МАТЕМАТИКА

2021/2022.

Садржај курса:

1. увод (обнављање градива средње школе)
2. низови (конвергенција низова, редови)
3. функције (лимеси, изводи, испитивање функција)
4. интеграли (неодређени, одређени)
5. диференцијалне једначине (првог и другог реда)
6. вероватноћа

УВОД

Битни скупови:

- $\mathbb{N}$ – скуп природних бројева $(1, 2, 3, 4, \dots)$
- $\mathbb{Z}$ – скуп целих бројева $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$
- $\mathbb{Q}$ – скуп рационалних бројева (могу се записати у облику разломка $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, нпр. $\frac{1}{2}$, $\frac{-7}{12}$, $\frac{16}{8}$, 2, 0, 1.5, -3.2, …)
- $\mathbb{I}$ – скуп ирационалних бројева (не могу се записати у облику разломка, нпр. $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{3}$, …)
- $\mathbb{R}$ – скуп реалних бројева $(\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I})$
- $\mathbb{C}$ – скуп комплексних бројева (бројеви облика $x + i \cdot y$, где је $x, y \in R$, а i је „имагинарна јединица", тј. то је комплексан број са особином $i^2 = -1$)

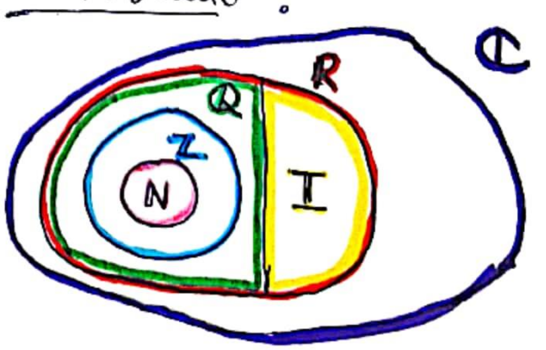
Приметимо:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

(сваки природан бр. је цео, сваки цео је рационалан итд.)

Сликовито:



Дефиниција Функција $f: X \to Y$ је правило које сваком елементу скупа X додели неки елемент скупа Y. Скуп X називамо доменом функције f, Y називамо кодоменом, а скуп $f(X)$ свих вредности функције f називамо сликом.

Напомена: у општем случају кодомен и слика не морају бити исто, тј. $f(X) \neq Y$. Такође, за домен функције користи се и ознака $\mathcal{D}_f$.

Нпр. $f(x) = x+3$ – правило које каже сваки број увећај за 3 (нпр. $f(2)=5$, $f(-7)=-4$, ...)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тј. $X = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(X) = \mathbb{R}$.

Дефиниција: Кажемо да је функција f парна уколико има домен симетричан у односу на 0 и уколико је

$$f(-x) = f(x), \text{ за свако } x \in \mathcal{D}_f.$$

Слично, функција f је непарна уколико има домен симетричан у односу на 0 и

$$f(-x) = -f(x), \text{ за свако } x \in \mathcal{D}_f.$$

Дефиниција: Функција f је периодична са периодом T (или, краће, T-периодична), ако је

$$f(x+T) = f(x), \text{ за свако } x \in \mathcal{D}_f.$$

Елементарне функције

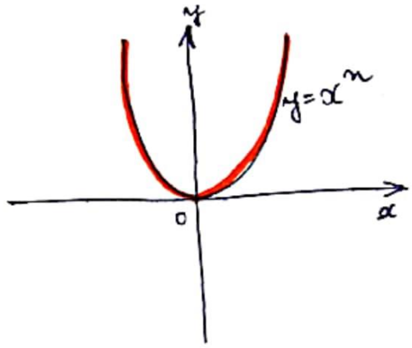
> **!** корисно за учити:
> - графици елементарних функција
> - нуле функција
> - понашање у бесконачности („леви и десни крај графика")

① степена функција

$$\boxed{f(x)=x^n,\quad n\in\mathbb{N}}$$

Разликују се два случаја.

n-парно:

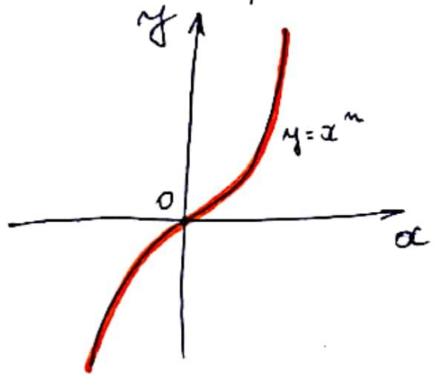


$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

$f(\mathbb{R})=[0,+\infty)$

f је парна

n-непарно:



$D_f=\mathbb{R}$

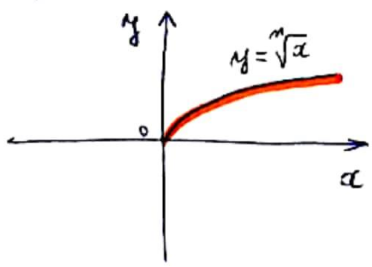
$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

f је непарна

② корена функција

$$\boxed{f(x)=\sqrt[n]{x},\quad n\in\mathbb{N}}$$

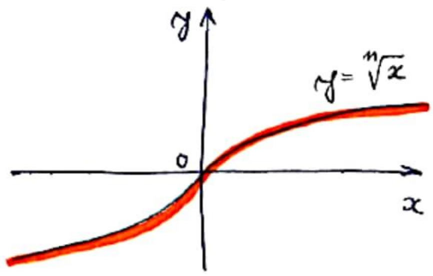
n-парно:



$D_f=[0,+\infty)$

$f([0,+\infty))=[0,+\infty)$

n-непарно:



$D_f=\mathbb{R}$

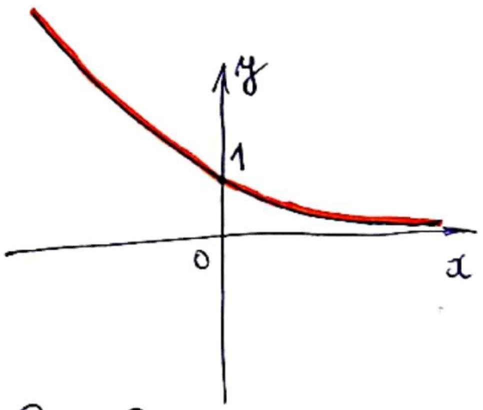
$f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

f је непарна

③ експоненцијална функција

$$\boxed{f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1}$$

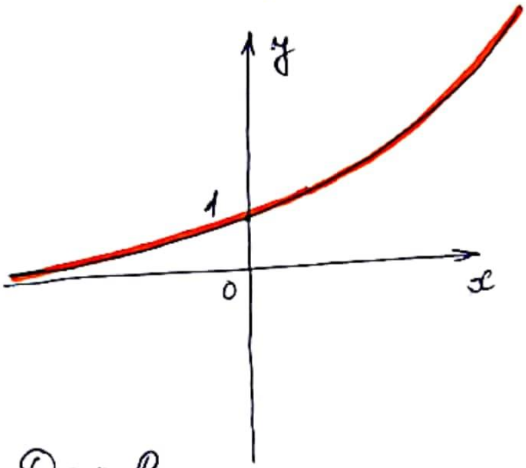
$0 < a < 1$:



$D_f = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

$a > 1$:



$D_f = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

особине експоненцијалне функције:

(1) $a^0 = 1, \quad a^1 = a$

(2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(3) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

(4) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(5) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

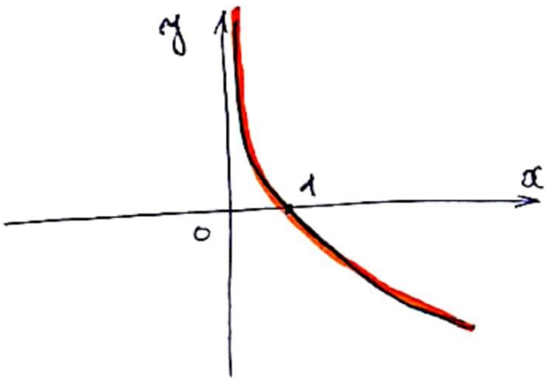
4 логаритамска функција

$$\boxed{f(x) = \log_a x, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1}$$

веза између експоненцијалне и логаритамске функције:

$y = \log_a x$ је еквивалентно са $a^y = x$

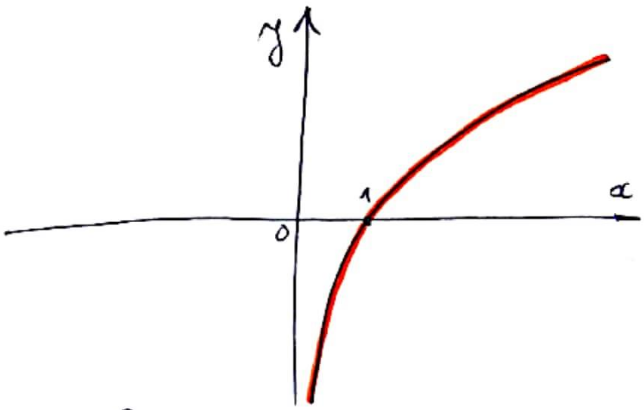
$0 < a < 1$:



$D_f = (0, +\infty)$

$f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$

$a > 1$:



$D_f = (0, +\infty)$

$f((0, +\infty)) = \mathbb{R}$

специјално, када је $a = e \approx 2,72$ - Ојлерова константа

користи се ознака:

$$\ln x = \log_e x$$

особине логаритамске функције:

(1) $\log_a 1 = 0, \ \log_a a = 1$

(2) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

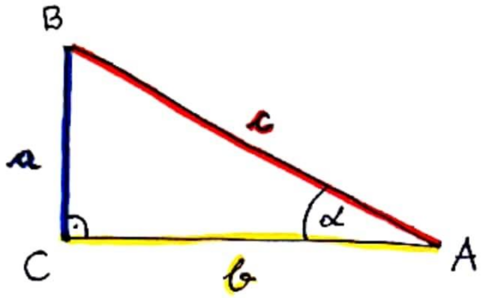
(3) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(4) $\log_a (x^y) = y \cdot \log_a x$

(5) $\log_{(a^y)} x = \frac{1}{y} \log_a x$

(6) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Тригонометријске функције



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{наспрамна ивица}}{\text{хипотенуза}}$$ „синус"

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{налегла ивица}}{\text{хипотенуза}}$$ „косинус"

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$ „тангенс"

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$ „котангенс"

особине тригонометријских функција:

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(2) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

(3) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

(4) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

(5) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

(6) $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

(7) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

! корисно за учити:
- особине триг. ф-ја
- вредности ф-ја у истакнутим тачкама (таблица)

таблица битних вредности:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞

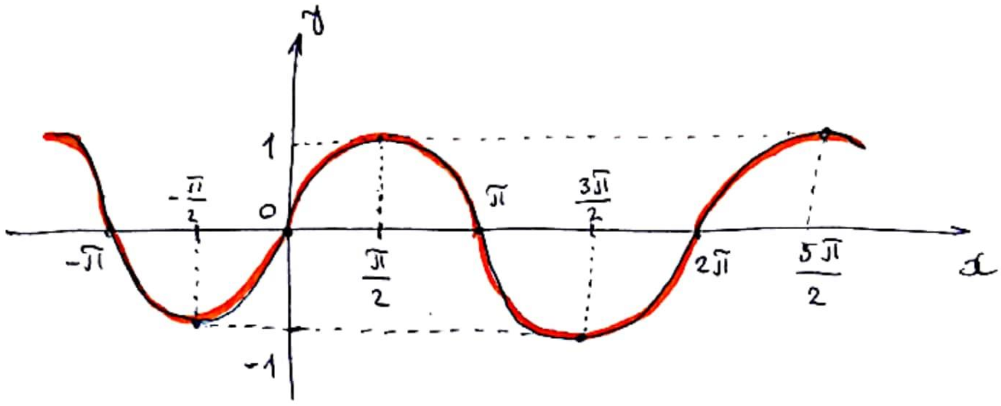
Напомена: $\pi \text{ rad} = 180°$, тј.

$\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$

$\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$

Графици тригонометријских функција

1) $\boxed{f(x) = \sin x}$



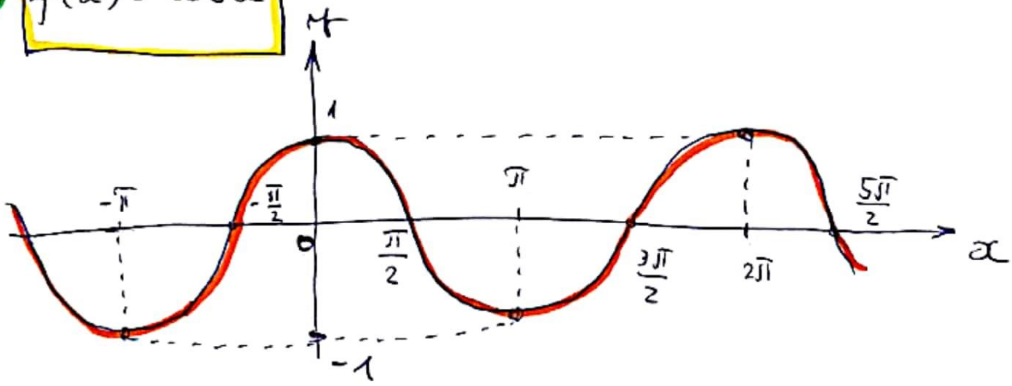
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

f је 2π-периодична

f је непарна

2) $\boxed{f(x) = \cos x}$



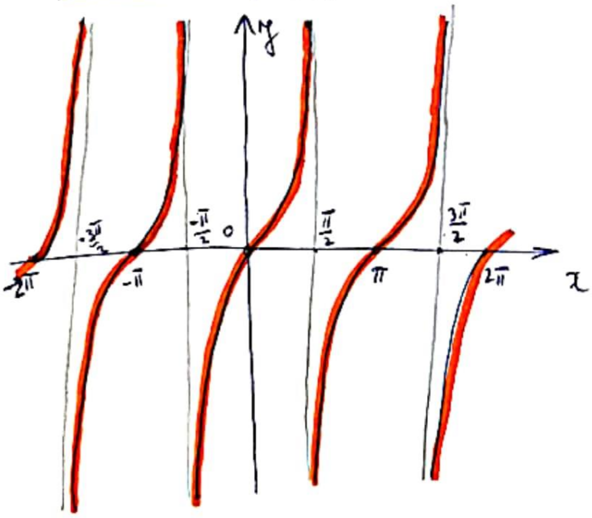
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

f је 2π-периодична

f је парна

3) $\boxed{f(x) = \operatorname{tg} x}$



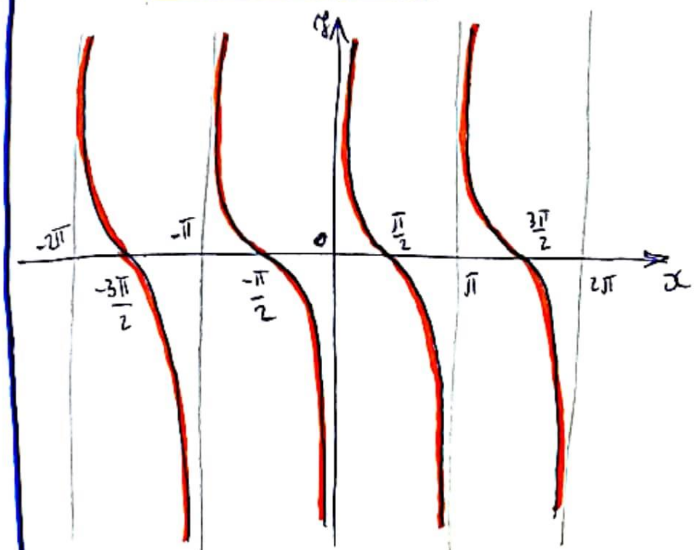
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$

f је π-периодична

f је непарна

4) $\boxed{f(x) = \operatorname{ctg} x}$



$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

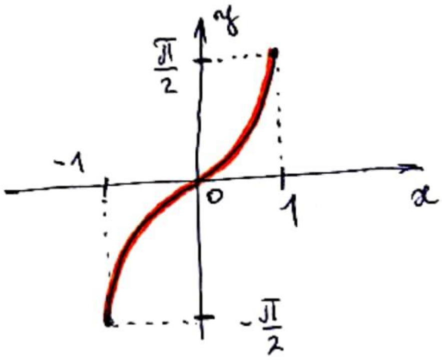
$f(\mathcal{D}_f) = \mathbb{R}$

f је π-периодична

f је непарна

Инверзне тригонометријске функције

① $\boxed{f(x) = \arcsin x}$ „аркус синус"

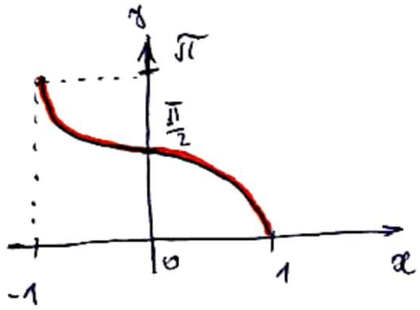


$$\mathcal{D}_f = [-1, 1]$$

$$f([-1,1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

f је непарна

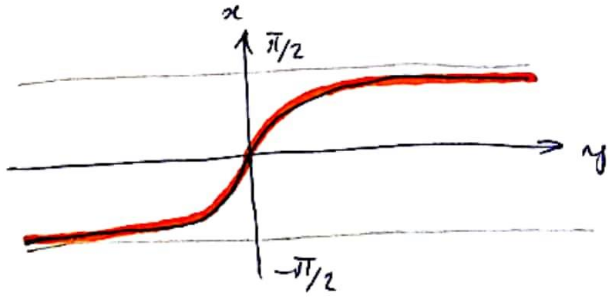
② $\boxed{f(x) = \arccos x}$ „аркус косинус"



$$\mathcal{D}_f = [-1, 1]$$

$$f([-1,1]) = [0, \pi]$$

③ $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg} x}$ „аркус тангенс"

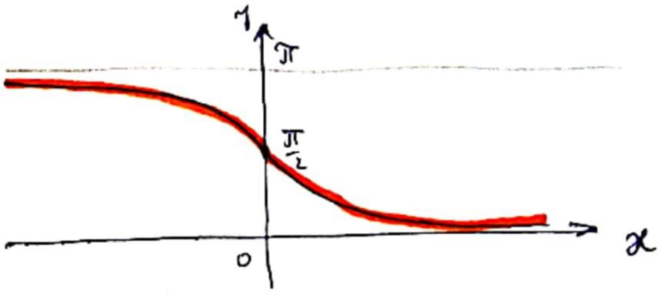


$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

f је непарна

④ $\boxed{f(x) = \operatorname{arcctg} x}$ „аркус котангенс"



$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

$$f(\mathbb{R}) = (0, \pi)$$

Експоненцијалне и логаритамске једначине

1. Решити једначине:

(а) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0,8x} = \frac{64}{125}$, (б) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4$.

решење (а)

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{0,8x} = \left(\frac{4}{5}\right)^{3}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{0,8x} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$$

$$0,8x = -3$$

$$x = -\frac{3}{0,8} = -3,75$$

(б) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4$, $x > 0$

аргумент логаритма мора бити позитиван

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = x$$

$$x = \frac{16}{81} > 0 \checkmark$$

Квадратна једначина:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

- Ако је $D > 0$: имамо 2 реална решења $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- Ако је $D = 0$: имамо 1 реално решење $x = \frac{-b}{2a}$
- Ако је $D < 0$: нема реалних решења

2. Решити једначине:

(а) $(\sqrt{3})^{x^2-x} = 27$, (б) $\log_x 125 = 3$.

решење (а)

$$3^{\frac{1}{2}(x^2-x)} = 3^3$$

$$\frac{1}{2}(x^2-x) = 3$$

$$x^2 - x = 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$a = 1,\ b = -1,\ c = -6$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\boxed{x_1 = 3,\ x_2 = -2}$$

(б) $\log_x 125 = 3$, $x>0,\ x\neq 1$

база логаритма мора бити у скупу $(0,1)\cup(1,+\infty)$

$x^3 = 125$

$x = \sqrt[3]{125}$

$\boxed{x=5} \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ ✓

---

3. Решити једначине:

(а) $4^x = 2\cdot 14^x + 3\cdot 49^x$, (б) $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

решење (а) Приметимо: све што је „на x" је дељиво са 2 и/или 7.

$(2^2)^x = 2\cdot(2\cdot 7)^x + 3\cdot(7^2)^x$

$2^{2x} = 2\cdot 2^x\cdot 7^x + 3\cdot 7^{2x}$ $/ : 7^{2x}$

могли смо да делимо и са 2^{2x}

$\frac{2^{2x}}{7^{2x}} = 2\cdot\frac{2^x\cdot 7^x}{7^x\cdot 7^x} + 3\cdot\frac{7^{2x}}{7^{2x}}$

$\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} = 2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^x + 3$

уведимо смену: $t=\left(\frac{2}{7}\right)^x$ и приметимо $t>0$

јер је експоненцијална функција увек позитивна

$t^2 = 2t+3$

$t^2-2t-3=0$

$t_{1/2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$

$\boxed{t_1=3}$, $t_2=-1<0$

(одбацујемо)

враћамо смену:

$3=\left(\frac{2}{7}\right)^x$

$\boxed{x=\log_{\frac{2}{7}} 3}$

(б) $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$, $x>0,\ x\neq 1$ ← збоі логаритма

користимо формулу: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}$$

уводимо смену: $t = \log_2 x$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \quad / \cdot t$$

$$t^2 + 1 = \frac{5}{2}t$$

$$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

вратимо смену:

$2 = \log_2 x_1$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \log_2 x_2$

$\boxed{x_1 = 2^2 = 4}$ $\qquad$ $\boxed{x_2 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}}$

---

4. Израчунати:

(а) $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27} = \log_3 2^6 \cdot \log_2 3^{-3} = 6 \cdot \log_3 2 \cdot (-3) \cdot \log_2 3 =$

$$= -18 \cdot \log_3 2 \cdot \frac{1}{\log_3 2} = -18$$

(б) $\ln\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\ln 10 + \ln 16 = 2\ln\frac{5}{2} - 2\ln(2\cdot 5) + \ln 2^4 =$

$$= 2(\ln 5 - \ln 2) - 2(\ln 2 + \ln 5) + 4\ln 2 =$$

$$= 2\ln 5 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + 2\ln 5 + 4\ln 2 = 0$$

ЗА ВЕЖБУ

1. $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
2. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

Биномна формула

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ – биномни коефицијент (чита се „n над k")

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$ – производ бројева од 1 до n (чита се „n факторијел")

Нпр. $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 10$$

Биномна формула: За свако $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

! Корисно за тест:
- шта је $n!$
- шта је $\binom{n}{k}$

Нпр.

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$= \binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}a^2b+\binom{3}{3}b^3$

Паскалов троугао – служи за брзо одређивање биномних коефицијената

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

...

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1\cdot a+1\cdot b$

$(a+b)^2 = 1\cdot a^2+2\cdot ab+1\cdot b^2$

$(a+b)^3 = 1\cdot a^3+3\cdot a^2b+3\cdot ab^2+1\cdot b^3$

$(a+b)^4 = 1\cdot a^4+4\cdot a^3b+6\cdot a^2b^2+4\cdot ab^3+1\cdot b^4$

$(a+b)^5 = 1\cdot a^5+5\cdot a^4b+10\cdot a^3b^2+10\cdot a^2b^3+5\cdot ab^4+1\cdot b^5$

Полиноми

Полином је израз облика $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где су $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Функцију $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ зовемо полиномијалном функцијом (надаље ћемо ју често краће звати полиномом). Број $x_0 \in \mathbb{C}$ за који је $p(x_0) = 0$ зове се нула (или корен) од $p(x)$.

Дељење полинома (подсетимо се на примеру)

$$
\begin{array}{l}
(x^2+x-6):(x+2) = \underbrace{x-1}_{\text{количник}} \\
\underline{-\,x^2 \;{-}\; 2x} \\
\quad -x-6 \\
\quad \underline{-x-2} \\
\qquad \;\; -4 \quad \leftarrow \text{остатак}
\end{array}
$$

! корисно за памтити:
- дељење полинома
- формула ⊛ (користићемо код интеграла)

Кад делимо $p(x)$ са $q(x)$, можемо то записати као:

$$\boxed{p(x) = q(x) \cdot \text{количник} + \text{остатак}} \quad ⊛$$

у горњем примеру:

$$x^2+x-6 = (x+2)\cdot(x-1) - 4$$

Безуов став: Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $(x-a)$ је $p(a)$.

Став: Нека је $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ полином са целобројним коефицијентима (тј. $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$) и нека је $\frac{r}{q} \in \mathbb{Q}$ нула полинома $p(x)$ (r и q су узајамно просте), тј. $p\left(\frac{r}{q}\right) = 0$.
Тада $r \mid a_0$ и $q \mid a_n$.

Специјално, све рационалне нуле су у скупу $\left\{ \frac{r}{q} \mid r \mid a_0,\ q \mid a_n \right\}$

1. Одредити све реалне нуле полинома $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Решење Ово је полином 4. степена па може имати највише 4. нуле. Прво одређујемо рационалне.

