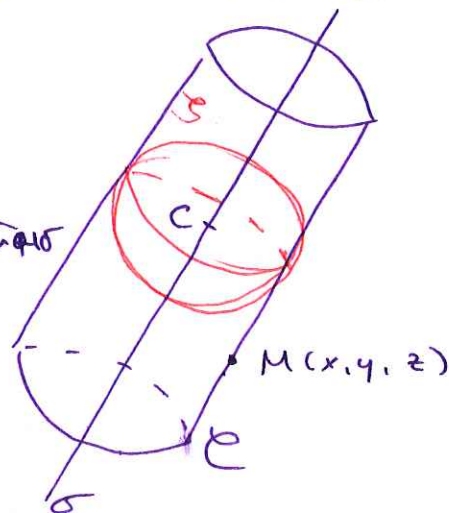


7.8. $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\mathcal{C} : ?$

изводнице паралелне са $\vec{v}_0 = (1, 1, -2)$

Распојане произвољне тачке са цилиндра до осе σ константно је. Одредимо осу. Она је, као и изводнице, паралелна вектору $\vec{v}_0$. Јошашто, сва пролази кроз центар сфере



$$\Rightarrow \sigma : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$$

Нека је $M(x, y, z) \in \mathcal{C}$ произвољна тачка са конуса. Вали:

ф-на за распојане тачке од праве $\Rightarrow d(M, \sigma) = \text{const}$

$$d(M, \sigma) = \frac{\|\vec{v}_0 \times \vec{CM}\|}{\|\vec{v}_0\|} \quad \left\{ \Rightarrow \frac{\|\vec{v}_0 \times \vec{CM}\|}{\|\vec{v}_0\|} = \text{const} \right.$$

Јошашто, како су тачке са конуса, које припадају и сфери, уграсене јаш 1 од осе, то је јорна const јаш 1, $\Rightarrow$.

$$\frac{\|\vec{v}_0 \times \vec{CM}\|}{\|\vec{v}_0\|} = 1$$

$$\vec{v}_0 \times \vec{CM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z+2y, -z-2x, y-x)$$

$$\|\vec{v}_0\| = \sqrt{6}, \quad \|\vec{v}_0 \times \vec{CM}\| = \sqrt{(z+2y)^2 + (-z-2x)^2 + (y-x)^2}$$

да .

$$\frac{\sqrt{(z+2y)^2 + (z+2x)^2 + (y-x)^2}}{\sqrt{6}} = 1 \quad / \quad 2$$

$$z: (z+2y)^2 + (z+2x)^2 + (y-x)^2 - 6 = 0$$

→
уравнения
конуса

∴ можно и "средства"
уколько меньше, ач
нема иопреде

~~и~~

+

7.11.

са:

$$\sigma: \begin{cases} x-y=0 \\ 4x-z=0 \end{cases}$$

ман. раван

$$\alpha: x+y+z=0$$

Затим што најпре драгу σ у параметарској облику

$$y=t \rightarrow x=y=t \rightarrow z=4x=4t$$

$(0,0,0) \in \sigma \Rightarrow \sigma: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$

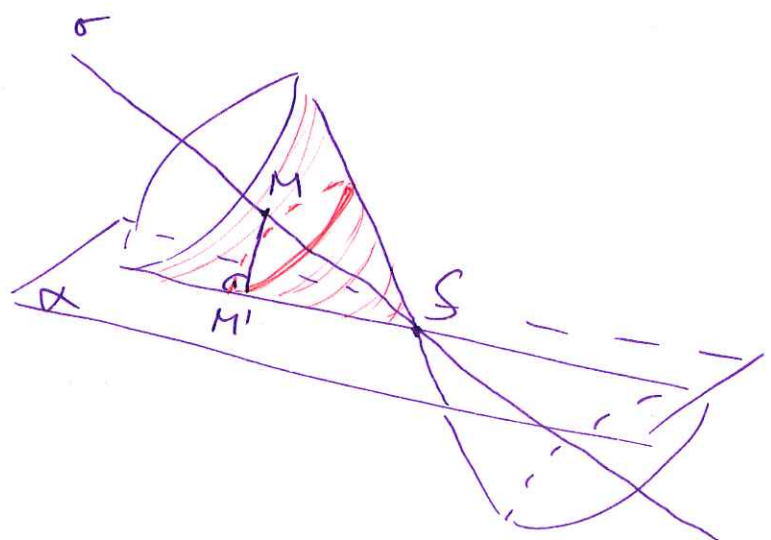
и). $\sigma: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$

