pi^{-1}(W) = U \sqcup V$, где је $U = \pi^{-1}(W) \cap X = i_X^{-1}(\pi^{-1}(W)) = (\pi \circ i_X)^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$

$V = \pi^{-1}(W) \cap Y$.

Тада је $U \cap A = f^{-1}(V)$.

$\boxed{\subseteq:}$ $\underline{a \in A \cap U}$
$\Rightarrow \pi(f(a)) = \pi(a) \in W$
$\Rightarrow f(a) \in \pi^{-1}(W) \cap Y = V$
$\Rightarrow \underline{a \in f^{-1}(V)}$. ✓

$\boxed{\supseteq:}$ $\underline{a \in f^{-1}(V)}$ $(\Rightarrow a \in A)$
$\Rightarrow f(a) \in V \subseteq \pi^{-1}(W)$
$\Rightarrow \pi(a) = \pi(f(a)) \in W$
$\Rightarrow a \in \pi^{-1}(W) \cap X = U$
$\Rightarrow \underline{a \in U \cap A}$. ✓

$$f^{-1}(V) = A \cap \underset{\in \mathcal{T}_X}{U} \in \mathcal{T}_A$$

$$\xRightarrow{f \text{ количничко}} V \in \mathcal{T}_Y$$

$$\Longrightarrow \pi^{-1}(W) = U \sqcup V \in \mathcal{T}_{X \sqcup Y}$$

$$\xRightarrow{\pi \text{ количничко}} W \in \mathcal{T}_{X \sqcup_f Y}. \quad \blacksquare$$

Настављамо с примерима CW-комплекса.

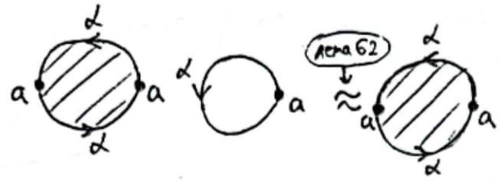
5)

X^0 :  $\approx \mathbb{RP}^0$

$p : S^0 \longrightarrow X^0$

X^1 :  $\approx \mathbb{RP}^1$

$p : S^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^1 \;, \quad p(x) = [x] = \{x, -x\} \in \mathbb{RP}^1 \;, \; x \in S^1$

$X^2 = D^2 \cup_{\tilde{p}} X^1$:  $\approx \mathbb{RP}^2$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{p}"'] & \mathbb{RP}^1 \arrow[d, "\approx h"] \\ & X^1 \end{tikzcd}$$

неки хомеоморфизам

$p : S^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2 \;, \quad p(x) = [x]$

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{p}"'] & \mathbb{RP}^2 \arrow[d, "\approx"] \\ & X^2 \end{tikzcd}$$

$X^3 = D^3 \cup_{\tilde{p}} X^2 \overset{\text{лема 62}}{\approx} D^3 /_{x \sim -x,\; x \in S^2} \approx \mathbb{RP}^3$

$\vdots$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{p}"'] & \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[d, "\approx"] \\ & X^{n-1} \end{tikzcd} \quad , \quad p(x) = [x]$$

$X^n = D^n \cup_{\tilde{p}} X^{n-1} \overset{\text{лема 62}}{\approx} D^n /_{x \sim -x,\; x \in S^{n-1}} \approx \mathbb{RP}^n$

Дакле, добили смо CW-декомпозицију пројективног простора $\mathbb{RP}^n$ с по једном ћелијом у свакој од димензија $0, 1, 2, \dots, n$;

$$\mathbb{RP}^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n .$$

Настављањем овог поступка добијамо бесконачно-димензион CW-комплекс

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} X^n \approx \underline{\underline{\mathbb{R}P^\infty}} = (\mathbb{R}^\infty \setminus \{0\})/_{x\sim\lambda x,\ \lambda\in\mathbb{R}} \approx S^\infty/_{x\sim -x}.$$

бесконачно-димензиони реални пројективни простор

На примере 4) и 5) вратићемо се нешто касније, кад ћемо их много детаљније обрадити и успоставити везу између њих.

$\boxed{6)}$ На сличан начин као у претходном примеру добијамо CW-декомпозицију комплексног пројективног простора

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}/_{z\sim\lambda z,\ \lambda\in\mathbb{C}} \approx S^{2n+1}/_{z\sim\lambda z,\ \lambda\in S^1}$$

За то нам треба следећа чињеница:

Ако је $D^{2n}\subset\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$ јединични диск, онда је

$$\boxed{D^{2n}/_{w\sim\lambda w,\ w\in S^{2n-1},\ \lambda\in S^1} \approx \mathbb{C}P^n.} \qquad \text{(КПП)}$$

(Ово је аналогон чињеници $D^n/_{x\sim -x,\ x\in S^{n-1}} \approx \mathbb{R}P^n$.)

Δ: $f: D^{2n}\longrightarrow S^{2n+1}$, $f(w) := (\underset{D^{2n}\subset\mathbb{C}^n}{w}, \sqrt{1-\|w\|^2})$

$p: S^{2n+1}\longrightarrow \mathbb{C}P^n$ природна сурјекција.

$$\begin{tikzcd} D^{2n} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g"'] & S^{2n+1} \arrow[d, "p"] \\ & \mathbb{C}P^n \end{tikzcd}$$

Докажимо да је $g := p\circ f$ количничко.

g је непрекидно. ✓

g је „на": $a\in\mathbb{C}P^n$ произв., $a = p(z) = [z]$ за неко $z=(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})\in S^{2n+1}$

1° $\underline{z_{n+1}=0}$

$$w := (z_1, z_2, \dots, z_n) \in D^{2n} \quad , \quad \|w\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = \|z\|^2 = 1 \quad (\text{дакле, } w \in S^{2n-1})$$

$$\Rightarrow \underline{g(w)} = [(w, \sqrt{1-\|w\|^2})] = [z_1, z_2, \dots, z_n, 0] = [z] = \underline{a}. \checkmark$$

2° $\underline{z_{n+1} \neq 0}$ $\Rightarrow \bar{z}_{n+1} \neq 0 \quad , \quad \dfrac{\bar{z}_{n+1}}{\underbrace{|\bar{z}_{n+1}|}_{=|z_{n+1}|}} \in S^1$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 + |z_{n+1}|^2 = \|z\|^2 = 1 \quad \Rightarrow |z_{n+1}| = \sqrt{1 - |z_1|^2 - \dots - |z_n|^2}$$

$$w := \frac{\bar{z}_{n+1}}{|z_{n+1}|} \cdot (z_1, z_2, \dots, z_n) \quad , \quad \|w\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \le 1 \quad \Rightarrow \underline{w \in D^{2n}} \checkmark$$

$$\underline{g(w)} = [(w, \sqrt{1-\|w\|^2})] = \left[\frac{\bar{z}_{n+1}}{|z_{n+1}|} \cdot (z_1, z_2, \dots, z_n), |z_{n+1}|\right]$$

$$= \left[\underbrace{\frac{\bar{z}_{n+1}}{|z_{n+1}|}}_{\in S^1} \cdot \Big(z_1, z_2, \dots, z_n, \underbrace{\frac{|z_{n+1}|^2}{\bar{z}_{n+1}}}_{= z_{n+1}}\Big)\right] = [z] = \underline{a}. \checkmark$$

<u>g је затворено</u>, јер је D^{2n} компактан, а CP^n Хаусдорфов простор.

$$\Rightarrow g \text{ је количничко} \quad \Rightarrow \boxed{D^{2n}/g \approx CP^n}.$$

Остаје да се уверимо да $\overbrace{}^{\text{за } w, w' \in D^{2n}}$ важи еквиваленција:

$$g(w) = g(w') \iff (w, w' \in S^{2n-1} \text{ и } w' = \lambda w \text{ за неко } \lambda \in S^1) \lor w = w'$$

$$\Rightarrow) \quad [(w, \sqrt{1-\|w\|^2})] = [(w', \sqrt{1-\|w'\|^2})] \quad \Rightarrow (w', \sqrt{1-\|w'\|^2}) = \lambda \cdot (w, \sqrt{1-\|w\|^2})$$

за неко $\underline{\lambda \in S^1}$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{1-\|w'\|^2} = \lambda \cdot \sqrt{1-\|w\|^2}}$$

1° $\underline{\|w\|=1}$ $\Rightarrow \underline{\|w'\|=1}$, $\underline{w' = \lambda w}$ $\checkmark$

2° $\underline{\|w\|<1}$ $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \Rightarrow$ $\lambda = \|\lambda \cdot (w, \sqrt{1-\|w\|^2})\| = \|(w', \sqrt{1-\|w'\|^2})\|$

$= 1 \Rightarrow \underline{w = w'}$ $\checkmark$

$\Leftarrow)$ $w, w' \in S^{2n-1}$, $w' = \lambda w$ за неко $\lambda \in S^1$

$$g(w') = g(\lambda w) = \left[\left(\lambda w, \sqrt{1 - \underbrace{\|\lambda w\|^2}_{=1}}\right)\right] = \left[\lambda \cdot (w, 0)\right] = \left[(w,0)\right] = g(w). \quad \checkmark$$

Овим је доказана чињеница (КПП). $\blacksquare$

Сад правимо CW-декомпозицију комплексног пројективног простора.