Из претходног става све потенцијалне рационалне нуле су у скупу $\left\{ \frac{r}{q} \mid r/4\ ,\ q/1 \right\} = \left\{ \frac{r}{q} \mid r \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}, q \in \{\pm1\} \right\} =$

$$= \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$$

Проверавамо да ли су нуле помоћу Безуовог става:

$p(-4) = 180 \neq 0 \quad p(-2) = 0 \quad p(-1) = 0$

$p(4) = 180 \neq 0 \quad p(2) = 0 \quad p(1) = 0$

нису нуле

јесу нуле

Дакле, све 4 нуле овог полинома су $-2, -1, 1, 2$.

Теорема 1 Сваки полином $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ се може на јединствен начин записати у облику $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$, где су $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ нуле полинома $p(x)$.

Теорема 2 Сваки полином $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ се може на јединствен начин представити у облику

$$p(x) = a_n (x - x_1)\cdots(x - x_k)(x^2 + b_1 x + c_1)\cdots(x^2 + b_l x + c_l),$$

где су $x_1, \dots, x_k$ реалне нуле полинома $p(x)$, а сви полиноми другог степена $x^2 + b_i x + c_i$ имају негативне дискриминанте (тј. $D_i = b_i^2 - 4c_i < 0$, тј. немају реалних решења). $(a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R})$

Приметимо: $k + 2l = n$.

2. Факторисати полином $p(z)=z^4+z^3+z^2+3z-6$ на чиниоце.

Решење Све рационалне нуле су у скупу:

$$\left\{\frac{r}{q} \;\middle|\; r \mid (-6),\ q \mid 1\right\} = \{-6,-3,-2,-1,1,2,3,6\}$$

$$\left.\begin{aligned} p(-6) &= 1092 \\ p(-3) &= 48 \\ p(-1) &= -8 \\ p(2) &= 28 \\ p(3) &= 120 \\ p(6) &= 1560 \end{aligned}\right\} \text{нису нуле полинома} \qquad \left.\begin{aligned} p(-2) &= 0 \\ p(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{јесу нуле полинома}$$

Дакле, $p(z)=(z-1)(z-(-2))\cdot q(z) = (z^2+z-2)\underbrace{q(z)}_{\text{треба одредити шта је ово}}$

$$q(z)=p(z):(z^2+z-2)$$

$$(z^4+z^3+z^2+3z-6):(z^2+z-2) = z^2+3$$

$$\begin{array}{l} \underline{-z^4-z^3+2z^2} \\ \quad 3z^2+3z-6 \\ \quad \underline{-3z^2-3z+6} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Дакле, $q(z)=z^2+3$. Пробамо да га раставимо:

$$D=0^2-4\cdot1\cdot3=-12<0 \Rightarrow q(z) \text{ нема реалних нула.}$$

Коначно, $\boxed{p(z)=(z-1)(z+2)(z^2+3)}$

ЗА ВЕЖБУ Наћи све рационалне нуле од $p(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

Особине степеновања и корeновања

Нека су $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$

(1) $a^1 = a$

(2) $a^0 = 1, \quad a \neq 0$

(3) $a^{m+1} = a \cdot a^m$

(4) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$

(5) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(6) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$

(7) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$

(8) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$

Нека су $a \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $m, n, q \in \mathbb{N}$

(1) $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

(2) $\sqrt[n]{a^n} = a$

(ако је $a \in \mathbb{R}$, онда
$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ непарно} \\ |a|, & n \text{ парно} \end{cases}$$
)

(3) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

(4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$

(5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

(6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

(7) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

1. Рационалисати изразе:

(а) $\frac{1}{\sqrt{2}-2}$, (б) $\frac{\sqrt{2021}+\sqrt{2020}}{\sqrt{2021}-\sqrt{2020}}$

решење (а) $\frac{1}{\sqrt{2}-2} \cdot \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{2}+2}{-2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

(б) $\frac{\sqrt{2021}+\sqrt{2020}}{\sqrt{2021}-\sqrt{2020}} \cdot \frac{\sqrt{2021}+\sqrt{2020}}{\sqrt{2021}+\sqrt{2020}} = \frac{\left(\sqrt{2021}+\sqrt{2020}\right)^2}{2021-2020} = 4041 + 2\sqrt{2021 \cdot 2020}$

НИЗОВИ

Дефиниција Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Користимо ознаку $a_n = a(n)$, па је низ заправо серија бројева $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots,$ а краће овај низ записујемо као (a_n).

(1) Низ (a_n) је ограничен одозго ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да је $a_n \leq M$, за свако $n \in \mathbb{N}$;

(2) Низ (a_n) је ограничен одоздо ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да је $a_n \geq M$, за свако $n \in \mathbb{N}$;

(3) Низ (a_n) је ограничен ако је ограничен и одоздо и одозго;

(4) Низ (a_n) је растући (строго растући) ако је
$a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$;

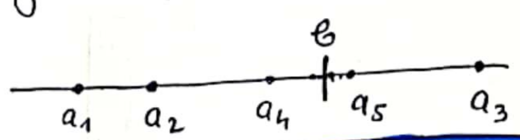
(5) Низ (a_n) је опадајући (строго опадајући) ако је
$a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$;

(6) Низ (a_n) је монотон ако је растући или опадајући.

Дефиниција: Кажемо да је $b \in \mathbb{R}$ гранична вредност (лимес) низа (a_n) ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n \geq n_0$ важи $|a_n - b| < \varepsilon$.

Пишемо: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = b}$

интуитивно: све се ближи b

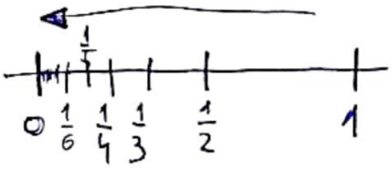


Дефиниција Кажемо да низ (a_n) тежи $+\infty$ (односно $-\infty$) ако за свако $M \in \mathbb{R}$ постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је $a_n > M$ (односно $a_n < M$). Тада пишемо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (односно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$). Ако низ има коначан лимес $b \in \mathbb{R}$, кажемо још да он конвергира ка b, а иначе дивергира.

Став: Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, онда је $a = b$, тј. гранична вредност низа је јединствена.

Примери: (1) $a_n = 17$, $n \in \mathbb{N}$ – константан низ: $17, 17, 17, 17, \dots$ све се „нагомилала" на 17 па је $\lim\limits_{n\to\infty} 17 = 17$

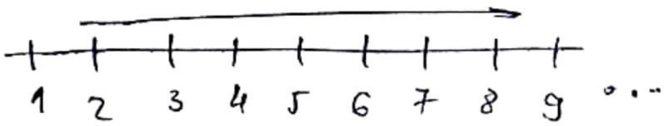
(2) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$



вредности низа се смањују и „гушћу" око нуле, па је

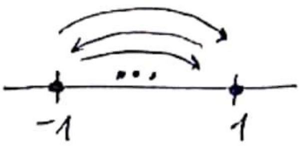
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(3) $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$



низ константно расте па је $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

(4) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$



чланови низа су наизменично -1 и 1, па пошто нема једне вредности око које се све „гомила", овај низ дивергира, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не постоји!

Особине лимеса

Став 1 Сваки конвергентан низ је ограничен.

Став 2 Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

(а) $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\cdot a$, $c\in\mathbb{R}$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\pm b$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot b$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, $b_n\neq 0, b\neq 0$.

Став (о 2 полицајца): Нека је $a_n \le c_n \le b_n$ за $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. Тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

Став 3 Нека је $a_n \le b_n$ за $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тада је $a < b$.

Став 4 Монотон и ограничен низ је конвергентан.

! За задатке је најкориснији став 2, као и став о 2 полицајца, док су остали више информативног карактера.

1. Одредити лимесе:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+3}{2n-4}$; (в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^2-7n+5}$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+16}$; (д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-7n^2+1}$.

Решење (а)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}\right)}_{k} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = 0\cdots 0 = 0$$

(б)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n+3}{2n-4}\,{}^{:n}_{:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7+\frac{3}{n}}{2-\frac{4}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 7 + 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - 4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{7+3\cdot 0}{2-4\cdot 0} = \frac{7}{2}$$

Нећемо убудуће овако детаљно писати

(в)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^2-7n+5}\,{}^{:n^2}_{:n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{7}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

(г)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+16}\,{}^{:n}_{:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{16}{n}} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

(д)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^3-7n^2+1}\,{}^{:n^3}_{:n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}} = \frac{0+0}{1-0+0} = 0$$

2. Одредити лимесе:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!-n!}{(n+1)!}$.

Решење (а)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+1-(n^3-3n^2+3n-1)}{n^2+2n+1+n^2-2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+2}{2n^2+2}{}^{:2}_{:2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+1}{}^{:n^2}_{:n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 3$$

(б) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!-n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n! - n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\big((n+2)(n+1)-1\big)}{(n+1)\cdot n!} =$$

! корисно за памтити:

$n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$

$(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

$(n+2)! = (n+2)\cdot(n+1)! =$

$\qquad = (n+2)(n+1)\cdot n!$

$\dots$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2-1}{n+1}{}^{:n}_{:n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+3) = +\infty$$

Лимеси које треба знати:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ за $a>0$

$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, за $|q|<1$

$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$, за $|q|>1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ($e \approx 2{,}72$ – Ојлерова константа)

3 Одредити лимесе:

(а) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$; (б) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+7^n}$; (в) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$

(г) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n+1}}+3^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}$; (д) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

$\boxed{\text{решење}}$ (а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}\begin{matrix}:2^n\\:2^n\end{matrix} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}} = 1$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+7^n}\begin{matrix}:7^n\\:7^n\end{matrix} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3\cdot 3^n}{7^n}+\frac{7\cdot 7^n}{7^n}}{\frac{3^n}{7^n}+1} =$

могли смо да делимо и са 7^{n+1}, али нисмо са 3^n нити 3^{n+1} јер не би добили леп резултат

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1} =$

користимо $\star\star\star\star$

$= \dfrac{3\cdot 0+7}{0+1} = 7$

користимо $\star$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}+1} = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n+1}}+3^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n+1]{2}+\sqrt[n+1]{3}}{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}} = \dfrac{1+1}{1+1} = 1$

објашњење зашто је $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{2} = 1$:

Низ $\sqrt[n]{2}$ изгледа овако: $2,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt[5]{2},\ \dots$

Низ $\sqrt[n+1]{2}$ изгледа овако: $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{2},\ \sqrt[5]{2},\ \sqrt[6]{2},\ \dots$

Дакле, ова два низа су иста сем што другом низу „фали" двојка на почетку, па је

$$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$$

(9) $$\lim_{n\to\infty}\left(\underset{\infty\ -\ \infty}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

овде је $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\to\infty$ па имамо „$\frac{1}{\infty}=0$"

Наредне задатке решавамо коришћењем лимеса . Циљ нам је да израз који буде дат претакујемо у облик $\left(1+\frac{1}{A}\right)^{A\cdot B}$ па ће лимес тог израза бити e^{B}, итд.

4. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+3}{4n+1}\right)^{4n}$.

Битан задатак због детаљног решења

решење

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{4n+1}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{4n+3}{4n+1}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n+3-(4n+1)}{4n+1}\right)^{4n}=$$

2. корак: намештамо на облик $1+\frac{1}{\dots}$

1. корак: намештамо да се појави $1+\dots$

3. корак: намештамо експонент

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{4n+1}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4n+1}{2}}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{4n+1}{2}}\right)^{\frac{4n+1}{2}}}_{\to e}{}^{\cdot\frac{2}{4n+1}\cdot 4n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{8n}{4n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n\ :n}{4n+1\ :n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{4+\frac{1}{n}}}=e^{2}$$

користимо

$\boxed{5.}$ Израчунати лимесе:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2+1}$; (в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n}$

$\boxed{\text{решење}}$ (а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{(-n)}}_{\to e}{}^{\cdot(-1)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}}_{\to e}{}^{\cdot\frac{1}{n^3}(n^2+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{n^2+1}{n^3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1\;:n^3}{n^3\;:n^3}}=$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1}}=e^{0}=1$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2-2n+1-(n^2-4n+2)}{n^2-4n+2}\right)^{n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-1}{n^2-4n+2}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-4n+2}{2n-1}}\right)^{n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-4n+2}{2n-1}}\right)^{\frac{n^2-4n+2}{2n-1}}}_{\to e}{}^{\cdot\frac{2n-1}{n^2-4n+2}\cdot n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{2n^2-n\;:n^2}{n^2-4n+2\;:n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}}=e^{2}$ ∎

6. Израчунати лимесе:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+7^n}$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+10^n+17^n}$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1^n+2^n+3^n+\dots+2019^n+2020^n}$.

решење Користимо теорему о 2 полицајца.

> подсетник:
>
> $a_n \le c_n \le b_n$
>
> и $a_n \to A$, $b_n \to A$,
>
> онда и $c_n \to A$

(а) Приметимо:

$$\underset{a_n}{\underset{\parallel}{7}} = \sqrt[n]{7^n} \le \underset{c_n}{\underset{\parallel}{\sqrt[n]{5^n+7^n}}} \le \sqrt[n]{7^n+7^n} = \underset{b_n}{\underset{\parallel}{\sqrt[n]{2\cdot 7^n}}}$$

У ознакама из теореме узмемо:

$$a_n = 7$$

$$b_n = \sqrt[n]{2\cdot 7^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 7$$

$$c_n = \sqrt[n]{5^n+7^n} .$$

Како је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 7 = 7$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\cdot 7 = 7$$

што је на основу теореме о 2 полицајца и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+7^n} = 7$$

(б)

$$\underset{a_n}{\underset{\parallel}{17}} = \sqrt[n]{17^n} \le \underset{c_n}{\underset{\parallel}{\sqrt[n]{3^n+10^n+17^n}}} \le \sqrt[n]{17^n+17^n+17^n} = \sqrt[n]{3\cdot 17^n} = \underset{b_n}{\underset{\parallel}{17\cdot\sqrt[n]{3}}}$$

Имамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 17$, па је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+10^n+17^n} = 17.$$

(б)
$$\underset{a_n}{\underset{\parallel}{2020}} = \sqrt[n]{2020^n} \le \underset{c_n}{\underset{\parallel}{\sqrt[n]{1^n+2^n+\dots+2019^n+2020^n}}} \le \sqrt[n]{\underbrace{2020^n+\dots+2020^n}_{2020}} = \underset{b_n}{\underset{\parallel}{\sqrt[n]{2020\cdot 2020^n}}}$$

Имамо да је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2020$,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 2020\cdot\sqrt[n]{2020} = 2020,$$

па је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\dots+2019^n+2020^n} = 2020$. ///

Из претходног задатка закључујемо:

дозвољено је користити ово на испиту

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\dots+a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}}$$

Битне везе између израза:

корисно за испит, а често се заборавља

$$\boxed{\log n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n}$$

„$\ll$" значи „много мање", тј. кад год делимо нешто мање већим добијамо 0, а кад делимо веће мањим добијамо ∞.
Нпр. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{2^n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$ итд.

$\boxed{7}$ Израчунати:

(а) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+(n+1)^2}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{(n+1)!}+\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\right)=0+0=0$$

(б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n+\ln n-5}{7^{n+1}+\log_7 n+7}\begin{array}{l}:7^n\\:7^n\end{array}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\ln n}{7^n}-\frac{5}{7^n}}{7+\frac{\log_7 n}{7^n}+\frac{7}{7^n}}=\frac{1}{7}$$

(в) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+n^{n+1}}{n!+n^n+3^n}\begin{array}{l}:n^n\\:n^n\end{array}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{n^n}+n}{\frac{n!}{n^n}+1+\frac{3^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty$$

делимо именилац и бројилац са оним што је „највеће"

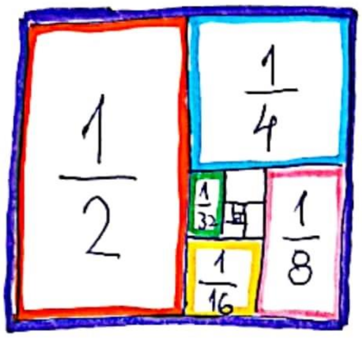
РЕДОВИ

Дефиниција Ред са члановима $a_1, a_2, a_3, \dots$ је израз $a_1+a_2+a_3+\cdots$, тј. краће $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. n-та парцијална сума овог реда је $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$.
За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ кажемо да конвергира ако постоји коначан лимес $S=\lim_{n\to\infty} S_n$ и тада се S назива сумом реда и пише се $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Ако ред не конвергира, каже се да дивергира.

У задацима ћемо само испитивати да ли ред конвергира или не. Нећемо рачунати S, што би било пуно теже.

Како је уопште могуће да кад саберемо бесконачно много бројева добијемо коначан резултат?
Ево једног таквог примера.

Пример: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\ldots=?$



Видимо да ако редом покријемо половину квадрата, па четвртину, па осмину итд. са ових бесконачно много сабирака ћемо покрити цео квадрат. ЈЕДАН цео квадрат, тј. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=1$.

Приметимо да смо ово другачије могли записати као $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots=1$, односно

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1}$$

Пример (1) $a_n=5$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=?$

Заправо, $\underbrace{5+5+5+5+\ldots}_{\infty}=?$

Логично је да је овај збир бесконачно, али уверимо се у то по дефиницији

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\underbrace{5+5+\ldots+5}_{n}=5n$$

$$S=\lim_{n\to\infty}5n=5\lim_{n\to\infty}n=\infty$$

Дакле, $\sum_{n=1}^{\infty}5=\infty$, па овај ред дивергира.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, па овај ред конвергира и његова сума је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(3) Геометријски ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \begin{cases} \frac{a_0}{1-q}, & |q| < 1 \\ \text{дивергира}, & |q| \geq 1 \end{cases}$$

Нпр. $\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 + 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{27} + \dots = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$,

па овај ред конвергира (јер $|q| = \frac{1}{3} < 1$);

$\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot 3^n$ - дивергира јер $|q| = 3 \geq 1$.

став Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају и ако су им суме $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, онда

(1) ред $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ конвергира и сума му је $A+B$;

(2) ред $\sum_{n=1}^{\infty} (c\cdot a_n)$ конвергира и сума му је $c\cdot A$.

Критеријуми за конвергенцију редова са позитивним члановима

НЕОПХОДАН УСЛОВ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ

(а) Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

(б) Ако је $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

Напомена: ако је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, не знамо да ли ред конвергира или не, већ овај критеријум користимо ако очекујемо да ред дивергира (увек користимо само (б)).

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1+4+9+16+25+\dots$

овде је $a_n = n^2$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$, па овај ред дивергира.

ПОРЕДБЕНИ КРИТЕРИЈУМ

Нека су $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такви да је $0 \leq a_n \leq b_n$ за $n \geq n_0$.

(а) Ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;

(б) Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, онда и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

Пример (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ конвергира и $\frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{3^n}$, па и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ конв.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ дивергира и $n^3 \geq n^2$, па и $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ дивергира.

Корисно за поредбени критеријум:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{конвергира за } \alpha > 1 \\ \text{дивергира за } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Нпр. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергирају, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ конвергирају.

Кошијев критеријум

Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима, такав да постоји $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тада

(1) ако је $r < 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;

(2) ако је $r > 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира;

(3) ако је $r = 1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можда конвергира, а можда и не (морамо користити неки други критеријум).

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$

$a_n = \frac{1}{n^n}$, $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$, па овај ред конвергира.

Даламберов критеријум

Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима, такав да постоји $r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тада

(1) ако је $q<1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;

(2) ако је $q>1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира;

(3) ако је $q=1$, ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можда конвергира, а можда и не (морамо користити неки други критеријум).

Пример $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$

$a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, па ред конвергира.

> **!** Приметимо да се у изразу за q појављује a_{n+1} ($(n+1)$-ви члан низа), а не a_n+1. Ово је честа грешка на испиту.

> Савет: ако се у реду појављује $n!$ радимо Даламбера, ако се појављује n-ти степен радимо Кошија, а ако они не прођу пробамо остале.

У свим наредним задацима текст је исти:
Испитати конвергенцију реда.

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

решење Због $n!$ пробамо Даламберов критеријум.

$a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n \cdot n!}{2^n\cdot(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0<1,$$

па ред конвергира на основу Даламберовог критеријума. ▨

$\boxed{2.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$ (јануар 2020.)

$\boxed{\text{решење}}$ $a_n = n^2 e^{-n} = \frac{n^2}{e^n}$ због експонента пробамо Кошија

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{e} = \frac{1}{e} < 1,$$

па зато ред конвергира на основу Кошијевог критеријума. ▨

$\boxed{3.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}}$ (1. колоквијум 2019.)

$\boxed{\text{решење}}$ $a_n = e^{\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}}$. Примећујемо да би било прилично тешко израчунати q из Кошијевог или Даламберовог критеријума.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sqrt{2+n^2}}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2+n^2}}{n} \frac{:n}{:n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{n^2}+1}}{1}} = e^1 = e \neq 0,$$

па ред дивергира јер није испуњен неопходан услов конвергенције. ▨

$\boxed{4.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}$ (јул 2020.)

$\boxed{\text{решење}}$ $a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}$

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - 1 + \frac{n-1}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n-1-(n+2)}{n+2}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-3}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-3}}\right)^{\frac{n+2}{-3}\cdot\frac{-3}{n+2}\cdot(n+2)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-3(n+2)}{n+2}} =$$

$$= e^{-3} = \frac{1}{e^3} < 1 \text{, па ред}$$

конвергира на основу Кошијевог критеријума. ▨

$\boxed{5.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+1)!-n!}$ (додатни рок 2020.)

$\boxed{\text{решење}}$ $a_n = \frac{7^n}{(n+1)!-n!}$ Због $n!$ радимо Даламбера.

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7^{n+1}}{(n+2)!-(n+1)!}}{\frac{7^n}{(n+1)!-n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7\cdot 7^n}{(n+2-1)(n+1)!}}{\frac{7^n}{(n+1-1)\cdot n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot n\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{7n\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{7n}{(n+1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{7n}{n^2+2n+1} = 0 < 1 \text{, па ред конвергира}$$

по Даламберовом критеријуму. ▨

$\boxed{6.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$

$\boxed{\text{решење}}$ $a_n = \frac{1}{n^2+5}$. Пробамо Кошија.

$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+5}} = 1$, па морамо користити други критеријум.

$\boxed{\text{знамо да је } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \text{ а слично је и } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\text{полином}} = 1, \text{ па је зато } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+5} = 1.}$

Пробамо Даламбера.

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2+5}}{\frac{1}{n^2+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n^2+2n+6} = 1,$$

па нам ни овај критеријум не даје решење.

Проверимо да ли је испуњен неопходан услов:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+5} = 0,$$

па јесте испуњен, али то нам не гарантује да ред конвергира. Остаје нам само поредбени критеријум на располагању.

Нека је $b_n = \frac{1}{n^2}$. За $n \geq 1$ имамо

$$n^2 \leq n^2+5, \text{ па је}$$

$$\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2+5}, \text{ тј.}$$

$$b_n \geq a_n.$$

Знамо да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира (стр. 31), па на основу поредбеног критеријума конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5}$. ▨

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\left(2020+\frac{1}{n}\right)^n}$ (септембар 2020.)

решење $a_n = \dfrac{n}{\left(2020+\frac{1}{n}\right)^n}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(2020+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{\left(2020+\frac{1}{n}\right)^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2020+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2020} < 1,$$ па ред конвергира

на основу Кошијевог критеријума. ▨

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{2^n \cdot n!}$

решење $a_n = \dfrac{n^n}{2^n \cdot n!}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n \cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{2\cdot 2^n \cdot (n+1)\cdot n!}}{\frac{n^n}{2^n \cdot n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{2n^n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1-1+\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} \approx \frac{2{,}72}{2} \approx 1{,}36 > 1,$$ па

ред дивергира на основу Даламберовог критеријума.

II НАЧИН:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!} = +\infty \neq 0,$$ па

јер $n^n >> n!$

ред дивергира јер није испуњен неопходан услов. ▨

$\boxed{9.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(n+1)!}$ (јун 2020.)

решење $a_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(n+1)!}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(n+2)\cdot(n+1)!}}{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{(n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3}}{n+2} = 0 < 1,$$ па дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

$\boxed{10.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n}+3n^5}{2n^6}\right)^n$ (август 2020.)

решење $a_n = \left(\frac{\sqrt[n]{n}+3n^5}{2n^6}\right)^n$

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}+3n^5}{2n^6} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3n^5}{2n^6} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n^6} + \frac{3}{2n}\right) = 0+0 = 0 < 1,$$ па ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

$\boxed{11.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}\cdot 5^{n+1}}{\sqrt{n}}$

решење $a_n = \frac{3^{n-1}\cdot 5^{n+1}}{\sqrt{n}}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n\cdot 5^{n+2}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{3^{n-1}\cdot 5^{n+1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3\cdot 3^{n-1}\cdot 5\cdot 5^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{3^{n-1}\cdot 5^{n+1}}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{15\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 15 \cdot \sqrt{\frac{n^{:n}}{n+1_{:n}}} = \lim_{n\to\infty} 15 \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 15 > 1$$

па ред дивергира на основу Даламберовог критеријума. $\boxed{}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

решење $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Пробамо Кошија.

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$, па морамо радити неки други критеријум. Даламбер би био превише компликован (а и што би се добило $\tau = 1$).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$ па није испуњен неопходан услов конвергенције па ред дивергира. $\boxed{}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+\sqrt{n}}$

решење $a_n = \frac{2}{n+\sqrt{n}}$. Коши и Даламбер би дали $\tau = 1$.

