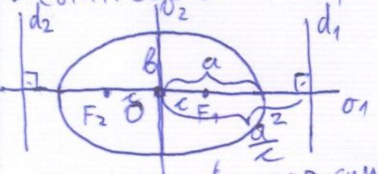
5 Криве другог реда

Деф: Крива другог реда је скуп тачака (x,y) у равни Oxy такав да је $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$, за неке $a_{11},a_{12},a_{13},a_{22},a_{23},a_{33}\in\mathbb{R}$, при чему је бар један од бројева a_{11},a_{12},a_{22} различит од нуле.

Постоје дегенерисане и недегенерисане криве другог реда. О дегенерисаним кривима другог реда погледајте предавања. Надаље разматрамо само недегенерисане криве другог реда. Постоје три врсте недегенерисаних кривих другог реда и то су:

- елипса (спец. случај круг)



O – центар (центар симетрије)

F_1,F_2 – жиже (фокуси), d_1,d_2 – директрисе

a – велика полуоса $(a>b)$

b – мала полуоса

две осе симетрије (једна садржи велику, а друга малу полуосу)

$c^2=a^2-b^2$, $e=\frac{c}{a}$ – ексцентрицитет $(0<e<1)$

O је средиште F_1F_2

$OF_1=OF_2=c$, $d(O,d_1)=d(O,d_2)=\frac{a^2}{c}$

F_1,F_2 припадају оси која садржи велику полуосу елипсе, а d_1,d_2 су нормалне на њој.

Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$. Тада је $O(0,0)$ центар и $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ су жиже $(c^2=a^2-b^2)$. Ако тачка $M(x_0,y_0)$ припада елипси, једначина тангенте на елипси у тачки M је $t: \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

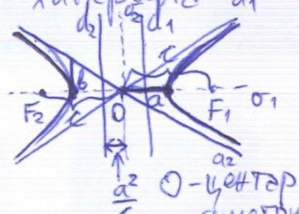
Једначине директриса су: $d_1: x=\frac{a^2}{c}$, $d_2: x=-\frac{a^2}{c}$

Једначине оса су: $o_1: y=0$, $o_2: x=0$

Спец. случај је круг, тј. када је $a=b=r$. Тада је r полупречник круга, жиже се поклапају с центром, а директрисе нису дефинисане. Постоји бесконачно много оса симетрије. Сматра се да је ексцентрицитет једнак нули.

За сваку тачку елипсе (и круга) важи да је збир растојања од ње до једне и друге жиже елипсе једнак $2a$, тј. $MF_1+MF_2=2a$, за све M са елипсе.

- хипербола



O – центар (центар симетрије)

F_1,F_2 – жиже (фокуси), d_1,d_2 – директрисе

a је растојање од центра до темена

b је висина од темена до правих a_1,a_2

$c^2=a^2+b^2$

$e=\frac{c}{a}$ – ексцентрицитет $(e>1)$

две осе симетрије (једна садржи темена хиперболе, друга је нормална на њој у центру хиперболе)

O је средиште F_1F_2

$OF_1=OF_2=c$, $d(O,d_1)=d(O,d_2)=\frac{a^2}{c}$

F_1,F_2 припадају оси која садржи темена, а d_1,d_2 су нормалне на њој

a_1,a_2 – асимптоте (косе)

Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме хипербола има једначину $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Тада је $O(0,0)$ центар и $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ су жиже $(c^2=a^2+b^2)$. Ако тачка $M(x_0,y_0)$ припада хиперболи, једначина тангенте на хиперболи у тачки M је $t: \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

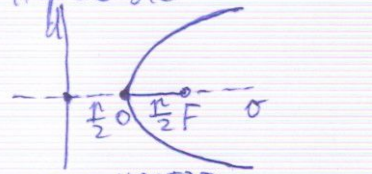
Једначине директриса су: $d_1: x=\frac{a^2}{c}$, $d_2: x=-\frac{a^2}{c}$

Једначине оса су: $o_1: y=0$, $o_2: x=0$

Једначине асимптота су: $a_1: \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, $a_2: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, тј. $a_1: y=\frac{b}{a}x$, $a_2: y=-\frac{b}{a}x$.

За сваку тачку хиперболе важи да је разлика растојања од ње до једне и друге жиже хиперболе једнака $2a$, тј. $|MF_1-MF_2|=2a$, за све M са хиперболе.

- парабола



нема центар

F – жижа (фокус) (једна!)

d – директриса (једна!)

O – теме параболе

$d(O,F)=d(O,d)=\frac{p}{2}$

$e=1$ (увек)

једна оса симетрије (садржи теме и жижу)

директриса је нормална на оси

Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме парабола има једначину $y^2=2px$, $p>0$. Тада је $O(0,0)$ теме, $F(\frac{p}{2},0)$ је жижа, $d: x=-\frac{p}{2}$ је једначина директрисе, $o: y=0$ је једначина осе. (*)

За сваку тачку параболе важи да је растојање од ње до жиже исто као растојање од ње до директрисе.

(*) Ако је $M(x_0,y_0)$ тачка са параболе, онда је једначина тангенте на параболи у тачки M $t: yy_0=p(x+x_0)$

Теорема: За сваку тачку M са недегенерисане криве другог реда важи $\frac{d(M,F)}{d(M,d)}=e$ (F и d се узимају са истим индексом)

5.1. (а) Дијаметар елипсе, односно хиперболе, јесте ~~њена~~ њена тетива (дуж чији су крајеви тачке са елипсе, односно хиперболе) која садржи њен центар.

Постоји Декартов правоугли координатни систем такав да је једначина дате криве $\frac{x^2}{a^2}+\beta\frac{y^2}{b^2}=1$, при чему је $\beta=1$ ако је у питању елипса, односно $\beta=-1$ ако је у питању хипербола. Тада је $O(0,0)$ центар криве и једначина датог дијаметра p је $p: \frac{x-0}{u}=\frac{y-0}{v}$, где је $(u,v)\neq(0,0)$ неки ненула вектор у равни криве. Нека је MN произвољна тетива криве, где су координате тачака M и N редом $M(x_0,y_0)$ и $N(x_1,y_1)$. Тада је $\frac{x_0^2}{a^2}+\beta\frac{y_0^2}{b^2}=1$, $\frac{x_1^2}{a^2}+\beta\frac{y_1^2}{b^2}=1$ и $x_1=x_0+\lambda u$, $y_1=y_0+\lambda v$ (бирамо тетиву MN која је паралелна дијаметру p). Дакле

$$\frac{(x_0+\lambda u)^2}{a^2}+\beta\frac{(y_0+\lambda v)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\cancel{x_0^2}+2\lambda x_0u+\lambda^2u^2}{a^2}+\beta\frac{\cancel{y_0^2}+2\lambda y_0v+\lambda^2v^2}{b^2}=\cancel{\frac{x_0^2}{a^2}+\beta\frac{y_0^2}{b^2}}$$

$$\lambda\left(\frac{2x_0u}{a^2}+2\beta\frac{y_0v}{b^2}+\lambda\left(\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}\right)\right)=0$$

$$\lambda=0 \quad \text{или} \quad 2\left(\frac{x_0u}{a^2}+\beta\frac{y_0v}{b^2}\right)+\lambda\left(\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}\right)=0$$

$$\lambda=0 \quad \text{или} \quad \lambda=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}+\beta\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}$$