$X^0 := * \approx \mathbb{C}P^0$

$X^1 := X^0$

$p : S^1 \longrightarrow X^0 = X^1$

$$X^2 := D^2 \cup_p X^1 \overset{\text{лема 62}}{\approx} \underset{\approx\, S^2}{D^2/S^1} \overset{(\text{КПП})}{\approx} \mathbb{C}P^1$$

$X^3 := X^2$

$p : S^3 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ природна сурјекција $(p(z) = [z])$

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{p}"'] & \mathbb{C}P^1 \arrow[d, "\approx"] \\ & X^3 \end{tikzcd}$$

неки хомеоморфизам

$$X^4 := D^4 \cup_{\tilde{p}} X^3 \overset{\text{лема 62}}{\approx} D^4/_{w \sim \lambda w,\ w \in S^3,\ \lambda \in S^1} \overset{(\text{КПП})}{\approx} \mathbb{C}P^2$$

$X^5 := X^4$

$\vdots$

$X^{2n-2} \approx \mathbb{C}P^{n-1}$, $\quad p : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$, $\quad p(z) = [z]$

$X^{2n-1} := X^{2n-2}$

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{p}"'] & \mathbb{C}P^{n-1} \arrow[d, "\approx"] \\ & X^{2n-1} \end{tikzcd}$$

$$X^{2n} := D^{2n} \cup_{\tilde{p}} X^{2n-1} \overset{\text{лема 62}}{\approx} D^{2n}/_{w \sim \lambda w,\ w \in S^{2n-1},\ \lambda \in S^1} \overset{(\text{КПП})}{\approx} \mathbb{C}P^n$$

Дакле, $\mathbb{C}P^n$ има ћелијску декомпозицију са по једном ћелијом у свим парним димензијама од 0 до $2n$:

$$\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}.$$

Настављањем процеса индуктивно добијамо CW-декомпозицију <u>бесконачно-димензионог комплексног пројективног простора</u>:

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} X^n \approx \underline{\underline{\mathbb{C}P^\infty}} = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} /_{z\sim\lambda z,\ \lambda\in\mathbb{C}} \approx S^\infty /_{z\sim\lambda z,\ \lambda\in S^1}.$$

Вратимо се сада општем разматрању CW-комплекса, које смо дефинисали индуктивно:

X^0 - дати дискретни топ. простор

$\{\varphi^1_\alpha : S^0 \to X^0\}_{\alpha\in A_1}$ - дата фамилија непрек. пресликавања

$X^1 := \bigsqcup_{\alpha\in A_1} D^1_{(\alpha)} \cup_{\bigsqcup_{\alpha\in A_1}\varphi^1_\alpha} X^0$

$\vdots$

Имамо X^{n-1} и дату фамилију непрек. пресл. $\{\varphi^n_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}\}_{\alpha\in A_n}$.

$X^n := \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \cup_{\bigsqcup_{\alpha\in A_n}\varphi^n_\alpha} X^{n-1}$

$\vdots$

$\pi_n : \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} \twoheadrightarrow X^n$ природна пројекција, $X^{n-1} := \pi_n(X^{n-1}) \subseteq X^n$

$$\pi_n^{-1}(X^{n-1}) = \bigsqcup_{\alpha\in A_n} S^{n-1}_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} \in \mathcal{F}_{\bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1}} \Rightarrow \boxed{X^{n-1} \in \mathcal{F}_{X_n}},\ \underline{n\in\mathbb{N}}\ \underline{(*)}$$

$\vdots$

$X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} X^n$, $\underline{A\subseteq X}$, $A\in\mathcal{F}_X \overset{\text{def}}{\iff} A\cap X^n \in \mathcal{F}_{X^n}$ за све $n\in\mathbb{N}_0$

$(*) \Rightarrow \forall m > n \quad X^n \in \mathcal{F}_{X^m}$

$$\Rightarrow \quad X^n \cap X^m = \begin{cases} X^n, & m \geq n \\ X^m, & m \leq n \end{cases} \in \mathcal{F}_{X^m} \quad \text{за све } m \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{X^n \in \mathcal{F}_X}, \ \underline{n \in \mathbb{N}_0} \qquad \underline{(\text{НС}3)}$$

За дато $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_0 \in A_n$ уочимо композицију $i_n \circ \pi_n \circ l_{\alpha_0} : D^n \longrightarrow X$ (и означимо је са $\Phi^n_{\alpha_0}$), где су l_{α_0} и i_n инклузије. Често ћемо и композицију $\pi_n \circ l_{\alpha_0}$, тј. $\Phi^n_{\alpha_0}$ с кодоменом суженим на X^n, означавати са $\phi^n_{\alpha_0}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \bigsqcup\limits_{\alpha \in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} \arrow[d, "\pi_n"] \\
D^n \arrow[ur, "l_{\alpha_0}"] \arrow[r, dashed, "\phi^n_{\alpha_0}"] \arrow[dr, dashed, "\Phi^n_{\alpha_0}"'] & X^n \arrow[d, "i_n"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

Знамо да је $\phi^n_{\alpha_0}(\mathring{D}^n) = \pi_n(\mathring{D}^n_{(\alpha_0)}) = e^n_{\alpha_0}$, док је $\phi^n_{\alpha_0}\big|_{S^{n-1}} = \varphi^n_{\alpha_0}$ (с тим да кодомен рестрикције $\phi^n_{\alpha_0}|_{S^{n-1}}$ сузимо на X^{n-1}). Докажимо да $\phi^n_{\alpha_0}$ хомеоморфно пресликава $\mathring{D}^n$ на $e^n_{\alpha_0}$, тј. да је $h_{\alpha_0} := \phi^n_{\alpha_0}\big|_{\mathring{D}^n} : \mathring{D}^n \to e^n_{\alpha_0}$ хомеоморфизам.

$\underline{h_{\alpha_0} \text{ је непрекидна бијекција.}}$ ✓

$$\underline{V \in \mathcal{T}_{\mathring{D}^n}}, \quad \pi_n^{-1}(h_{\alpha_0}(V)) = V_{(\alpha_0)} \in \mathcal{T}_{\mathring{D}^n_{(\alpha_0)}} \subset \mathcal{T}_{D^n_{(\alpha_0)}} \subset \mathcal{T}_{\bigsqcup\limits_{\alpha \in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1}}$$

$\mathring{D}^n_{(\alpha_0)} \in \mathcal{T}_{D^n_{(\alpha_0)}}$ $\qquad$ $D^n_{(\alpha_0)} \in \mathcal{T}_{\bigsqcup\limits_{\alpha \in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1}}$

$$\Rightarrow h_{\alpha_0}(V) \in \mathcal{T}_{X^n}, \ h_{\alpha_0}(V) \subseteq e^n_{\alpha_0} \subset X^n$$

$$\Rightarrow \underline{h_{\alpha_0}(V) \in \mathcal{T}_{e^n_{\alpha_0}}} \qquad \Rightarrow \underline{h_{\alpha_0} \text{ је отворено}} \ ✓$$

$$\Rightarrow \underline{h_{\alpha_0} \text{ је хомеоморфизам.}} \ ✓$$

Дакле, свака (отворена) n-ћелија је хомеоморфна отвореном диску $\mathring{D}^n$

Ако у доказу да је h_{α_0} отворено ставимо $V := \mathring{D}^n$ видимо да

(**) $\boxed{e^n_{\alpha_0} \in \mathcal{T}_{X^n}}$, за произвољно $\alpha_0 \in A_n$, и произв. $n \in \mathbb{N}_0$.

За $n=0$ и 0-ћелију $e^0_{\alpha_0} \in X^0$ дефинишемо $\Phi^0_{\alpha_0}$ као одговарајућу инклузију

$$\Phi^0_{\alpha_0} : \underset{\substack{\shortparallel \\ *}}{D^0} \hookrightarrow X^0. \qquad (\alpha_0 \in A_0,\ X^0 = \{e^0_\alpha \mid \alpha \in A_0\})$$

Фју $\Phi^n_\alpha : D^n \to X^n$ (односно $\Phi^n_\alpha : D^n \to X$) називамо карактеристичном функцијом ћелије e^n_α, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in A_n$.

Пре него што дамо и другу дефиницију CW-комплекса (еквивалентну овој првој, геометријској), наведимо још једну особину CW-комплекса (дефинисаних на овај први начин).

$$X^0 = \bigsqcup_{\alpha \in A_0} e^0_\alpha$$

(У) с листа $\boxed{HG}$ $\xrightarrow{\text{индукцијом}}$ $X^n = \bigsqcup_{k \le n} \bigsqcup_{\alpha \in A_k} e^k_\alpha$ као скуп.

$$\Longrightarrow X = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigsqcup_{\alpha \in A_n} e^n_\alpha \quad \text{као скуп.} \qquad (\text{ДУЋ})$$

Дакле, CW-комплекс је дисјунктна унија својих (отворених) ћелија, и то као скуп, не као тополошки простор (n-ћелија је отворена у n-скелетону ((**)), али ако се на њу, или неки њен део, залепи ћелија више димензије, она неће бити отворена у том CW-комплексу).

Сад дајемо најављену другу дефиницију CW-комплекса

Дефиниција 63: <u>Ћелијски комплекс</u> (или <u>CW-комплекс</u>) чине Хаусдорфов простор X, фамилија дисјунктних потпростора од X $\{e^n_\alpha \mid n\in\mathbb{N}_0, \alpha\in A_n\}$ која га покрива и фамилија непрекидних функција $\{\Phi^n_\alpha : D^n \to X\}_{n\in\mathbb{N}_0, \alpha\in A_n}$ такви да важе следећа два услова:

<u>(C)</u>: $(\forall n\in\mathbb{N}_0)(\forall \alpha\in A_n)$ $\quad \mathring{D}^n \overset{\Phi^n_\alpha}{\approx} e^n_\alpha$ и постоји <u>коначан</u> скуп $\{e^{n_1}_{\alpha_1}, e^{n_2}_{\alpha_2}, \dots, e^{n_k}_{\alpha_k}\} \subset \{e^n_\alpha \mid n\in\mathbb{N}_0, \alpha\in A_n\}$ такав да је

$$\Phi^n_\alpha(\underset{\partial D^n}{\underset{\parallel}{S^{n-1}}}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} e^{n_i}_{\alpha_i} \quad \text{и} \quad n_i < n \text{ за све } i=\overline{1,k}$$

<u>(W)</u>: $(\forall A\subseteq X)\quad A\in\mathcal{F}_X \iff (\forall n\in\mathbb{N}_0)(\forall\alpha\in A_n)\ \underline{A\cap\overline{e^n_\alpha}\in\mathcal{F}_X}$.