Неопходан услов је испуњен јер је $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+\sqrt{n}} = 0$. Остаје само поредбени критеријум.

$$n+\sqrt{n} \leq n+n = 2n$$

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2n}$$

$$\frac{2}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

Нека је $b_n = \frac{1}{n}$. Имамо $a_n \geq b_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и знамо да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира (стр. 31), па дивергира и дати ред на основу поредбеног критеријума. ■

ФУНКЦИЈЕ

Основни појмови

На почетку курса смо се подсетили шта је то функција, шта су домен, кодомен и слика, када је функција парна, непарна, односно периодична (стр. 2). Сада ћемо навести још битних појмова.

Дефиниција Ако су $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ две функције, њихова композиција $g \circ f: X \to Z$ дефинише се као

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), \quad \text{за } x \in X.$$

Пример $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = \sin x$.

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sin x) = \sin^2 x + 3,$$

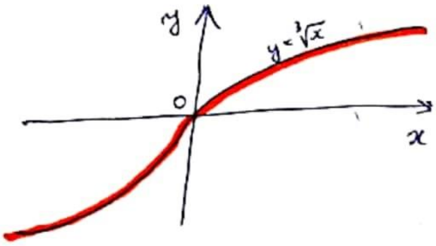
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2+3) = \sin(x^2+3).$$

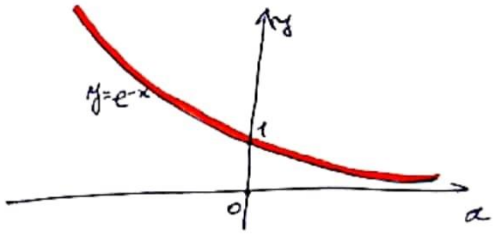
Дефиниција Кажемо да је функција f (строго) растућа ако за свако $x_1 < x_2$ важи да је $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\big(f(x_1) < f(x_2)\big)$, где су x_1, x_2 у домену од f.

Дефиниција Кажемо да је функција f (строго) опадајућа ако за свако $x_1 < x_2$ важи да је $f(x_1) \geq f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$, где су x_1, x_2 у домену од f.

Пример $f(x) = \sqrt[3]{x}$ је растућа

$f(x) = e^{-x}$ је опадајућа



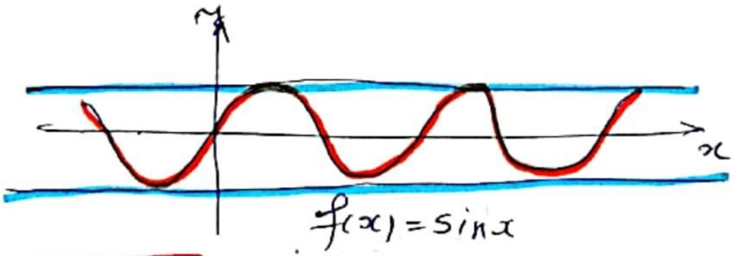


Дефиниција Кажемо да је f (строго) монотона ако је (строго) растућа или (строго) опадајућа.

Дефиниција Кажемо да је f ограничена одоздо ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да је $f(x) \geq M$, за свако $x \in D_f$.

Дефиниција Кажемо да је f ограничена одозго ако постоји $M \in \mathbb{R}$ такво да је $f(x) \leq M$, за свако $x \in D_f$.

Пример $f(x) = \sin x$ је ограничена и одоздо и одозго.



} све се налази у овом појасу.

дефиниција Кажемо да је f ограничена ако је ограничена и одоздо и одозго.

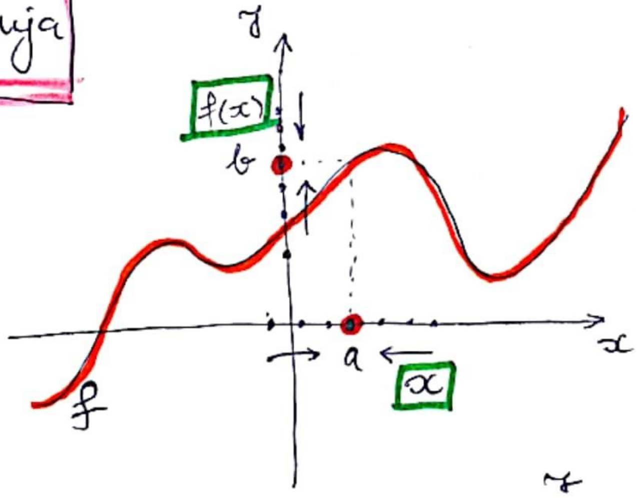
Гранична вредност функције

Дефиниција Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке $a \in \mathbb{R}$. Кажемо да је $b \in \mathbb{R}$ гранична вредност (лимес) функције f када x тежи a ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за свако x са особином $|x - a| < \delta$ важи да је $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пишемо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

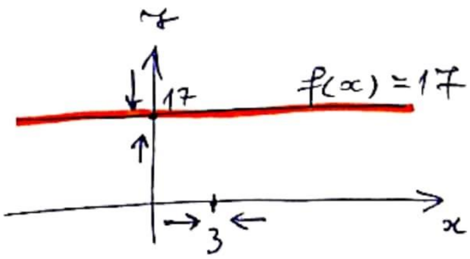
Може се дефинисати и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ и то се ради слично као код лимеса низа.

Илустрација

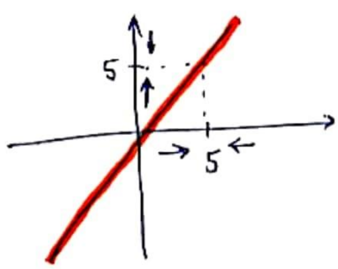


Када се x приближава a, оно ка чему се приближава $f(x)$ је лимес функције.

Пример (1) $\lim\limits_{x \to 3} 17 = 17$



(2) $\lim\limits_{x \to 5} x = 5$



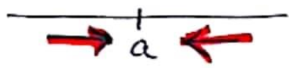
(3) $\lim\limits_{x \to -1} (3x + 2) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$

(4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$

Леви и десни лимес

ове лимесе дефинишемо неформално и они ће нам бити потребни једино за одређивање асимптота функције

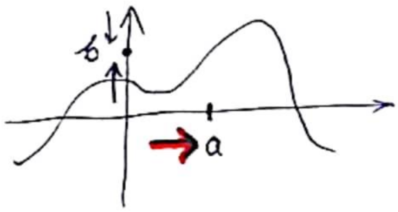
Код обичног лимеса када x тежи a, нама се x приближава a са обе стране.



Код левог, односно десног лимеса, x ће се приближавати a само са леве, односно десне стране.

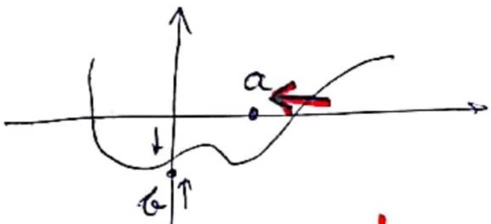
Леви лимес:

$$\lim_{x\to a-} f(x)$$



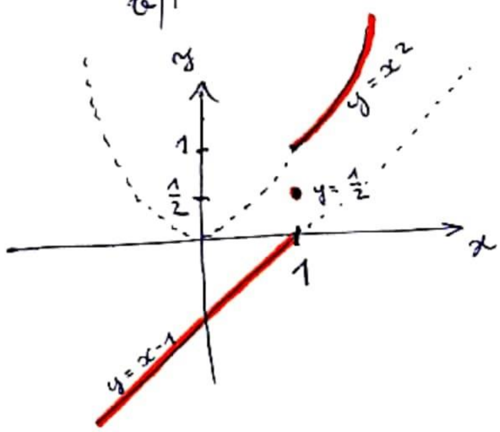
Десни лимес:

$$\lim_{x\to a+} f(x)$$



Пример

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<1 \\ \frac{1}{2}, & x=1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} x^2 = 1$$

Теорема Ако постоје $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$, онда

(а) $\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$;

(б) $\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$;

(в) $\lim_{x\to a}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot\lim_{x\to a} f(x)$;

(г) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, где је $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$.

! $\frac{\text{КОНСТАНТА}}{\infty}=0$, $\frac{\text{КОНСТАНТА}}{0}=\infty$, $+\infty+\infty=\infty$, $\infty\cdot\infty=\infty$

1. Израчунати лимесе:

(а) $\lim_{x\to 7} x^2=7^2=49$;

(б) $\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=5$;

(в) $\lim_{x\to 3}\left(x^2-3x+15\right)=9-3\cdot 3+15=15$;

(г) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$.

2. Израчунати лимесе:

(а) $\lim_{x\to\infty}\frac{14x^2+5x-1}{7x^2+8x+3}$; (б) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3-1}$; (в) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

решење

(а) $\lim_{x\to\infty}\frac{14x^2+5x-1\ \ :x^2}{7x^2+8x+3\ \ :x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{14+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{7+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{14}{7}=2$

(б) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1\ \ :x^3}{x^3-1\ \ :x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}=\frac{0+0}{1-0}=0$

(в) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0$

Корисни лимеси

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

3. Израчунати лимесе

(а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$; (б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; (в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

решење

(а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}}_{\to 1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$ (јер $\cos 0=1$)

(б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{\to 1}\cdot 5=5$

(в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\overbrace{\sin\frac{x}{2}}^{\to 1}\cdot\overbrace{\sin\frac{x}{2}}^{\to 1}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 4}=\frac{1}{2}$

4. Израчунати лимесе:

(а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$; (б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{3}{2x^2+1}}$.

решење

(а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{(-x)\cdot(-1)}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

(б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{3}{2x^2+1}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3x^2}{2x^2+1}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{3x^2}{2x^2+1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x^2+1}} = e^0 = 1.$

5. Израчунати лимесе:

(а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25} = \dfrac{5}{0} = \infty$

(б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1} = \dfrac{0}{2} = 0$

6. Израчунати лимесе:

(а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; (б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-2x+x^2}-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-x^2}$.

решење

$\boxed{\infty-\infty}$

(а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

(б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3-2x+x^2}-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-x^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}} =$

$\boxed{\frac{0}{0}}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-2x+x^2-(x^2-x+1)}{x(2-x)\left(\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x(2-x)\left(\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{3-2x+x^2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)} = \dfrac{1}{2(\sqrt{3}+\sqrt{3})} = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$

Диференцијални рачун

Дефиниција Први извод функције f у тачки x је

$$f'(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

уколико овај лимес постоји.

Таблица извода

$f(x)$	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	0
x^{α}	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
a^{x} $(a>0, a\neq 1)$	$a^{x} \ln a$
e^{x}	e^{x}
$\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Правила диференцирања

1. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f(x)$

2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

5. $\left((f \circ g)(x)\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\boxed{1.}$ Наћи изводе функција:

(а) $y = x^4 - 3x^2 + 7x + 5$; (б) $y = x^5 \cdot \sqrt[3]{x^4}$;

(в) $y = \frac{3}{x^2} + \sqrt{x} - 3\log_7 x + 2\operatorname{arctg} x + \sqrt{\pi} + 13$

$\boxed{\text{решење}}$ (а) $y' = (x^4 - 3x^2 + 7x + 5)' =$

$= 4x^3 - 3\cdot 2x^2 + 7 + 0 =$

$= 4x^3 - 6x^2 + 7$

(б) $y' = \left(x^5 \cdot \sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^5 \cdot x^{\frac{4}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{15+4}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{19}{3}}\right)' = \frac{19}{3} \cdot x^{\frac{16}{3}}$

(в) $y' = \left(3x^{-2} + \sqrt{x} - 3\log_7 x + 2\operatorname{arctg} x + \sqrt{\pi} + 13\right)' =$

$= 3\cdot(-2)\cdot x^{-3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\cdot\frac{1}{x\ln 7} + \frac{2}{1+x^2} + 0 + 0 =$

$= -\frac{6}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x\ln 7} + \frac{2}{1+x^2}$

$\boxed{2.}$ Наћи изводе функција:

(а) $y = xe^x$; (б) $y = \frac{x^2}{x+1}$; (в) $y = \frac{x\cdot\sin x}{x^2+1}$;

(г) $y = \frac{(x+1)\ln x}{(x-1)e^x}$.

$\boxed{\text{решење}}$ (а) $y' = (x)'\cdot e^x + x\cdot(e^x)' = e^x + xe^x$

(б) $y' = \frac{(x^2)'\cdot(x+1) - x^2\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

(в) $y' = \frac{(x\sin x)'(x^2+1) - x\sin x\,(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{((x)'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)')(x^2+1) - x\sin x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{(\sin x + x\cos x)(x^2+1) - 2x^2 \sin x}{(x^2+1)^2}$$

(г) $$y' = \frac{((x+1)\ln x)' \cdot (x-1)e^x - (x+1)\ln x\,((x-1)e^x)'}{((x-1)e^x)^2} =$$

$$= \frac{((x+1)'\ln x + (x+1)(\ln x)')(x-1)e^x - (x+1)\ln x\,((x-1)'e^x + (x-1)(e^x)')}{(x-1)^2 e^{2x}} =$$

$$= \frac{\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)(x-1)e^x - (x+1)\ln x\,(e^x + (x-1)e^x)}{(x-1)^2 e^{2x}}$$

$\boxed{3.}$ Одредити изводе:

(а) $y = \sqrt{x^2+3}$; (б) $y = \sin^2(2-x)$; (в) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(г) $y = \sqrt{\ln(\sin x)}$.

$\boxed{\text{решење}}$ (а) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot (x^2+3)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

(б) $$y' = 2\sin(2-x) \cdot (\sin(2-x))' = 2\sin(2-x) \cdot \cos(2-x) \cdot (2-x)' =$$

$$= 2\sin(2-x)\cos(2-x) \cdot (-1)$$

(в) $$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot(x+1) - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2(x^2+1)}{(x+1)^2}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

(г) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin x)}} \cdot (\ln(\sin x))' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin x)}} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin x)}} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

4. Наћи извод функције $y = e^{2x^2-4x}\cdot\sin x$. (август 2020.)

решење

$$y' = \left(e^{2x^2-4x}\right)'\cdot\sin x + e^{2x^2-4x}\cdot(\sin x)' =$$

$$= e^{2x^2-4x}\cdot(2x^2-4x)'\cdot\sin x + e^{2x^2-4x}\cdot\cos x =$$

$$= e^{2x^2-4x}(4x-4)\sin x + e^{2x^2-4x}\cos x.$$

ЗА ВЕЖБУ Наћи изводе функција:

1. $y = \ln\sqrt{3x-5}$
2. $y = \arcsin\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$
3. $y = e^{e^x}$
4. $y = \dfrac{tg(\sqrt{x})}{\sqrt{tg x}}$

! за испит је веома битно знати изводе јер се користе у више задатака

Изводи вишег реда

$$f''(x) = (f'(x))', \quad f'''(x) = (f''(x))', \ldots, f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

5. (а) $y = xe^x$, $y''' = ?$; (б) $y = x^3 - x^2 + x - 1$, $y^{(5)} = ?$

решење (а) $y' = e^x + xe^x$

$y'' = e^x + e^x + xe^x =$

$= 2e^x + xe^x$

$y''' = 2e^x + e^x + xe^x =$

$= 3e^x + xe^x$

(б) $y' = 3x^2 - 2x + 1$

$y'' = 6x - 2$

$y''' = 6$

$y^{(4)} = 0$

$y^{(5)} = 0$

Лопиталово правило

! Корисно за више задатака на испиту.

Теорема Нека су f и g диференцијабилне у некој околини тачке $a \in \mathbb{R}$, сем евентуално у a, и нека је

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Тада постоје лимеси $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ и једнаки су.

1. Израчунати:

(а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$; (б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$; (в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$.

решење

(а)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \underset{,,\frac{0}{0}"}{\overset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

могли смо још једном да применимо Л.П. да се нисмо сетили да је $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(б)
$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}} \underset{,,\frac{0}{0}"}{\overset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)'}{\left(1-\sin\frac{\pi x}{2}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{-\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} = ,,\frac{1}{0}" = \infty$$

(в)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5} \underset{,,\frac{\infty}{\infty}"}{\overset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{5x^4} \underset{,,\frac{\infty}{\infty}"}{\overset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{20x^3} \underset{,,\frac{\infty}{\infty}"}{\overset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{60x^2} \underset{,,\frac{\infty}{\infty}"}{\overset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$\underset{,,\frac{\infty}{\infty}"}{\overset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{120x} \underset{,,\frac{\infty}{\infty}"}{\overset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{120} = \infty$$

Осим лимеса облика $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ за које користимо Лопиталово правило, неки лимеси облика $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞ итд. се могу решити помоћу Лопиталовог правила тако што трансформишемо израз у разломак.

2. Израчунати:

(а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; (б) $\lim\limits_{x\to 0} x^3\ln x$; (в) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;

(г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$; (д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$.

$\boxed{\ln 1=0}$

решење (а) $$\lim_{x\to 1}\underbrace{\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)}_{\boxed{\infty-\infty}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\cdot\ln x}\ \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Л.П.}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}\ \begin{matrix}\cdot x\\ \cdot x\end{matrix}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}\ \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{Л.П.}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x+\frac{x}{x}+1}=\frac{-1}{0+1+1}=-\frac{1}{2}$$

(б) $$\lim_{x\to 0}x^3\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}\ \underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\overset{\text{Л.П.}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^3}{3}\right)=0$$

могли смо да напишемо и као $\frac{x^3}{\frac{1}{\ln x}}$, али би нам било теже после за рачун

! јако битна фора у задатку

(в) $$\lim_{x\to 0}x^x=\lim_{x\to 0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to 0}e^{x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\ln x}=$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-x)} = e^0 = 1$$

❗ кад год у бази и експоненту имамо x, запишемо функцију у облику $e^{\ln(\dots)}$.

(г) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

знамо да је ово e, али хоћемо да провежбамо Лопитала

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = e^1 = e.$$

(д) $$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot\cos x}{\sin x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}$$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos x + (1-\cos x)(-\sin x)}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x - \sin x}{\cos x} = \frac{2\cdot 0\cdot 1 - 0}{1} = 0$$

$\boxed{3.}$ $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$$ (1. колоквијум 2019.)

Решење $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\cdot\sin x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}$$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{1+1-0} = 0$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$ (фебруар 2020.)

решење

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(e^{2x}+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{2x}+x)}{x}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}}$$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{2x}+x}\cdot\left(2e^{2x}+1\right)}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}}$$

$$\overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4e^{2x}}{2e^{2x}+1}} \overset{\text{л.п.}}{\underset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8e^{2x}}{4e^{2x}}} = e^{2}$$

Испитивање функција

Дефиниција Функција f је непрекидна у тачки x_0 ако је дефинисана у тој тачки и ако је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$.

Кораци при испитивању функције:

1. домен
2. парност, непарност, периодичност
3. нуле и знак
4. монотоност и екстремуми
5. конвексност и превојне тачке
6. асимптоте
7. график

1 ДОМЕН

Домен је скуп свих вредности за које функција има смисла. Одређујемо га кад год испитујемо нешто за функцију.

> ❗ обратити пажњу на разломке, ln, √, tg итд.

1. Одредити домене функција:

(а) $f(x)=\dfrac{\ln x\cdot\sqrt[3]{x}}{x-7}$;

(б) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$;

(г) $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^2+1}}$

(в) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$

(д) $f(x)=\dfrac{x}{3+2\ln x}$

решење

(а) $x-7\neq 0$, тј $x\neq 7$ ← због разломка

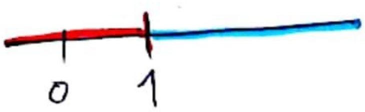
$x>0$ ← због ln

$D_f=(0,7)\cup(7,+\infty)$

(б) $\dfrac{x-1}{2}>0\ /\cdot 2$ ← због ln

$x-1>0$

тј. $x>1$



$D_f=(1,+\infty)$

(в) $x+3\neq 0$, тј. $x\neq -3$ ← због разломка

$\dfrac{x-3}{x+3}>0$ ← због ln

$- - - - - \;\overset{3}{|}\; + +$ $\quad x-3$

$- - \;\overset{-3}{|}\; + + + + + +$ $\quad x+3$

$+ + \;\overset{-3}{|}\; - - - - - \;\overset{3}{|}\; + + +$ $\quad \dfrac{x-3}{x+3}$

$x \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$

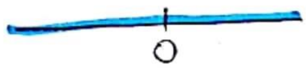
$\mathcal{D}_f = (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$

(г) $x^2+1 \neq 0$ ← због разломка

↑ увек важи

$\sqrt[5]{\;}$ је дефинисан и за позитивне и за негативне бројеве па не прави проблема

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$



(д) $x > 0$ ← због ln

$3 + 2\ln x \neq 0$ ← због разломка

$2\ln x \neq -3$

$\ln x \neq -\frac{3}{2}$

$x \neq e^{-\frac{3}{2}} > 0$

$\mathcal{D}_f = (0, e^{-\frac{3}{2}}) \cup (e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$

2 ПАРНОСТ И НЕПАРНОСТ

2. Испитати парност функција

(а) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$; (б) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2-1}$; (в) $f(x) = \ln x$

$\boxed{\text{решење}}$ Увек прво одредимо домен!

(а) $\mathcal{D}_f = ?$

$x^2+1\neq 0$ ✓ ← због разломка

$\mathcal{D}_f = (-\infty, +\infty)$ – јесте симетричан у односу на 0.

$$f(-x) = \frac{(-x)^4-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^4-1}{x^2+1} = f(x)$$

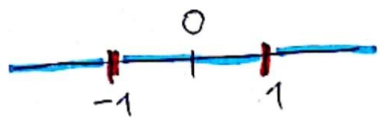
f је парна.

(б) $\mathcal{D}_f = ?$

$x^2-1\neq 0$ ← због разломка

$(x-1)(x+1)\neq 0$

$x\neq 1$ и $x\neq -1$



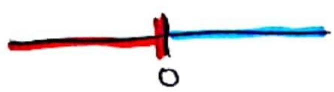
$\mathcal{D}_f = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ – јесте симетричан у односу на 0

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2-1} = \frac{-\sin x}{x^2-1} = -f(x)$$

f је непарна.

(в) $\mathcal{D}_f = ?$

$x>0$ ← због ln



$\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$ – није симетричан у односу на 0, па f није ни парна ни непарна.

$\square$

3. НУЛЕ И ЗНАК

3. Одредити нуле и испитати знак функције

(а) $f(x) = (x-1)\cdot e^x$; (б) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2-1}$

решење

(а) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	$-$	$+$
e^x	$+$	$+$
f	$-$	$+$

$f(x) = 0$

$(x-1)\cdot e^x = 0 \;/ : e^x$ ← увек >0

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$f(x) > 0$ за $x \in (1, +\infty)$

$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 1)$

$f(x) = 0$ за $x = 1$

(б) $\dfrac{1}{x^2-1} > 0$ ← због ln

$\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} > 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$	$+$	$-$	$+$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$x^2 - 1 \neq 0$ ← због разломка

$x \neq 1, x \neq -1$

$\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f(x) = 0$

$$\ln \frac{1}{x^2-1} = 0$$

$$\frac{1}{x^2-1} = e^0 = 1 \quad / \cdot (x^2-1)$$

$$1 = x^2 - 1$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$$

$x = \sqrt{2}$ или $x = -\sqrt{2}$ ← нуле функције f.

знак:

$$\ln \frac{1}{x^2-1} > 0$$

$$\frac{1}{x^2-1} > 1$$

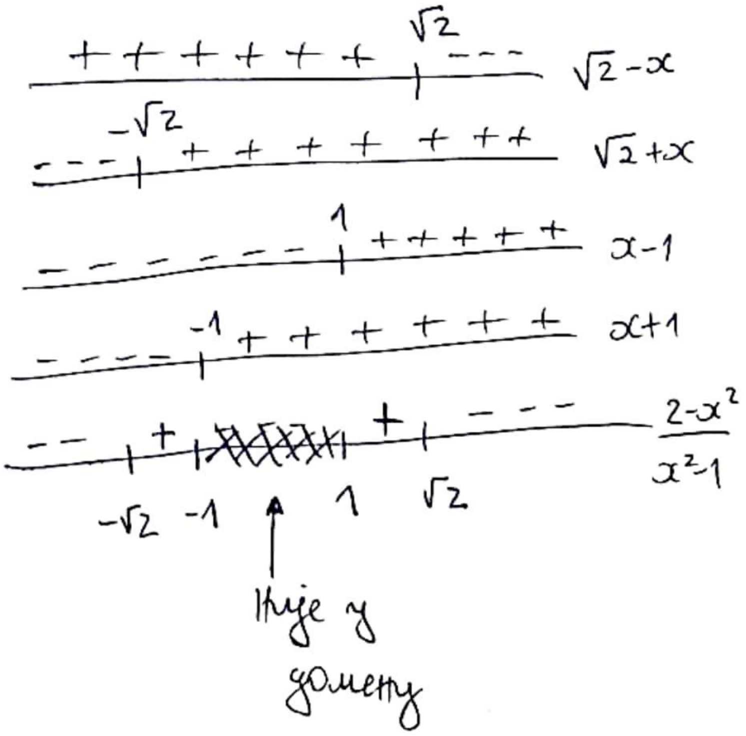
$$\frac{1}{x^2-1} - 1 > 0$$

$$\frac{1-(x^2-1)}{x^2-1} > 0$$

$$\frac{1-x^2+1}{x^2-1} > 0$$

$$\frac{2-x^2}{x^2-1} > 0$$

$$\frac{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x-1)(x+1)} > 0$$



$f(x) > 0$ за $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

$x = -\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{2}$ су нуле функције. ■

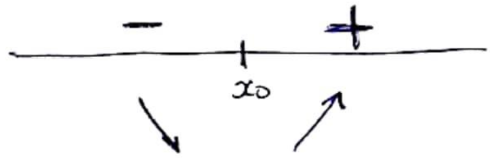
4 МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМУМИ

Ако је $f'(x_0) = 0$, кажемо да је x_0 стационарна тачка и то је потенцијални екстремум (минимум или максимум).