Центар ~~конуса~~ конуса налази се у пресеку $\sigma \cap \alpha = \{S\}$

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=4t \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow t=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow S(0,0,0)$

Напомена, узмимо произвољну тачку са осе σ различиту од S , нпр $M(1,1,4)$. Тлева је X произвољна тачка са конуса. Примећујемо да важи $\frac{d(X,S)}{d(X,\sigma)} = \text{const.}$
 По ~~конусу~~ const добијамо из неке конкретне тачке, нпр. M' , где је M' пројекција тачке M на α .
 (слика)



Замечание, пожалуй:

$$d(M, \alpha) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \|MM'\| = 2\sqrt{3}$$

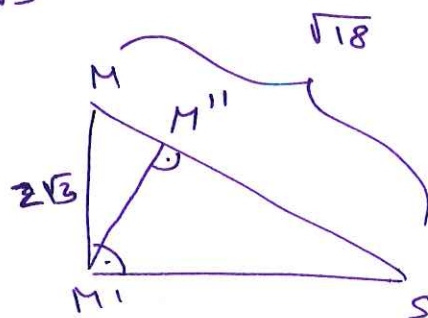
$$\|M'S\| = \sqrt{\|MS\|^2 - \|MM'\|^2} = \sqrt{6}$$

$$\|M'M''\| = d(M', \sigma)$$

~~$$\|M'M''\| \cdot \|M'S\| = \|MM'\| \cdot \|M'S\|$$~~

$$P_\Delta = P_\Delta \Rightarrow \frac{\|MM'\| \cdot \|M'S\|}{2} = \frac{\|M'M''\| \cdot \|MS\|}{2}$$

$$\Rightarrow \|M'M''\| = \frac{\|MM'\| \cdot \|M'S\|}{\|MS\|} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{18}} = 2$$



$$\Rightarrow \frac{d(M', S)}{d(M', \sigma)} = \frac{d(M', S)}{d(M', M'')} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{d(X, S)}{d(X, \sigma)} = \text{const} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

~~$$\vec{SX} \times \vec{v}_\sigma$$~~
$$d(X, S) = \sqrt{\frac{3}{2}} d(X, \sigma)$$

$$d(X, S) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\|\vec{SX} \times \vec{v}_\sigma\|}{\|\vec{v}_\sigma\|}$$

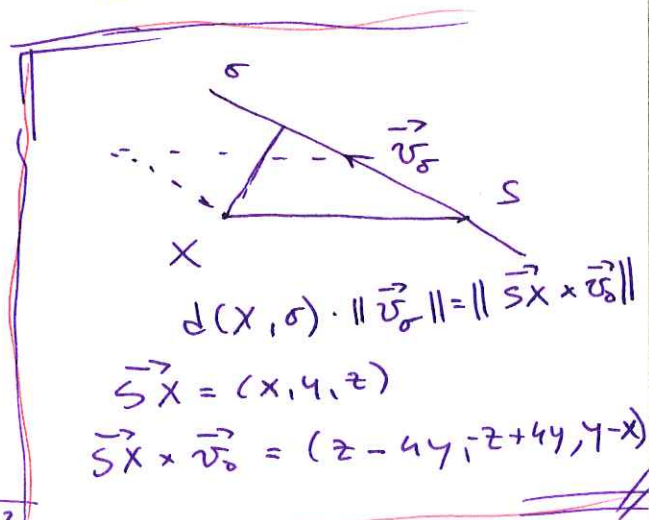
$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \|\vec{v}_\sigma\| \cdot d(X, S) = \|\vec{SX} \times \vec{v}_\sigma\|$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(z - 4y)^2 + (-z + 4y)^2 + (y - x)^2}$$

$$2\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(z - 4y)^2 + (-z + 4y)^2 + (y - x)^2} \quad / 2$$

$$12 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) = (z - 4y)^2 + (-z + 4y)^2 + (y - x)^2 \quad : \zeta$$

↑
уравнения
упрощения
конуса

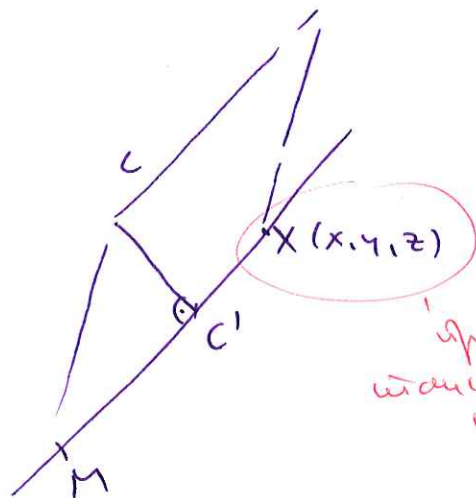


7.12.