$\Updownarrow$ $\left(\underline{A\cap\overline{e^n_\alpha}\in\mathcal{F}_{\overline{e^n_\alpha}}}\right)$

e^n_α – <u>(отворена) n-ћелија комплекса X</u> $\quad (n=\dim e^n_\alpha)$

$\overline{e^n_\alpha}$ – <u>затворена n-ћелија комплекса X</u>

$X^n := \bigcup\limits_{k=0}^{n} \bigcup\limits_{\alpha\in A_k} e^k_\alpha$ – <u>n-скелетон комплекса X</u>, $\underline{\dim X} := \min\{n \mid X = X^n\}$

($\dim X := +\infty$ ако је $\{n \mid X=X^n\}=\emptyset$)

Φ^n_α – <u>карактеристична функција ћелије e^n_α</u> (јасно је да је можемо видети и као $\Phi^n_\alpha : D^n \to X^n$ (в. услов (C)), или чак и као $\Phi^n_\alpha : (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1})$, при чему подразумевамо $S^{-1} = \partial D^0 = \emptyset$ и $X^{-1} := \emptyset$)

$\varphi^n_\alpha := \Phi^n_\alpha\big|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to X^{n-1}$ – <u>функција лепљења ћелије e^n_α</u>

Приметимо да за све $n \in \mathbb{N}_0$ и све $\alpha \in A_n$ важи

$$\boxed{\phi_\alpha^n(D^n) = \overline{e_\alpha^n}\,.} \quad (3)$$

Наиме, $\phi_\alpha^n(D^n) = \phi_\alpha^n\left(\overline{\mathring{D}^n}\right) \underset{\phi_\alpha^n \text{ непрек.}}{\subseteq} \overline{\phi_\alpha^n(\mathring{D}^n)} = \overline{e_\alpha^n}$;

$$e_\alpha^n = \phi_\alpha^n(\mathring{D}^n) \subseteq \phi_\alpha^n(D^n) \underset{D^n \text{ компактан, } \phi_\alpha^n \text{ непрек.}}{\in} \mathcal{K}_X \underset{X \text{ је } T_2}{\subseteq} \mathcal{F}_X \implies \overline{e_\alpha^n} \subseteq \phi_\alpha^n(D^n).$$

(c), (3) $\implies$ $\overline{e_\alpha^n}$ сече коначно много ћелија ниже димензије. (CF)

(c) = „closure finiteness"
(W) = „weak topology"
} - - - -> CW - комплекс

(Каже се да тополошки простор X има слабу топологију у односу на свој покривач $\{A_\alpha \overset{X}{\subseteq} \mid \alpha \in A\}$ ако за све $V \subseteq X$ важи еквиваленција:

$$V \in \mathcal{T}_X \iff V \cap A_\alpha \in \mathcal{T}_{A_\alpha} \text{ за све } \alpha \in A.)$$

(c), (3) $\implies$ $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha \in A_n)\ \boxed{\overline{e_\alpha^n} \subseteq X^n.}$ (ПК)

Желимо да покажемо да су дефиниција 63 и дефиниција ~~[illegible]~~ CW-комплекса с почетка овог одељка међусобно еквивалентне. Док то не постигнемо, под CW-комплексом подразумевамо појам из дефиниције 63, док појам с почетка одељка (с листа $\boxed{46}$) привремено (закључно с доказом става 69) називамо „геометријским CW-комплексом".

За доказ става 69 требаће нам неколико лема и тврђења.

Лема 63,2: Нека је X CW-комплекс (дакле, дате су и фиксиране фамилија $\{e^n_\alpha\}_{n\in\mathbb{N}_0,\, \alpha\in A_n}$ свих ћелија и фамилија $\{\phi^n_\alpha : D^n \to X\}_{n\in\mathbb{N}_0,\, \alpha\in A_n}$ њихових карактеристичних функција). За сваки $A\subseteq X$ важи еквиваленција:

$$\boxed{A\in\mathcal{F}_X \iff (\forall n\in\mathbb{N}_0)(\forall \alpha\in A_n)\ \left(\phi^n_\alpha\right)^{-1}(A)\in\mathcal{F}_{D^n}.}$$

Δ: $\Rightarrow$) ϕ^n_α непрекидне ✓

$\Leftarrow$) $\underline{\underline{n\in\mathbb{N}_0}}$, $\underline{\underline{\alpha\in A_n}}$

На основу услова (W) из дефиниције 63 довољно је доказати да је

$$A\cap\overline{e^n_\alpha}\in\mathcal{F}_{\overline{e^n_\alpha}}.$$

Ако кодомен карактеристичне функције ϕ^n_α сузимо на њену слику $\phi^n_\alpha(D^n)\overset{(3)}{=}\overline{e^n_\alpha}$, онда она „постаје" количничко пресликавање (јер је непрекидна, „на", из компакта D^n у T_2-простор $\overline{e^n_\alpha}\subseteq X$; $\overline{e^n_\alpha}$ је T_2 јер је X T_2).

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, dashed, "\phi^n_\alpha"] \arrow[dr, "\phi^n_\alpha"'] & \overline{e^n_\alpha} \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

$$\left(\phi^n_\alpha\right)^{-1}\left(A\cap\overline{e^n_\alpha}\right)\overset{(3)}{=}\left(\phi^n_\alpha\right)^{-1}(A)\in\mathcal{F}_{D^n}\xRightarrow{\phi^n_\alpha \text{ количничко}} A\cap\overline{e^n_\alpha}\in\mathcal{F}_{\overline{e^n_\alpha}}.$$

✓ ■

Дефиниција 63,4: Нека је X CW-комплекс и $A\subseteq X$. Кажемо да је A <u>поткомплекс</u> <u>комплекса X</u> ако је $A=\bigcup_{e^n_\alpha\in\mathcal{C}_A} e^n_\alpha$ за неку подфамилију $\mathcal{C}_A\subseteq\{e^n_\alpha \mid n\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in A_n\}$ (дакле, A је унија (неких) ћелија комплекса X) такву да за све $n\in\mathbb{N}_0$ и све $\alpha\in A_n$ (тј. за сваку ћелију e^n_α) важи импликација:

$$e^n_\alpha\subseteq A \implies \overline{e^n_\alpha}\subseteq A.$$

Дакле, за произвољну ћелију e^n_α комплекса Xважи или $e^n_\alpha\subseteq A$ ($\iff e^n_\alpha\in\mathcal{C}_A$) или $e^n_\alpha\cap A=\emptyset$.

Пример: За свако $n \in \mathbb{N}_0$, X^n је потком̄плекс од X (на основу (ПК), $\mathcal{C}_{X^n} = \{ e_\alpha^k \mid 0 \le k \le n,\ \alpha \in A_k \}$).

$\boxed{\text{Став 63,6:}}$ Нека је A потком̄плекс CW-ком̄плекса X. Тада је $A \in \mathcal{F}_X$ и A је CW-ком̄плекс за себе, при чему је топологија $\mathcal{T}_A$ наслеђена с простора X, а одговарајуће фамилије ћелија и карактеристичних функција су $\mathcal{C}_A$ и $\{\phi_\alpha^n \mid e_\alpha^n \in \mathcal{C}_A\}$.

Δ: Приметимо најпре да је $\underline{\text{за } e_\alpha^n \in \mathcal{C}_A}$, тј. $e_\alpha^n \subseteq A$, $\underline{\phi_\alpha^n(D^n) \overset{(3)}{=} \overline{e_\alpha^n} \subseteq A}$, па се кодомен одговарајуће карактеристичне ф-је може сузити на A. ($\phi_\alpha^n : D^n \to A$).