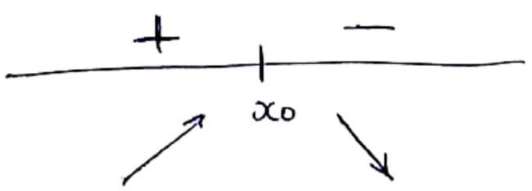
Ако је $f'(x) > 0$ на неком скупу A, онда f расте на A, а ако је $f'(x) < 0$, онда f опада на A.

Стационарна тачка x_0 ће бити екстремум уколико f' мења знак у њој и то:

- x_0 је локални минимум ако је $f'(x) > 0$ за $x > x_0$ и $f'(x_0) < 0$ за $x < x_0$



- x_0 је локални максимум ако је $f'(x) > 0$ за $x < x_0$ и $f'(x_0) < 0$ за $x > x_0$



$\boxed{4.}$ Испитати монотоност функције (1. колоквијум 2019.)

$$y = x^2 e^{\sqrt{x}}.$$

$\boxed{\text{решење}}$ увек прво тражимо домен!

$x \geq 0 \leftarrow$ због корена

$$\mathcal{D}_y = [0, +\infty)$$

$$f'(x) = \left(x^2 e^{\sqrt{x}}\right)' = (x^2)' \cdot e^{\sqrt{x}} + x^2 \cdot \left(e^{\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= 2xe^{\sqrt{x}} + x^2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' =$$

$$= 2xe^{\sqrt{x}} + x^2 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= e^{\sqrt{x}} \left(2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x}} \right) =$$

$$= e^{\sqrt{x}} \left(2x + \frac{1}{2} x\sqrt{x} \right) =$$

$$= e^{\sqrt{x}} \cdot x \left(2 + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) =$$

$$= \boxed{e^{\sqrt{x}} \cdot x \cdot \frac{4+\sqrt{x}}{2}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\underset{\neq 0}{e^{\sqrt{x}}} \cdot x \cdot \frac{4+\sqrt{x}}{2} = 0$$

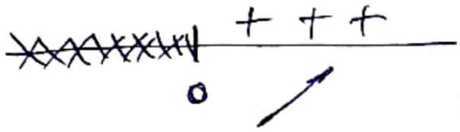
$\boxed{x=0}$ или $4+\sqrt{x}=0$, тј. $\sqrt{x}=-4$ што је немогуће!

$x=0$ је потенцијални екстремум

$$f'(x) = \underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\frac{4+\sqrt{x}}{2}}_{>0} \geq 0$$

↑ због домена

Дакле, f' је свуда позитивно, тј. f расте на $(0,+\infty)$



f расте на $(0,+\infty)$ и $x=0$ је локални минимум.

5. Испитати монотоност функције (јануар 2020.)

$$y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{x+1}$$

решење $x \neq -1$ ← због разломка

$$\boxed{(\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$D_y = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$$

$$f'(x) = \left(x - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{x+1}\right)' = 1 - 2\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' =$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}}\cdot\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2} =$$

$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{(x+1)^2}{2x^2+2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot 2 = 1 - \frac{2}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2+1-2}{x^2+1} = \boxed{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1}$$

$f'(x) = 0$

$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$\boxed{x = 1}$ или $x = -1$ ← није у домену

$x = 1$ је потенцијални екстремум

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$x-1$	$-$		$-$		$+$
$x+1$	$-$		$+$		$+$
$\frac{x^2-1}{x^2+1} = f'(x)$	$+$	$*$	$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

f расте на $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

f опада на $(-1,1)$

$x = 1$ је локални максимум. ▨

6. Испитати монотоност функције (јун 2020.)

$$y = e^{x^3-9x^2+24x+1}$$

решење $\mathcal{D}_y = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(e^{x^3-9x^2+24x+1}\right)' = e^{x^3-9x^2+24x+1} \cdot (x^3-9x^2+24x+1)' =$$

$$= (3x^2-18x+24)\, e^{x^3-9x^2+24x+1} =$$

$$= 3(x^2-6x+8)\underbrace{e^{x^3-9x^2+24x+1}}_{\text{увек позитивно}}$$

$f'(x) = 0$ за $x^2-6x+8=0$

$$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$x_1 = 4, \quad x_2 = 2$

потенцијални екстремуми

$$x^2-6x+8 = (x-4)(x-2)$$

		2		4	
$x-4$	$-$		$-$		$+$
$x-2$	$-$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

f расте на $(-\infty, 2)\cup(4,+\infty)$,

f опада на $(2,4)$,

$x=2$ је локални максимум,

$x=4$ је локални минимум. ■

7. Испитати монотоност функције $y=\dfrac{e^x}{x}$. (Септембар 2020.)

решење $D_y=?$

$x\neq 0$ ← због дељења

$D_y=\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

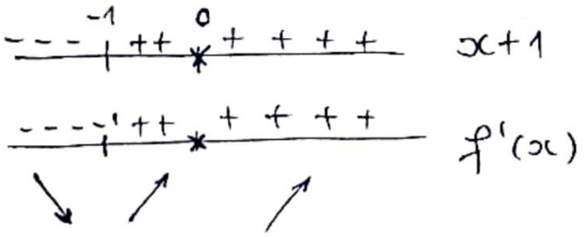
$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{e^x\cdot x+1\cdot e^x}{x^2}=\frac{e^x(x+1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ за $e^x(x+1)=0 \quad /:e^x$ ← никад није 0

$x+1=0$

$\boxed{x=-1}$ – потенцијални екстремум

x^2 и e^x су позитивне на целом домену, па на знак f' утиче само $x+1$:



f расте на $(-1,0)\cup(0,+\infty)$,

f опада на $(-\infty,-1)$

$x=-1$ је тачка локалног минимума. ■

8. Испитати монотоност функције $y = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x}$. (Додатни рок 2020.)

решење $D_y = ?$

$x > 0 \leftarrow$ због $\ln$

$\ln x \neq 0 \leftarrow$ због дељења

тј. $x \neq e^0 = 1$

$$D_y = (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot \ln x - \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{(\ln x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot \ln x - \frac{1}{x}\cdot \ln x - \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x(\ln x)^2}.$$

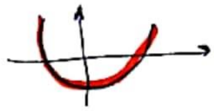
$f'(x) \neq 0$ за свако $x \in D_y$. Такође, $(\ln x)^2 > 0$ и $x > 0$ на целом домену, па је $f'(x) < 0$ на целом домену, тј.

f опада на D_y. ■

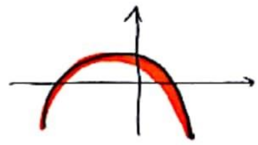
5 КОНВЕКСНОСТ И ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ

Дефиниција Функција $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ је конвексна (конкавна) ако је за свако $x_1,x_2\in(a,b)$ и $\alpha\in(0,1)$

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$



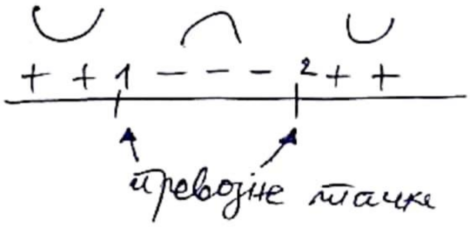
$$\left(f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\ge \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\right)$$



Став Нека $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ има у свакој тачки други извод. Ако је $f''(x)\ge 0$ на (a,b), функција је конвексна на (a,b), а ако је $f''(x)\le 0$, функција је конкавна на (a,b).

Ако други извод мења знак у тачки x_0, кажемо да је x_0 превојна тачка.

Нпр.

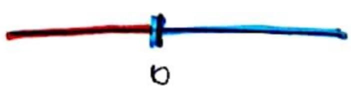


9. Испитати конвексност функције $y=x\cdot\operatorname{arctg}(3\sqrt{x})$. (фебруар 2020)

решење $\mathcal{D}_y=?$

$x\ge 0$ ← због корена

$\mathcal{D}_y=[0,+\infty)$



$$f'(x) = \left(x\cdot \operatorname{arctg}(3\sqrt{x})\right)' = 1\cdot \operatorname{arctg}(3\sqrt{x}) + x\cdot\frac{1}{1+(3\sqrt{x})^2}\cdot(3\sqrt{x})' =$$

$$= \operatorname{arctg}(3\sqrt{x}) + \frac{x}{1+9x}\cdot\frac{3}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \operatorname{arctg}(3\sqrt{x}) + \frac{3\sqrt{x}}{2(1+9x)}$$

> Много рачуна, али вежбамо изводе ☺

$$f''(x) = \left(\operatorname{arctg}(3\sqrt{x}) + \frac{3\sqrt{x}}{2(1+9x)}\right)' =$$

$\cdot\sqrt{x}$

$$= \frac{1}{1+9x}\cdot\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}\cdot 2(1+9x) - 3\sqrt{x}(0+18)}{(2(1+9x))^2} =$$

$\cdot\sqrt{x}$

$$= \frac{1}{1+9x}\cdot\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{3(1+9x)-3\cdot 18x}{4(1+9x)^2\cdot\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{3}{(1+9x)\cdot 2\sqrt{x}} + \frac{3+27x-54x}{4(1+9x)^2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{3\cdot 2\cdot(1+9x) + 3 - 27x}{4(1+9x)^2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{6+54x+3-27x}{4(1+9x)^2\sqrt{x}} = \frac{9(1+3x)}{4(1+9x)^2\sqrt{x}}$$

$f''(x)=0$ када је $9(1+3x)=0$, тј. $1+3x=0$, тј. $x=-\frac{1}{3}$,

али $-\frac{1}{3} \notin D_y=[0,+\infty)$, па ово штурпо није превојна тачка.

$(1+9x)^2$ и $\sqrt{x}$ су увек позитивни, једино $1+3x$ мења знак

$$\begin{array}{l} - - - \;\; -\tfrac{1}{3} \;\; + + \;\; 0 \;\; + + + \quad 1+3x \\ \cancel{\text{XXXXXXXXXX}} \;\; 0 \;\; + + + + \quad f'' \\ \qquad\qquad\qquad \cup \end{array}$$

није у домену!

Дакле, f је конвексна на целом домену $[0,+\infty)$

$\boxed{10.}$ Испитати конвексност функције $y=\ln^2 x+x$. (Август 2020)

$\boxed{\text{решење}}$ $D_y=?$

$x>0 \leftarrow$ због $\ln$

$D_y=(0,+\infty)$

$\ln^2 x=(\ln x)^2=(\ln x)\cdot(\ln x)$ што није исто што и $\ln(x^2)$!

$$f'(x)=(\ln^2 x+x)'=2\ln x\cdot\frac{1}{x}+1=\frac{2\ln x}{x}+1$$

$$f''(x)=\left(\frac{2\ln x}{x}+1\right)'=\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot 2\ln x}{x^2}+0=$$

$$=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

$f''(x)=0$ за $1-\ln x=0$, тј. $\ln x=1$, тј. $x=e^1=e$

Дакле, $x=e$ је потенцијална преводна тачка

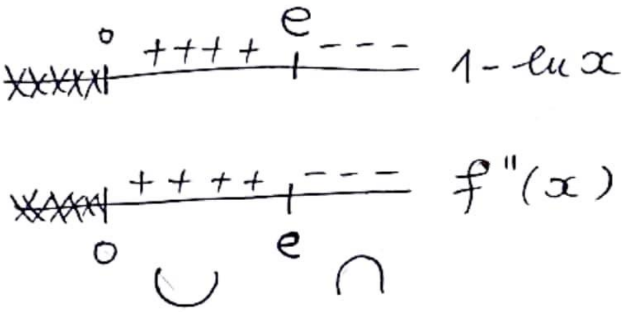
$x^2>0$ на домену, па на знак утиче само $1-\ln x$.

Истражимо знак ове функције:

$$1-\ln x>0 \qquad\qquad 1-\ln x<0$$

$$\ln x<1 \qquad\qquad \ln x>1$$

$$x<e \qquad\qquad x>e$$



f је конвексна на $(0,e)$,

f је конкавна на $(e,+\infty)$,

$x=e$ је преводна тачка

$\boxed{11.}$ Испитати конвексност функције $y=\frac{x}{x-3}$.

$\boxed{\text{решење}}$ $D_y=?$

$y\neq 3$ ← због дељења са $x-3$

$D_y=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-3)-1\cdot x}{(x-3)^2}=\frac{-3}{(x-3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-3)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{6(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{6}{(x-3)^3}$$

$f''(x)\neq 0$ за свако $x\in D_y$, па f нема

преводних тачака.

	$(-\infty, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x-3$	$- - -$	*	$+ +$
$(x-3)^3$	$- - -$	*	$+ +$
$f''(x)$	$- - -$	*	$+ +$
	$\cap$		$\cup$

f је конвексна на $(3,+\infty)$,

f је конкавна на $(-\infty,3)$.

Напомена Разлог зашто смо радили мање задатака из конвексности него из монотоности је само то што су сви ови задаци слични, само код монотоности испитујемо f', а код конвексности f''.

6 АСИМПТОТЕ

Постоје 3 врсте асимптота:

1. вертикалне асимптоте

ако је $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\infty$,

онда је права $x=a$ вертикална асимптота;

кандидате за a налазимо у крајевима домена.

2. хоризонталне асимптоте

ако је $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$, онда је

$y=b$ хоризонтална асимптота

③ косе асимптоте

ако постоје коначни лимеси

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - k\cdot x\right),$$

онда је права $y = k\cdot x + n$ коса асимптота.

$\boxed{\text{Напомене}}$ **(1)** Хоризонталне и косе асимптоте могу бити различите у $+\infty$ и у $-\infty$, али ми нећемо радити такве задатке, па зато рачунамо само $\lim\limits_{x\to\infty}$, а не посебно $\lim\limits_{x\to+\infty}$ и посебно $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

(2) Постојање косе асимптоте искључује постојање хоризонталне и обрнуто.

(3) Редослед тражења асимптота је небитан.

$\boxed{12}$ Одредити асимптоте функције $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. (1. колоквијум 2020.)

$\boxed{\text{решење}}$ $D_y = ?$

$x \neq 0$ због разломка, па је $D_y = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

кандидат за вертикалну асимптоту

вертикалне асимптоте

$$\lim_{x\to 0-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$$ ← не знамо одавде да ли је асимптота

$$0 \cdot e^{-\infty}, \quad e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{Л.П.}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{\text{Л.П.}}{=}}$$

$$0 \cdot e^{+\infty}$$
$$0 \cdot \infty$$

$$\stackrel{ЛП}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{2 \cdot \frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = +\infty,$$ па права

$x = 0$ јесте вертикална асимптота.

Хоризонталне асимптоте

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{(x^2 e^{\frac{1}{x}})}_{\infty \cdot e^0} = +\infty,$$ па нема хор. ас.

Косе асимптоте

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

па функција нема косих асимптота. ■

$\boxed{13.}$ Одредити асимптоте функције $y = x\sqrt{\frac{x}{x-6}}$. (Јул 2020)

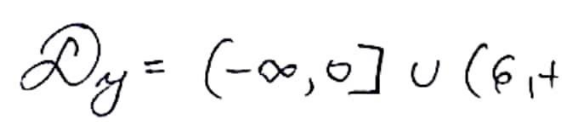
$\boxed{\text{Решење}}$ $\mathcal{D}_y = ?$

$x \neq 6 \leftarrow$ због разломка

$\frac{x}{x-6} \geq 0 \leftarrow$ због корена

	0		6	
x	$- - -$	$+ + +$		$+ +$
$x-6$	$- - -$	$- - -$		$+ +$
$\frac{x}{x-6}$	$+ +$	$- - -$		$+ +$

$$\mathcal{D}_y = (-\infty, 0] \cup (6, +\infty)$$



вертикалне асимптоте

кандидати: $x=0$ и $x=6$

$$\lim_{x\to 0-} x\sqrt{\frac{x}{x-6}} = 0$$, па ово није асимптота

(десни лимес не можемо тражити јер функција није дефинисана десно од 0!)

$$\lim_{x\to 6+} x\sqrt{\frac{x}{x-6}} = +\infty$$, па $x=6$ јесте верт. ас.

(слично, није дефинисан $\lim\limits_{x\to 6-}$)

хоризонталне асимптоте

$$\lim_{x\to\infty} x\sqrt{\frac{x}{x-6}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}\begin{matrix}:x^3\\ \\ :x^3\end{matrix} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^3}}} = \infty$$

„$\frac{1}{0}$"

па нема хор. ас.

косе асимптоте

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x-6}}\begin{matrix}:x\\ \\ :x\end{matrix} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{6}{x}}} = 1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x}{x-6}} - 1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{x\left(\sqrt{\frac{x}{x-6}}-1\right)}_{\infty\cdot(1-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x-6}}-1}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Л.П.}}{=} \frac{0}{0}$$

$$\stackrel{\text{ЛП}}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x-6}}} \cdot \frac{x-6-x}{(x-6)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x-6}{x}} \cdot \frac{-6}{(x-6)^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 3 \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{x-6}{x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2-12x+36}}_{\to 1} = 3$$

Права $y = 1 \cdot x + 3$ је коса асимптота. ■

$\boxed{14.}$ Одредити асимптоте функције $y = \dfrac{x^2+5}{x^2-4}$.

решење $\mathcal{D}_y = 0$

$x^2 - 4 \neq 0 \leftarrow$ због разломка

$(x-2)(x+2) \neq 0$

$x \neq \pm 2$

$\mathcal{D}_y = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

вертикалне асимптоте

кандидати: $x = -2$ и $x = 2$

$\lim\limits_{x\to -2-} \dfrac{x^2+5}{x^2-4} = +\infty$, та $x = -2$ јесте верт. ас.

$\left(\text{„}\frac{9}{+0}\text{"}\right)$

$\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{x^2+5}{x^2-4} = -\infty$, та $x = 2$ јесте верт. ас.

$\left(\text{„}\frac{9}{-0}\text{"}\right)$

хоризонталне асимптоте

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^2-4} = 1 \text{, па } y=1 \text{ јесте хор. ас.}$$

косе асимптоте

Како имамо хор. ас., нема косих. ▨

15. Одредити асимптоте функције $y = \operatorname{arctg}(x^2)$.

решење $\mathcal{D}_y = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

вертикалне асимптоте

Нема верт. ас. јер је домен $\mathbb{R}$.

хоризонталне асимптоте

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\operatorname{arctg}(x^2)}_{\text{„}\operatorname{arctg}(+\infty)\text{"}} = \frac{\pi}{2} \text{, па је } y = \frac{\pi}{2} \text{ хор. ас.}$$

косе асимптоте

Како имамо хор. ас., нема косих. ▨

7 ГРАФИК

На испиту неће бити задатака са цртањем графика већ само кораци у испитивању долазе у обзир (погледати рокове!).

16. Испитати ток и скицирати график функције $y=\frac{x}{x-5}$.

Решење

1. Домен $D_y=(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$

2. Парност $f(x)$ није ни парна, ни непарна, ни периодична

3. Нуле и знак

	$(-\infty,0)$	$(0,5)$	$(5,+\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

$f(x)>0$ на $(-\infty,0)\cup(5,+\infty)$

$f(x)<0$ на $(0,5)$

$f(x)=0$ за $x=0$.

Решење овог задатка је у кратким цртама

4. Монотоност $f'(x)=\frac{x-5-x}{(x-5)^2}=\frac{-5}{(x-5)^2}<0$ за свако $x\in D_y$, па f опада на целом домену и нема екстремума.

5. Конвексност $f''(x)=\frac{(-5)\cdot(-2)}{(x-5)^3}=\frac{10}{(x-5)^3}$

	$(-\infty,5)$	$(5,+\infty)$
$x-5$	$-$	$+$
$(x-5)^3$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$ ($\cap$)	$+$ ($\cup$)

f је конвексна на $(5,+\infty)$

f је конкавна на $(-\infty,5)$

нема превојних тачака

6. Асимптоте

В.А. $\lim\limits_{x\to5+}\frac{x}{x-5}=+\infty$

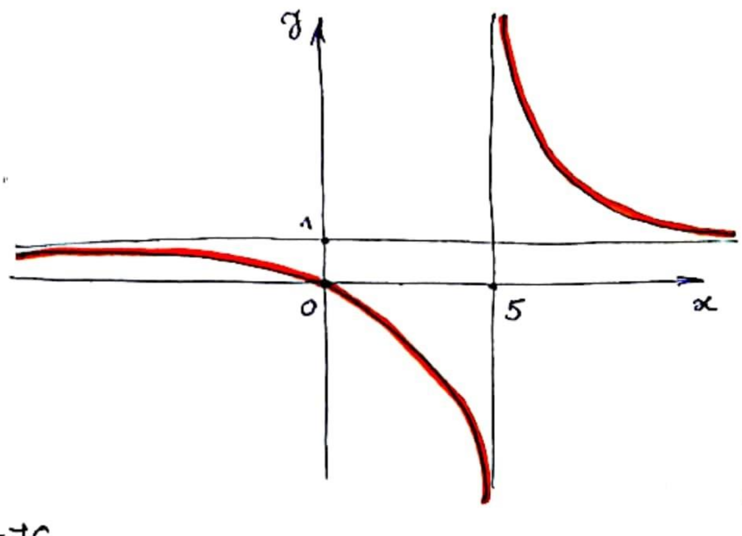
$x=5$ јесте в.а.

Х.А. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-5}=1$

$y=1$ је х.а.

К.А. - нема их јер има х.а.

7. График



ИНТЕГРАЛИ

Неодређени интеграли

Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција.
Диференцијабилна функција $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ за коју важи

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a,b]$$

назива се примитивном функцијом функције f.
Скуп свих примитивних функција функције f назива се неодређеним интегралом функције f и пише се

$$\int f(x)\,dx = \{\, F(x) \mid F'(x) = f(x),\ x \in [a,b] \,\}.$$

Ако је $F(x)$ примитивна функција од $f(x)$, тада је и $G(x) = F(x) + c$ такође примитивна.
Штавише, сваке две примитивне функције се разликују за константу па има смисла писати

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

где је $F(x)$ било која примитивна функција од $f(x)$.

Таблица интеграла

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + C$
$x^{\alpha},\ \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$a^{x},\ a>0, a\neq 1$	$\frac{a^{x}}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Став $\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx.$

!

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx \quad !!!$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx} \quad !!!$$

Ово је честа грешка на испиту.

$\boxed{1.}$ (α) $\int (4x^3+7x^2-8x+5)\,dx = 4\cdot\int x^3 dx + 7\cdot\int x^2 dx - 8\cdot\int x\,dx + \int 5\,dx =$

$$= 4\cdot\frac{x^4}{4} + 7\cdot\frac{x^3}{3} - 8\cdot\frac{x^2}{2} + 5\cdot x + C$$

(β) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}dx + \int \frac{1}{x}\,dx =$

$$= \frac{1}{-\frac{2}{3}+1}\cdot x^{-\frac{2}{3}+1} + \ln|x| + C = 3\sqrt[3]{x} + \ln|x| + C$$

(γ) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$

$$= x - \operatorname{arctg} x + C$$

(δ) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

(ε) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$

$$= \operatorname{tg} x - x + C$$

(στ) $\int \frac{9-x}{3+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{3+\sqrt{x}}\,dx = \int (3 - x^{\frac{1}{2}})\,dx =$

$$= 3x - \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot x^{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= 3x - \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C$$

Смена променљиве

Став Нека је $f(x)$ непрекидно диференцијабилна функција. Тада се увођењем смене $x=g(t)$ у $\int f(x)dx$ добија
$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

2. (а) $\int \frac{1}{x+5}dx$; (б) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x}dx$; (в) $\int \cos(4x)\,dx$;

(г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}\,dx$; (д) $\int \frac{dx}{(x+3)^4}$.

Решење Приметимо да сви интеграли (уз мало рачуна) личе на неке табличне. То нам даје мотивацију коју смену да узмемо.

(а) $$\int \frac{1}{x+5}dx = \left[\begin{array}{l} t = x+5 \quad /' \\ dt = dx \end{array}\right] = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln|x+5| + C$$

личи на $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

враћамо смену

(б) $$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x}dx = \int (e^{2x} + e^{-x})dx = \int e^{2x}dx + \int e^{-x}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} t = 2x \quad /' & h = -x \quad /' \\ dt = 2\,dx & dh = -dx \\ \frac{1}{2}dt = dx & -dh = dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int e^t dt - \int e^h dh =$$

$$= \frac{1}{2}e^t - e^h + C = \frac{1}{2}e^{2x} - e^{-x} + C$$

(в) $\int \cos(4x)\,dx = \begin{bmatrix} t=4x \,/\,' \\ dt=4\,dx \\ \frac{1}{4}dt=dx \end{bmatrix} = \int \cos t \cdot \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\sin t + C =$

$= \frac{1}{4}\sin 4x + C$

(г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \begin{bmatrix} t=5x-2 \,/\,' \\ dt=5\,dx \\ \frac{1}{5}dt=dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\, t^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5}\sqrt{t} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$

(д) $\int \frac{dx}{(x+3)^4} = \begin{bmatrix} t=x+3 \,/\,' \\ dt=dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3}t^{-3} + C = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+3)^3} + C$

$\boxed{3.}$ (а) $\int \frac{2x}{x^2+10}\,dx$; (б) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$; (в) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$;

(г) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$

Решење Приметимо да се у сваком интегралу појављује нека функција и њен извод. То нам мотивише смену.

