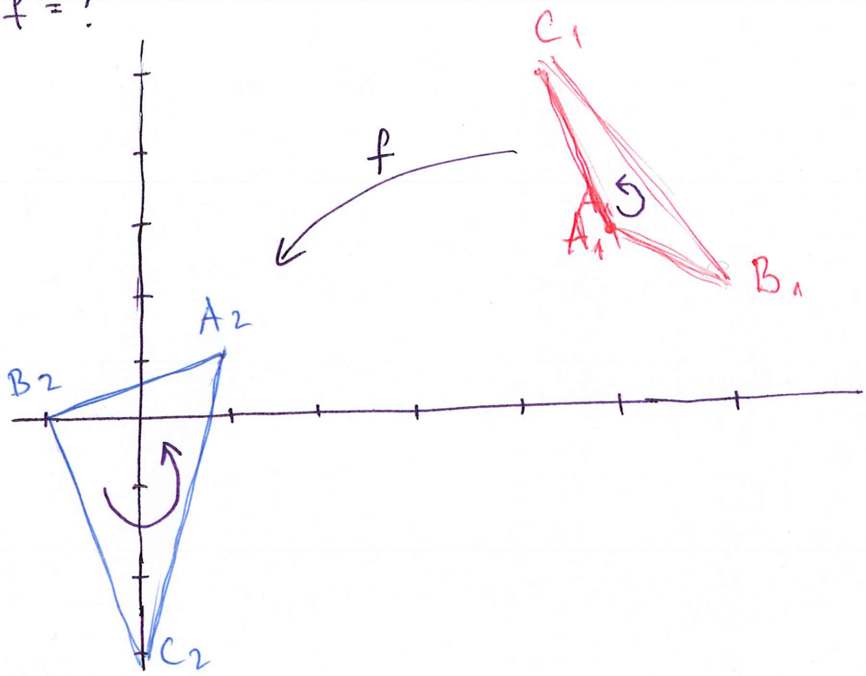
6.2. $\triangle A_1B_1C_1 \xmapsto{f} \triangle A_2B_2C_2$

$A_1(5,3) \xmapsto{f} A_2(1,1)$

$B_1(6,2) \xmapsto{f} B_2(-1,0)$

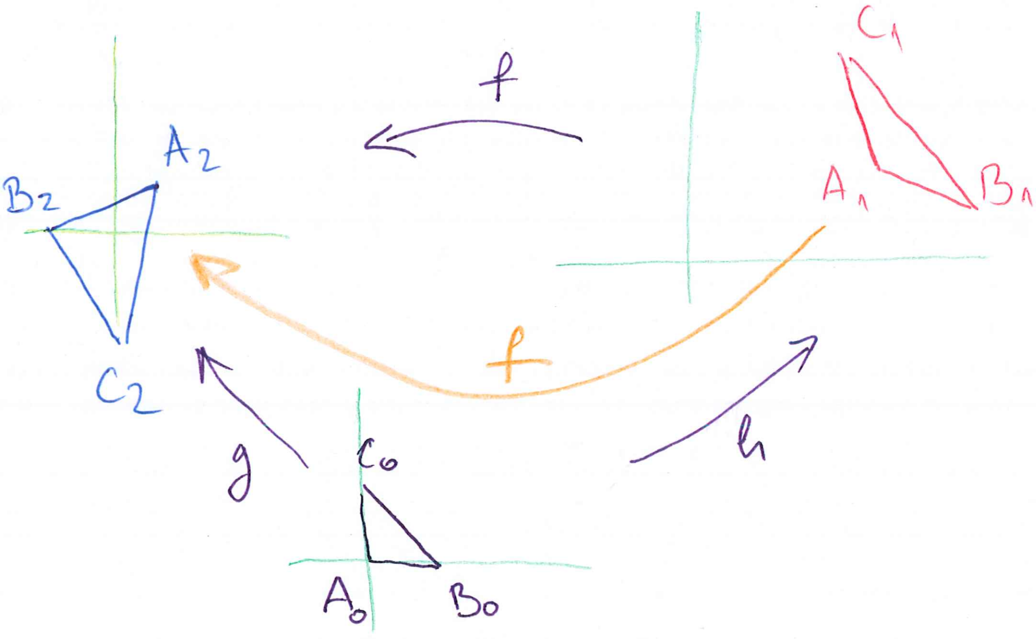
$C_1(4,5) \xmapsto{f} C_2(0,-3)$

a) $f = ?$



← обе оријентације у смеру супротном од смера казаљке на сату (за део под б)

У овом задатку није "очигледно" као у претходном (6.1.) како изразити $\vec{e_1}$ преко $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ (вектора из почетка). Стога се можемо послужити "триком" и додати трећи, базни троугао $A_0B_0C_0$ (за који рачун неће бити тежак).