A је T_2 ✓✓ (јер је X T_2), $A = \bigsqcup_{e_\alpha^n \in \mathcal{C}_A} e_\alpha^n$ ✓✓ (јер су ћелије у X међус. дисјунктне)

(C) $\underline{\underline{e_\alpha^n \in \mathcal{C}_A}}$ $\quad \mathring{D}^n \overset{\phi_\alpha^n}{\approx} e_\alpha^n$ ✓✓, $\phi_\alpha^n(S^{n-1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^k e_{\alpha_i}^{n_i}$, $n_i < n$ за $i = \overline{1,k}$, $e_{\alpha_i}^{n_i} \in \mathcal{C}_A$. ✓

(W) $\underline{\underline{B \subseteq A}}$ $\quad$ Како је $\underbrace{cl_A e_\alpha^n}_{} = \overline{e_\alpha^n}$ за све $e_\alpha^n \in \mathcal{C}_A$, то треба доказати наредну еквиваленцију (W): $B \in \mathcal{F}_A \iff (\forall e_\alpha^n \in \mathcal{C}_A)\ B \cap \overline{e_\alpha^n} \in \mathcal{F}_{\overline{e_\alpha^n}}$

затворење од e_α^n у A

$\boxed{\Rightarrow)}$ ✓✓

$\boxed{\Leftarrow)}$ Доказаћемо и више – да је $\boxed{B \in \mathcal{F}_X}$ – и то по дефиницији (услов (W) за X). (3X)

$\underline{\underline{n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in A_n}}$

1° $\underline{e_\alpha^n \in \mathcal{C}_A}$ $\quad \longrightarrow \quad B \cap \overline{e_\alpha^n} \in \mathcal{F}_{\overline{e_\alpha^n}} \subseteq \mathcal{F}_X$ ✓✓ $\quad (\overline{e_\alpha^n} \in \mathcal{F}_X)$

2° $\underline{e_\alpha^n \notin \mathcal{C}_A} \Rightarrow e_\alpha^n \cap A = \emptyset$

$$\underline{B \cap \overline{e_\alpha^n}} \subseteq B \cap (\overline{e_\alpha^n} \setminus e_\alpha^n) \overset{(C),(CF),(3) \text{ за } X}{\subseteq} B \cap \bigcup_{i=1}^k e_{\alpha_i}^{n_i}, \quad n_i < n$$

$$= B \cap (e_1 \cup \dots \cup e_m) \subseteq B \cap (\overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_m})$$

$\{e_1, e_2, \dots, e_m\} := \underline{\{e_{\alpha_1}^{n_1}, \dots, e_{\alpha_k}^{n_k}\}} \cap \mathcal{C}_A$

све ћелије из скупа $\{\ \}$ које су $\subseteq A$

$$\Rightarrow B \cap \overline{e_\alpha^n} = B \cap \overline{e_\alpha^n} \cap (\overline{e_1} \cup \dots \cup \overline{e_m}) = \bigcup_{j=1}^m \big(\underbrace{B \cap \overline{e_j}}_{\in \mathcal{F}_{\overline{e_j}} \subseteq \mathcal{F}_X} \cap \underbrace{\overline{e_\alpha^n}}_{\in \mathcal{F}_X}\big)$$

$\Rightarrow B \cap \overline{e_\alpha^n} \in \mathcal{F}_X$ ✓✓

$(\forall e_\alpha^n \in \mathcal{C}_A)\quad A \cap \overline{e_\alpha^n} \overset{\overline{e_\alpha^n} \subseteq A}{=} \overline{e_\alpha^n} \in \mathcal{F}_{\overline{e_\alpha^n}} \xrightarrow{\boxed{\Leftarrow)},\ (3X)} A \in \mathcal{F}_X$. ✓✓

Лема 64: Нека је X CW-комплекс (дакле, имамо и фамилије $\{e^n_\alpha\}_{n\in\mathbb{N}_0,\,\alpha\in A_n}$ и $\{\Phi^n_\alpha : D^n \to X\}_{n\in\mathbb{N}_0,\,\alpha\in A_n}$ које задовољавају услове (c) и (w)) и $A \subseteq X$ који сваку ћелију комплекса X сече у највише једној тачки, тј. важи

$$(\forall n\in\mathbb{N}_0)(\forall \alpha\in A_n)\ |A\cap e^n_\alpha| \le 1. \quad (\text{Ћ})$$

Тада је A затворен, дискретан потпростор од X.

Δ: $n\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in A_n$

$$(\text{CF}),\ (\text{Ћ}) \Rightarrow A\cap \overline{e^n_\alpha} \text{ је коначан скуп} \xRightarrow{X \text{ је } T_2} A\cap \overline{e^n_\alpha} \in \mathcal{F}_X$$

$$\xRightarrow{(\text{W})} A\in \mathcal{F}_X. \checkmark$$

Међутим, и за сваки $B \subseteq A$ важи услов (Ћ), па је $B\in\mathcal{F}_X$.

$$\Rightarrow B\in\mathcal{F}_A \Rightarrow A \text{ је дискретан}. \checkmark \quad \blacksquare$$

Последица 65: Ако је X CW-комплекс и K његов компактан подскуп, онда K сече (највише) коначно много ћелија од X ($e^n_\alpha \cap K = \emptyset$ за све сем коначно много ћелија e^n_α).

Δ: пус: K сече бесконачно много ћелија

$\Rightarrow \exists$ бесконачан $A\subseteq K$ који задовољава услов (Ћ) из леме 64.

$$\xRightarrow{\text{лема 64}} A\in\mathcal{F}_X \Rightarrow A\in\mathcal{F}_K \xRightarrow{K \text{ компактан}} A \text{ је компактан}.$$

A је и дискретан (лема 64) $\Rightarrow$ A је коначан. $\lightning$ $\blacksquare$

Кажемо да је CW-комплекс **коначан** ако има коначно много ћелија (тј. ако је фамилија $\{e^n_\alpha\}_{n\in\mathbb{N}_0,\,\alpha\in A_n}$ коначна).

Последица 66: CW-комплекс је компактан акко је коначан.

Δ: $\Longrightarrow$) последица 65 (за $K:=X$) ✓✓

$\Longleftarrow$) $X = \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \bigcup_{\alpha\in A_n}}_{\text{коначна унија}} \underbrace{\overline{e^n_\alpha}}_{\overset{(3)}{\in} \mathcal{K}_X}$. ✓✓ $\blacksquare$

Наредне две леме ће нам омогућити да утврдимо да геометријски CW-комплекс има својство T_4, па самим тим и T_2, а онда и да сваки CW-комплекс има својство T_4.

Лема 67: Нека су X и Y T_4-простори, $A \in \mathcal{F}_X$ и $f: A \to Y$ непрекид

Тада је $X \cup_f Y$ T_4-простор.

Δ: $X \cup_f Y$ је T_1: $z \in X\cup_f Y$ произв. тачка

$\pi : X \sqcup Y \longrightarrow X \cup_f Y$ природна пројекција

$$\pi^{-1}(\{z\}) = \begin{cases} \{x\}, & z=[x],\ x\in X\setminus A \\ f^{-1}(\{y\}) \sqcup \{y\}, & z=[y],\ y\in Y \end{cases} \in \mathcal{F}_{X\sqcup Y}.$$

$$\{x\} \overset{X \text{ је } T_1}{\in} \mathcal{F}_X \underset{X\in\mathcal{F}_{X\sqcup Y}}{\subset} \mathcal{F}_{X\sqcup Y} \ ; \ \{y\} \overset{Y \text{ је } T_1}{\in} \mathcal{F}_Y,\ f^{-1}(\{y\}) \overset{f \text{ непр.}}{\in} \mathcal{F}_A \underset{A\in\mathcal{F}_X}{\subseteq} \mathcal{F}_X$$

$$\xRightarrow{\pi \text{ количничко}} \underline{\underline{\{z\} \in \mathcal{F}_{X\cup_f Y}}}. \quad ✓✓$$

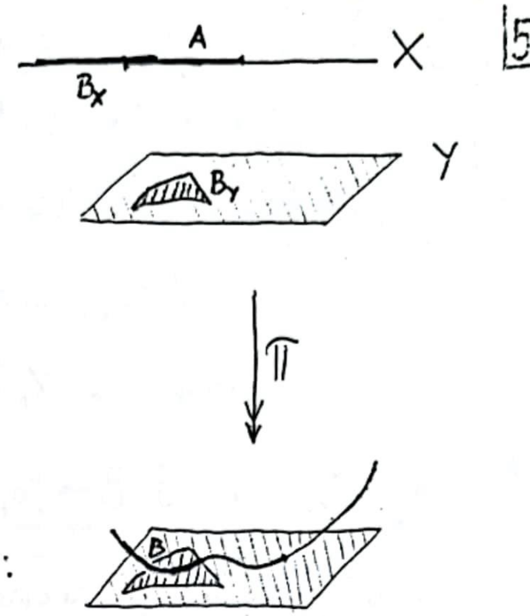
$X\cup_f Y$ је нормалан: $B \in \mathcal{F}_{X\cup_f Y}$, $g: B \to [0,1]$ непрекидно пресл.

По Титцеовој теореми, довољно је доказати да постоји проширење $\bar{g}: X\cup_f Y \to [0,1]$ пресликавања g ($\bar{g}$ непрекидно, $\bar{g}|_B = g$).

$\pi^{-1}(B) = B_X \sqcup B_Y$,

X⊔Y:

X∪$_f$Y:



$B_X := \pi^{-1}(B) \cap X = (\pi \circ i_X)^{-1}(B) \in \mathcal{F}_X$

$B_Y := \pi^{-1}(B) \cap Y = (\pi \circ i_Y)^{-1}(B) \in \mathcal{F}_Y$

$B \in \mathcal{F}_{X \cup_f Y}$

$\varphi : B_Y \longrightarrow [0,1]$

$\varphi(y) := g(\underbrace{\pi(y)}_{\in B}),\ y \in B_Y$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "i_X"'] \arrow[rrd, dashed] & Y \arrow[ld, "i_Y"] \arrow[rd, dashed, "\overline{\varphi}"] \\
X \sqcup Y \arrow[rr, "\overline{\Psi} \sqcup \overline{\varphi}"] \arrow[rd, "\pi"'] & & {[0,1]} \\
& X \cup_f Y \arrow[ru, dashed, "\overline{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\overline{\Psi}$

φ непрек., $B_Y \in \mathcal{F}_Y$, Y нормалан

$\xRightarrow{\text{Тице}}$ $\exists$ непр. $\overline{\varphi} : Y \to [0,1]$, $\overline{\varphi}|_{B_Y} = \varphi$.