(а) $\int \frac{2x}{x^2+10}\,dx = \begin{bmatrix} t=x^2+10 \,/\,' \\ dt=2x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$

Примећујемо
$(x^2+10)' = 2x$

$= \ln|x^2+10| + C$

(б) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \begin{bmatrix} t=e^x \,/\,' \\ dt=e^x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C$

$= \operatorname{arctg} e^x + C$

(в) $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \;/' \\ dt = \cos x \, dx \end{array}\right] = \int t^2 \, dt =$

$$= \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

(г) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{arctg} x \;/' \\ dt = \frac{1}{1+x^2} \, dx \end{array}\right] = \int t \, dt =$

$$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$$

Напомена: Пажљиво уводити смену, када се једна променљива замени другом, не могу се у новом интегралу јавити обе променљиве.

Ово није исправно:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \\ dx = \frac{1}{\cos x} \, dt \end{array}\right] =$$

$$= \underbrace{\int t^2 \cdot \cancel{\cos x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos x}} \, dt}_{\text{није исправно!!!}} = \int t^2 \, dt$$

$\boxed{4.}$ (а) $\int \frac{dx}{x^2+9}$; (б) $\int \frac{1}{4x^2+8x+7} \, dx$

$\boxed{\text{решење}}$ Примећујемо да x^2+9 и $4x^2+8x+5$ немају реалних нула па их наместимо на облик $\frac{1}{1+A^2}$.

(а) $\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{1}{9(\frac{x^2}{9}+1)} \, dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{(\frac{x}{3})^2+1} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{3} \;/' \\ dt = \frac{1}{3} \, dx \\ 3dt = dx \end{array}\right] =$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot 3\, dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

(б) $$\int \frac{1}{4x^2+8x+7}\, dx = \int \frac{1}{(2x+2)^2-4+7}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{(2x+2)^2+3}\, dx = \int \frac{1}{3\left(\frac{(2x+2)^2}{3}+1\right)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\, dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{2x+2}{\sqrt{3}} \;/' \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt = dx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\, dt = \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+2}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

$\boxed{5.}$ $\int \frac{1}{x^2+3x+6}\, dx$ (1. колоквијум 2019.)

решење

$$\int \frac{1}{x^2+3x+6}\, dx = \int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+6}\, dx = \int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{15}{4}}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{15}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{15}{4}}+1\right)}\,dx = \frac{4}{15}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{4}{15}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right)^2+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \frac{2x+3}{\sqrt{15}} \Big/ ' \\ dt = \frac{2}{\sqrt{15}}\,dx \\ \frac{\sqrt{15}}{2}\,dt = dx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{4}{15}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}\,dt = \frac{2\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right) + C$$

Обратити пажњу на претходна два задатка, умеју да се појаве на испиту слични.

6. (а) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$; (б) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx$; (в) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$;

(г) $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$.

решење

(а) $$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+x^2 \;/' \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2+1}\cdot t^{-2+1} + C = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$$

(б) $$\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x + x \;/' \\ dt = (e^x+1)\,dx \end{array}\right] = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|e^x+x| + C$$

(в) $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \;/' \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

(г) $$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}\,dx =$$

! Задаци овог типа умеју да дођу на испиту, а често се забораве

Намештамо да се појави $(x^2+x+1)' = 2x+1$ у бројиоцу

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx}_{I_1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx}_{I_2}$$

посебно рачунамо I_1 и I_2

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2+x+1 \;/' \\ dt = (2x+1)\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 =$$

$$= \ln|x^2+x+1| + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + 1\right)}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,dx = \begin{bmatrix} t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \;/' \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,dt = dx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,t + C_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2$$

Враћамо се полазном интегралу:

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}C_1 +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{C_2}{2}$$

Парцијална интеграција

$$\boxed{\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

7. (а) $\int x e^x dx$; (б) $\int \ln x\, dx$; (в) $\int x\cos x\, dx$;

(г) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

решење

(а) $$\int x e^x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} = x e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

(б) $$\int \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{bmatrix} = x\cdot \ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - x + C$$

(в) $$\int x\cos x\, dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos x\, dx \\ du = dx & v = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin x\, dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

НАПОМЕНА

За u бирамо нешто од чега знамо извод, а за v нешто од чега знамо интеграл и то тако да након парцијалне интеграције добијемо једноставнији интеграл од полазног. Ово није „паметна" парцијална интеграција:

$$\int x\cos x\, dx = \begin{bmatrix} u = \cos x & dv = x\, dx \\ du = \sin x\, dx & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\cos x - \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\sin x\, dx}_{\text{КОМПЛИКОВАНИЈЕ}}$$

јер смо само искомпликовали полазни интеграл.

(7) $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+x^2}\,dx & v = x \end{bmatrix} =$

$$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{\frac{1}{2}}{t}\,dt =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

8. $\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$ ← „кружни" интеграл

решење

$$I = \int e^{2x}\sin 3x\,dx = \begin{bmatrix} u = \sin 3x & dv = e^{2x}\,dx \\ du = 3\cos 3x\,dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx =$$

само је sin постао cos што делује бескорисно, али применимо још једном парцијалну интеграцију

$$= \begin{bmatrix} u = \cos 3x & dv = e^{2x}\,dx \\ du = -3\sin 3x\,dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\right) =$$

ово је исти интеграл $\mathbf{I}$ с почетка!

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\mathbf{I}$$

Спојимо почетак и крај :

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \frac{9}{4}\mathbf{I}$$

$$\mathbf{I} + \frac{9}{4}\mathbf{I} = \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x)$$

$$\frac{13}{4}\mathbf{I} = \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) \quad \Big/ \cdot \frac{4}{13}$$

$$\boxed{\mathbf{I} = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos x) + C}$$

Напомена: Слично се ради сваки интеграл облика $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$ и $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$.

За вежбу: $\int \sin(\ln x)\,dx$ ← и ово је „кружни" интеграл

$\boxed{9.}$ $\int (x^2-3x+2)e^{-x}\,dx$ (фебруар 2020.)

решење

$$\int (x^2-3x+2)e^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x^2-3x+2 & dv = e^{-x}dx \\ du = (2x-3)dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -e^{-x}(x^2-3x+2) + \int (2x-3)\, e^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = 2x-3 & dv = e^{-x}dx \\ du = 2dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -e^{-x}(x^2-3x+2) - e^{-x}(2x-3) + \int 2e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-x}(x^2-x-1) - 2e^{-x} + C =$$

$$= -e^{-x}(x^2-x+1) + C$$

$\boxed{10.}$ $\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)dx$ (јун 2020.)

решење

$$\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)dx = \begin{bmatrix} u = \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+\frac{4}{x^2}} \cdot \frac{-8}{x^3}\,dx = & v = x \\ = \frac{-8}{x^3+4x}\,dx & \end{bmatrix} =$$

$$= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + 8\int \frac{x}{x^3+4x}\,dx =$$

$$= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + 8\int \frac{x}{x(x^2+4)}\,dx =$$

$$= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + 8\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+4}}_{I}$$

Израчунајмо I посебно:

$$I = \int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{1}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{2} \\ dt = \frac{1}{2}\,dx \\ 2dt = dx \end{array}\right] = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot 2\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Вратимо се на полазни интеграл:

$$\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)dx = x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + 4\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$ ∎

Интеграција рационалних функција

Дефиниција Рационална функција је функција облика $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где су $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ полиноми.

Дефиниција Елементарна рационална функција је функција облика $\frac{A}{(x-a)^k}$ или $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$, где су $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ и x^2+bx+c нема реалних нула, тј. $D = b^2-4c < 0$.

Теорема Свака рационална функција $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где је

$$Q_m(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{\beta_l}$$

и $x^2+b_ix+c_i$ немају реалних решења (тј. $D=b_i^2-4c_i<0$) може се на јединствен начин приказати као збир полинома и елементарних рационалних функција, тј.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \left[\frac{A_{11}}{x-x_1}+\dots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}\right]+\dots+\left[\frac{A_{k1}}{x-x_k}+\dots+\frac{A_{k\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}\right]+$$

$$+\left[\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\dots+\frac{B_{1\beta_1}x+C_{1\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}}\right]+\dots+\left[\frac{B_{l1}x+C_{l1}}{x^2+b_lx+c_l}+\dots+\frac{B_{l\beta_l}x+C_{l\beta_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{\beta_l}}\right],$$

где су $n, m, k, l \in \mathbb{N}$, а све остале константе су реалне.

Пример Претходна теорема делује застрашујуће, али је врло корисна и ево како се примењује:

<u>1. корак</u>: ако је $n \geq m$, поделимо $P_m(x)$ са $Q_m(x)$ и

запишемо $$\frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = \text{КОЛИЧНИК} + \frac{\text{ОСТАТАК}}{Q_m(x)};$$

ако је $n < m$, одмах радимо корак 2.

<u>2. корак</u>: раставимо $Q_m(x)$ на чиниоце;

<u>3. корак</u>: запишемо $\dfrac{\text{ОСТАТАК}}{Q_m(x)}$ у облику из теореме.

То изгледа отприлике овако:

$$\frac{3x+5}{\underbrace{(x-1)}\underbrace{(x+2)^2}\underbrace{(x^2+1)}\underbrace{(x^2+5)^3}} = \underbrace{\frac{A}{x-1}} + \underbrace{\frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{Dx+E}{x^2+1}} + \underbrace{\frac{Fx+G}{x^2+5} + \frac{Hx+I}{(x^2+5)^2} + \frac{Jx+L}{(x^2+5)^3}}$$

Даље помножимо цео израз са $Q_m(x)$ и

нађемо константе $A, B, C, D, \ldots$ $\blacktriangle$

Пример $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{x^4+1}{x^3+4x^2+5x+2} = \frac{x^4+1}{(x+1)^2(x+2)}$$

<u>1. корак</u>:

$(x^4+1) : (x^3+4x^2+5x+2) = x-4$

$\underline{-x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x}$ ← количник

$-4x^3 - 5x^2 - 2x + 1$

$\underline{-4x^3 - 16x^2 - 20x - 8}$ ОСТАТАК

$11x^2 + 18x + 9$

$$\frac{x^4+1}{x^3+4x^2+5x+2} = x-4+\frac{11x^2+18x+9}{x^3+4x^2+5x+2}$$

2\. корак: $Q_m(x) = x^3+4x^2+5x+2 = (x+1)^2(x+2)$

3\. корак:

$$\frac{11x^2+18x+9}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2} \quad \Big/ \cdot (x+1)^2(x+2)$$

$$11x^2+18x+9 = Ax^2+3Ax+2A+Bx+2B+Cx^2+2Cx+C$$

$$11x^2+18x+9 = (A+C)x^2+(3A+B+2C)x+2A+2B+C$$

$x^2:\ 11 = A+C$

$x:\ 18 = 3A+B+2C$

$1:\ 9 = 2A+2B+C$

... реши се систем ...

$A=-6,\quad B=2,\quad C=17$

Коначно: $\dfrac{x^4+1}{(x+1)^2(x+2)} = x-4+\dfrac{-6}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{17}{x+2}$. $\blacktriangle$

1. $\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$

решење $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$

$x_1 = 3, \; x_2 = 1$

$x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$

$$\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} \quad / \cdot (x-3)(x-1)$$

$$1 = A(x-1) + B(x-3)$$

$$1 = x(A+B) - A - 3B$$

$$x: \quad 0 = A+B$$

$$1: \quad 1 = -A-3B$$

$$1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}, \; A = -B = \frac{1}{2}$$

Дакле, $\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{\frac{1}{2}}{x-3} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}$

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

решење

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \quad \Big/ \cdot (x^2+1)^2$$

$$x^3-2x = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$$

$$x^3-2x = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + B + D$$

$x^3: \ \boxed{1 = A}$

$x^2: \ \boxed{0 = B}$

$x: \ -2 = A+C \rightarrow \boxed{C = -2-A = -3}$

$1: \ 0 = B+D \rightarrow \boxed{D = -B = 0}$

Дакле, $\displaystyle\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-3x}{(x^2+1)^2}$, па је

$$\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - 3\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \end{array}\right] =$$

уводимо исту смену у оба интеграла

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{t}\,dt - 3\int \frac{\frac{1}{2}}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{3}{2}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2(x^2+1)} + C \quad \blacksquare$$

$\boxed{3.}$ $\displaystyle\int \frac{x^7+x^6-x^4-x^3+1}{x^5-x^2}\,dx$

Решење

Како је у бројиоцу полином већег степена од полинома у имениоцу, прво делимо та два полинома:

$$(x^7+x^6-x^4-x^3+1):(x^5-x^2)=x^2+x$$
$$\begin{array}{l}
\underline{\cancel{x^7} - x^4} \\
{-}\ \ +\\
\qquad x^6 - x^3 + 1 \\
\qquad \underline{\cancel{x^6} - \cancel{x^3}} \\
\qquad {-}\qquad + \\
\qquad\qquad\quad 1
\end{array}$$

Сада то можемо записати у облику:

$$\underbrace{x^7+x^6-x^4-x^3+1}_{\text{дељеник}} = \underbrace{(x^5-x^2)}_{\text{делилац}}\underbrace{(x^2+x)}_{\text{количник}} + \underbrace{1}_{\text{остатак}}, \quad \text{па је}$$

$$\frac{x^7+x^6-x^4-x^3+1}{x^5-x^2} = \frac{(x^5-x^2)(x^2+x)+1}{x^5-x^2} = x^2+x+\frac{1}{x^5-x^2}$$

Даље, $x^5-x^2 = x^2(x^3-1) = x^2(x-1)(x^2+x+1)$, па

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1} \quad \Big/ \cdot (x^5-x^2)$$

$$1 = A(x^4+x^3+x^2)+B(x^4-x)+C(x^3-1)+D(x^4-x^3)+E(x^3-x^2)$$

$$1 = x^4(A+B+D)+x^3(A+C-D+E)+x^2(A-E)-Bx+C$$

$x^4: \quad 0 = A + B + D$

$x^3: \quad 0 = A + C - D + E$

$x^2: \quad 0 = A - E$

$x: \quad 0 = -B \longrightarrow \boxed{B=0}$

$1: \quad 1 = -C \longrightarrow \boxed{C=-1}$

рачун $\boxed{\cdots}$

решење система:

$A = \frac{1}{3}$

$B = 0$

$C = -1$

$D = -\frac{1}{3}$

$E = \frac{1}{3}$

Коначно,

$$\frac{x^7+x^6-x^4-x^3+1}{x^5-x^2} = x^2+x+\frac{\frac{1}{3}}{x-1}-\frac{1}{x^2}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1},$$

та је

$$\int \frac{x^7+x^6-x^4-x^3+1}{x^5-x^2}\,dx = \int (x^2+x)\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} -$$

$$- \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx}_{I}$$

Интеграл I не рачунамо до краја јер смо радили сличне интеграле. Урадити за вежбу!

Добија се: $I = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

Интеграција неких ирационалних функција

1 Интеграли облика:

$$I = \int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$ где је R

рационална функција.

Уводи се смена: $\boxed{t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$, где је $n = НЗС(n_1, \dots, n_k)$

и овом сменом добијамо интеграл рационалне функције.

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

решење

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \ /' \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ dt = \frac{1}{2t} dx \\ 2t\,dt = dx \end{array}\right] = \int \frac{t}{1+t} \cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{1+t} dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2 - 1 + 1}{1+t} dt = 2\int \frac{(t-1)(t+1)+1}{1+t} dt = 2\int\left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t|\right) + C = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$

решење

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}} = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt[6]{2x+1} \\ t^6 = 2x+1 \;/' \\ 6t^5dt = 2dx \\ 3t^5dt = dx \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{3t^5}{(t^2)^2 - t^3}dt = \int \frac{3t^5}{t^3(t-1)}dt = 3\int \frac{t^2}{t-1}dt =$$

$$= 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 3\int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right| + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx$

решење

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt[6]{x+1} \\ t^6 = x+1 \;/' \\ 6t^5dt = dx \end{array}\right] = \int \frac{t^3-1}{t^2+1}\cdot 6t^5dt =$$

$$= 6\int \frac{t^8-t^5}{t^2+1}dt = Ⓐ$$

делимо бројилац и имениолац

$$(t^8 - t^5):(t^2+1) = \underbrace{\boxed{t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1}}_{\text{количник}}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\;t^8 + t^6\;} \\
\quad -t^6 - t^5 \\
\quad \underline{-t^6 - t^4} \\
\qquad -t^5 + t^4 \\
\qquad \underline{-t^5 - t^3} \\
\qquad\quad t^4 + t^3 \\
\qquad\quad \underline{t^4 + t^2} \\
\qquad\qquad t^3 - t^2 \\
\qquad\qquad \underline{t^3 + t} \\
\qquad\qquad\quad -t^2 - t \\
\qquad\qquad\quad \underline{-t^2 - 1} \\
\qquad\qquad\qquad \boxed{-t+1} \leftarrow \text{ОСТАТАК}
\end{array}$$

$$= 6\int \frac{\overbrace{(t^2+1)}^{\text{делилац}} \cdot \overbrace{(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1)}^{\text{количник}} \overbrace{-t+1}^{\text{остатак}}}{t^2+1}\,dt$$

$$= 6\int \left(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \operatorname{arctg} t\right) + C =$$

$$= \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{x+1} + 3\sqrt[3]{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} -$$

$$- 3\ln\left(1 + \sqrt[3]{x+1}\right) + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1} + C$$

2 Ојлерове смене

Интеграл облика:

$$I=\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \quad R \text{ - рационална функција}$$

1) $a>0$, уводимо смену: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\,x$

2) $c>0$, уводимо смену: $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$

произвољно бирамо + или −, како нам одговара

3) $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

уводимо смену:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$$

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

решење $a=1>0$ па радимо 1 смену.

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+1}=t-x\ /^2\\ x^2+x+1=t^2-2tx+x^2\\ x+2tx=t^2-1\\ x(1+2t)=t^2-1\\ x=\dfrac{t^2-1}{1+2t}\ /'\\ dx=\dfrac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}dt\end{array}\right]=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=\underset{\text{интеграција рационалне функције}}{\cdots}=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+3\frac{1}{1+2t}+C=$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\right| + \frac{3}{1+2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)} + C$$

2 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

решење $C>0$ па радимо 2 смену:

$$\int \frac{dx}{\underbrace{1+\sqrt{1-2x-x^2}}_{\text{„}x\cdot t\text{"}}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-2x-x^2} = xt-1 \;/^2 \\ \cancel{1}-2x-x^2 = x^2t^2-2tx+\cancel{1} \;/:x \\ -2-x = xt^2-2t \\ x = \dfrac{2t-2}{t^2+1} \;/' \\ dx = \dfrac{-2t^2+4t+2}{(t^2+1)^2}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\dfrac{-2t^2+4t+2}{(t^2+1)^2}}{\dfrac{2t-2}{t^2+1}\cdot t}\,dt = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt = \dots =$$

$$= -\ln|t| + \ln|t-1| - 2\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}-1\right| - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right) + C$$

3. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$

решење $x_{1/2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}$, $x_1=-2$, $x_2=-1$

уводимо 3 смену.

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+3x+2} = t(x+1) \quad /^2 \\ (x+1)(x+2) = t^2(x+1)^2 \\ x+2 = t^2(x+1) \\ x(1-t^2) = t^2-2 \\ x = \dfrac{t^2-2}{1-t^2} \quad /' \\ dx = \dfrac{-2t}{(1-t^2)^2}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2-2}{1-t^2} - t\left(\frac{t^2-2}{1-t^2}+1\right)}{\frac{t^2-2}{1-t^2} + t\left(\frac{t^2-2}{1-t^2}+1\right)} \cdot \frac{-2t}{(1-t^2)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2-2-t^3+2t-t+t^3}{1-t^2}}{\frac{t^2-2+t^3-2t+t-t^3}{1-t^2}} \cdot \frac{-2t}{(1-t^2)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^2+t-2}{t^2-t-2} \cdot \frac{-2t}{(1-t^2)^2}\,dt = \ldots$$

3 Интеграција тригонометријских функција

Интеграл облика:

$\boxed{I = \int R(\sin x, \cos x)\,dx}$, R – рационална функција

① Ако је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

смена: $\boxed{t = \cos x}$

② Ако је $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

смена: $\boxed{t = \sin x}$

③ увек пролази смена:

$$\boxed{\begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}}$$

ову смену користимо само кад не можемо претходне две

1. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$ (ЈУН 2020.)

решење

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \\ -dt = \sin x\,dx \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{2t}{1+t^2}\cdot(-1)\,dt = \left[\begin{array}{l} p = 1+t^2 \\ dp = 2t\,dt \end{array}\right] = -\int \frac{dp}{p} =$$

$$= -\ln|p| + C = -\ln|1+t^2| + C = -\ln(1+\cos^2 x) + C.$$

$\boxed{2.}$ $\displaystyle\int \frac{1}{4\sin x+3\cos x+5}\,dx$

решение

$$\int \frac{1}{4\sin x+3\cos x+5}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = tg\,\frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{1}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{8t+3-3t^2+5+5t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2^{\;:2}}{(2t^2+8t+8)_{\;:2}}\,dt = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2}+C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C$$

$\boxed{3.}$ $$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\, dx$$

$\boxed{\text{решение}}$

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\, dx = \int \frac{\cos^3 x\,(1+\cos^2 x)}{\sin^2 x + \sin^3 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\cos^2 x\,(1+\cos^2 x)\cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)(1+1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^2 x + \sin^3 x}\, dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{bmatrix} =$$

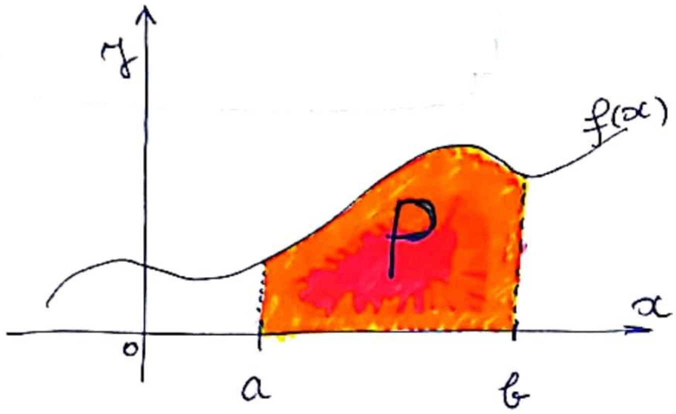
$$= \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t)}\, dt = \int \frac{(1-t)\cancel{(1+t)}(2-t^2)}{t^2\cancel{(1+t)}}\, dt =$$

$$= \int \frac{2-2t-t^2+t^3}{t^2}\, dt = \int \left(2t^{-2} - \frac{2}{t} - 1 + t\right) dt =$$

$$= -\frac{2}{t} - 2\ln|t| - t + \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= -\frac{2}{\sin x} - 2\ln|\sin x| - \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

Одређени интеграли



$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

Њутн-Лајбницова формула

Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна и F њена примитивна функција. Тада:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Став Ако су $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидне, онда:

(1) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$;

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, за $c \in [a,b]$;

(4) Ако је $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, онда $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

1. (а) $\int_2^5 x^2\,dx$; (б) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$; (в) $\int x^3 \ln x\,dx$.

решење (а) $\int_2^5 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125-8}{3} = 39$

(б) $$\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \left[\begin{array}{l} t = x+1 \ /' \\ dt = dx \\ x=0 \to t=0+1=1 \\ x=2 \to t=2+1=3 \end{array}\right] = \int_1^3 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_1^3 = \ln 3 - \underbrace{\ln 1}_{0} = \ln 3$$

Када уводимо смену променљиве у одређеном интегралу, мењамо и границе!

(в) $$\int_1^e x^3 \ln x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^3dx \\ u = \frac{1}{x}dx & v = \frac{x^4}{4} \end{array}\right] =$$

Парцијална интеграција код одређених интеграла:
$\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int v\,du$

$$= \ln x \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \underbrace{\ln e}_{1}\cdot\frac{e^4}{4} - \underbrace{\ln 1}_{0}\cdot\frac{1^4}{4} - \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^e\right) =$$

$$= \frac{e^4}{4} - \left(\frac{1}{16}e^4 - \frac{1}{16}\cdot 1^4\right) = \frac{3e^4+1}{16}$$

$\boxed{2.}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{2\sin^2 x - 5\cos^2 x}\,dx$ (ЈАНУАР 2020.)

Решење

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cos x}{2\sin^2 x - 5(1-\sin^2 x)}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \\ x = 0 \to t = \sin 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \to t = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{2t^2 - 5(1-t^2)}\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{7t^2-5}\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} p = 7t^2 - 5 \\ dp = 14t\,dt \\ \frac{1}{14}\,dp = t\,dt \\ t = 0 \to p = -5 \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \to p = -\frac{3}{2} \end{array}\right] = \frac{1}{14}\int_{-5}^{-\frac{3}{2}} \frac{dp}{p} = \frac{1}{14}\ln|p|\Big|_{-5}^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{14}\ln\left|-\frac{3}{2}\right| - \frac{1}{14}\ln|-5| = \frac{1}{14}\left(\ln\frac{3}{2} - \ln 5\right) =$$

$$= \frac{1}{14}\ln\frac{3}{10}$$

3. $\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx$ (АВГУСТ 2020.)