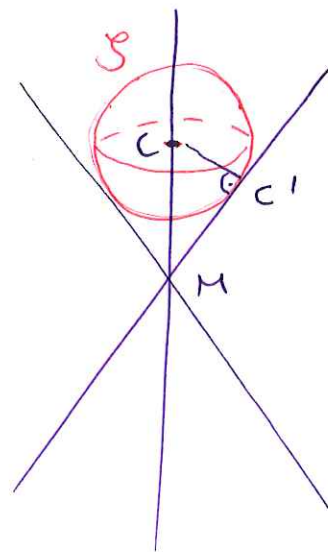
$M(1, 4, 5)$

$$\sigma: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$$

$C(1, 2, 1)$



производная
касательная к
конусу



Примечание: да за производную касательную X к конусу
важно:

$$\|\vec{MX} \times \vec{MC}\| = \|\vec{MX}\| \cdot \|\vec{CC'}\|$$

$$\vec{MX} \times \vec{MC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y-4 & z-5 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-4y+2z+6, 4x-4, -2x+2)$$

$$\sqrt{(-4y+2z+6)^2 + (4x-4)^2 + (-2x+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2} \cdot 2 \quad /2$$

$$\mathcal{C}: 4x^2 + 3y^2 - 4yz - 8x - 4y + 16z - 28 = 0$$

5) $\mathcal{C} \cap O_{xz} = ?$

используем:

$$\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 - 4yz - 8x - 4y + 16z - 28 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$4x^2 - 8x + 16z - 28 = 0 \quad \leftarrow \text{парабола}$$

7.13. $\mathcal{S}: z + z = x^2 + y^2$

$\pi_1: y - z = 4$

$\pi_2: ?$, $\pi_2 \ni M_0(0, \frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$, $\pi_2 \perp \pi_1$, O_{yz}

$O_{yz}: x=0 \Rightarrow \vec{n}_{O_{yz}} = (1, 0, 0)$

$\pi_1: y - z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{\pi_1} = (0, 1, -1)$

$\vec{n}_{\pi_2} = \vec{n}_{O_{yz}} \times \vec{n}_{\pi_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 1, 1)$

$\pi_2: y + z + D = 0$

$(0, \frac{1}{2}, -\frac{7}{4}) \in \pi_2 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{7}{4} + D = 0 \Rightarrow D = \frac{5}{4}$

$\sim \pi_2: y + z + \frac{5}{4} = 0$

б) $\mathcal{S} \cap \pi_2 = \{L\}: \begin{cases} z + z = x^2 + y^2 \\ y + z + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$

"елиминирајте" најпрв z , нпр. тако што ћемо одузети обе две једначине:

~~$z + z - (y + z + \frac{5}{4}) = x^2 + y^2$~~

$z + z - (y + z + \frac{5}{4}) = x^2 + y^2$

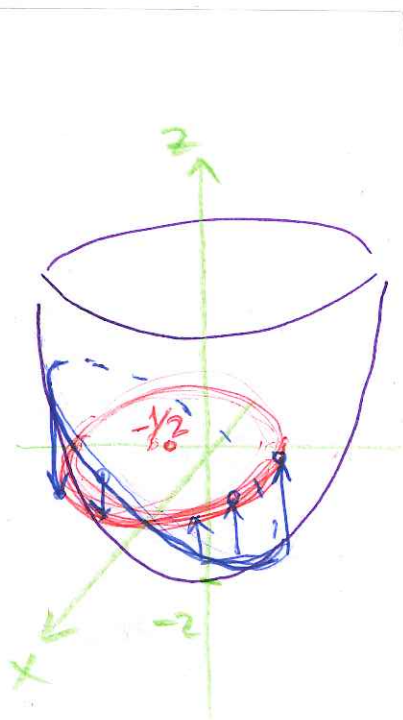
$\frac{3}{4} - y = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$

$x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1$

↑
кривича

← пројекција
на Oxy равана
(нашли смо
"везу" између x
и y координата)



$$L: \begin{cases} z+2 = x^2+y^2 \\ y+z+\frac{5}{4} = 0 \Rightarrow y = -z-\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow z+2 = x^2 + (-z-\frac{5}{4})^2$$

$$z+2 = x^2 + z^2 + \frac{5}{2}z + \frac{25}{16}$$

$$x^2 + z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{7}{16} = 0$$

$$x^2 + z^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}z + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = 0$$