$\lambda=0$ није решење, јер желимо да се тачке M и N разликују. Према томе, $\lambda=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}+\beta\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}$. Средиште S тетиве MN има координате $S\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}\right)$.

$$\frac{x_0+x_1}{2}=\frac{x_0+x_0+\lambda u}{2}=\frac{2x_0}{2}+\frac{\lambda}{2}u=x_0+\frac{\lambda}{2}u=x_0-\frac{\frac{x_0u}{a^2}+\beta\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}u=\frac{\cancel{\frac{x_0u^2}{a^2}}+\beta\frac{x_0v^2}{b^2}-\cancel{\frac{x_0u^2}{a^2}}-\beta\frac{y_0uv}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}=\frac{\beta\frac{v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}(x_0v-y_0u)$$

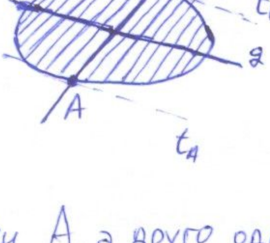
$$\frac{y_0+y_1}{2}=\frac{y_0+y_0+\lambda v}{2}=\frac{2y_0}{2}+\frac{\lambda}{2}v=y_0+\frac{\lambda}{2}v=y_0-\frac{\frac{x_0u}{a^2}-\beta\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}v=\frac{\frac{y_0u^2}{a^2}+\cancel{\beta\frac{y_0v^2}{b^2}}-\frac{x_0uv}{a^2}-\cancel{\beta\frac{y_0v^2}{b^2}}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}=\frac{\frac{u}{a^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}(y_0u-x_0v)=\frac{-\frac{u}{a^2}}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}(x_0v-y_0u)$$

Можемо уочити да је количник x-координате и y-координате тачке S једнак:

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{\beta\frac{v}{b^2}}{\cancel{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}\cancel{(x_0v-y_0u)}}{\frac{-\frac{u}{a^2}}{\cancel{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}\cancel{(x_0v-y_0u)}}=\frac{\beta\frac{v}{b^2}}{-\frac{u}{a^2}},$$

па следи да све тачке S припадају правој $g: \frac{x}{-\beta\frac{v}{b^2}}=\frac{y}{\frac{u}{a^2}}$, која садржи центар криве.

(б)



Нека је $A(x_0,y_0)$ једна од крајњих тачака дијаметра p. Тада је $\frac{x_0}{u}=\frac{y_0}{v}$ и $\frac{x_0^2}{a^2}+\beta\frac{y_0^2}{b^2}=1$. Нека је $\frac{x_0}{u}=\frac{y_0}{v}=t$. Тада је $x_0=ut$, $y_0=vt$ и $\frac{(ut)^2}{a^2}+\beta\frac{(vt)^2}{b^2}=1$, па је $\left(\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}\right)t^2=1$. Следи да је $t^2=\frac{1}{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}$ па ако је $\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}>0$, онда је $t_{1/2}=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}$. Једно од ових решења одговара тачки A, а друго одговара тачки $B(x_1,y_1)$, која је друга крајња тачка дијаметра p. Нека је $x_0=\frac{u}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}$ и $y_0=\frac{v}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}$. Тангента t_A у тачки A има једначину $t_A: \frac{xx_0}{a^2}+\beta\frac{yy_0}{b^2}=1$. Дакле,

$$\frac{xx_0}{a^2}+\beta\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\beta\frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)=-\beta\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)$$

$$\frac{x-x_0}{-\beta\frac{y_0}{b^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{x_0}{a^2}}$$

$$\frac{x-x_0}{-\frac{\beta}{b^2}\frac{v}{\cancel{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}}}=\frac{y-y_0}{\frac{1}{a^2}\frac{u}{\cancel{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}}}$$

$$t_A: \frac{x-x_0}{-\beta\frac{v}{b^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{u}{a^2}}$$

Пошто права t_A има исти вектор правца као и права g, следи да су у питању паралелне праве. Заменом $t=-\frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\beta\frac{v^2}{b^2}}}$ добијамо $t_B: \frac{x-x_1}{-\beta\frac{v}{b^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{u}{a^2}}$, што је такође паралелно правој g.

(B) Нека је крива $\frac{x^2}{a^2}+\beta\frac{y^2}{b^2}=1$ елипса, тј. нека је $\beta=1$. Права g има једначину $g: \frac{x}{-\frac{v}{b^2}}=\frac{y}{\frac{u}{a^2}}$.
Нека су $C(x_0,y_0)$ и $D(x_1,y_1)$ тачке пресека праве g и елипсе. Тада је, за тачку C, $\frac{x_0}{-\frac{v}{b^2}}=\frac{y_0}{\frac{u}{a^2}}=t$,
па је $x_0=-\frac{v}{b^2}t$ и $y_0=\frac{u}{a^2}t$, и $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, па је $\frac{1}{a^2}\left(-\frac{v}{b^2}t\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{u}{a^2}t\right)^2=1$.

$$\frac{1}{a^2}\frac{v^2}{b^4}t^2+\frac{1}{b^2}\frac{u^2}{a^4}t^2=1 \quad / \cdot a^2b^2$$

$$\frac{v^2}{b^2}t^2+\frac{u^2}{a^2}t^2=a^2b^2$$

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)t^2=a^2b^2$$

$$t^2=\frac{a^2b^2}{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}$$

$$t_{1/2}=\pm\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$$
< једно решење даје C
< друго решење даје D

Тангента у тачки C има једначину $t_C: \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.
Нека је $x_0=-\frac{v}{b^2}\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$ и $y_0=\frac{u}{a^2}\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$.