решење

$$\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=\ln(x^2+1) & dv = x\,dx \\ du=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\,dx & v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln(1+1) - 0\cdot\ln 1 - \int_0^1 \frac{x^3+x-x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}\,dx = \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \Big(x - \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}\Big)\,dx =$$

сличан интеграл рађен више пута (смена $t=x^2+1$)

$$= \frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - \big(0 - \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0}\big)\Big) =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$\boxed{4.}$ $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ (ДОДАТНИ РОК 2020.)

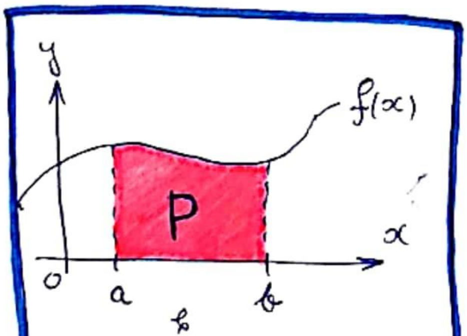
Решење

$$\int_{-3}^{3} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \\ x=-3 \rightarrow t = e^{-3} \\ x = 3 \rightarrow t = e^3 \end{array}\right] =$$

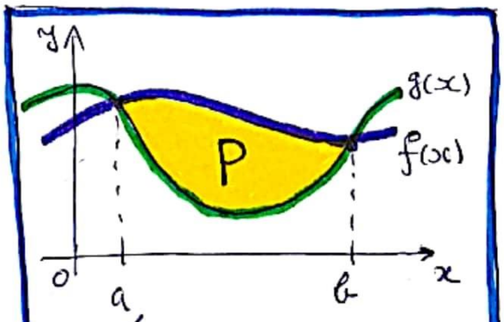
$$= \int_{e^{-3}}^{e^3} \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t \,\Big|_{e^{-3}}^{e^3} =$$

$$= \operatorname{arctg}(e^3) - \operatorname{arctg}(e^{-3})$$

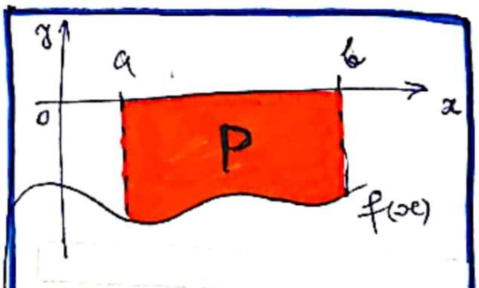
Примена интеграла у геометрији



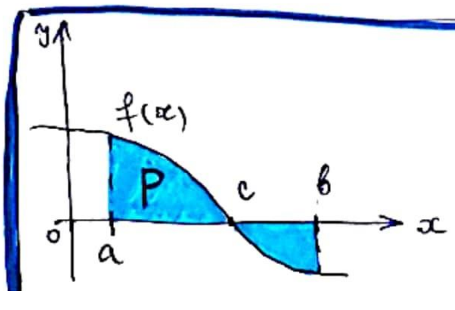
$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$



$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



$$P = -\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$



$$P = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

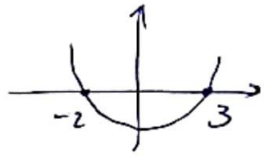
1. Нађи површину фигуре ограничене са

$$y = 2x+4, \quad y = x^2 - x - 6.$$

(Септембар 2020)

решење $x^2 - x - 6 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = -2$$

па $y = x^2 - x - 6$ изгледа овако: 

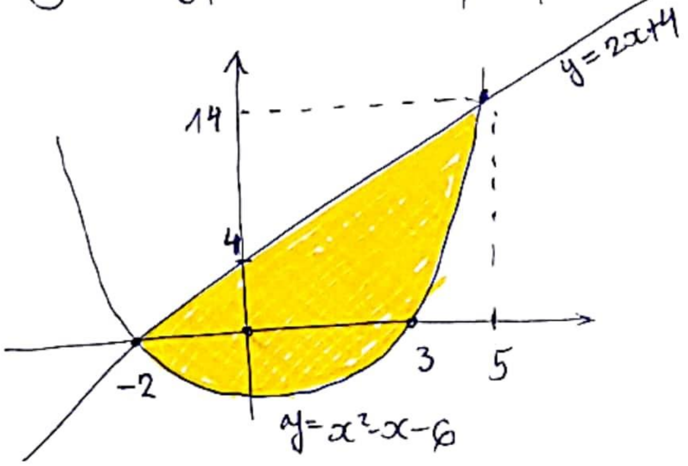
Где се ова права и крива секу?

$$2x+4 = x^2 - x - 6$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \rightarrow x_1 = 5, \, x_2 = -2$$

Сада цртамо график:



Видимо да је тражена површина:

$$P = \int_{-2}^{5} \left(2x+4-(x^2-x-6)\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{5} (-x^2+3x+10)\, dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 10x\right)\Bigg|_{-2}^{5} =$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{75}{2} + 50 - \left(\frac{8}{3} + \frac{12}{2} - 20\right) =$$

$$= \frac{343}{6}$$

2. Израчунати површину фигуре ограничене са

$$y = 2x^2+1, \quad y = x^2+10 \qquad (2. \text{ колоквијум } 2020)$$

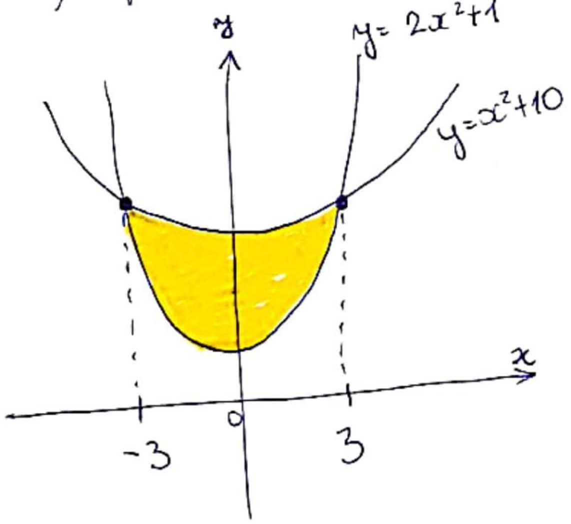
решење Обе квадратне функције су увек позитивне па немају пресек са x-осом. Нађимо њихов међусобни пресек:

$$2x^2+1 = x^2+10$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \quad \text{или} \quad x = -3$$

График:



$$P = \int_{-3}^{3} \left(x^2+10-(2x^2+1)\right)dx =$$

$$= \int_{-3}^{3} (-x^2+9)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+9x\right)\Big|_{-3}^{3} =$$

$$= -\frac{27}{3}+9\cdot 3-\left(\frac{27}{3}-9\cdot 3\right) =$$

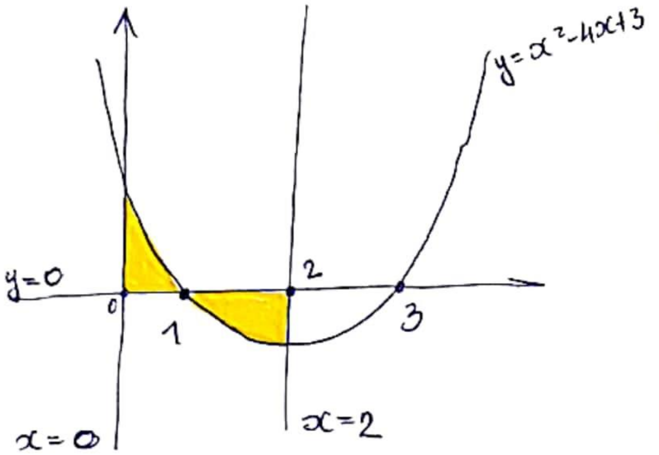
$$= 36$$

3. Наћи површину фигуре ограничене са

$$y = x^2-4x+3, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=2.$$

решење Нацртајмо графике.

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \longrightarrow x_1 = 3, \ x_2 = 1$$



$$P = \int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx + \left| \int_1^2 (x^2-4x+3)\,dx \right| =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right)\Big|_0^1 + \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right)\Big|_1^2 \right| =$$

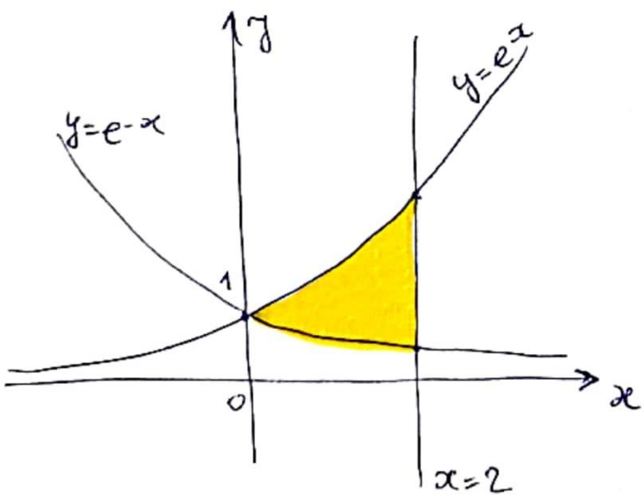
$$= \frac{1}{3} - 2 + 3 - (0 - 0 + 0) + \left| \frac{8}{3} - 8 + 6 - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) \right| =$$

$$= \frac{4}{3} + \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

$\boxed{4}$ Нађи површину фигуре ограничене са

$$y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 2.$$

решење



$$P = \int_0^2 (e^x - e^{-x})\,dx =$$

$$= \left(e^x + e^{-x} \right)\Big|_0^2 =$$

$$= e^2 + e^{-2} - (e^0 + e^0) =$$

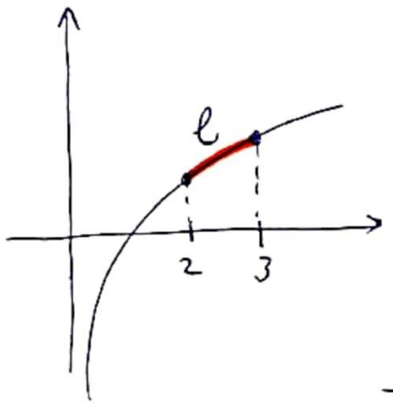
$$= e^2 + \frac{1}{e^2} - 2$$

Теорема Дужина лука криве задате као график непрекидно диференцијабилне функције $y=f(x)$ за $x\in[a,b]$ је

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

$\boxed{5.}$ Израчунати дужину лука криве $y=\ln x$, $x\in[2,3]$.

Решење



$$l=\int_2^3\sqrt{1+\left((\ln x)'\right)^2}\,dx=\int_2^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=$$

$$=\int_2^3\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx=\int_2^3\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x\cdot x}\,dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{1+x^2}\ /^2\\ t^2=1+x^2\ /'\\ 2t\,dt=2x\,dx\\ t\,dt=x\,dx\\ x=2\to t=\sqrt5\\ x=3\to t=\sqrt{10}\end{array}\right]=\int_{\sqrt5}^{\sqrt{10}}\frac{t}{t^2-1}\cdot t\,dt=\int_{\sqrt5}^{\sqrt{10}}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt=$$

$$=\int_{\sqrt5}^{\sqrt{10}}\left(1+\frac12\cdot\frac{1+t+1-t}{(t-1)(t+1)}\right)dt=$$

$$=\int_{\sqrt5}^{\sqrt{10}}\left(1+\frac12\cdot\frac{1}{t-1}-\frac12\cdot\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=t+\frac12\ln|t-1|-\frac12\ln|t+1|\,\Big|_{\sqrt5}^{\sqrt{10}}=\sqrt{10}-\sqrt5+\frac12\ln(\sqrt{10}-1)-\frac12\ln(\sqrt5-1)$$

$$-\frac12\ln(\sqrt{10}+1)+\frac12\ln(\sqrt5+1)$$

$\boxed{6}$ Израчунати дужину лука криве $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$

решење

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x\Big|_0^1=\arcsin 1-\arcsin 0$$

$$=\frac{\pi}{2}.$$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Једначина у којој фигурише независно променљива x, функција y и изводи $y', y'', \dots, y^{(n)}$ назива се диференцијалном једначином. Највиши ред n извода у једначини је ред једначине.

Пример (1) $y''-\sin y=x$ је једначина 2. реда;

(2) $x^3-\sqrt{x}\cdot y'=(y''')^2$ је једначина 3. реда.

Диференцијалне једначине првог реда

То су једначине облика $F(x, y, y') = 0$. $\circledast$

Дефиниција Опште решење једначине $\circledast$ је фамилија функција $y = \varphi(x, c)$ које зависе од променљиве константе c и које задовољавају једначину $\circledast$ за све x.

Притом, за дати услов $y(x_0) = y_0$ постоји $c = c_0$ такво да $y = \varphi(x, c_0)$ задовољава почетни услов. Решење једначине са почетним условом зове се и решење Кошијевог проблема.

Радимо укупно 4 типа диф. једначина 1. реда.

I Д. Ј. која раздваја променљиве

Једначина облика $f(x)dx + g(y)dy = 0$.

Решавање: $g(y)dy = -f(x)dx \quad / \int$

$$\int g(y)\,dy = -\int f(x)\,dx + c$$

Важи: $\boxed{y' = \dfrac{dy}{dx}}$

1. $y' - 3x^2 = 0$

решење

$$\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad / \cdot dx$$

$$dy = 3x^2\,dx \quad / \int$$

$$\int dy = \int 3x^2\,dx$$

$$y = x^3 + c$$

2. $xy' = y - xy\sin x$

решење

$$x\frac{dy}{dx} = y(1 - x\sin x) \quad / \cdot dx,\ : y,\ : x$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1 - x\sin x}{x}\,dx \quad / \int$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\left(\frac{1}{x} - \sin x\right)dx$$

$$\boxed{\ln|y| = \ln|x| + \cos x + c} \quad / e^{\wedge}$$

$$|y| = e^{\ln|x| + \cos x + c}$$

$$y = \pm|x| \cdot e^{\cos x} \cdot e^{c}$$

$$y = c_1 \cdot x \cdot e^{\cos x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Могли смо ово да оставимо као крајње решење. Битно је наћи везу између x и y, не мора се y експлицитно изразити

3. $xyy' = 1 - x^2$

решење

$$xy\cdot\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \quad / \cdot dx,\ : x$$

$$y\,dy = \frac{1 - x^2}{x}\,dx \quad / \int$$

$$\int y\,dy = \int\left(\frac{1}{x} - x\right)dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

II Хомогене Д. Ј.

Једначина облика: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Решавање: смена $\boxed{u = \frac{y}{x}, \quad y' = u'x + u}$

овом сменом добијамо тип I.

4. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$ (ЈАНУАР 2020)

Решење

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

Смена: $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$

$$u'x + \cancel{u} = e^{u} + \cancel{u}$$

$$u'x = e^{u}$$

ДЈ која раздваја променљиве (тип I)

$$\frac{du}{dx}x = e^{u} \quad \Big/ :e^{u}, \ \cdot dx, \ :x$$

$$e^{-u}du = \frac{dx}{x} \quad \Big/ \int$$

$$\int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-e^{-u} = \ln|x| + c$$

враћамо смену:

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + c.$$

$\boxed{5.}$ $xy' = y(1+\ln y-\ln x)$, $y(1)=e$.

$\boxed{\text{решење}}$

$$y' = \frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$$

$$y' = \frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$$

смена: $u=\frac{y}{x}$, $y'=u'x+u$

$$u'x+u = u(1+\ln u)$$

ДЈ која раздваја променљиве

$$\frac{du}{dx}x = u\ln u \quad \Big/ \begin{array}{l} :u\ln u \\ \cdot dx \\ :x \end{array}$$

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \quad \Big/ \int$$

$$\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C$$

враћамо смену:

$$\ln\left|\ln\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C.$$

убацујемо почетни услов $y(\underset{x_0}{1}) = \underset{y_0}{e}$

$$\underbrace{\ln\Big|\underbrace{\ln\frac{e}{1}}_{1}\Big|}_{0} = \underbrace{\ln|1|}_{0} + c_0$$

$$\boxed{c_0=0}$$

Партикуларно решење је $\ln\left|\ln\frac{y}{x}\right| = \ln|x|$.

$\boxed{6.}$ $xy' + y = -x$

решење

$$xy' = -y - x \quad / :x$$

$$y' = -\frac{y}{x} - 1$$

смена $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$

$$u'x + u = -u - 1$$

$$\frac{du}{dx}x = -2u - 1 \quad / \cdot dx \;\; :x \;\; :(-2u-1)$$

$$\frac{du}{-2u-1} = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\int \frac{du}{-2u-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \ln|-2u-1| = \ln|x| + c.$$

III Линеарна Д. Ј.

Једначина облика: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

Опште решење је дато формулом:

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\, dx\right)}$$

7. $y'(4x^2+1)+8xy=4x^2+1$, $y(0)=1$ (2. колоквијум 2020)

решење

$$y' + \frac{8x}{4x^2+1}\,y = 1$$

$$p(x) = \frac{8x}{4x^2+1}, \quad q(x) = 1$$

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{8x}{4x^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = 4x^2+1 \\ dt = 8x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln(4x^2+1)$$

$4x^2+1>0$ за свако x, па нам не требају апсолутне заграде

Опште решење:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right) =$$

$$= e^{-\ln(4x^2+1)}\left(C + \int 1\cdot e^{\ln(4x^2+1)}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4x^2+1}\left(C + \int (4x^2+1)\,dx\right) =$$

$$e^{\ln A} = A$$

$$e^{-\ln A} = \left(e^{\ln A}\right)^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{A}$$

$$= \frac{1}{4x^2+1}\left(C + \frac{4}{3}x^3 + x\right)$$

убацујемо почетни услов: $y(\underset{x_0}{0}) = \underset{y_0}{1}$

$$1 = \frac{1}{4\cdot 0^2+1}\left(c_0 + \frac{4}{3}\cdot 0^3 + 0\right)$$

$c_0 = 1.$

Партикуларно решење: $y = \dfrac{1}{4x^2+1}\left(\overset{c_0}{1} + \frac{4}{3}x^3 + x\right).$

$\boxed{8.}$ $(x^2-1)y' - 2xy + 2x - 2x^3 = 0$ (СЕПТЕМБАР 2020.)

$\boxed{\text{Решење}}$

$$(x^2-1)y' - 2xy = 2x(x^2-1) \quad \Big/ :(x^2-1)$$

$$y' - \frac{2x}{x^2-1}y = 2x$$

$$p(x) = -\frac{2x}{x^2-1}, \quad q(x) = 2x$$

$$\int p(x)\,dx = -\int \frac{2x}{x^2-1} = \begin{bmatrix} t = x^2-1 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|x^2-1|$$

Претпоставимо да је $x^2-1>0$, па је $|x^2-1| = x^2-1$, случај $x^2-1<0$ се ради слично.

Опште решење:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(C + \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right) =$$

$$= e^{\ln(x^2-1)}\left(C + \int 2x\, e^{-\ln(x^2-1)}\,dx\right) =$$

$$= (x^2-1)\left(C + \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx\right) =$$

$$= (x^2-1)\left(C + \ln(x^2-1)\right).$$

$\boxed{9.}$ $x^2y' + 2xy = \cos^2 x$ (ДОДАТНИ РОК 2020)

$\boxed{\text{решење}}$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos^2 x}{x^2}$$

$$p(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = \frac{\cos^2 x}{x^2}$$

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x|$$

Опште решење:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x) e^{\int p(x)dx}\,dx\right) =$$

$$= e^{-2\ln|x|}\left(C + \int \frac{\cos^2 x}{x^2} e^{2\ln|x|}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(C + \int \frac{\cos^2 x}{x^2} \cdot x^2\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(C + \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(C + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)$$

IV Бернулијева Д.Ј.

Једначина облика: $y' + p(x)y = q(x)\cdot y^{\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

Решавање: смена $\boxed{u = y^{1-\alpha}}$

овом сменом се своди на тип $\underline{\text{III}}$.

10. $y' + \frac{1}{x+1} y = -y^2$

решење $\alpha = 2$

смена: $u = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

$$y = \frac{1}{u} \quad /'$$

$$y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$-\frac{1}{u^2} u' + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2} \quad / \cdot (-u^2)$$

Линеарна ДЈ.

$$u' - \frac{1}{x+1} u = 1$$

$p(x) = -\frac{1}{x+1}$, $q(x) = 1$, $\int p(x)dx = -\ln|x+1|$

претпоставимо $x+1>0$, тј. $\ln|x+1| = \ln(x+1)$.

Општо решење:

$$u = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx\right) =$$

$$= e^{\ln(x+1)}\left(C + \int 1 \cdot e^{-\ln(x+1)} dx\right) =$$

$$= (x+1)\left(C + \int \frac{1}{x+1} dx\right) =$$

$$= (x+1)\left(C + \ln(x+1)\right)$$

Вратимо смену:

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{(x+1)(C+\ln(x+1))}.$$

$\boxed{11.}$ $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$

$\boxed{\text{решење}}$ $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad (\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}})$

смена: $u = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$y = u^2$, $y' = 2u \cdot u'$

$$x(2u \cdot u') - 4 \cdot u^2 = x^2 u \quad / : 2xu$$

$$u' - \frac{2}{x}u = \frac{x}{2} \longleftarrow \boxed{\text{Линеарна ДЈ.}}$$

$p(x) = -\frac{2}{x}$, $q(x) = \frac{x}{2}$, $\int p(x)dx = -2\ln|x|$

општите решење:

$$u = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx\right) =$$

$$= e^{2\ln|x|}\left(C + \int \frac{x}{2} e^{-2\ln|x|} dx\right) =$$

$$= x^2\left(C + \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} dx\right) =$$

$$= x^2\left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right)$$

Враќамо смену:

$$y = u^2 = x^4\left(C + \frac{1}{2}\ln|x|\right)^2.$$

За вежбу: $y' + 2 \cdot \frac{y}{x} = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{y^4}$

Диференцијалне једначине вишег реда

Једначине облика: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Углавном радимо Д. Ј. другог реда ($n=2$).

Имамо 2 типа ових једначина.

I Д. Ј. којима се може снизити ред

Постоје 4 различита случаја:

$\boxed{1^\circ}$ $\boxed{y^{(n)} = f(x)}$

решавање: интегралимо n пута

$\boxed{2^\circ}$ $\boxed{y'' = f(x, y')}$ (не појављује се y у једначини)

смена: $\boxed{z = y', \; z' = y''}$, $(z = z(x))$

добија се једначина 1. реда

$\boxed{3^\circ}$ $\boxed{y'' = f(y, y')}$ (не појављује се x у једначини)

смена: $\boxed{y' = p, \; y'' = p' \cdot p}$, $(p = p(y))$

добија се једначина 1. реда

$\boxed{4^\circ}$ $\boxed{F(x, y'') = 0}$ (не појављује се y и y' у једначини)

решавање: изразимо y'' преко x па интегралимо 2 пута.

$\boxed{1.}$ $y''' = \sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=1$

решење Ово је тип $\boxed{1^\circ}$ па интегралимо 3 пута

$$y''' = \sin x \quad / \int$$

$$\int y''' \, dx = \int \sin x \, dx$$

$$y'' = -\cos x + c \quad / \int$$

$$\int y'' \, dx = \int (-\cos x + c) \, dx$$

$$y' = -\sin x + cx + d \quad / \int$$

$$\int y' \, dx = \int (-\sin x + cx + d) \, dx$$

опште решење

$$y = \cos x + \frac{cx^2}{2} + dx + e \quad , \quad c, d, e \in \mathbb{R}$$

Убацујемо почетне услове:

$y(0)=1$:

$$1 = \underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{\frac{c \cdot 0}{2} + d \cdot 0}_{0} + e \longrightarrow \boxed{e = 0}$$

$y'(0)=1$:

$$1 = \underbrace{-\sin 0 + c \cdot 0}_{0} + d \longrightarrow \boxed{d = 1}$$

$y''(0) = 1$:

$$1 = \underbrace{-\cos 0}_{-1} + c \longrightarrow \boxed{c = 2}$$

Тражено партикуларно решење је:

$$y = \cos x + x^2 + x. \ \blacksquare$$

$\boxed{2.}$ $y'' = 2\sqrt{y'}\cos x$ (2. колоквијум 2020.)

решење Ово је тип $\boxed{2^\circ}$ (нема y).

Смена: $z = y'$, $z' = y''$:

$$z' = 2\sqrt{z}\cos x$$

једначина која раздваја променљиве

$$\frac{dz}{dx} = 2\sqrt{z}\cos x \Big/ \cdot dx \, ; \, :2\sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = \cos x \, dx \Big/ \int$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}} dz = \int \cos x \, dx$$

$$\sqrt{z} = \sin x + C$$

$$z = (\sin x + c)^2$$

Враћамо смену:

$$y' = (\sin x + c)^2$$

једначина која раздваја променљиве

$$\frac{dy}{dx} = \sin^2 x + 2c\sin x + c^2 \Big/ \cdot dx$$

$$dy = \left(\frac{1-\cos 2x}{2} + 2c\sin x + c^2\right) dx \Big/ \int$$

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x + 2c\sin x + c^2\right) dx$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - 2c\cos x + c^2 x + d, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{3.}$ $3y'y'' - e^y = 0$, $\quad y(-3) = 0, \; y'(-3) = 1$

Решење (Ово је тип $\boxed{3^\circ}$ (јер нема x).