$\Psi : B_X \cup A \longrightarrow [0,1]$

$$\Psi(x) := \begin{cases} g(\pi(x)), & x \in B_X \\ \overline{\varphi}(f(x)), & x \in A \end{cases}$$

За $x \in B_X \cap A$, $\underbrace{g(\pi(x))}_{\in B} = g(\underbrace{\pi(f(x))}_{\in B}) = \varphi(f(x)) =$ $f(x) \in B_Y$

$= \overline{\varphi}(f(x))$.

$\Rightarrow$ Ψ добро дефинисано.

$B_X, A \in \mathcal{F}_X \Rightarrow B_X, A \in \mathcal{F}_{B_X \cup A}$ $\xRightarrow{\text{теор. о лепљењу}}$ Ψ непрекидно

$\Rightarrow$ $B_X \cup A \in \mathcal{F}_X$, X нормалан $\xRightarrow{\text{Тице}}$ $\exists$ непр. $\overline{\Psi} : X \to [0,1]$, $\overline{\Psi}|_{B_X \cup A} = \Psi$.

За $a \in A$, $(\overline{\Psi} \sqcup \overline{\varphi})(a) = \overline{\Psi}(a) = \Psi(a) = \overline{\varphi}(f(a)) = (\overline{\Psi} \sqcup \overline{\varphi})(f(a))$.

$\Rightarrow$ $\exists_1$ непрек. $\overline{g} : X \cup_f Y \longrightarrow [0,1]$ т. д. је $\overline{g} \circ \pi = \overline{\Psi} \sqcup \overline{\varphi}$.

$b \in B$ произв. 1° $b = [x] = \pi(x)$ за неко $x \in X$, тј. неко $x \in B_X$

$\overline{g}(b) = \overline{g}(\pi(x)) = (\overline{\Psi} \sqcup \overline{\varphi})(x) = \overline{\Psi}(x) = \Psi(x) = g(\pi(x)) = g(b)$.

2° $b = [y] = \pi(y)$ за неко $y \in Y$, тј. неко $y \in B_Y$

$\overline{g}(b) = \overline{g}(\pi(y)) = (\overline{\Psi} \sqcup \overline{\varphi})(y) = \overline{\varphi}(y) = \varphi(y) = g(\pi(y)) = g(b)$

$\Rightarrow \overline{g}|_B = g$.

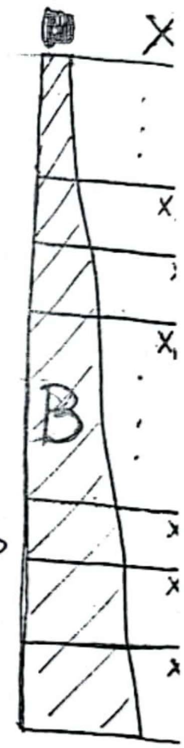
Лема 68: Нека је X тополошки простор и $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ($X_0\subseteq X_1\subseteq X_2\subseteq\cdots\subseteq X_n\subseteq X_{n+1}\subseteq\cdots$) неопадајући низ његових затворених потпростора такав да је $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$ и да за све $A\subseteq X$ важи еквиваленција:

$$A\in\mathcal{F}_X \iff A\cap X_n\in\mathcal{F}_{X_n} \text{ за све } n\in\mathbb{N}_0. \qquad (\cdot)$$

Ако су сви X_n, $n\in\mathbb{N}_0$, T_4-простори, онда је и X T_4-простор.

Δ: $B\in\mathcal{F}_X$, $f:B\to[0,1]$ непрекидно

Ако докажемо да постоји проширење $\overline{f}:X\to[0,1]$ пресликавања f, доказали смо да је X нормалан (по Тицеовој теореми).



$$f_0 := f|_{B\cap X_0} : \underbrace{B\cap X_0}_{\in\mathcal{F}_{X_0}} \to [0,1], \quad X_0 \text{ нормалан}$$

$$\xRightarrow{\text{Тице}} \exists \text{ непрек. } \overline{f_0}:X_0\to[0,1], \quad \overline{f_0}|_{B\cap X_0} = f_0 = f|_{B\cap X_0}$$

$$f_1 : (B\cap X_1)\cup X_0 \to [0,1], \quad f_1(x) := \begin{cases} f(x), & x\in B\cap X_1 \\ \overline{f_0}(x), & x\in X_0 \end{cases}$$

За $x\in B\cap X_1\cap X_0 \underset{X_0\subseteq X_1}{=} B\cap X_0$, $f(x)=\overline{f_0}(x) \Rightarrow f_1$ добро дефинисано

$$\underset{B,\,X_1\in\mathcal{F}_X}{B\cap X_1\in\mathcal{F}_{(B\cap X_1)\cup X_0}}, \quad \underset{X_0\in\mathcal{F}_X}{X_0\in\mathcal{F}_{(B\cap X_1)\cup X_0}} \xRightarrow{\text{теор. о лепљењу}} f_1 \text{ непрекидно}$$

$$(B\cap X_1)\cup X_0\in\mathcal{F}_{X_1}, \quad X_1 \text{ нормалан}$$

$$\xRightarrow{\text{Тице}} \exists \text{ непрек. } \overline{f_1}:X_1\to[0,1], \quad \overline{f_1}|_{B\cap X_1} = f_1|_{B\cap X_1} = f|_{B\cap X_1}, \quad \overline{f_1}|_{X_0} = f_1|_{X_0} = \overline{f_0}$$

Поступак индуктивно настављамо и добијамо низ непрекидних пресликавања $\{\overline{f_n}:X_n\to[0,1]\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ са својством да за све $n\in\mathbb{N}_0$ важи:

$$\overline{f}_n\big|_{B\cap X_n} \overset{(1)}{=} f\big|_{B\cap X_n} \quad \text{и} \quad \overline{f}_n\big|_{X_{n-1}} \overset{(2)}{=} \overline{f}_{n-1}.$$

$n \dashrightarrow n+1$: $\quad f_{n+1} : (B\cap X_{n+1})\cup X_n \to [0,1]$, $\quad f_{n+1}(x) := \begin{cases} f(x), & x\in B\cap X_{n+1} \\ \overline{f}_n(x), & x\in X_n \end{cases}.$

За $x \in B\cap X_{n+1}\cap X_n \underset{X_n \subseteq X_{n+1}}{=} B\cap X_n$, $\quad f(x) \overset{(1)}{=} \overline{f}_n(x) \implies f_{n+1}$ добро дефинисано.

$\underset{B, X_{n+1}\in \mathcal{F}_X}{B\cap X_{n+1} \in \mathcal{F}_{(B\cap X_{n+1})\cup X_n}}$, $\quad \underset{X_n\in\mathcal{F}_X}{X_n \in \mathcal{F}_{(B\cap X_{n+1})\cup X_n}}$ $\quad \xRightarrow{\text{теор. о лепљењу}} f_{n+1}$ непрекидно

$(B\cap X_{n+1})\cup X_n \in \mathcal{F}_{X_{n+1}}$, $\quad X_{n+1}$ нормалан

$\xRightarrow{\text{Тице}}$ $\exists$ непрек. $\overline{f}_{n+1} : X_{n+1} \to [0,1]$, $\quad \overline{f}_{n+1}\big|_{B\cap X_{n+1}} = f_{n+1}\big|_{B\cap X_{n+1}} = f\big|_{B\cap X_{n+1}}$,

$\overline{f}_{n+1}\big|_{X_n} = f_{n+1}\big|_{X_n} = \overline{f}_n$.

$\overline{f} : X \to [0,1]$, $\quad \overline{f}(x) := \overline{f}_n(x)$, где је $n\in\mathbb{N}_0$ т. д. $x \in X_n$

$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$, $\quad X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n \subseteq \cdots$, $\quad (2) \implies \overline{f}$ добро дефинисано.

$(\forall n\in\mathbb{N}_0)\ \overline{f}\big|_{X_n} = \overline{f}_n$.

$C \in \mathcal{F}_{[0,1]}$, $\quad (\forall n\in\mathbb{N}_0)\ \overline{f}^{-1}(C)\cap X_n = \left(\overline{f}\big|_{X_n}\right)^{-1}(C) = \overline{f}_n^{-1}(C) \underset{\overline{f}_n \text{ непрек.}}{\in} \mathcal{F}_{X_n}$

$\xRightarrow{(\cdot)}$ $\overline{f}^{-1}(C) \in \mathcal{F}_X \implies \overline{f}$ непрекидно.

За $x\in B$, $\quad \overline{f}(x) \underset{n\in\mathbb{N}_0 \text{ т.д. } x\in X_n}{=} \overline{f}_n(x) \overset{(1)}{=} f(x) \implies \overline{f}\big|_B = f$.

$\implies \overline{f}$ је проширење од $f \implies \boxed{X \text{ је нормалан.}}$

$x\in X$ произв. $\quad (\forall n\in\mathbb{N}_0)\ \{x\}\cap X_n = \begin{cases} \emptyset, & x\notin X_n \\ \{x\}, & x\in X_n \end{cases} \underset{X_n \text{ је } T_1}{\in} \mathcal{F}_{X_n} \xRightarrow{(\cdot)} \{x\}\in\mathcal{F}_X$.

$\implies \boxed{X \text{ је } T_1.}$

$\boxed{\text{Став 69:}}$ (а) Нека је X геометријски CW-комплекс, $\{e^n_\alpha \mid n\in\mathbb{N}_0, \alpha\in A_n\}$ фамилија свих његових ћелија и $\Phi^n_\alpha : D^n \to X$, $n\in\mathbb{N}_0$, $\alpha\in A_n$ функције дефинисане на листу $\boxed{52}$. Тада је X (с фамилијама $\{e^n_\alpha \mid n\in\mathbb{N}_0, \alpha\in A_n\}$ и $\{\Phi^n_\alpha \mid n\in\mathbb{N}_0, \alpha\in A_n\}$) CW-комплекс.