Троуглови у прегледности ради нацртани на 3 одвојене слике

$$f: \quad \triangle A_1B_1C_1 \longmapsto \triangle A_2B_2C_2$$

$$h: \quad \triangle A_0B_0C_0 \longmapsto \triangle A_1B_1C_1$$

$$g: \quad \triangle A_0B_0C_0 \longmapsto \triangle A_2B_2C_2$$

$A_0(0,0)$
$B_0(1,0)$
$C_0(0,1)$

Међутим, f ~~можемо~~ можемо видети као композицију $f = g \circ h^{-1}$ (погледати наранџасту стрелицу)

Како пресликавања g и h у домену имају базни троугао, њих налазимо по алгоритму из претходног задатка.

Чак, штавише пресликавање h је пресликавање f из претходног задатка, па његове ф-ле знамо. Као и за h^{-1} које нам треба (погледати 6.1. ц))

$$h^{-1}: \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Нађимо g.

$$g: \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$[g(\vec{e_1})]$ $\quad$ $[g(\vec{e_2})]$

$$A_0(0,0) \xmapsto{g} A_2(1,1)$$

$$B_0(1,0) \xmapsto{g} B_2(-1,0)$$

$$C_0(0,1) \xmapsto{g} C_2(0,-3)$$

$$g(\vec{e_1}) = g(\overrightarrow{A_0B_0}) = \overrightarrow{g(A_0)\,g(B_0)} = A_2B_2 = (-2,-1)$$

$$g(\vec{e_2}) = g(\overrightarrow{A_0C_0}) = \overrightarrow{g(A_0)\,g(C_0)} = A_2C_2 = (-1,-4)$$

$$\Rightarrow \quad g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

још $\quad A_0 \xmapsto{g} A_2$

$\quad (0,0) \longmapsto (1,1)$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ради лакшег даљег рачуна, ово пресликавање можемо записати и као (видети увод у области ⑥):

$$g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= [g] \leftarrow$ матрица која одговара пресл. g

Слично

$$h^{-1}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -13 \\ 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$[h] =$

Даље, $f = g \circ h^{-1}$, тј. за матрице тих пресликавања: $[f] = [g]\cdot[h]^{-1}$

$$[f] = [g]\cdot[h]^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -13 \\ 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -3 & 35 \\ -6 & -5 & 46 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тј.

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 35 \\ -6 & -5 & 46 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}}_{=F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ 46 \end{pmatrix}$$

б) $\det(F) = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = 7 > 0 \Rightarrow$ f чува оријентацију скупа (погледати почетак задатка)