Смена: $y' = p$, $y'' = p' \cdot p$

$$3 \cdot p \cdot p' \cdot p - e^y = 0$$

диференцијална једн. која раздваја променљиве

$$3p^2 p' = e^y$$

$$3p^2 \frac{dp}{dy} = e^y \Big/ \cdot dy$$

$$3p^2\, dp = e^y\, dy \Big/ \int$$

$$\int 3p^2\, dp = \int e^y\, dy$$

$$p^3 = e^y + c$$

Враћамо смену:

$$(y')^3 = e^y + c$$

Убацујемо почетни услов да нађемо одмах c:

$y'(-3)=1$, $y(-3)=0$

$$\left(y'(-3)\right)^3 = e^{y(-3)} + C$$

$$1 = e^0 + C$$

$$\boxed{C=0}$$

Дакле, $(y')^3 = e^y$. Још ово да решимо.

$$y' = \sqrt[3]{e^y}$$

ДЈ која раздваја променљиве

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{3}} \quad / \cdot dx \quad / : e^{y/3}$$

$$e^{-\frac{y}{3}}\,dy = dx \quad / \int$$

$$\int e^{-\frac{y}{3}}\,dy = \int dx$$

$$-3e^{-\frac{y}{3}} = x + d$$

Убацимо $y(-3)=0$:

$$-3e^{-\frac{0}{3}} = -3 + d$$

$$\boxed{d=0}$$

Коначно, тражено партикуларно решење је $-3e^{-\frac{y}{3}} = x$ ■

$\boxed{4.}$ $x = \dfrac{y''}{\sqrt{1+(y'')^2}}$

$\boxed{\text{Решење}}$ Ово је тип $\boxed{4^\circ}$.

$$x\sqrt{1+(y'')^2} = y'' \quad /^2$$

$$x^2\left(1+(y'')^2\right) = (y'')^2$$

$$(y'')^2(1-x^2) = x^2$$

$$(y'')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$y'' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad / \int$$

$$\underbrace{\int y''\,dx}_{y'} = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{bmatrix} 1-x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \\ x\,dx = -\frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$y' = -\sqrt{1-x^2} + c \quad / \int$$

$$\underbrace{\int y'\,dx}_{y} = \int\left(-\sqrt{1-x^2} + c\right)dx = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int\left(-\sqrt{1-\sin^2 t}\right)\cdot\cos t\,dt + \int c\,dx =$$

$$= \int(-\cos^2 t)\,dt + \int c\,dx =$$

$$= -\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt + \int c\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \int c\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + cx + d$$

II Нехомогена линеарна Д. Ј. другог реда са константним коефицијентима

1° Хомогена ДЈ

Једначина облика: $\boxed{y'' + p\cdot y' + q\cdot y = 0,}$ $p, q \in \mathbb{R}$

Решавање: придружимо јој карактеристичну једначину $\lambda^2 + p\cdot\lambda + q = 0$ и нађемо њена решења.

$\lambda_{1/2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. У зависности од λ_1 и λ_2, знамо како тачно изгледа решење ове једначине.

(1) Ако $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, онда је решење

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

(2) Ако је $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 = \lambda_2$, онда је решење

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

(3) Ако је $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta$, онда је решење

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. (а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; (б) $y'' + y = 0$; (в) $y'' - 2y' + y = 0$;

(г) $y'' - 4y' + 5y = 0$; (д) $y'' - 4y = 0$.

решење (а) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 2$ ← различита реална решења

$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(б) $\lambda^2 + 1 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$$

$\lambda_1 = \underbrace{0}_{\alpha} + \underbrace{1}_{\beta} \cdot i, \ \lambda_2 = -i$ ← комплексна решења

$$y = e^{0 \cdot x}\left(c_1 \cos(1 \cdot x) + c_2 \sin(1 \cdot x)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(в) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ← два иста реална решења

$$y = c_1 e^{x} + c_1 \cdot x \cdot e^{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(г) $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \underbrace{2}_{\alpha} \pm i \cdot \underbrace{1}_{\beta}$$

комплексна решења

$$y = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(д) $\lambda^2 - 4 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{0+16}}{2} = \pm 2$$

$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -2$ ← два реална различита решења

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2^\circ}$ Нехомогене једначине

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x)}$$

Решавање у 3 корака:

(1) решимо хомогену једначину $y'' + py' + qy = 0$ и добијемо решење y_h;

(2) нађемо партикуларно решење y_p; ← овде је највећи део посла!

(3) опште решење је $y = y_h + y_p$.

Тражење партикуларног решења y_p

У нашој једначини $y''+py'+qy=f(x)$, функција ће увек бити облика:

$$\boxed{f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_\ell(x)\sin\beta x\right)}$$

(P_n, Q_ℓ - су полиноми степена n и ℓ)

Тада је партикуларно решење дато са

$$\boxed{y_p=x^m e^{\alpha x}\left(R_p(x)\cos\beta x+S_p(x)\sin\beta x\right)},$$

где је $p=\max\{n,\ell\}$, R_p, S_p су полиноми степена p,

$$m=\begin{cases}0, & \alpha+i\beta\neq\lambda_1,\lambda_2\\ 1, & \alpha+i\beta=\lambda_1 \text{ или } \lambda_2\\ 2, & \alpha+i\beta=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$$

λ_1, λ_2, су решења карактеристичне једначине.

И још како тачно изгледају $R_p(x)$ и $S_p(x)$:

<u>$p=0$:</u> $R_p(x)=A$, $S_p(x)=B$

<u>$p=1$:</u> $R_p(x)=Ax+B$, $S_p(x)=Cx+D$

<u>$p=2$:</u> $R_p(x)=Ax^2+Bx+C$, $S_p(x)=Dx^2+Ex+F$

...

Резиме: Из $f(x)$ прочитамо шта су α, β, P_n, Q_l и уз помоћ тога направимо ур. То ур зависи од неких константи $A, B, C, D, \ldots$ које треба да нађемо.

Биће јасније кроз задатке.

$\boxed{6.}$ $y'' - 6y' + 5y = 17e^x \sin x$ (фебруар 2020.)

$\boxed{\text{решење}}$ (1) решимо хомогену једначину

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}$$

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 1$$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{5x} + c_2 e^{x}}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(2) тражимо партикуларно решење

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\right) =$$

$$= 17e^x \sin x =$$

$$= e^x\left(0 \cdot \cos x + 17 \cdot \sin x\right)$$

Видимо да је: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $P_n(x) = 0$, $Q_l(x) = 17$, $n = 0$, $l = 0$.

Правимо y_p:

$$y_p = x^m e^{\alpha x}\left(R_p(x)\cos\beta x + S_p(x)\sin\beta x\right)$$

$$p = \max\{n, l\} = \max\{0, 0\} = 0$$

$$R_p(x) = A, \quad S_p(x) = B$$

$$\alpha + i\beta = 1 + i\cdot 1 \neq \underset{\substack{\parallel \\ 5}}{\lambda_1}, \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\lambda_2}, \text{ па је } m = 0.$$

убацимо све у y_p:

$$y_p = x^0 e^{1\cdot x}\left(A\cdot\cos 1\cdot x + B\sin 1\cdot x\right) =$$

$$= e^x\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

Константе A и B налазимо убацивањем y_p у полазну једначину. Прво да нађемо y_p' и y_p''.

$$y_p' = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right) + e^x\left(-A\sin x + B\cos x\right) =$$

$$= e^x\left((A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right)$$

$$y_p'' = e^x\left((A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right) + e^x\left(-(A+B)\sin x + (B-A)\cos x\right) =$$

$$= e^x\left(2B\cos x - 2A\sin x\right)$$

убацимо у: $\quad y_p'' - 6y_p' + 5y_p = 17e^x\sin x$

$$e^x(2B\cos x - 2A\sin x) - 6e^x((A+B)\cos x + (B-A)\sin x) +$$

$$+5e^x(A\cos x + B\sin x) = 17e^x \sin x$$

$$e^x((2B - 6A - 6B + 5A)\cos x + (-2A - 6B + 6A + 5B)\sin x) =$$

$$= 17e^x \sin x \quad /: e^x$$

$$(-A - 4B)\cos x + (4A - B)\sin x = 17\sin x$$

$\sin x:$ $\quad 4A - B = 17$

$\cos x:$ $\quad -A - 4B = 0 \quad / \cdot 4$ $\quad \oplus$

$$-B - 16B = 17 \rightarrow \boxed{B = -1}$$

$$\boxed{A = -4B = 4}$$

Дакле, $\boxed{y_p = e^x(4\cos x - \sin x).}$

(3) Опште решење дате једначине је

$$\boxed{y = y_h + y_p = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + e^x(4\cos x - \sin x)}$$

$\boxed{7.}$ $y''-6y'+8y=4x\,e^{2x}, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0.$ (ЈЈН 2020)

решење (1) $y_h=?$

$$y''-6y'+8y=0$$

$$\lambda^2-6\lambda+8=0$$

$$\lambda_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}$$

$$\lambda_1=4, \quad \lambda_2=2$$

$$\boxed{y_h=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}}, \quad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

када у $f(x)$ нема ни sin ни cos, онда је $\beta=0$

(2) $y_p=?$

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\right)=$$

$$=4x\,e^{2x}$$

Закључујемо: $\alpha=2$, $\beta=0$, $P_n(x)=4x$, $Q_l(x)=0$

$n=1$, $l=0$,

па је

$$y_p=x^m e^{\alpha x}\left(R_p(x)\cos\beta x+S_p(x)\sin\beta x\right)$$

$p=\max\{n,l\}=\max\{1,0\}=1$,

$R_p(x)=Ax+B$, $\quad S_p(x)=Cx+D$

$m=1$ јер $\alpha+i\beta=\boxed{2=\lambda_2}\neq\lambda_1$

Дакле, $y_p = x^1 e^{2\cdot x}\left((Ax+B)\underbrace{\cos(0\cdot x)}_{1} + (Cx+D)\underbrace{\sin(0\cdot x)}_{0}\right) =$

$$= e^{2x}\left(Ax^2 + Bx\right)$$

Тражимо y_p' и y_p'':

$$y_p' = 2e^{2x}\left(Ax^2 + Bx\right) + e^{2x}\left(2Ax + B\right) =$$

$$= e^{2x}\left(2Ax^2 + (2A+2B)x + B\right)$$

$$y_p'' = 2e^{2x}\left(2Ax^2 + (2A+2B)x + B\right) + e^{2x}\left(4Ax + 2A + 2B\right) =$$

$$= e^{2x}\left(4Ax^2 + (8A+4B)x + 2A + 4B\right)$$

убацимо ово у полазну једначину:

$$y_p'' - 6y_p' + 8y_p = 4xe^{2x}$$

$$e^{2x}\left(\underline{4Ax^2} + \underline{(8A+4B)x} + \underline{2A+4B}\right) -$$

$$-6\cdot e^{2x}\left(\underline{2Ax^2} + \underline{(2A+2B)x} + \underline{B}\right) +$$

$$+8e^{2x}\left(\underline{Ax^2} + \underline{Bx}\right) = 4xe^{2x}$$

$$e^{2x}\left(\underline{(4A-12A+8A)}x^2 + \underline{(8A+4B-12A-12B+8B)}x + \right.$$

$$\left. + 2A+4B-6B\right) = 4xe^{2x} \quad /:e^{2x}$$

$-4Ax + (2A-2B) = 4x$

$x: \quad -4A = 4 \longrightarrow \boxed{A=-1}$

$1: \quad 2A-2B = 0$

$\boxed{B = A = -1}$

Дакле, $\boxed{y_p = e^{2x}(-x^2-x) = -e^{2x}(x^2+x)}$

(3) Опште решење је

$$\boxed{y = y_h + y_p = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x} - e^{2x}(x^2+x), \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Још да убацимо почетне услове:

$y(0)=0$:

$0 = c_1 e^0 + c_2 e^0 - e^0(0+0)$

$0 = c_1 + c_2 \longrightarrow c_1 = -c_2$

$y(1)=0$:

$0 = c_1 e^4 + c_2 e^2 - 2e^2$

$-c_2 e^4 + c_2 e^2 = 2e^2$

$c_2 = \dfrac{2e^2}{e^2-e^4} = \dfrac{2}{1-e^2}, \; c_1 = -\dfrac{2}{1-e^2}$

Коначно: $\boxed{y = \dfrac{2}{1-e^2} e^{4x} - \dfrac{2}{1-e^2} e^{2x} - e^{2x}(x^2+x)}$

$\boxed{8.}$ $y'' - 4y = 4e^{-2x}$ (Јул 2020.)

$\boxed{\text{решење}}$ (1) $y_h = ?$

$$y'' - 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2$$

$$\boxed{y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(2) $y_p = ?$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_\ell(x)\sin\beta x\right) =$$

$$= 4e^{-2x}$$

$\alpha = -2, \beta = 0, \quad P_n(x) = 4, \quad Q_\ell(x) = 0, \quad n = \ell = 0,$

па је $y_p = x^m e^{\alpha x}\left(R_p(x)\cos\beta x + S_p(x)\sin\beta x\right)$

$p = \max\{n, \ell\} = 0$

$m = 1 \quad$ (јер $\alpha + i\beta = -2 = \lambda_2 \neq \lambda_1$)

$$y_p = x^1 e^{-2x}\left(A \underbrace{\cos 0\cdot x}_{1} + B \underbrace{\sin 0\cdot x}_{0}\right) =$$

$$= Axe^{-2x}$$

Нађимо y_p' и y_p''.

$y_p' = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}$

$y_p'' = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} = -4Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}$

Убацимо у полазну једначину:

$$y_p'' - 4y_p = 4e^{-2x}$$

$$-4Ae^{-2x} + \cancel{4Axe^{-2x}} - \cancel{4Axe^{-2x}} = 4e^{-2x}$$

$$-4Ae^{-2x} = 4e^{-2x}$$

$$\boxed{A = -1}$$

па је $\boxed{y_p = -xe^{-2x}}$

(3) Опште решење је

$$\boxed{y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - xe^{-2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

$\boxed{9.}$ $y'' - 2y' + y = e^{x}$

$\boxed{\text{решење}}$ (1) $y_h = ?$

$y'' - 2y' + y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda_{1/2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \longrightarrow \boxed{y_h = C_1e^{x} + C_2xe^{x}}$

(2) $y_p = ?$

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x) =$$

$$= e^{x}$$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_n(x) = 1$, $Q_l(x) = 0$, $n = l = 0$

Онда је:

$$y_p = x^m e^{\alpha x}(R_p(x)\cos\beta x + S_p(x)\sin\beta x)$$

$p = \max\{n, l\} = 0$

$m = 2$ (јер $\alpha + i\beta = 1 = \lambda_1 = \lambda_2$)

$R_p(x) = A$, $S_p(x) = B$,

тј. $y_p = Ax^2 e^x$

Нађимо y_p' и y_p''.

$$y_p' = 2Axe^x + Ax^2e^x$$

$$y_p'' = 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2e^x =$$

$$= 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x$$

Убацимо у полазну једначину:

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = e^x$$

$$2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x - 2(2Axe^x + Ax^2e^x) +$$

$$+ Ax^2e^x = e^x$$

$$2Ae^x = e^x \quad / : e^x$$

$$2A = 1$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}}$$

Дакле, $\boxed{y_p = \frac{1}{2} x^2 e^x}$

(3) Опште решење дате једначине је

$$\boxed{y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}$$

обратити пажњу на овај задатак

10. $y'' - 2y' + 10y = \underbrace{\sin 3x}_{f_1} + \underbrace{e^x}_{f_2}$

решење Само скицирамо решење овог задатка (потребно је допунити решење)

(1) $y_h = ?$

$\ldots \quad y_h = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$

(2) Тражимо партикуларно решење за

$$y'' - 2y' + 10y = \sin 3x$$

и то је $\ldots \quad y_{p1} = \frac{6}{37} \cos 3x + \frac{1}{37} \sin 3x$

(3) Тражимо партикуларно решење за

$$y'' - 2y' + 10y = e^x$$

и то је ... $y_{p_2} = \frac{1}{9} e^x$

(4) Опште решење је

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = e^x(c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) + \frac{6}{37}\cos 3x + \frac{1}{37}\sin 3x + \frac{1}{9}e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{Напомена}}$ У претходном задатку функција са десне стране једнакости није била у облику

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x),$$

па смо је поделили на два дела

$$f_1(x) = \sin 3x \quad \text{и} \quad f_2(x) = e^x$$

који јесу у том облику.
Онда за сваки део нађемо посебно партикуларно решење и на крају саберемо све са y_h.

За вежбу: $y'' - 7y' + 12y = e^{2x} + x^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$

ВЕРОВАТНОЋА

Догађај – један одређен исход појаве или експеримента (нпр. при бацању коцке пао је број 5), ознака: A, B, C, ...

Сигуран догађај – неминовни исход појаве (нпр. при бацању коцке пашће неки број од 1 до 6), ознака: Ω

Немогућ догађај – не може да се деси (нпр. да падне број 7 на коцкици), ознака: $\emptyset$

Случајан догађај – реализација догађаја се не може предвидети (нпр. бацање новчића)

Пресек догађаја A и B је догађај који се реализује реализацијом оба догађаја A и B. Ознака: AB

Унија догађаја A и B је догађај који се реализује реализацијом бар једног догађаја A или B. Ознака: $A \cup B$

Елементарни догађај је један исход експеримента. Скуп свих исхода означава се са $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

$\boxed{\text{Пример}}$ Бацамо коцку за игру. A – пао је паран број; B – пало је 3 или 6.

$A = \{2, 4, 6\}$, $AB = \{6\}$

$B = \{3, 6\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

1. Одредити скуп свих елементарних догађаја за експеримент:

а) бацање једног новчића;

б) бацање два новчића;

в) бацање једне коцке;

г) бацање две коцке.

Решење (а) $\Omega = \{\underset{\text{писмо}}{\Pi}, \underset{\text{грб}}{\Gamma}\}$

(б) $\Omega = \{\Pi\Pi, \Pi\Gamma, \Gamma\Pi, \Gamma\Gamma\}$

(в) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(г) $\Omega = \{11, 12, \dots, 16, 21, 22, \dots\dots, 66\}$ ← укупно 36 елемената

Елементарни догађаји $\omega_1, \dots, \omega_n$ чине **потпун систем догађаја** ако је $\omega_i \omega_k = \emptyset$ за $i \neq k$ и $\Omega = \omega_1 \cup \dots \cup \omega_n$. Претпоставимо да сваки од $\omega_1, \dots, \omega_n$ има подједнаке шансе да буде реализован и нека је A догађај који се реализује при реализацији било ког од елементарних догађаја $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}$, тј. $A = \omega_{i_1} \cup \dots \cup \omega_{i_k}$. Тада се каже да су исходи $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}$ **повољни** за догађај A.

Дефиниција Вероватноћа догађаја A је

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{број повољних исхода за } A}{\text{укупан број могућих исхода}}$$

Приметимо: $0 \leq k \leq n$, па $0 \leq P(A) \leq 1$. Такође важи $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.

Супротан догађај догађаја A је $\overline{A} = \Omega \setminus A$ који се реализује када се A не реализује. Важи $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

корисно!

2 Баца се коцка за игру. Одредити вероватноћу да је пао паран број као и вероватноћу да је пао број већи од 4.

Решење A – пао је паран број

B – пао је број већи од 4.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – сви могући исходи

$A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{5, 6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. Бацају се две коцке за игру. Одредити вероватноћу да је збир палих бројева једнак 9.

Решење A – пао је збир 9.

повољни исходи за A: 36, 45, 54, 63 $\leftarrow$ укупно 4

сви исходи: 11, 12, …, 66 $\leftarrow$ укупно 36

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

4. Бацају се два новчића истовремено. Одредити вероватноћу да је пало бар једно писмо.

Решење A – пало је бар једно писмо.

I начин:

повољни исходи: ПП, ПГ, ГП

сви исходи: ПП, ПГ, ГП, ГГ

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

II начин: $\bar{A}$ – није пало ниједно писмо

повољни исходи: ГГ

сви исходи: ПП, ПГ, ГП, ГГ

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{4}, \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

5. Бацају се три новчића истовремено. Одредити вероватноћу да је пало тачно једно писмо.

Решење A – пало тачно 1 писмо.

повољни исходи: ПГГ, ГПГ, ГГП

сви исходи: ППП, ППГ, ПГП, ГПП, ГГП, ГПГ, ПГГ, ГГГ

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

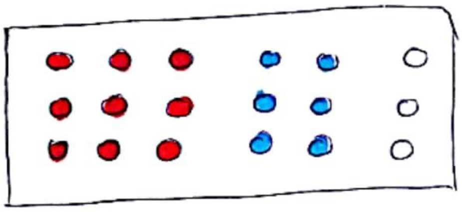
6. У кутији је 18 куглица и то 9 црвених, 6 плавих и 3 беле. Извлачи се једна куглица. Одредити вероватноћу да је она:

а) црвена;

б) плава;

в) бела.

Решење



A – извучена црвена куглица

B – извучена плава куглица

C – извучена бела куглица

(а) $P(A) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$;

(б) $P(B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$;

(в) $P(C) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

7. На складишту има 400 сијалица од два произвођача. Од једног 300, а од другог 100. Стандард задовољава 83% првог и 63% сијалица другог произвођача. Одредити вероватноћу да се извуче сијалица која задовољава стандард.

Решење A – извучена је добра сијалица

повољни исходи: $0{,}83 \cdot 300 + 0{,}63 \cdot 100 = 312$

укупно: 400

$$P(A) = \frac{312}{400} = \frac{39}{50}$$

Елементи комбинаторике

Пермутације

- **без понављања**: од n елемената узимамо свих n и ређамо их у низ. Број могућих распореда: $P_n = n!$

Нпр. На колико начина 3 особе можемо распоредити на 3 столице? $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

- **са понављањем**: од k елемената $\{a_1, \dots, a_k\}$ елемент a_1 бирамо n_1 пута, a_2 бирамо n_2 пута, … a_k бирамо n_k пута. т.д. $n_1 + \dots + n_k = n$ и онда се тих n елемената поређа у низ.

Број могућих распореда: $P^{n}_{n_1, \dots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$

Нпр Колико има различитих шестоцифрених бројева записаних помоћу цифара: 5, 5, 5, 6, 6, 7 ?

$$P^{6}_{3,2,1} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{720}{12} = 60$$

број петица, број шестица, број седмица

Варијације

▶ **без понављања:** од n елемената се бира $k<n$ различитих и распоређују се у низ.

Број могућности: $V^{n}_{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Нпр Колико има троцифрених бројева са различитим цифрама записаних помоћу цифара 1, 2, 3, 4, 5?

$$V^{5}_{3} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$

▶ **са понављањем:** од n елемената бирамо k тако да се могу понављати (можемо исти елемент бирати више пута)

Број могућности: $\overline{V}^{n}_{k} = n^{k}$

Нпр Колико има троцифрених бројева записаних помоћу цифара 1, 2, 3, 4, 5 (цифре се могу понављати)?

$$\overline{V}^{5}_{3} = 5^{3} = 125.$$

Комбинације

- **без понављања:** од n елемената бирамо $k \le n$ који се не могу понављати и није битан редослед.

Број могућности: $C_k^n = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Нпр. Од 100 учесника наградне игре на колико начина можемо одабрати троје победника?

$$C_3^{100} = \binom{100}{3} = \frac{100!}{3!\cdot 97!} = \frac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2\cdot 1} = 161700$$

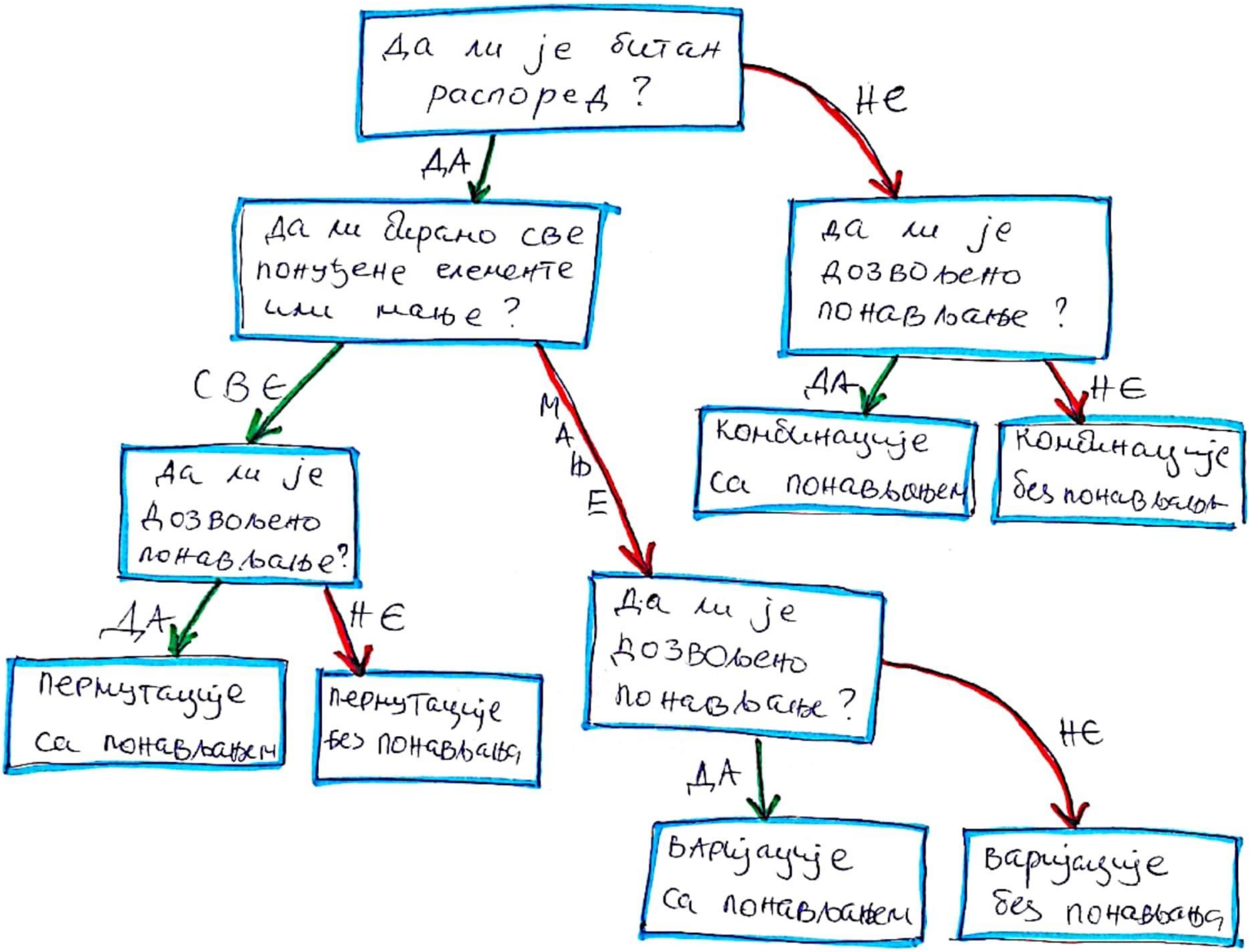
- **са понављањем:** од n елемената бира се k који се могу понављати и није битан редослед

Број могућности: $\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$.