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)=-\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)$$

$$\frac{x-x_0}{-\frac{y_0}{b^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{x_0}{a^2}}$$

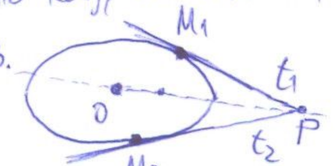
$$\frac{x-x_0}{\cancel{-}\frac{1}{\cancel{b^2}}\cdot\frac{u}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}}=\frac{y-y_0}{\frac{1}{\cancel{a^2}}\cdot\left(\cancel{-}\frac{v}{\cancel{b^2}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}\right)}$$

$$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}$$

Тангенту t_D добијамо
Дакле, тангента t_C има исти вектор правца као дијаметар p, па су паралелни.
заменом $t=-\frac{ab}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}}}$ и добијамо $t_D: \frac{x-x_1}{u}=\frac{y-y_1}{v}$, што је паралелно дијаметру p.

<u>Деф</u>: За правце одређене дијаметром p и правом g (која је дијаметар ако је крива елипса, јер ~~...~~ не садржи ниједну тетиву) кажемо да су међу-
ако је хипербола, онда g не сече хиперболу, па
собно конјуговане. Дакле, правци (u,v) и $\left(-\beta\frac{v}{b^2}, \frac{u}{a^2}\right)$ су међусобно конјуговани правци.

5.3.



Постоји Декартов правоугли координатни систем у коме дата елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Нека је $M_1(x_1,y_1)$ и нека је $M_2(x_2,y_2)$. Тада су тан-генте t_1 и t_2 у тачкама M_1 и M_2 редом дате једначинама
$t_1: \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ и $t_2: \frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$. Нека је $P(x_0,y_0)$ пресечна тачка
ових тангенти. Тада P припада t_1 и t_2, па је $\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=1$ и $\frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0y_2}{b^2}=1$. Оду-
зимањем ових једначина добијамо $\frac{x_0}{a^2}(x_1-x_2)=-\frac{y_0}{b^2}(y_1-y_2)$, па ако овај израз изједначимо са t, до-
бијамо $x_0=\frac{a^2t}{x_1-x_2}$ и $y_0=\frac{-b^2t}{y_1-y_2}$. Требало би заменом у неку од полазних једначина добити колико
је t у зависности од параметара елипсе и тачака M_1 и M_2, али то је сувишно овде, јер ако само на
основу датих података посматрамо праву p која садржи тачке $O(0,0)$ (центар елипсе) и $P(x_0,y_0)$, добијамо
њену једначину $p: \frac{x-0}{x_0-0}=\frac{y-0}{y_0-0}$, тј. $p: \frac{x}{\frac{a^2\cancel{t}}{x_1-x_2}}=\frac{y}{\frac{-b^2\cancel{t}}{y_1-y_2}}$, те видимо да се t скраћује. Дакле, знамо
да је права p која садржи O и P дата једначином $p: \frac{x}{\frac{a^2}{x_1-x_2}}=\frac{y}{\frac{-b^2}{y_1-y_2}}$. Проверимо да ли средиште S
тетиве M_1M_2 припада правој p. Координате средишта S су $S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, па је

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{a^2}{x_1-x_2}} = \frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{-b^2}{y_1-y_2}}$$

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2} = -\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}$$

$$1=1 \checkmark$$

Дакле, истој правој (p) припадају центар елипсе, средиште тетиве M_1M_2 и тачка P, те заиста P припада правој која садржи дијаметар елипсе, који садржи средиште тетиве M_1M_2 (OS), што је и требало доказати.

5.4. Тачка $M(x_0,y_0)$ задовољава својство да се елипса из ње види под правим углом ако две тангенте из тачке M на датој елипси граде прав угао. Нека је координатни систем одабран тако да елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Нека је $t_1: \frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}$ права која садржи тачку $M(x_0,y_0)$. Тада је она тангента ако и само ако има само једну пресечну тачку са елипсом и та једна пресечна тачка добија се као двострука нула квадратне једначине. Нека је $\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=t$. Тада је $x=x_0+ut$ и $y=y_0+vt$, па заменом у једначину елипсе добијамо $\frac{(x_0+ut)^2}{a^2}+\frac{(y_0+vt)^2}{b^2}=1$. Дакле,

$$\frac{x_0^2}{a^2}+2\frac{x_0u}{a^2}t+\frac{u^2}{a^2}t^2+\frac{y_0^2}{b^2}+2\frac{y_0v}{b^2}t+\frac{v^2}{b^2}t^2=1$$

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0u}{a^2}+\frac{y_0v}{b^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0$$

Дакле, да бисмо добили тангенту, ово мора бити квадратна једначина, што значи $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\neq 0$, и дискриминанта ове квадратне једначине мора бити нула да би њено решење (нула) било двоструко. Дакле,

$$\cancel{4}\left(\frac{x_0u}{a^2}+\frac{y_0v}{b^2}\right)^2-\cancel{4}\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0 \qquad (*)$$

Нека је $t_2: \frac{x-x_0}{-v}=\frac{y-y_0}{u}$ права која садржи $M(x_0,y_0)$ и нормална је на t_1 (вектор правца $(-v,u)$ праве t_2 нормалан је на вектору правца (u,v) праве t_1, јер је $\langle(-v,u),(u,v)\rangle=-uv+uv=0$). Пошто желимо да се из тачке M елипса види под правим углом, неопходно је да и t_2 буде тангента елипсе. Претходни поступак је универзалан, што значи да се може применити и на праву t_2, уз замену $u\mapsto -v$ и $v\mapsto u$.

Дакле, t_2 је тангента ако и само ако важи

$$\cancel{4}\left(\frac{x_0(-v)}{a^2}+\frac{y_0u}{b^2}\right)^2-\cancel{4}\left(\frac{(-v)^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)=0 \qquad (**)$$

Сређивањем израза $(*)$ и $(**)$ добијамо:

$(*)$: $$\cancel{\frac{x_0^2u^2}{a^4}}+2\frac{x_0y_0uv}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_0^2v^2}{b^4}}-\left(\cancel{\frac{x_0^2u^2}{a^4}}+\frac{y_0^2u^2}{a^2b^2}-\frac{u^2}{a^2}+\frac{x_0^2v^2}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_0^2v^2}{b^4}}-\frac{v^2}{b^2}\right)=0$$

$$2\frac{x_0y_0uv}{a^2b^2}-\frac{x_0^2v^2}{a^2b^2}-\frac{y_0^2u^2}{a^2b^2}+\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=0$$