(б) Нека је X CW-комплекс, $\{e^n_\alpha \mid n\in\mathbb{N}_0, \alpha\in A_n\}$ и $\{\Phi^n_\alpha : D^n \to X\}_{n\in\mathbb{N}_0, \alpha\in A_n}$ одговарајуће фамилије отворених ћелија, односно карактеристичних функција. Тада је X^0 дискретан тополошки простор, а ако су $\varphi^n_\alpha = \Phi^n_\alpha\big|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to X^{n-1}$ $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in A_n$, функције лепљења, онда је за све $n\in\mathbb{N}$

$$X^n \approx \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \cup_{\bigsqcup_{\alpha\in A_n} \varphi^n_\alpha} X^{n-1}.$$

Поред тога, за све $A\subseteq X$ важи еквиваленција:

$$A\in \mathcal{F}_X \iff A\cap X^n \in \mathcal{F}_{X^n} \text{ за све } n\in\mathbb{N}_0 .$$

Речју, X је геометријски CW-комплекс.

Δ: (а) Најпре, индукцијом по $n\in\mathbb{N}_0$, помоћу леме 67, показујемо да је X^n T_4-простор, па самим тим и Хаусдорфов, за све $n\in\mathbb{N}_0$.

$\underline{\underline{n=0}}$: X^0 дискретан $\Longrightarrow$ X^0 је T_4

$\underline{\underline{n\geq 1}}$: X^{n-1} је T_4 (их), $\bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)}$ је T_4 (као дисјунктна тополошка унија так

$$\bigsqcup_{\alpha\in A_n} S^{n-1}_{(\alpha)} \in \mathcal{F}_{\bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)}} \xRightarrow{\text{лема 67}} X^n \text{ је } T_4 . \checkmark$$

(НС3) с листа $\boxed{52}$ $\xRightarrow{\text{лема 68}}$ X је T_4 $\Longrightarrow$ $\boxed{X \text{ је } T_2 .}$ ✓
($X^n \in \mathcal{F}_X$ за све $n\in\mathbb{N}_0$)

Као скуп, $\boxed{X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}_0} \bigsqcup_{\alpha\in A_n} e^n_\alpha}$ ((дуп) с полеђине листа $\boxed{52}$).

На листу $\boxed{52}$ доказано је да $\boxed{\mathring{D}^n \overset{\phi^n_\alpha}{\approx} e^n_\alpha}$ за све $n\in\mathbb{N}_0$ и све $\alpha\in A_n$. $\underline{\underline{(*)}}$

Покажимо сад, опет индукцијом по $n\in\mathbb{N}_0$, да је X^n CW-комплекс за све $n\in\mathbb{N}_0$. Већ смо утврдили да је X^n Хауздорфов, а знамо и да је $\underline{X^n = \bigsqcup_{k=0}^{n} \bigsqcup_{\alpha\in A_k} e^k_\alpha}$ (в. полеђину листа $\boxed{52}$)

$\boxed{n=0:}$ (C_0): $(*)$, $\phi^0_\alpha(\partial D^0) = \phi^0_\alpha(\emptyset) = \emptyset$, $\alpha\in A_0$

(W_0): $\underline{\underline{A\subseteq X^0}}$ $\Rightarrow)$

$\Leftarrow)$ јер је X^0 дискретан.

$\boxed{n\geq 1:}$ (C_n): $(*)$, $\underline{\frac{1\leq k\leq n}{\alpha\in A_k}}$ $\underbrace{\phi^k_\alpha(S^{k-1})}_{\text{компакт}} = \varphi^k_\alpha(S^{k-1}) \subseteq \underbrace{X^{k-1}}_{\text{CW-комплекс (ИХ)}}$

$$\begin{tikzcd} D^k \arrow[r, dashed, "\phi^k_\alpha"] \arrow[dr, "\phi^k_\alpha"'] & X^n \arrow[d, "i_n"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$\xRightarrow{\text{последица 65}} \phi^k_\alpha(S^{k-1}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} e^{k_j}_{\alpha_j}$, $k_j < k$, $j=\overline{1,m}$.

(W_n): $\underline{A\subseteq X^n}$ $\Rightarrow)$ $\boxed{k\leq n}$ $e^k_\alpha \subseteq X^n \in \mathcal{F}_X \Rightarrow \underline{\underline{\overline{e^k_\alpha} \subseteq X^n}} \Rightarrow cl_{X^n}(e^k_\alpha) = \overline{e^k_\alpha}$

$\boxed{\Leftarrow)}$ $\forall k\leq n\ \forall\alpha\in A_k\ A\cap\overline{e^k_\alpha} \in \mathcal{F}_{\overline{e^k_\alpha}}$

$$\bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} \xrightarrow{\pi_n} X^n$$

$\Rightarrow \forall k\leq n-1\ \forall\alpha\in A_k\ (A\cap X^{n-1})\cap\overline{e^k_\alpha} = A\cap\overline{e^k_\alpha} \in \mathcal{F}_{\overline{e^k_\alpha}} \xRightarrow{\text{ИХ } ((W_{n-1}))} A\cap X^{n-1} \in \mathcal{F}_{X^{n-1}}$ $= \pi_n(X^{n-1})$

$\Longrightarrow \underline{\pi_n^{-1}(A)\cap X^{n-1} \in \mathcal{F}_{X^{n-1}}}$

$\underline{\text{За } \alpha\in A_n}$, $\underline{\pi_n^{-1}(A)\cap D^n_{(\alpha)}} = \underbrace{\pi_n^{-1}(A\cap\overline{e^n_\alpha})}_{\in\mathcal{F}_{\overline{e^n_\alpha}}\subseteq\mathcal{F}_{X^n}} \cap D^n_{(\alpha)} \in \mathcal{F}_{D^n_{(\alpha)}}$ $\underline{\underline{(1)}}$

$X^{n-1} \overset{\approx}{\underset{\pi_n|}{\longrightarrow}} \dots$

$\dots(D^n_{(\alpha)}) = \pi_n(\overline{\mathring{D}^n_{(\alpha)}}) \subseteq \overline{\pi_n(\mathring{D}^n_{(\alpha)})} = \overline{e^n_\alpha}$ ... (2) ... $X^{n-1} = \dots$

(1), (2) $\Rightarrow \Pi_n^{-1}(A) \in \mathcal{F}_{\bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1}} \xRightarrow{\Pi_n \text{ количничко}} A \in \mathcal{F}_{X^n}$. ✓

Коначно, докажимо да је X CW-комплекс, тј. да за X важе услови (C) и (W) из дефиниције 63.

(C) $\Longleftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N}_0)\,(C_n)$ ✓

(W): $\Rightarrow)$ ✓

$\Leftarrow)$ $(\forall n\in\mathbb{N}_0)(\forall \alpha\in A_n)\ A\cap \overline{e}^n_\alpha \in \mathcal{F}_{\overline{e}^n_\alpha} \Rightarrow \underbrace{\forall k\leq n}_{(\forall n\in\mathbb{N}_0)}\ \forall \alpha\in A_k\ (A\cap X^n)\cap \overline{e}^k_\alpha \overset{\overline{e}^k_\alpha \subseteq X^n}{=} A\cap\overline{e}^k_\alpha \in \mathcal{F}_{\overline{e}^k_\alpha}$

$\xRightarrow{(W_n)} A\cap X^n \in \mathcal{F}_{X^n}$ за све $n\in\mathbb{N}_0$ $\Rightarrow A\in\mathcal{F}_X$. ✓

(δ) $\left.\begin{array}{l} (\forall \alpha\in A_0)\ |X^0\cap e^0_\alpha| = |e^0_\alpha| \overset{(C)}{=} 1 \\ (\forall n\geq 1)(\forall\alpha\in A_n)\ |X^0\cap e^n_\alpha| = 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{лема 64}} X^0$ је дискретан. ✓

$\{e^n_\alpha \mid n\in\mathbb{N}_0, \alpha\in A_n\}$ фамилија $\boxed{\text{дисјунктних}}$ потпростора од X

Нека је f_n (на слици десно) дато са

$$f_n = \bigsqcup_{\alpha\in A_n} \Phi^n_\alpha \sqcup j_{n-1},$$

где је $j_{n-1}: X^{n-1} \hookrightarrow X^n$ инклузија, а Φ^n_α, $\alpha\in A_n$, карактеристичне ф-је n-ћелија. Нека је Π_n (на слици десно) природна сурјекција.

$$\begin{tikzcd} & \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, "\Pi_n"] & \\ D^n \arrow[ur, "i_{\alpha_0}"] \arrow[r, "\Phi^n_{\alpha_0}"'] \arrow[ur, phantom, "(\circ\circ)"'] & X^n & \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \cup_{\sqcup \varphi^n_\alpha} X^{n-1} \end{tikzcd}$$

Из услова (C) дефиниције 63 јасно је да за све $y_1, y_2 \in \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1}$ важи еквиваленција:

$$f_n(y_1) = f_n(y_2) \Longleftrightarrow \Pi_n(y_1) = \Pi_n(y_2), \quad \text{(EKB)}$$

Ако докажемо да је f_n количничко имаћемо да је (Π_n је количничко. ✓)

$$X^n \approx \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} / f_n \overset{\text{(EKB)}}{=} \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} / \Pi_n \approx \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)} \cup_{\sqcup \varphi^n_\alpha} X^{n-1}$$

Јасно је да је f_n непрекидна сурјекција.