в) $$\frac{P(\Delta A_2B_2C_2)}{P(\Delta A_1B_1C_1)} = |\det(F)|$$

$$P(\Delta A_2B_2C_2) = 7\cdot P(\Delta A_1B_1C_1) = 7\cdot\frac{1}{2} = 7/2$$

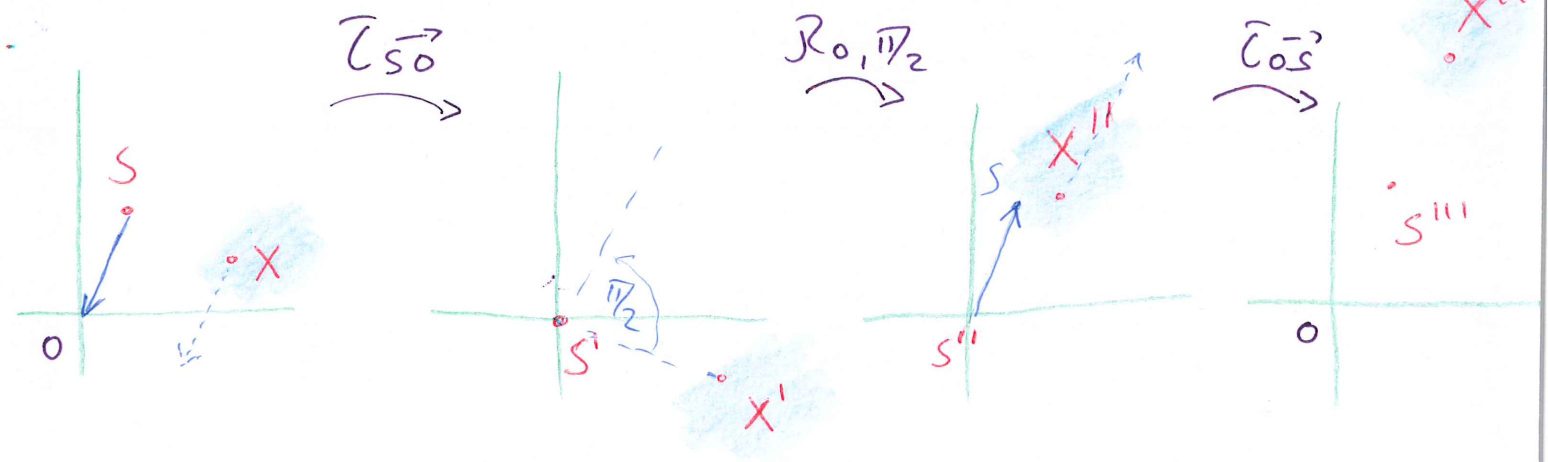
Пробајте да урадите 6.2.а) без увођења трећег броја — погледајте напомену из 6.1. (или на неки други начин)

6.4. a) $S(2,5)$

поступамо на сличан начин као у претходном задатку. ~~Раставимо~~

Представимо ротацију око S као композицију две транслације и ротације око координатног почетка

$$R_{S,\pi/2}(X) = \tau_{\vec{OS}} \circ R_{O,\pi/2} \circ \tau_{\vec{SO}}(X)$$



$$X \xmapsto{\tau_{\vec{SO}}} X' \xmapsto{R_{O,\pi/2}} X'' \xmapsto{\tau_{\vec{OS}}} X'''$$

$$\tau_{\vec{SO}}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{SO}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{O,\pi/2}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$R_{O,\pi/2}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\vec{OS}}: \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{OS}}$$

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[R_{S,\pi/2}] = [T_{\vec{OS}}] \cdot [R_{O,\pi/2}] \cdot [T_{\vec{SO}}]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow R_{S,\pi/2}: \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{S,\pi/2}: \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

б) $k: (x-2)^2+y^2=4$

$R_{S,\pi/2}(k) = ?$

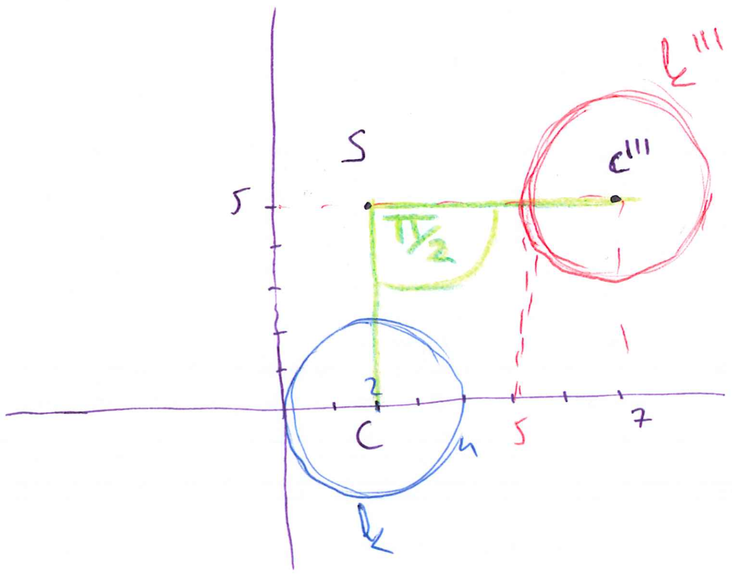
Како је ротација изометрија, слика круга је нови круг истог полупречника. Пронађимо нови центар.