$(**)$: $$\cancel{\frac{x_0^2v^2}{a^4}}-2\frac{x_0y_0uv}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_0^2u^2}{b^4}}-\left(\cancel{\frac{x_0^2v^2}{a^4}}+\frac{y_0^2v^2}{a^2b^2}-\frac{v^2}{a^2}+\frac{x_0^2u^2}{a^2b^2}+\cancel{\frac{y_0^2u^2}{b^4}}-\frac{u^2}{b^2}\right)=0$$

$$-2\frac{x_0y_0uv}{a^2b^2}-\frac{x_0^2u^2}{a^2b^2}-\frac{y_0^2v^2}{a^2b^2}+\frac{v^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}=0$$

Сабирањем добијених израза добијамо:

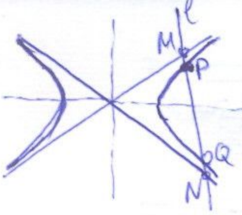
$$-\frac{x_0^2}{a^2b^2}(v^2+u^2)-\frac{y_0^2}{a^2b^2}(u^2+v^2)+\frac{u^2+v^2}{a^2}+\frac{v^2+u^2}{b^2}=0$$

Скраћивањем са $\frac{u^2+v^2}{a^2b^2}\neq 0$ добијамо

$$-x_0^2-y_0^2+b^2+a^2=0$$

$$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$$

Дакле, добијамо да тачка $M(x_0,y_0)$ припада кругу чији је центар $(0,0)$ (исти као центар елипсе) и полупречник је $\sqrt{a^2+b^2}$, односно да је тражено геометријско тачака, из којих се елипса с великом полуосом a и малом полуосом b види под правим углом, круг чији је центар исто што и центар елипсе и полупречник $\sqrt{a^2+b^2}$.

5.6. 

Нека је координатни систем постављен тако да је једначина хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Нека је $P(x_0,y_0)$ произвољна тачка са хиперболе и нека је права l дата са $l: \frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}$. Одредимо координате друге пресечне тачке $Q(x_1,y_1)$ праве l и хиперболе, као и координате тачака $M(x_2,y_2)$ и $N(x_3,y_3)$ у којима l сече асимптоте хиперболе.

Напишимо параметарски облик једначине праве l: $x=x_0+ut$, $y=y_0+vt$. Тада је $x_1=x_0+ut_1$, $y_1=y_0+vt_1$, $x_2=x_0+ut_2$, $y_2=y_0+vt_2$ и $x_3=x_0+ut_3$, $y_3=y_0+vt_3$, за неке $t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}$. За тачку $Q(x_1,y_1)$ имамо да припада хиперболи, па је $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$. Дакле, $\frac{(x_0+ut_1)^2}{a^2}-\frac{(y_0+vt_1)^2}{b^2}=1$, тј. $\cancel{\frac{x_0^2}{a^2}}+2\frac{x_0u}{a^2}t_1+\frac{u^2}{a^2}t_1^2-\left(\cancel{\frac{y_0^2}{b^2}}+2\frac{y_0v}{b^2}t_1+\frac{v^2}{b^2}t_1^2\right)=\cancel{\frac{x_0^2}{a^2}}-\cancel{\frac{y_0^2}{b^2}}$.

Дакле, $t_1\left(2\frac{x_0u}{a^2}-2\frac{y_0v}{b^2}+\left(\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right)t_1\right)=0$, па је $t_1=0$ или $2\left(\frac{x_0u}{a^2}-\frac{y_0v}{b^2}\right)+\left(\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right)t_1=0$. Како вредност $t_1=0$ одговара тачки P, следи да је $t_1=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}-\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}$.

Једначине асимптота су $a_1: y=\frac{b}{a}x$ и $a_2: y=-\frac{b}{a}x$. Нека тачка $M(x_2,y_2)$ припада асимптоти a_1. Тада је $y_2=\frac{b}{a}x_2$, тј. $y_0+vt_2=\frac{b}{a}(x_0+ut_2)$. Дељењем са b добијамо $\frac{y_0}{b}+\frac{v}{b}t_2=\frac{x_0}{a}+\frac{u}{a}t_2$, па је $\left(\frac{u}{a}-\frac{v}{b}\right)t_2=-\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)$, тј. $t_2=-\frac{\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}$. Нека тачка $N(x_3,y_3)$ припада асимптоти a_2. Тада је $y_3=-\frac{b}{a}x_3$, тј. $y_0+vt_3=-\frac{b}{a}(x_0+ut_3)$. Дељењем са b добијамо $\frac{y_0}{b}+\frac{v}{b}t_3=-\frac{x_0}{a}-\frac{u}{a}t_3$, па је $\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)t_3=-\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)$, тј. $t_3=-\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}+\frac{v}{b}}$.

Дужина дужи MP је $\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}$, а дужина дужи NQ је $\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$, па је довољно доказати да је $(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2=(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2$.

$$(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2=(x_0-(x_0+ut_2))^2+(y_0-(y_0+vt_2))^2=(-ut_2)^2+(-vt_2)^2=(u^2+v^2)t_2^2$$

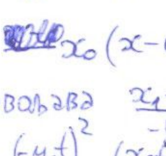
$$(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2=(x_0+ut_1-(x_0+ut_3))^2+(y_0+vt_1-(y_0+vt_3))^2=(u(t_1-t_3))^2+(v(t_1-t_3))^2=(u^2+v^2)(t_1-t_3)^2$$

Дакле, довољно је доказати да је $t_2^2=(t_1-t_3)^2$, односно да је $t_2=t_1-t_3$ или $t_2=t_3-t_1$.

$$t_1-t_3=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}-\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}-\left(-\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}+\frac{v}{b}}\right)=-\frac{2\left(\frac{x_0u}{a^2}-\frac{y_0v}{b^2}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}+\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}+\frac{v}{b}}\cdot\frac{\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}{\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}=-\frac{2\frac{x_0u}{a^2}-2\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}+\frac{\frac{x_0u}{a^2}-\frac{x_0v}{ab}+\frac{y_0u}{ab}-\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}=$$

$$=\frac{-\frac{x_0u}{a^2}-\frac{x_0v}{ab}+\frac{y_0u}{ab}+\frac{y_0v}{b^2}}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}=\frac{-\frac{x_0}{a}\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)+\frac{y_0}{b}\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}=\frac{-\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)}{\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}}=-\frac{\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}}{\frac{u}{a}-\frac{v}{b}}=t_2$$

Према томе, важи $MP=NQ$, што се и тражило.

5.8. 