$\underline{\underline{C\subseteq X^n}}$ т.д. је $\underbrace{f_n^{-1}(C)\in \mathcal{F}_{\bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)}\sqcup X^{n-1}}}$ (ИНВ)

$\underline{C \overset{?}{\in} \mathcal{F}_{X^n}}$ На основу става 63,6 и примера који му претходи, X^n је CW-комплекс са скупом ћелија $\{e^k_\alpha \mid 0\le k\le n,\ \alpha\in A_k\}$. Сад из леме 63,2 следи да је довољно доказати

$$?\ (\forall k\le n)(\forall \alpha\in A_k)\ (\phi^k_\alpha)^{-1}(C)\in\mathcal{F}_{D^k}\ .\ ?\quad (\phi^k_\alpha: D^k\to X^n)$$

1° $k=n$, $\alpha\in A_n$ (l_α непрек.)

$$(\phi^n_\alpha)^{-1}(C) \overset{(\cdot\cdot)}{=} l_\alpha^{-1}\left(f_n^{-1}(C)\right) \overset{(ИНВ)}{\in} \mathcal{F}_{D^n}\ .\ ✓$$

(ПК) с полеђине листа $\boxed{53}$

2° $k<n$, $\alpha\in A_k$ $\Longrightarrow$ $\phi^\alpha_k(D^k)=\overline{e^k_\alpha}\subseteq X^{n-1}$

$$\Longrightarrow (\phi^k_\alpha)^{-1}(C) \overset{*}{=} (\phi^k_\alpha)^{-1}(C\cap X^{n-1})\in\mathcal{F}_{D^k}\ .\ ✓$$

$$C\cap X^{n-1} = j_{n-1}^{-1}(C) = f_n^{-1}(C)\cap X^{n-1} \overset{(ИНВ)}{\in}\mathcal{F}_{X^{n-1}}\subseteq \mathcal{F}_{X^n}$$

$\boxed{\text{став 63,6}} \Rightarrow X^{n-1}\in\mathcal{F}_{X^n}$

$\underline{\underline{A\subseteq X}}$ $A\in\mathcal{F}_X \overset{?}{\Longleftrightarrow} (\forall n\in\mathbb{N}_0)\ A\cap X^n\in\mathcal{F}_{X^n}$

$\Rightarrow)$ ✓

$\Leftarrow)$ $n\in\mathbb{N}_0$, $\alpha\in A_n$ $\quad\overline{e^n_\alpha}\subseteq X^n$

$$A\cap\overline{e^n_\alpha} = \underbrace{A\cap X^n}_{\in\mathcal{F}_{X^n}}\cap\overline{e^n_\alpha}\in\mathcal{F}_{\overline{e^n_\alpha}} \overset{(w)}{\Longrightarrow} A\in\mathcal{F}_X\ .\ ■$$

Дакле, две дефиниције CW-комплекса које смо дали међусобно су еквивалентне. Зато, све што је током претходног разматрања доказано за објекте који задовољавају било једну било другу дефиницију просто ва[illegible] за CW-комплексе. На пример, с почетка доказа става 69 видимо да сваки CW-комплекс T_4-простор. Такође, CW-комплекс X има слабу топологију у односу на своје скелетоне, тј. фамилију $\{X^n \mid n\in\mathbb{N}_0\}$, али има слабу топологију и у односу на фамилију свих својих затворених ћелија $\{\overline{e^n_\alpha} \mid n\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in A_n\}$. С тим у вези је и следећи став.

Став 70: Нека је X CW-комплекс ($\{e^n_\alpha \mid n\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in A_n\}$ је фамилија свих његових ћелија, а $\{\phi^n_\alpha : D^n\to X\}_{n\in\mathbb{N}_0,\alpha\in A_n}$ фамилија одговарајућих карактеристичних функција), Y тополошки простор и $f: X\to Y$ пресликавање. Тада су наредна четири исказа међусобно еквивалентна:

(1) f је непрекидно;

(2) $(\forall n\in\mathbb{N}_0)$ $f|_{X^n}$ је непрекидно;

(3) $(\forall n\in\mathbb{N}_0)(\forall \alpha\in A_n)$ $f|_{\overline{e^n_\alpha}}$ је непрекидно;

(4) $(\forall n\in\mathbb{N}_0)(\forall \alpha\in A_n)$ $f\circ\phi^n_\alpha : D^n\to Y$ је непрекидно.

Δ: (1) $\Rightarrow$ (2): ✓

(2) $\Rightarrow$ (3): $\overline{e^n_\alpha}\subseteq X^n \Rightarrow f|_{\overline{e^n_\alpha}} = (f|_{X^n})|_{\overline{e^n_\alpha}}$ ✓

(3) $\Rightarrow$ (4):

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[rr, "f\circ\phi^n_\alpha"] \arrow[dr, "\phi^n_\alpha"'] & & Y \\ & \overline{e^n_\alpha} \arrow[ur, "f|_{\overline{e^n_\alpha}}"'] & \end{tikzcd}$$

✓

(4) $\Rightarrow$ (1): $B\in\mathcal{F}_Y$

$$(\forall n\in\mathbb{N}_0)(\forall\alpha\in A_n)\ (\phi^n_\alpha)^{-1}(f^{-1}(B)) = (f\circ\phi^n_\alpha)^{-1}(B)\in\mathcal{F}_{D^n}$$

$$\xRightarrow{\text{лема } 63{,}2} f^{-1}(B)\in\mathcal{F}_X .$$ ✓

Приметимо да за CW-комплекс X и произвољно $n \in \mathbb{N}_0$ важи

$$\boxed{X^n/X^{n-1} \approx \bigvee_{\alpha \in A_n} S^n_{(\alpha)}}, \qquad \underline{\underline{(БС)}}$$

где је, као и обично, са A_n индексиран скуп свих n-ћелија комплекса X, $\{e^n_\alpha \mid \alpha \in A_n\}$.
(Као и пре, за $n=0$ подразумевамо $X^{-1}=\emptyset$, па је $X^0/X^{-1} = X^0/\emptyset = X^0 \sqcup *$.)

Наиме, избором хомеоморфизма $g : D^n/S^{n-1} \longrightarrow S^n$ добијамо најпре $q : D^n \longrightarrow S^n$ као композицију природне пројекције $D^n \longrightarrow D^n/S^{n-1}$ и овога g (за $n \geq 1$ q је количничко као композиција таквих), а онда за $n \geq 1$ имамо и количничка пресликавања на наредном цртежу.

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[rr, "q"] \arrow[dr] & & S^n \\ & D^n/S^{n-1} \arrow[ur, "g", "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bigsqcup_{\alpha \in A_n} D^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} \arrow[dl, "Q"'] \arrow[dr, "\pi_n"] & \\ \bigsqcup_{\alpha \in A_n} S^n_{(\alpha)} \sqcup X^{n-1} \arrow[d, "p"'] & & X^n \arrow[d, "q_n"] \\ \bigvee_{\alpha \in A_n} S^n_{(\alpha)} & & X^n/X^{n-1} \end{tikzcd}$$

Пресликавања π_n и q_n су природне сурјекције (њихови кодомени су количници њихових домена), па су количничка.

$Q := \bigsqcup_{\alpha \in A_n} q_{(\alpha)} \sqcup \mathbb{1}_{X^{n-1}}$, где је $q_{(\alpha)} : D^n_{(\alpha)} \longrightarrow S^n_{(\alpha)}$, $\alpha \in A_n$, заправо q на одговарајућој копији.

Q је количничко због следеће чињенице (која се лако доказује):

$f_\lambda : X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, количничка $\Longrightarrow$ $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ количничко.

базна („додирна") т.

$p|_{\bigsqcup S^n_{(\alpha)}}$ је природна пројекција, док је $p|_{X^{n-1}}$ константно: $p(X^{n-1}) = \{x_0\}$.

(p је количничко због следеће чињенице (која се лако доказује):

$\underbrace{f:\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y}_{\text{Непрекидно пресликавање}}$ је количничко ако је $f|_{X_{\lambda_0}}: X_{\lambda_0}\to Y$ количничко за бар једно $\lambda_0\in\Lambda$.)

Иначе, за базну тачку на сфери S^n бирамо тачку $z := q(S^{n-1}/S^{n-1})$, тј. $q(S^{n-1})=\{z\}$, па су базне тачке сфера $S^n_{(\alpha)}$, $\alpha\in A_n$, заправо $z_{(\alpha)}\in S$ такве да је $q_{(\alpha)}(S^{n-1}_{(\alpha)})=\{z_{(\alpha)}\}$, $\alpha\in A_n$. Сад је очигледно да з $y_1, y_2\in \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)}\sqcup X^{n-1}$ важи еквиваленција:

$$p(Q(y_1))=p(Q(y_2)) \iff y_1=y_2 \vee y_1,y_2\in\bigsqcup_{\alpha\in A_n} S^{n-1}_{(\alpha)}\sqcup X^{n-1} \iff q_n(\Pi_n(y_1))=q_n(\Pi_n(y_2))$$

Како су $p\circ Q$ и $q_n\circ\Pi_n$ количничка (као композиције таквих), то је

$$X^n/X^{n-1} \approx \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)}\sqcup X^{n-1}/_{q_n\circ\Pi_n} \overset{(E)}{=} \bigsqcup_{\alpha\in A_n} D^n_{(\alpha)}\sqcup X^{n-1}/_{p\circ Q} \approx \bigvee_{\alpha\in A_n} S^n_{(\alpha)}.$$