$C(2,0)$ - центар круга k

$C''' = R_{S,\pi/2}(C) = ?$

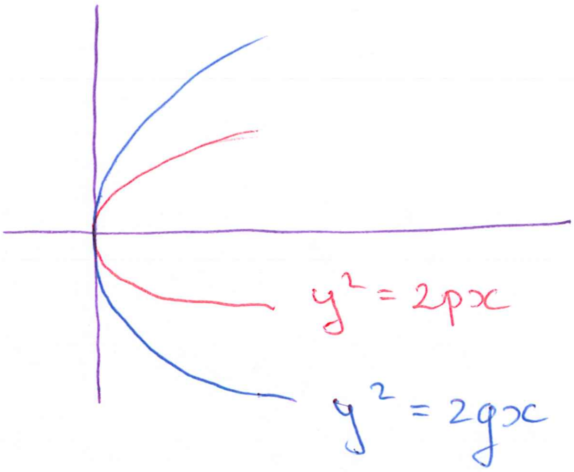
$$C''' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$k''': (x'''-7)^2+(y'''-5)^2=4$



6.9.

Довољно је показати да су све канонске параболе сличне (јер сваку параболу неком изометријом можемо свести на канонску, а свака изометрија је и сличност).



– две произвољне параболе пронаћићемо хомотетију која слика једну на другу

или $y'^2 = 2qx'$

$(x,y) \xmapsto{f} f(x,y) = \lambda(x,y) = (x',y')$ – желимо

$y'^2 = 2qx'$

$(\lambda y)^2 = 2q\lambda x \quad , \lambda \neq 0$

$\lambda^2 y^2 = 2q\lambda x$

$\lambda y = 2qx$

$y = 2\frac{q}{\lambda}x \quad \Rightarrow \quad p = \frac{q}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{q}{p}$

постоји (тачно) једна хомотетија са овим параметром па су параболе сличне

6.11.

$\alpha: \quad y - z - 3 = 0$ - не пролази кроз координатни почетак

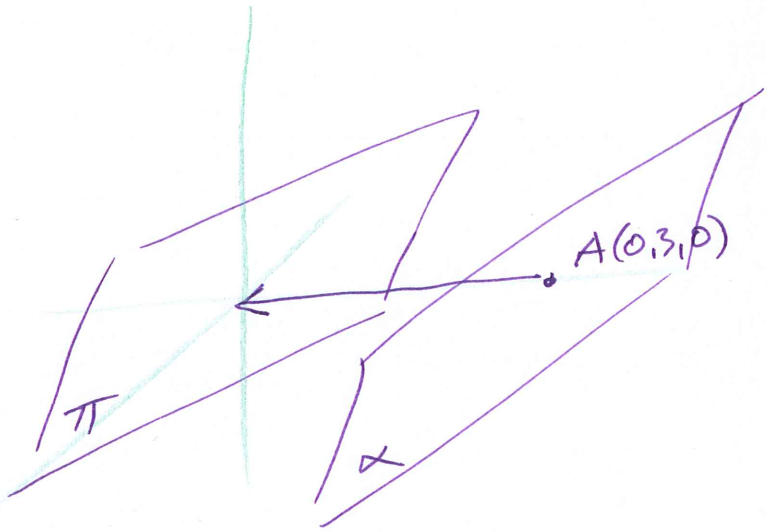
$\Pi: \quad y - z = 0$ - ~~права на~~ раван паралелна са α која пролази кроз ~~кор~~ координатни почетак

$$S_\alpha = \tau_{\overrightarrow{OA}} \, S_\Pi \circ \tau_{\overrightarrow{AO}}$$

$A(0,3,0) \in \alpha$

$\overrightarrow{AO} = (0,-3,0)$

$\overrightarrow{OA} = (0,3,0)$



$\vec{n}_\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ - јединична нормала на Π (погледати напомену пре 6.7.)

$$[S_\Pi] = E - 2\vec{n}_\Pi \cdot \vec{n}_\Pi^{\,T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \cancel{2} \cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} (0 \;\; 1 \;\; -1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[S_\alpha] = [T_{\overrightarrow{OA}}]\cdot[S_\pi]\cdot[T_{\overrightarrow{AO}}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad S_\alpha : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

т.ј. $\begin{cases} x' = x \\ y' = z + 3 \longrightarrow z = y' - 3 \\ z' = y - 3 \longrightarrow y = z' + 3 \end{cases}$

У шта се слика права $p: y - z = 3$?

$$y - z - 3 = z' + 3 - (y' - 3) - 3 = z' - y' + 3$$

$$p \longmapsto p' : z' - y' + 3$$

како је права p била паралелна са равни у односу на коју се врши рефлексија (проверити!) то се она слика у праву која је опет паралелна тој равни