Нека је координатни систем постављен тако да елипса има једначину $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Нека је $A(x_0,y_0)$ произвољна тачка са елипсе. Тада је $\overrightarrow{OA}=(x_0,y_0)$ вектор нормале праве OB (јер је $OA\perp OB$), па пошто је $O(0,0)$ центар елипсе, следи да је $OB: x_0(x-0)+y_0(y-0)=0$, тј. $x_0(x-0)=-y_0(y-0)$. Дакле, $OB: \frac{x-0}{-y_0}=\frac{y-0}{x_0}=t$, па тачка $B(x_1,y_1)$ задовољава $\frac{x_1-0}{-y_0}=\frac{y_1-0}{x_0}=t$, тј. $x_1=-y_0t$, $y_1=x_0t$. Тачка B припада и елипси, па важи $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, тј. $\frac{(-y_0t)^2}{a^2}+\frac{(x_0t)^2}{b^2}=1$. Дакле, $\left(\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}\right)t^2=1$, тј. $t^2=\frac{1}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}$. Следи да постоје две могућности за B, но, због симетрије, довољно је проверити тврђење за једну од две могуће тачке B. Без умањења општости, одаберимо $t=\frac{1}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}$. Тада је $x_1=-\frac{y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}$, $y_1=\frac{x_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}$. Једначина праве AB је $AB: \frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$, тј. у имплицитном облику $(y_1-y_0)(x-x_0)-(x_1-x_0)(y-y_0)=0$. Растојање тачке $O(0,0)$ од праве AB је

$$\frac{|(y_1-y_0)(0-x_0)-(x_1-x_0)(0-y_0)|}{\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2}}=\frac{|-x_0(y_1-y_0)+y_0(x_1-x_0)|}{\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2}}=\frac{|-x_0y_1+\cancel{x_0y_0}+y_0x_1-\cancel{x_0y_0}|}{\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2}}=$$

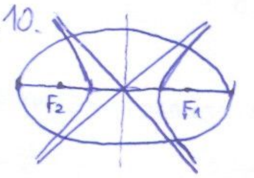
$$= \frac{|-x_0y_1+y_0x_1|}{\sqrt{(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2}} = \frac{\left|-x_0\cdot\frac{x_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}+y_0\cdot\frac{-y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}\right|}{\sqrt{y_1^2-2y_1y_0+y_0^2+x_1^2-2x_1x_0+x_0^2}} = \frac{\frac{|-x_0^2-y_0|^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}-2\frac{x_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}y_0+y_0^2+\frac{y_0^2}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}-2\frac{-y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}x_0+x_0^2}} =$$

$$= \frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}+x_0^2+y_0^2-\cancel{2\frac{x_0y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}+\cancel{2\frac{x_0y_0}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}}} = \frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)\left(\frac{1}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}+1\right)}} = \frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)\left(\frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}+\frac{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)\cdot\frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2+y_0^2}{b^2}}{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}} = \frac{\frac{x_0^2+y_0^2}{\cancel{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}}{\frac{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}}{\cancel{\sqrt{\frac{y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{b^2}}}}} = \frac{\cancel{x_0^2+y_0^2}}{\cancel{(x_0^2+y_0^2)}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}},$$

што не зависи од избора тачке A, а самим тим ни од полудијаметара OA и OB.

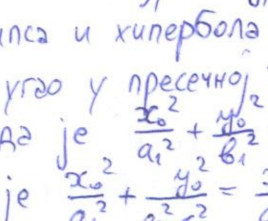
5.10.



Ако елипса и хипербола имају заједничке жиже F_1 и F_2, онда имају и заједнички центар (средиште F_1F_2). Одаберимо Декартов правоугли координатни систем тако да координатни почетак јесте средиште F_1F_2 и x-оса садржи тачке F_1, F_2, O и расте у смеру од O ка F_1 (наравно, y-оса је нормална на x-оси у O и одаберимо да оријентација координатног система буде позитивна). Нека је $OF_1=c$. Тада тачке F_1 и F_2 имају редом координате $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$. Нека су a_1, b_1 редом велика и мала полуоса елипсе и a_2, b_2 редом одговарајући параметри хиперболе. Тада је $c^2=a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2$, а једначине елипсе и хиперболе су, редом, $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$ и $\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1$.

Угао између двеју кривих јесте угао између њихових тангенти у пресечној тачки. Због симетрије (елипса и хипербола имају исте осе симетрије) угао ће бити исти у свим тачкама пресека, па потражимо угао у пресечној тачки која има позитивну x-координату и y-координату. Нека је то тачка $M(x_0,y_0)$. Тада је $\frac{x_0^2}{a_1^2}+\frac{y_0^2}{b_1^2}=\frac{x_0^2}{a_2^2}-\frac{y_0^2}{b_2^2}=1$. Из $c^2=a_1^2-b_1^2=a_2^2+b_2^2$ имамо да је $b_1^2=a_1^2-c^2$ и $b_2^2=c^2-a_2^2$, па је $\frac{x_0^2}{a_1^2}+\frac{y_0^2}{a_1^2-c^2}=\frac{x_0^2}{a_2^2}-\frac{y_0^2}{c^2-a_2^2}=1$. Следи да је $\frac{y_0^2}{a_1^2-c^2}+\frac{y_0^2}{c^2-a_2^2}=\frac{x_0^2}{a_2^2}-\frac{x_0^2}{a_1^2}$, тј. $\frac{y_0^2}{(a_1^2-c^2)(c^2-a_2^2)}(\cancel{c^2}-a_2^2+a_1^2-\cancel{c^2})=\frac{x_0^2}{a_2^2a_1^2}(\cancel{a_1^2-a_2^2})$. Дакле, $\frac{y_0^2}{b_1^2b_2^2}=\frac{x_0^2}{a_1^2a_2^2}$, тј. $\frac{y_0^2}{x_0^2}=\frac{b_1^2b_2^2}{a_1^2a_2^2}$. Због претпоставке $x_0>0, y_0>0$ важи $\frac{y_0}{x_0}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$, па је $y_0=b_1b_2t$ и $x_0=a_1a_2t$, за неко $t>0$. Заменом у једначину елипсе (или хиперболе, свеједно) добијамо $1=\frac{x_0^2}{a_1^2}+\frac{y_0^2}{b_1^2}=\frac{\cancel{a_1^2}a_2^2t^2}{\cancel{a_1^2}}+\frac{\cancel{b_1^2}b_2^2t^2}{\cancel{b_1^2}}=(a_2^2+b_2^2)t^2=c^2t^2$, па је $t^2=\frac{1}{c^2}$, тј. $t=\frac{1}{c}$. Дакле, тачка пресека је $M\left(\frac{a_1a_2}{c},\frac{b_1b_2}{c}\right)$. Тангента на елипси у тачки M је $t_e: \frac{x\frac{a_1a_2}{c}}{a_1^2}+\frac{y\frac{b_1b_2}{c}}{b_1^2}=1$, а тангента на хиперболи у тачки M је $t_h: \frac{x\frac{a_1a_2}{c}}{a_2^2}-\frac{y\frac{b_1b_2}{c}}{b_2^2}=1$. Вектор нормале тангенте t_e је $\vec{n}_{t_e}=\left(\frac{a_2}{ca_1},\frac{b_2}{cb_1}\right)$, а вектор нормале тангенте t_h је $\vec{n}_{t_h}=\left(\frac{a_1}{ca_2},-\frac{b_1}{cb_2}\right)$. Због углова с нормалним крацима, угао између правих исти је као и угао између њихових нормала. Како је $\langle\vec{n}_{t_e},\vec{n}_{t_h}\rangle=\frac{a_2}{ca_1}\cdot\frac{a_1}{ca_2}+\frac{b_2}{cb_1}\cdot\left(-\frac{b_1}{cb_2}\right)=\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c^2}$, следи да су t_e и t_h међусобно нормалне, па су и елипса и хипербола међусобно нормалне.