Нпр. Од укуса чоколада, ванила, јагода и карамела, на колико начина можемо одабрати 3 кугле сладоледа?

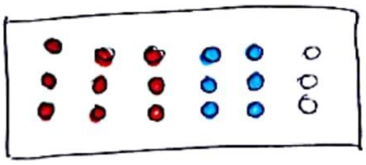
$$\overline{C}_3^4 = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20.$$

Како одредити о чему се у задатку ради?



8. У кутији је 18 куглица и то 9 црвених, 6 плавих и 3 беле. Извлаче се две куглице истовремено. Одредити вероватноћу да су обе плаве.

Решење



A – извучене су 2 плаве куглице

укупан бр. исхода: од 18 бирамо 2, без редоследа

то је $C^{18}_{2} = \binom{18}{2}$

повољно: од 6 бирамо 2: то је $C^{6}_{2} = \binom{6}{2}$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}}{\frac{18\cdot 17}{2\cdot 1}} = \frac{5}{51}$$

9. Одредити вероватноћу да се случајним распоредом слова

а) А, Е, И, Ј, М, Х добије реч ХЕМИЈА;

б) А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т добије реч МАТЕМАТИКА.

Решење (а) $P(A) = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$

(б) $P(B) = \frac{1}{P^{10}_{3,1,1,1,2,2}} = \frac{1}{\frac{10!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!}} = \frac{1}{151200}$

10. Пера је заборавио четвороцифрени пин код за кредитну картицу, али се поуздано сећа да су све четири цифре биле различите. Одредити вероватноћу да Пера из првог покушаја погоди свој пин код.

Решење А – Пера погађа пин код.

повољни исходи: 1

укупно исхода: $V^{10}_4 = \frac{10!}{6!} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040$

$P(A) = \frac{1}{5040}$

11 У кутији се налазе 3 жуте, 4 црвене и 5 плавих куглица. Извлачимо три куглице

1) одједном;

2) једну по једну са враћањем;

3) једну по једну без враћања.

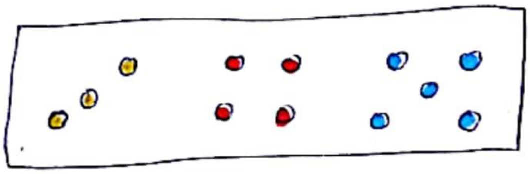
Одредити вероватноћу да су извучене

а) три црвене куглице;

б) две плаве и једна жута куглица;

в) три куглице различитих боја.

Решење



$\}$ 12 куглица

(а) 3 куглице црвене   A – извучене 3 црвене

(1) укупно: $C_3^{12} = \binom{12}{3}$

повољно: $C_3^{4} = \binom{4}{3}$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{55}$$

(2) укупно: $\overline{V}_3^{12} = 12^3$

повољно: $\overline{V}_3^{4} = 4^3$

$$P(A) = \frac{4^3}{12^3} = \frac{1}{27}$$

(3) укупно: $V^{12}_{3} = \frac{12!}{9!} = 12\cdot 11\cdot 10$

повољно: $V^{4}_{3} = \frac{4!}{1!} = 24$

$$P(A) = \frac{24}{12\cdot 11\cdot 10} = \frac{1}{55}$$

(б) 2 плаве, 1 жута  B – извучене 2 плаве, 1 жута

(1) укупно: $C^{12}_{3} = \binom{12}{3}$

повољно: $C^{5}_{2}\cdot C^{3}_{1} = \binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}$

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 3}{\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{3}{22}$$

(2) укупно: $\bar{V}^{12}_{3} = 12^3$

повољно: $\bar{V}^{5}_{2}\cdot \bar{V}^{3}_{1}\cdot 3 = 5^2\cdot 3^1\cdot 3$

бирамо 2 плаве

бирамо 1 жуту

распоредимо жуту међу плавим:

$$P(B) = \frac{25\cdot 9}{12^3} = \frac{25}{192}$$

(3) укупно: $V_3^{12} = \frac{12!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10$

повољно: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{плаве}}}{V_2^5} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{жуте}}}{V_1^3} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{распоред}}}{3} = \frac{5!}{3!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

$$P(B) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{3}{22}$$

(в) различите куглице  C – извучене 3 различите

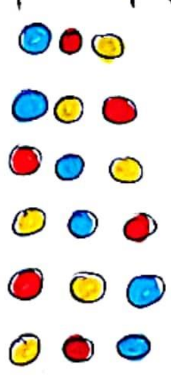
(1) укупно: $C_3^{12} = \binom{12}{3}$

повољно: $C_1^5 \cdot C_1^4 \cdot C_1^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$

$$P(C) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{\frac{12 \cdot 10 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{3}{11}$$

(2) укупно: $\overline{V}_3^{12} = 12^3$

повољно: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{плаве}}}{\overline{V}_1^5} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{црвене}}}{\overline{V}_1^4} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{жуте}}}{\overline{V}_1^3} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{распореди}}}{6} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6$



$$P(C) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6}{12^3} = \frac{5}{24}$$

(3) укупно: $V^{12}_{3} = \frac{12!}{9!} = 12\cdot 11\cdot 10$

повољно: $V^{5}_{1}\cdot V^{4}_{1}\cdot V^{3}_{1}\cdot 6 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 6$

$$P(C) = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10} = \frac{3}{11}.$$

12 Из шпила од 52 карте насумично се извлаче три карте истовремено. Израчунати вероватноћу да се извуче

а) тачно један кец;

б) бар један кец;

в) највише два кеца;

г) дама, жандар и краљ.

Решење (а) A – извучен тачно 1 кец

повољно: $C^{4}_{1} C^{48}_{2} = \binom{4}{1}\binom{48}{2}$

укупно: $C^{52}_{3} = \binom{52}{3}$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{2}}{\binom{52}{3}}$$

ПИК	ХЕРЦ	ТРЕФ	КАРО
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K

(б) B – извучен бар 1 кец

реч „бар" нам сугерише да посматрамо супротан догађај $\overline{B}$

$\overline{B}$ – није извучен кец

$$P(\overline{B}) = \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}, \quad P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}$$

(б) C – извучено највише 2 кеца

$$\boxed{\text{реч „највише" нам сугерише да посматрамо } \overline{C}}$$

$\overline{C}$ – извучена су 3 кеца

$$P(\overline{C}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}, \quad P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}$$

(г) D – извучено J, Q, K

$$P(D) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{3}}$$

Условна вероватноћа

Дефиниција Условна вероватноћа догађаја B при услову да се догађај A реализовао ($P(A)>0$) је

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

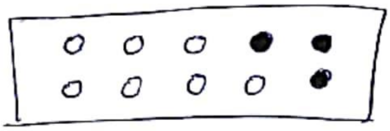
Одавде је: $P(AB) = P(A)\cdot P(B|A)$

и слично: $P(AB) = P(B)\cdot P(A|B)$

Корисне формуле за вероватноћу пресека AB

13 У кутији је 7 белих и 3 црне куглице. Наћи вероватноћу да се у два извлачења (без враћања) извуче оба пута бела куглица.

решење



А – извучена бела у 1. извлачењу

В – извучена бела у 2. извлачењу

АВ – оба пута извучена бела

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$$

„која је вер. да извучемо белу куглицу ако смо већ извукли 1 белу?"

Дефиниција Догађај А је независан од догађаја В ако је $P(A|B) = P(A)$.

Теорема Следећа 3 тврђења су еквивалентна:

(1) $P(A|B) = P(A)$ (тј. А је независан од В);

(2) $P(B|A) = P(B)$ (тј. В је независан од А);

(3) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Теорема $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

корисно!

14. На случајан начин бирамо карту из шпила од 52 карте. Ако је познато да је изабрана карта пик, одредити вероватноћу да је извучен кец.

решење A – извучен је кец, B – извучен је пик

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$$

(AB – извучен је пик кец)

15. Одредити вероватноћу да из шпила од 52 карте извучемо кеца или краља.

решење A – извучен кец, B – извучен краљ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} - 0 = \frac{2}{13}$$

„једно ИЛИ друго" знази унија

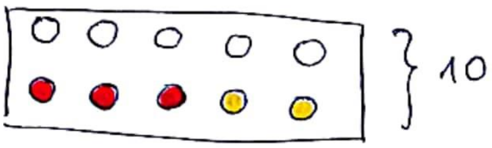
16. Одредити вероватноћу да из шпила од 52 карте извучемо трефа или кеца.

решење A – извучен треф, B – извучен кец

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

17 У кутији је 10 куглица и то 5 белих, 3 црвене и 2 жуте. Случајно се једна за другом, без враћања, извлаче три куглице. Одредити вероватноћу да је прва извучена бела, друга црвена и трећа жута.

Решење



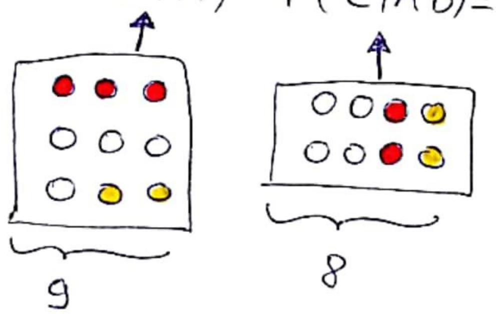
A – 1. извучена је бела

B – 2. извучена је црвена

C – 3. извучена је жута

$$P(\underbrace{AB}\underbrace{C}) = P(\underbrace{A}\underbrace{B}) \cdot P(C \mid AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid AB) =$$

$$= \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{24}$$



18 (Јул 2020.) Вероватноћа да ће Пера освојити медаљу за свој тениски клуб је 0.5, а вероватноћа да ће је Мика освојити је 0.7. Наћи вероватноћу да ће бар једна медаља бити освојена ако се такмичари боре независно. Ако је медаља освојена, која је вероватноћа да ју је освојио Пера?

Решење

A – Пера је освојио медаљу

B – Мика је освојио медаљу

независни догађаји

C – медаља је освојена

$C = A \cup B$, $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}7$

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$

јер су A и B независни

$$= 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}85$$

Вероватноћа да је Пера освојио медаљу:

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{0,5}{0,85} = 0,59.$$

19 Пера и Жика полажу испит из математике. Вероватноћа да Пера положи је 0,6, а Жика 0,8. Одредити вероватноћу да

а) обојица положе;

б) Пера положи, а Жика падне;

в) бар један положи;

г) тачно један положи.

$\boxed{\text{Решење}}$ A – Пера је положио, B – Жика је положио

$P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$, A и B су независни

(а) $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$

(б) $P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = 0,6 \cdot (1 - 0,8) = 0,12$

(в) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,6 + 0,8 - 0,48 = 0,92$

(г) $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) - P(\underbrace{A\bar{B}\,\bar{A}B}_{\emptyset}) =$

$= P(A)(1 - P(B)) + (1 - P(A))\,P(B) =$

$= 0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,44$

Формула потпуне вероватноће и Бајесова формула

За међусобно дисјунктне догађаје $H_1, H_2, \dots, H_n \subseteq \Omega$, $H_i H_j = \emptyset$ за $i \neq j$, кажемо да чине разбијање догађаја Ω ако је $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$.

Ако је још $A \subseteq \Omega$ неки догађај, онда имамо

$$\boxed{\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) = \\ &= P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n) \end{aligned}}$$

ФОРМУЛА ПОТПУНЕ (ТОТАЛНЕ) ВЕРОВАТНОЋЕ

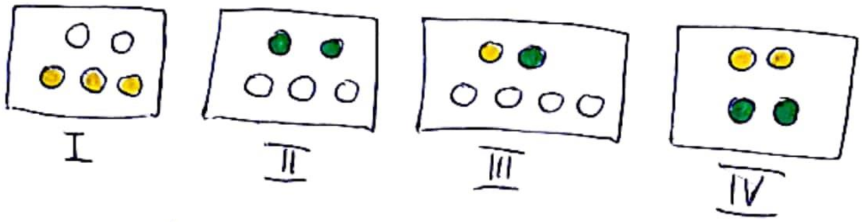
Бајесова формула

$$\boxed{P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) P(A \mid H_j)}}$$

Догађаје $H_1, H_2, \dots, H_n$ називамо хипотезама.

20. (2. колоквијум 2019.) У четири истоветне кутије налазе се куглице истих димензија, али различитих боја: у првој су 2 беле и 3 жуте, у другој 3 беле и 2 зелене, у трећој 4 беле, 1 жута и 1 зелена и у четвртој 2 жуте и 2 зелене. На случајан начин се бира кутија и из ње извлаче две куглице одједном. Одредити вероватноћу да је извучена једна жута и једна бела.

решење



A – извучена 1 жута и 1 бела

H_1 – одабрана I кутија

H_2 – одабрана II кутија

H_3 – одабрана III кутија

H_4 – одабрана IV кутија

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3\cdot 2}{10} = \frac{3}{5}$$

$P(A|H_2) = 0$ (нема жутих у II)

$$P(A|H_3) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{4}{15}$$

$P(A|H_4) = 0$ (нема белих у IV)

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + P(H_4)P(A|H_4) =$$

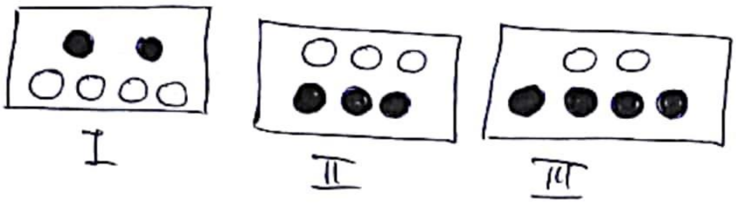
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} + 0 + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{15} + 0 = \frac{13}{60}.$$

21. (Јун 2020.) На столу су три кутије. У првој кутији су 4 беле и 2 црне куглице, у другој 3 беле и 3 црне, а у трећој 2 беле и 4 црне куглице. Баца се коцкица да би се одабрала кутија. Уколико падне број 1 бира се прва кутија, уколико падне неки од бројева 2 или 3 бира се друга кутија, а уколико падне неки од преосталих бројева, бира се трећа кутија. Из изабране кутије се извлачи једна куглица.

(а) Одредити вероватноћу да је извучена бела куглица.

(б) Ако се зна да је извучена бела куглица, одредити вероватноћу да је из треће кутије.

решење



A – извучена је бела куглица

H_1 – изабрана I, $\quad P(H_1) = \frac{1}{6}$

H_2 – изабрана II, $\quad P(H_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

H_3 – изабрана III, $\quad P(H_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(A|H_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(A|H_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A|H_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

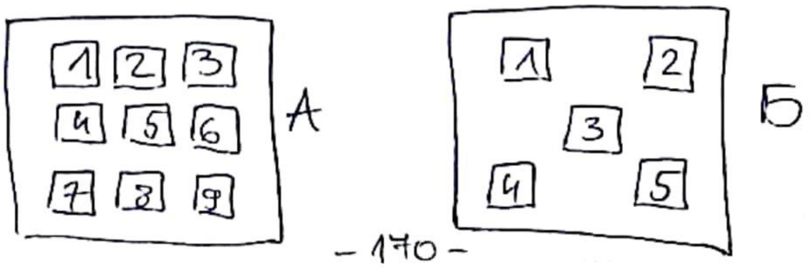
(а) $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

(б) $$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{8}$$

22. (Август 2020.) У кутији А су 9 листића нумерисаних бројевима од 1 до 9, а у кутији Б се налази 5 листића нумерисаних бројевима од 1 до 5. Бирамо кутију насумице и из ње извлачимо један листић. Ако је број на листићу паран, израчунати колика је вероватноћа да је листић извучен из кутије А.

решење



A – извучен паран број

H_1 – изабрана А кутија

H_2 – изабрана Б кутија

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_1) = \frac{4}{9}, \quad P(A|H_2) = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{19}{45}$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{19}{45}} = \frac{10}{19}$$

23 (Додатни рок 2020.) Кутија B садржи 95 белих и 5 црних куглица, а кутија C 90 црних и 10 белих. На случајан начин бира се једна кутија и из ње се извлачи једна куглица. Ако је извучена куглица бела, наћи вероватноћу да је изабрана кутија B.

решење

○ × 95 ● × 5	○ × 10 ● × 90
B	C

A – извучена бела куглица

H_1 – бирано B, $P(H_1) = \frac{1}{2}$

H_2 – бирано C, $P(H_2) = \frac{1}{2}$

$$P(A|H_1) = \frac{95}{100}, \quad P(A|H_2) = \frac{10}{100}$$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{95}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100} = \frac{21}{40}$$

$$P(A|H_1) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{21}{40}} = \frac{19}{21} \quad \blacksquare$$

$\boxed{24.}$ (Септембар 2020.) На испит из математике изашло је 60% студената који полажу први пут и 40% осталих (који не полажу први пут). Вероватноћа да ће студент који полаже први пут положити испит је 0.3, а за остале 0.4. Одредити вероватноћу да ће случајно изабрани студент положити испит.

Решење A - студент је положио

H_1 - одабрани студент је већ полагао

H_2 - одабрани студент није раније полагао

$P(H_1) = 0,4$, $P(H_2) = 0,6$, $P(A|H_1) = 0,4$, $P(A|H_2) = 0,3$

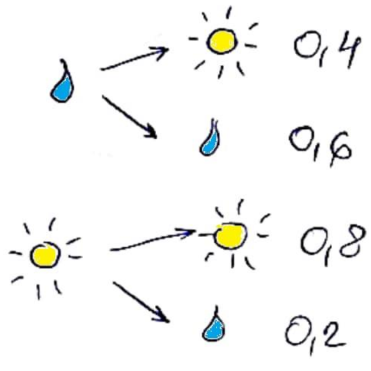
$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$

$$= 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,3 = 0,34 \quad \blacksquare$$

25. (Јануар 2020.) У измишљеном граду Мордор у току дана може бити кишовито или сунчано време. Ако је дан сунчан, вероватноћа да ће следећег дана падати киша је $0,2$, а ако је дан кишовит, вероватноћа да ће следећег дана бити сунчано је $0,4$. Ако је у петак падала киша, одредити вероватноћу да ће у недељу бити сунчано време.

Решење

A – у недељу је сунчано



H_1 – у суботу кишовито

H_2 – у суботу сунчано

$P(H_1) = 0,6$

$P(H_2) = 0,4$

ПЕТАК =

$P(A|H_1) = 0,4$

$P(A|H_2) = 0,8$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$

$$= 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,56$$

Бернулијева шема

Ако се приликом извођења експеримента догађај A реализује са вероватноћом p, а не реализује са вероватноћом $1-p$, онда је вероватноћа да се при n извођења експеримента догађај A реализује тачно k пута једнака: $\binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$.

26. Новчић се баца 100 пута. Колико је вероватноћа да 35 пута падне грб?

решење

$$P(A) = \binom{100}{35} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{35} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{65}$$

27. Коцка за игру се баца 50 пута. Која је вероватноћа да 5 падне тачно 7 пута?

решење

$$P(A) = \binom{50}{7}\left(\frac{1}{6}\right)^{7} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{43}$$

28. Стрелац погађа мету са вероватноћом 0,8. Колика је вероватноћа да ће из 10 независних покушаја мету погодити тачно 9 пута?

Решење

$$P(A) = \binom{10}{9} \cdot (0{,}8)^{9} \cdot (0{,}2)^{1}$$

Случајна променљива и њена расподела

Случајна променљива је функција $X(A)$, $A \subseteq \Omega$ која сваком елементарном догађају додељује реалан број.
Ако случајна променљива (величина) X узима вредности $x_1, x_2, \dots, x_n$ са вероватноћама $p_1, p_2, \dots, p_n$, тј. $p_1 = P\{X = x_1\}, \dots, p_n = P\{X = x_n\}$, $p_1 + \dots + p_n = 1$, онда се $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ зове закон расподеле.

29. Стрелац који има 4 метка гађа у мету док не погоди или док не потроши све метке. Нека је X случајна променљива која представља број утрошених метака. Одредити расподелу случајне променљиве X ако је вероватноћа поготка у мету при сваком гађању једнака 0,8.

Решење Шта све X може да буде?

$$X \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Са којом вероватноћом?

$p_1 = P\{X=1\} = 0,8 \leftarrow$ погађа из 1. покушаја

$p_2 = P\{X=2\} = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16 \leftarrow$ прво промаши па погоди

$p_3 = P\{X=3\} = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,032 \leftarrow$ двапут промаши па погоди

$$p_4 = P\{X=4\} = \underbrace{0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8}_{\text{погоди 4. пут}} + \underbrace{0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2}_{\text{промаши сваки пут}} = 0,008$$

провера: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,8 + 0,16 + 0,032 + 0,008 = 1$ ✓

Расподела:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,8 & 0,16 & 0,032 & 0,008 \end{pmatrix}$$

Дефиниција Математичко очекивање случајне променљиве X је $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$.

Дефиниција Дисперзија случајне променљиве X је

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2.$$

Особине очекивања

(1) $E(c) = c$ - константа;

(2) $E(aX) = a\,E(X)$;

(3) $E(aX+b) = a\,E(X) + b$;

(4) $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$;

(5) Ако су X и Y независне, онда $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Особине дисперзије

(1) $D(X) \geq 0$;

(2) $D(c) = 0$;

(3) $D(aX) = a^2 D(X)$;

(4) $D(aX+b) = a^2 D(X)$;

(5) Ако су X и Y независне, $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

30. (2. колоквијум 2019.) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ a^2 - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}a & \frac{1}{4}a & 1 - \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$

(а) Одредити параметар a;
(б) Одредити $E(X)$;
(в) Одредити $E(X-1)$.

решење (а) Треба да важи

$$a^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a + 1 - \frac{1}{2}a = 1$$

$$a^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$\boxed{a = \frac{1}{2}}$ или $a = -\frac{1}{2}$ ← одбацујемо јер вероватноћа мора бити између 0 и 1.

Дакле, $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

(б) $E(X) = (-1)\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{3}{4} = \frac{21}{8}$

(в) $E(X-1) = E(X) - 1 = \frac{21}{8} - 1 = \frac{13}{8}$

II начин:

$X-1 : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $E(X-1) = (-2)\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{3}{4} =$

$= \frac{13}{8}$ ■

31. (Фебруар 2020.) Из шпила од 52 карте се извлаче две карте одједном. Ако је X случајна величина која представља број извучених црвених карата, одредити расподелу од X, $E(X)$ и $D(X)$.

решење $X = ?$

$$X \in \{0, 1, 2\}$$

$$p_1 = P\{X=0\} = \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{\frac{26\cdot 25}{2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{25}{102} \leftarrow \text{две црне}$$

$$p_2 = P\{X=1\} = \frac{\binom{26}{1}\cdot\binom{26}{1}}{\binom{52}{2}} = \frac{26\cdot 25}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}} = \frac{26}{51} \leftarrow \text{једна црна и једна црвена}$$

$$p_3 = P\{X=2\} = \frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{25}{102} \leftarrow \text{две црвене}$$

провера: $\frac{25}{102} + \frac{26}{51} + \frac{25}{102} = 1$ ✓

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{102} & \frac{26}{51} & \frac{25}{102} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 0\cdot\frac{25}{102} + 1\cdot\frac{26}{51} + 2\cdot\frac{25}{102} = 1$$

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{25}{102} & \frac{26}{51} & \frac{25}{102} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = 0 \cdot \frac{25}{102} + 1 \cdot \frac{26}{51} + 4 \cdot \frac{25}{102} = \frac{76}{51}$$

$$D(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{76}{51} - 1^2 = \frac{25}{51}$$

32. Из кутије у којој су три цедуље нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4 извлачимо (без враћања) по једну цедуљу до појаве непарног броја. Ако је X случајна променљива која представља укупан број извлачења, одредити $E(X)$ и $D(X)$.

решење $X = ?$

$$X \in \{1, 2, 3\}$$

$p_1 = P\{X = 1\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ← извучено први пут непарно

$p_2 = P\{X = 2\} = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ← прво парно па непарно

$p_3 = P\{X = 3\} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{6}$ ← двапут парно па непарно

провера: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ ✓

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$$

$$D(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

Kraj