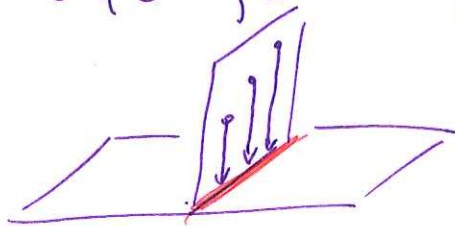
$$x^2 + (z + \frac{3}{4})^2 = 1$$

кривича
у Oxz
равни

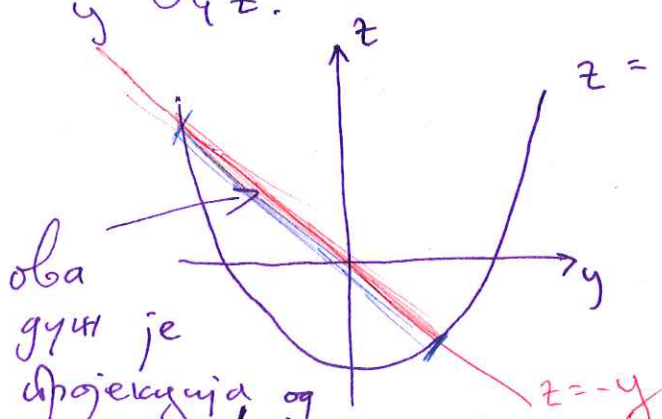
$$L: \begin{cases} z+2 = x^2+y^2 \\ y+z+\frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ раван која је
ортогонална на Oyz раван
(видети шта су им нормале)

$\Rightarrow$ пројекција те равни
на раван Oxz је
дуга



та је пројекција ~~на криву~~ наше криве L
на раван Oxz — дуга, дес равне $y+z=0$
у Oxz .



оба
дуги је
пројекција од

7.14. 1)

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x + 8y - z + 10 = 0$$

Мотивација и идеја је као за сечење криве на канонски облик (исплетати задатке на крају неке области - 5.15., 5.16.), само сада у димензији више.

закључак пре-ходно јед. матрично

$$(x \ y \ z \ 1) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ -4 & 4 & -1/2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

A

и нека је B блок матрица $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Поштраћуемо ~~т.б. за~~ сопствене вредности и сопствене векторе матрице B.

$$B - \lambda E = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda((3-\lambda)^2 - 1) = \lambda(2-\lambda)(4-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$$

• сопствени вектор u_1
за $\lambda_1 = 4$

$$(B - 4E) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -u - v = 0 \\ -u - v = 0 \\ -4w = 0 \end{cases} \leadsto \begin{matrix} u = -v \\ w = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑
нормиран

• собствен вектор u_2 за $\lambda_2 = 2$

$$(B - 2E) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 0 \\ -u + v = 0 \\ -2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = v \\ w = 0 \end{matrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

• собствен вектор за $\lambda_3 = 0$

$$B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v = 0 \\ -u + 3v = 0 \\ 0 \cdot w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = v = 0 \\ w \in \mathbb{R} \end{matrix} \text{ т.е. } u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получим так как все собственные значения на каноническом базисе, добавим матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ т.е. } \text{матрица}$$

$$R = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

трансформација координата је $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

тј. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$ тј. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$

једначина ~~својом~~ у новим коорг. систему је

$$0 = (x \ y \ z \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \left(R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T \cdot A \cdot R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= (x' \ y' \ z' \ 1) R^T A R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = R^T A R = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 4\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

тј. једначина криве је

$$4x'^2 + 2y'^2 + 8\sqrt{2}x' - z' + 1 = 0$$

$$4(x' + \sqrt{2})^2 - 8 + 2y'^2 - z' + 1 = 0$$

$$4(x' + \sqrt{2})^2 + 2y'^2 - (z' + 7) = 0$$

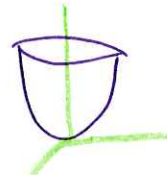
овде вршимо нову трансформацију

$$x'' = x' + \sqrt{2}$$

$$y'' = y'$$

$$z'' = z' + 7$$

Коначно :



$$4x''^2 + 2y''^2 - z'' = 0 \quad \leftarrow \text{Елиптички параболоид}$$

Послеуку брочену координата Можемо
видети и као

$$x' = x'' - \sqrt{2}$$

$$y' = y''$$

$$z' = z'' - 7$$

г.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \stackrel{=T}{\text{}}$$

Па је беза између понавних и крајних
координата

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = RT \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix}}}$$