5.11.



Одаберимо други координатни систем $O'x'y'$ коме је права $x-y+1=0$ x'-оса и права $x+y+1=0$ y'-оса.

$x-y+1=0$ | $x+y+1=0$
$x+1=y$ | $x+1=-y$
$\frac{x+1}{1}=\frac{y-0}{1}$ | $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-0}{1}$

Вектор x'-осе треба да буде јединични вектор истог смера као вектор правца $(1,1)$ праве $x-y+1=0$, а то је вектор $\vec{f}_1=\frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Вектор y'-осе треба да буде јединични вектор истог смера као вектор правца $(-1,1)$ праве $x+y+1=0$, а то је вектор $\vec{f}_2=\frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Такође, можемо приметити да обе праве садрже тачку $O'(-1,0)$, што је координатни почетак новог координатног система $O'x'y'$. Из области Трансформација координата знамо да су формуле трансформације

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Како је $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$ (матрице преласка из ортонормираног афиног репера у ортонормирани афини репер (Декартовог правоуглог координатног система у Декартов правоугли координатни систем) имају особину да је $A^{-1}=A^T$), следи да је

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix},$$ тј. да је

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}.$$

Тада тачка $A(-2,-1)$ из Oxy координатног система постаје тачка чије су координате

$$A: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ у $O'x'y'$ координатном систему, а тачка $B(0,-2)$ из координатног система Oxy постаје тачка чије су координате

$$B: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt2} \\ -\frac{2}{\sqrt2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{3}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$ у $O'x'y'$ координатном систему. Крива коју тражимо има две осе симетрије (x'-оса и y'-оса), па мора бити елипса или хипербола. Трансформацијом координата постигли смо да у $O'x'y'$ координатном систему крива има једначину у канонском облику, тј. да је једначина криве $\frac{x'^2}{a^2}+\beta\frac{y'^2}{b^2}=1$, где је $\beta\in\{-1,1\}$. Заменом координата тачака A и B добијамо

$$\frac{(-\sqrt2)^2}{a^2}+\beta\cdot\frac{0^2}{b^2}=1 \qquad \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)^2}{a^2}+\beta\cdot\frac{\left(-\frac{3}{\sqrt2}\right)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{2}{a^2}+0=1 \qquad \frac{\frac12}{2}+\beta\cdot\frac{\frac92}{b^2}=1$$

$$a^2=2 \qquad \frac14+\beta\cdot\frac{9}{2b^2}=1$$

Очигледно мора бити $\beta=1$, јер је $\beta\cdot\frac{9}{2b^2}=1-\frac14=\frac34>0$, и $\frac{9}{2b^2}=\frac{3}{4}$, па је $b^2=6$.

Дакле, једначина криве (која је елипса) је $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{6}=1$. Међутим, тражило се да се одреди једначина криве у почетном координатном систему Oxy. Како је $x'=\frac{1}{\sqrt2}x+\frac{1}{\sqrt2}y+\frac{1}{\sqrt2}$ и $y'=-\frac{1}{\sqrt2}x+\frac{1}{\sqrt2}y-\frac{1}{\sqrt2}$, заменом у добијену једначину у $O'x'y'$ координатном систему добијамо

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt2}x+\frac{1}{\sqrt2}y+\frac{1}{\sqrt2}\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt2}x+\frac{1}{\sqrt2}y-\frac{1}{\sqrt2}\right)^2}{6}=1,$$ тј. $$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt2}(x+y+1)\right)^2}{2}+\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt2}(x-y+1)\right)^2}{6}=1.$$ Дакле, једначина тражене елипсе у Oxy координатном систему је $\frac{(x+y+1)^2}{4}+\frac{(x-y+1)^2}{12}=1$.

5.13. Крива има две жиже, па је у питању елипса или хипербола. Центар криве је средиште дужи F_1F_2, па су његове координате $O\left(\frac{1-2}{2},\frac{1-2}{2}\right)$, тј. $O\left(-\frac12,-\frac12\right)$. Растојање од центра до жиже (било које) је $c=OF_1=\sqrt{\left(1+\frac12\right)^2+\left(1+\frac12\right)^2}=\sqrt{\left(\frac32\right)^2+\left(\frac32\right)^2}=\frac32\sqrt2$, а растојање од центра до директрисе је $\frac{a^2}{c}=d(O,l)=\frac{\left|-\frac12-\frac12-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-1-1|}{\sqrt2}=\frac{|-2|}{\sqrt2}=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$. Следи да је $a^2=c\sqrt2=\frac32\sqrt2\cdot\sqrt2=3$, па је $a=\sqrt3$. Како је $e=\frac{c}{a}$, следи да је $e=\frac{\frac32\sqrt2}{\sqrt3}=\frac{3\sqrt2}{2\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{\sqrt3}=\frac{\sqrt6}{2}$. Да бисмо искористили особину да је количник растојања произвољне тачке криве другог реда од жиже и од директрисе једнак ексцентрицитету, морамо утврдити која од ових жижа је у пару с директрисом. У пару с њом биће она жижа чије је растојање од ње мање. Како је $d(F_1,l)=\frac{|1+1-1|}{\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}$ и $d(F_2,l)=\frac{|-2-2-1|}{\sqrt2}=\frac{5}{\sqrt2}$, следи да су жижа F_1 и директриса l у пару. Дакле, једначина тражене криве (која је хипербола, јер је $e>1$) је дата са

$\frac{d(M,F_1)}{d(M,l)} = \frac{\sqrt6}{2}$, где је $M(x,y)$ произвољна тачка криве.