Овим је доказано (БС) за $n\geq 1$. За $n=0$ $q: D^0\to S^0$ није количничко (није „на"), па Q није количничко, али ни $q_0: X^0\to X^0/X^{-1}=X^0\sqcup *$ није количничко. Ипак, сви простори на наредном цртежу су дискретни, а лако се види да и $p\circ Q$ и $q_0\circ\Pi_0$ простору $\bigsqcup_{\alpha\in A_0} D^0_{(\alpha)}$ само „додају једну тачку".

$$\begin{tikzcd}
 & \bigsqcup_{\alpha\in A_0} D^0_{(\alpha)} \arrow[dl, "Q"'] \arrow[dr, "\Pi_0", "\approx"'] & & D^0 \arrow[ll, "\iota_{\alpha_0}"'] \arrow[dl, "\Phi^0_{\alpha_0}"] \\
\bigsqcup_{\alpha\in A_0} S^0_{(\alpha)} \arrow[d, "p"] & & X^0 \arrow[d, "q_0"] & \\
\bigvee_{\alpha\in A_0} S^0_{(\alpha)} & & X^0\sqcup * &
\end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow\quad X^0/X^{-1} = X^0\sqcup * \approx \bigvee_{\alpha\in A_0} S^0_{(\alpha)} \quad\Longrightarrow\quad \text{(БС) важи и за } n=0.$$

Приметимо да сваки CW-комплекс (који је непразан) мора имати бар једну 0-ћелију, другим речима $X^0 \neq \emptyset$, тј. $A_0 \neq \emptyset$. Наиме, у супротном, ако је e^n_α ћелија минималне димензије и $n \geq 1$, онда је

$$\phi^n_\alpha(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1} = \emptyset , \quad S^{n-1} \neq \emptyset \ ↯ .$$

(та ћелија нема на шта да се залепи).

За $n \geq 1$ скуп A_n може бити празан. Приметимо да (БС) с претходног листа важи и у том случају (чак је и доказ дат на том листу валидан и ако је $A_n = \emptyset$):

$$X^n/X^{n-1} = X^{n-1}/X^{n-1} = * \ ; \ \bigvee_{\alpha \in \emptyset} S^n_{(\alpha)} = \coprod_{\alpha\in\emptyset} S^n_{(\alpha)} \Big/ \coprod_{\alpha \in \emptyset} \{z_{(\alpha)}\} = \emptyset/\emptyset = * .$$

Ако је X CW-комплекс и A његов поткомплекс (в. дефиницију 63,4), онда пар (X,A) називамо CW-паром. Из дефиниције 63,4 је очигледно да ако су A и B поткомплекси од X, онда су то и $A \cup B$ и $A \cap B$ (не забрањујемо ни да поткомплекс буде празан). Тада, дакле, имамо наредне CW-парове: (X,A), (X,B), $(X, A\cup B)$, $(X, A\cap B)$, $(A\cup B, A)$, $(A \cup B, B)$, $(A\cup B, A\cap B)$, $(A, A\cap B)$, $(B, A\cap B)$.

Важно својство поткомплекса је да они имају тзв. „ε-околине" које поседују лепе особине. Прецизније, ако је A поткомплекс CW-комплекса X и $0 < \varepsilon < 1$, онда постоји $N_\varepsilon(A) \in \mathcal{T}_X$ т.д. је $A \subseteq N_\varepsilon(A)$ и A је јаки деформациони ретракт од $N_\varepsilon(A)$ (в. Хечера, стр. 523). Како је $A \in \mathcal{F}_X$ (став 63,6), то значи да важи следећи став.

Став 71: Сваки CW-пар је добар пар.

Штавише, за ове „ε-околине" поткомплекса A и B важи и да је

$$N_\varepsilon(A) \cap N_\varepsilon(B) = N_\varepsilon(A \cap B)$$

(Хечер, стр. 523), па на основу става 53 и теореме 46 закључујемо да важи и следећ чињеница.

Став 72: Ако је X CW-комплекс и A и B његови поткомплекси такви да је $X = A \cup B$, онда је $(X; A, B)$ исецајућа тројка

За крај овог одељка, уводимо категорију **CW**. Објекти ове категорије су, наравно, CW-комплекси (или ћелијски комплекси), а морфизми ће бити тзв. ћелијска пресликавања.

Дефиниција 73: Нека су X и Y CW-комплекси. Непрекидно пресликавањ $f: X \to Y$ називамо <u>ћелијским</u> ако је $f(X^n) \subseteq Y^n$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.

Јасно је да је композиција два ћелијска пресликавања опет ћелијско пресликавање, па заиста имамо (најављену) категорију, коју означавамо са **CW**, а зовемо је <u>категорија ћелијских комплекса и ћелијских пресликавања</u>

Приметимо да постоји очигледан функтор $\mathbf{CW} \to \underline{\mathrm{Top}}$, који „заборавља" CW-структуру: CW-комплексу X додељује се тополошки простор X, а ћелијском пресликавању $f: X \to Y$ непрекидно пресликавање $f: X \to Y$.

Став 74: Ако је X CW-комплекс и A његов поткомплекс, онда је и X/A CW-комплекс, при чему он има 0-ћелију A/A и још тачно онолико ћелија колико их има у $X\setminus A$. Карактеристичне функције тих ћелија су композиције

$$D^n \xrightarrow{\Phi^n_\alpha} X \xrightarrow{\pi} X/A$$

карактеристичне ф-је Φ^n_α ћелије $e^n_\alpha \subseteq X\setminus A$ у X и природне сурјекције π.

Δ: Како је X T_4 и $A\in\mathcal{F}_X$ (став 63,6), то је X/A Хаусдорфов простор. Опет због $A\in\mathcal{F}_X$ важи и да је рестрикција $\pi|_{X\setminus A}: X\setminus A \to X/A\setminus *$, где је $*=A/A$, хомеоморфизам (в. доказ теореме 50, део ①, на полеђини л. $\boxed{34}$)

$$\Rightarrow\ \mathring{D}^n \overset{\Phi^n_\alpha}{\approx} e^n_\alpha \overset{\pi}{\approx} \pi(e^n_\alpha),\ \text{тј.}\ \underline{\mathring{D}^n \overset{\pi\circ\Phi^n_\alpha}{\approx} \pi(e^n_\alpha)},\ \underline{\text{за све ћелије } e^n_\alpha\subseteq X\setminus A.}$$

Јасно је да је $X/A = \pi(X) = \underset{\pi(A)}{\underset{\parallel}{A/A}} \sqcup \bigsqcup\limits_{\substack{e^n_\alpha\subseteq X\setminus A\\ e^n_\alpha \text{ ћелија у } X}} \pi(e^n_\alpha)$. (као скуп) $\underline{\underline{(*)}}$ ✓

$$X = A\sqcup (X\setminus A) = A \sqcup \bigsqcup_{\substack{e^n_\alpha\subseteq X\setminus A\\ e^n_\alpha \text{ ћелија у } X}} e^n_\alpha$$

(C): $(*)$ ✓, за ћелију $e^n_\alpha \subseteq X\setminus A$ је

$$(\pi\circ\Phi^n_\alpha)(S^{n-1}) \subseteq \pi\Big(\bigcup_{i=1}^{k} e^{n_i}_{\alpha_i}\Big) = \bigcup_{i=1}^{k}\pi(e^{n_i}_{\alpha_i}) \subseteq A/A \cup \pi(e_1)\cup\cdots\cup\pi(e_m), \quad \underline{n_i<n}$$

где су $e_1,\dots,e_m$ све ћелије из скупа $\{e^{n_1}_{\alpha_1},\dots,e^{n_k}_{\alpha_k}\}$ са својством да нису у поткомплексу A. ✓

(W): $\Rightarrow)$ ✓

$\Leftarrow)$ $B\subseteq X/A$ т.д. је $\underline{B\cap\overline{\pi(e^n_\alpha)}\in\mathcal{F}_{X/A}}$ за све ћелије $e^n_\alpha\subseteq X\setminus A$

$$B \overset{?}{\in} \mathcal{F}_{X/A} \iff \pi^{-1}(B)\overset{?}{\in}\mathcal{F}_X \iff \underbrace{\pi^{-1}(B)\cap\overline{e^n_\alpha}}^{(1)} \overset{?}{\in}\mathcal{F}_X \text{ за све ћелије } e^n_\alpha$$

Приметимо да је $\underline{\underline{\text{или } A \subseteq \pi^{-1}(B)}}_{(i)}$ $\underline{\underline{\text{или } \pi^{-1}(B) \cap A = \emptyset}}_{(ii)}$ (јер или $A/A \in B$ или $A/A \notin B$

e^n_α - произв. ћелија комплекса X

$\boxed{1^\circ}$ $e^n_\alpha \subseteq A \implies \overline{e^n_\alpha} \subseteq A$

$$\pi^{-1}(B) \cap \overline{e^n_\alpha} = \begin{cases} \overline{e^n_\alpha}, & (i) \\ \emptyset, & (ii) \end{cases} \in \mathcal{F}_X$$

$\boxed{2^\circ}$ $e^n_\alpha \subseteq X \setminus A$

$\pi(\overline{e^n_\alpha}) \subseteq \overline{\pi(e^n_\alpha)}$ јер је π непр.

$$\pi^{-1}(B) \cap \overline{e^n_\alpha} = \pi^{-1}\big(\underbrace{B \cap \overline{\pi(e^n_\alpha)}}_{\overset{(1)}{\in} \mathcal{F}_{X/A}}\big) \cap \overline{e^n_\alpha} \in \mathcal{F}_X .$$

Приметимо да је, у ситуацији као у ставу 74, π једно ћелијско пресликаван