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt2}} = \frac{\sqrt6}{2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \frac{\sqrt6}{2}\cdot\frac{|x+y-1|}{\sqrt2} = \frac{\sqrt3}{2}|x+y-1| \;/^2$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = \frac{3}{4}(x+y-1)^2$$

5.14. Права t која садржи тачку $A(3,4)$ има ~~координате~~ једначину $t: \frac{x-3}{u}=\frac{y-4}{v}$. Да би она додиривала криву, неопходно је да постоји само једна тачка у пресеку праве t и криве.

$$t: \frac{x-3}{u}=\frac{y-4}{v}=\lambda$$

$$x=3+\lambda u$$

$$y=4+\lambda v$$

$$2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$$

$$2\cdot(3+\lambda u)^2-4(3+\lambda u)(4+\lambda v)+(4+\lambda v)^2-2(3+\lambda u)+6(4+\lambda v)-3=0$$

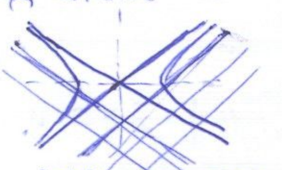
$$2\cdot(9+6u\lambda+u^2\lambda^2)-4(12+3v\lambda+4u\lambda+uv\lambda^2)+(16+8v\lambda+v^2\lambda^2)-6-2u\lambda+24+6v\lambda-3=0$$

$$(2u^2-4uv+v^2)\lambda^2+(12u-12v-16u+8v-2u+6v)\lambda+\cancel{18}-\cancel{48}+\underset{10}{\cancel{16}}-6+\cancel{24}-3=0$$

$$(2u^2-4uv+v^2)\lambda^2+(-6u+2v)\lambda+1=0$$

Постоје две могућности да се добије само једно λ, односно само једна тачка која припада и правој t и кривој. Једна од њих је да је $2u^2-4uv+v^2=0$, јер тада имамо линеарну једначину. Међутим, тада се неће добити тангента, већ ће добити права паралелна оси параболе (ако је крива парабола), односно права паралелна асимптоти хиперболе (ако је крива хипербола). Заиста, ово су специјални случајеви када права и крива другог реда имају једну заједничку тачку, а права није тангента дате криве. Код елипсе се овакав специјалан случај не може догодити.

праве паралелне оси параболе



праве паралелне асимптоти хиперболе

Дакле, мора бити $2u^2-4uv+v^2\neq0$, а да би квадратна једначина имала јединствено решење, мора јој дискриминанта бити једнака нули (тада се добија двострука нула). Према томе

$$(-6u+2v)^2-4(2u^2-4uv+v^2)\cdot1=0$$

$$(-2(3u-v))^2-4(2u^2-4uv+v^2)=0$$

$$\cancel{4}(3u-v)^2-\cancel{4}(2u^2-4uv+v^2)=0$$

$$9u^2-6uv+\cancel{v^2}-2u^2+4uv-\cancel{v^2}=0$$

$$7u^2-2uv=0$$

$$u(7u-2v)=0$$

Дакле, $u=0$ или $7u-2v=0$. Ова решења дају два вектора правца праве t да би она била тангента. Прво решење је $u=0$, па је $t_1: \frac{x-3}{0}=\frac{y-4}{v}$. Скраћивањем са $v\neq0$ добијамо $t_1: \frac{x-3}{0}=\frac{y-4}{1}$. Јасно је да $2\cdot0^2-4\cdot0\cdot1+1^2=1$ није једнака 0, па ово заиста јесте тангента. Друго решење је $7u-2v=0$ тј. $7u=2v$, односно $u:v=2:7$. Следи да је $u=2k$ и $v=7k$, за неко $k\in\mathbb{R}$, па је $t_2: \frac{x-3}{2k}=\frac{y-4}{7k}$. Скраћивањем са k добијамо $t_2: \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{7}$. Пошто је $2\cdot2^2-4\cdot2\cdot7+7^2=2\cdot4-8\cdot7+7^2=8-56+49\neq0$, следи да је и ово тангента.

Свођење криве другог реда на канонски облик

Нека је дата крива другог реда $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$. Нека је матрица A дата са $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}$. Можемо приметити да важи

$$(x\ \ y\ \ 1)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=(x\ \ y\ \ 1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x+a_{12}y+a_{13} & a_{12}x+a_{22}y+a_{23} & a_{13}x+a_{23}y+a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=$$

$$=(a_{11}x^2+\underline{a_{12}xy}+\underline{a_{13}x})+(\underline{a_{12}xy}+a_{22}y^2+a_{23}y)+(\underline{a_{13}x}+a_{23}y+a_{33})=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33},$$ па се

једначина криве може написати као $(x\ \ y\ \ 1)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0$.

Свођење криве на канонски облик представља тражење новог Декартовог правоуглог координатног система у којем ће та крива имати једначину облика $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ако је крива елипса, облика $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ако је крива хипербола, односно облика $y^2=2px$, ако је крива парабола. Не мора унапред да се зна која је крива у питању, штавише, током поступка ће се утврдити тип криве.

Приметимо да ниједна крива у канонском облику нема члан xy. Дакле, из подматрице $B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}$ треба прећи у матрицу $B'=\begin{pmatrix}a'_{11}&0\\0&a'_{22}\end{pmatrix}$. Такође, ако претпоставимо да је трансформација координата $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=R_1\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, онда уместо $(x\ \ y)B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ имамо

$$(x\ \ y)B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^TB\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(R_1\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)^TB\left(R_1\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}^TR_1^TBR_1\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=(x'\ \ y')R_1^TBR_1\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},$$

па је пожељно да матрица R_1 буде таква да је $R_1^TBR_1=B'=\begin{pmatrix}a'_{11}&0\\0&a'_{22}\end{pmatrix}$, односно да $R_1^TBR_1$ буде дијагонална матрица. Такође, иако то још нисмо доказали, за матрицу преласка R_1 из ортонормираног репера у ортонормирани репер важи да је $R_1^T=R_1^{-1}$, према томе, тражимо матрицу R_1 са својством $R_1^T=R_1^{-1}$ такву да је $R_1^{-1}BR_1$ дијагонална матрица. Из Линеарне алгебре нам је познато да до те матрице дођемо поступком дијагонализације. Погледајмо на примеру како се то ради.

5.16. $4x^2-4xy+y^2+x+12y+6=0$

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&\frac12\\-2&1&6\\\frac12&6&6\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}$$

Потражимо сопствене вредности матрице B.

$$\det(B-\lambda E)=\begin{vmatrix}4-\lambda&-2\\-2&1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)-4=\cancel{4}-4\lambda-\lambda+\lambda^2-\cancel{4}=\lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5)=0$$

Дакле, сопствене вредности су $\lambda=0$ и $\lambda=5$. Потражимо сопствене векторе.

1° $\lambda=0$ $\quad B\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$4u-2v=0\ /:2$

$-2u+v=0$

$2u=v$

$2u=v$

Сопствени вектори који одговарају овој сопственој вредности су $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\2u\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Можемо, за поступак дијагонализације, узети сопствени вектор $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Међутим, да бисмо обезбедили својство $R_1^T=R_1^{-1}$, потребно је узети јединични вектор, тј. треба узети вектор дужине 1. Дакле, пошто је $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5$, следи да ћемо узети вектор $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$.

$2^\circ\ \lambda=5$

$B\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5u\\5v\end{pmatrix}$

$4u-2v=5u$
$-2u+v=5v$
$-u=-2v$
$-2u=4v \ (\cdot(-2))$
$u=-2v$
$u=-2v$

Сопствени вектори који одговарају сопственој вредности $\lambda=5$ су $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2v\\v\end{pmatrix}=v\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Поново, треба узети јединични сопствени вектор, па пошто је $\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$, следи да можемо узети вектор $\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$.

При томе, можемо приметити да смо овај сопствени вектор добили од сопственог вектора $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ који смо добили за претходну сопствену вредност, следећом трансформацијом: $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-v\\u\end{pmatrix}$. Ово можемо урадити одмах, тј. не морамо тражити сопствени вектор за другу сопствену вредност.

Дакле, добијамо $R_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$. Проширимо је до матрице $R_{3\times3}$ на следећи начин:

$R=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}&0\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Тада добијамо трансформацију координата $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=R_1\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$,

тј. $\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}&0\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}$ и једначину криве у новом координатном систему $O'x'y'$:

$(x\ y\ 1)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}^TA\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\left(R\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}\right)^TA\left(R\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}^TR^TAR\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}=(x'\ y'\ 1)R^TAR\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}$,

односно нова матрица коефицијената је $A'=R^TAR$.

$$A'=R^TAR=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}&0\\-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2&\frac12\\-2&1&6\\\frac12&6&6\end{pmatrix}R=\begin{pmatrix}0&0&\frac{25}{2\sqrt5}\\-\frac{10}{\sqrt5}&\frac{5}{\sqrt5}&\frac{5}{\sqrt5}\\\frac12&6&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}&0\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{5\sqrt5}{2}\\0&5&\sqrt5\\\frac{5\sqrt5}{2}&\sqrt5&6\end{pmatrix}$$

Дакле, у новом координатном систему $O'x'y'$ крива има једначину $0\cdot x'^2+2\cdot0\cdot x'y'+5\cdot y'^2+2\cdot\frac{5\sqrt5}{2}x'+2\sqrt5y'+6=0$

тј. $5y'^2+5\sqrt5x'+2\sqrt5y'+6=0$. Приметимо да овде нема x'^2. Да има, извршили бисмо следећу трансформацију, коју ћемо извршити над y'.

$5\left(y'^2+\frac{2}{\sqrt5}y'+\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2\right)+5\sqrt5x'+6=0$

$5\left(y'^2+\frac{2}{\sqrt5}y'+\frac15-\frac15\right)+5\sqrt5x'+6=0$

$5\left(y'^2+\frac{2}{\sqrt5}y'+\frac15\right)-1+5\sqrt5x'+6=0$

$5\left(y'+\frac{1}{\sqrt5}\right)^2+5\sqrt5x'+5=0$

Дакле, правимо потпун квадрат од y'^2 и y', а ако имамо и x'^2, онда и од x'^2 и x'. При томе, у загради коју подижемо на квадрат коеф. уз x', односно y' треба бити 1 и та заграда постаје ново x'', односно y''.

Овде вршимо следећу трансформацију:

$5\left(y'+\frac{1}{\sqrt5}\right)^2+5\sqrt5\left(x'+\frac{1}{\sqrt5}\right)=0$

$y''=y'+\frac{1}{\sqrt5},\quad x''=x'+\frac{1}{\sqrt5}$

$5y''^2+5\sqrt5x''=0 \ /:5$

$y''^2+\sqrt5x''=0$

$y''^2=-\sqrt5x''$ $\quad p=\frac{\sqrt5}{2}$, јер је $y''^2=-2\frac{\sqrt5}{2}x''$

Приметимо да смо добили параболу.

Ексцентрицитет је једнак 1, јер је ексцентрицитет параболе једнак 1. У канонском облику одмах видимо да је теме параболе $O(0,0)$, да је оса $o: y''=0$, да је жижа $F\left(\frac{\sqrt5}{4}; 0\right)$ и директриса $d: x''=\frac{\sqrt5}{4}$ (јер је $y''^2=-2px''$, $p>0$, па је симетрична стандардној канонској параболи $y''^2=2px''$, $p>0$, у односу на y''-осу). Како су формуле трансформације $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5}x' - \frac{2}{\sqrt5}y' \\ \frac{2}{\sqrt5}x' + \frac{1}{\sqrt5}y' \end{pmatrix}$ и како је $x' = x'' - \frac{1}{\sqrt5}$; $y' = y'' - \frac{1}{\sqrt5}$, добијамо: $x = \frac{1}{\sqrt5}\left(x'' - \frac{1}{\sqrt5}\right) - \frac{2}{\sqrt5}\left(y'' - \frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{1}{\sqrt5}x'' - \frac15 - \frac{2}{\sqrt5}y'' + \frac25 =$
$= \frac{1}{\sqrt5}x'' - \frac{2}{\sqrt5}y'' + \frac15$, $y = \frac{2}{\sqrt5}\left(x'' - \frac{1}{\sqrt5}\right) + \frac{1}{\sqrt5}\left(y'' - \frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{2}{\sqrt5}x'' - \frac25 + \frac{1}{\sqrt5}y'' - \frac15 = \frac{2}{\sqrt5}x'' + \frac{1}{\sqrt5}y'' - \frac35$.

Једноставном заменом x'' и y'' координата темена, жиже добијамо:
$O: x = \frac{1}{\sqrt5}\cdot 0 - \frac{2}{\sqrt5}\cdot 0 + \frac15 = \frac15$, $y = \frac{2}{\sqrt5}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt5}\cdot 0 - \frac35 = -\frac35$, $F: x = \frac{1}{\sqrt5}\cdot\left(-\frac{\sqrt5}{4}\right) - \frac{2}{\sqrt5}\cdot 0 + \frac15 = -\frac14 + \frac15 = -\frac{1}{20}$,
$y = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\left(-\frac{\sqrt5}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt5}\cdot 0 - \frac35 = -\frac12 - \frac35 = -\frac{11}{10}$.