Метрички простори

1 Увод

Дефиниција 1. *Нека је дат скуп* X, *пресликавање* $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *и особине пресликавања:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(недегенерисаност);*

1.' $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$;

2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(симетричност);*

3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ *(неједнакост троугла).*

Пресликавање које задовољава особине 1., 2. *и* 3. *се назива метрика, а уређени пар* (X, d) *метрички простор.*

Пресликавање које задовољава особине 1.′, 2., 3. *се назива псеудометрика.*

Пресликавање које задовољава особине 1. *и* 3. *се назива квазиметрика.*

Дефиниција 2. *Ако су задате две метрике* d_1 *и* d_2 *на истом скупу* X *кажемо да су ове метрике еквивалентне* ($d_1 \sim_m d_2$) *ако постоје константе* $\alpha, \beta > 0$ *тако да за сваке две тачке* $x, y \in X$ *важи:*

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Дефиниција 3. *Кажемо да је метрички простор* (Y, d_Y) *метрички подпростор метричког простора* (X, d_X) *ако је* $Y \subseteq X$ *и* $d_X|_{Y \times Y} = d_Y$.

Дефиниција 4. *Пресликавање* $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ *метричких простора се назива изометријом ако за сваке две тачке* $x, y \in X_1$ *важи:*

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

1. Доказати да су на $\mathbb{R}$ дефинисане метрике са:

   (а) $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

   (б) $d(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$.

   Решење:

   (а) Очигледно је d добро дефинисано пресликавање из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ у $[0, +\infty)$.
   Како је arctg инјективно пресликавање $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} y$ ако и само ако је $x = y$ из чега следи недегенерисаност.

Симетричност се лако добија:

$$d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = |\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x| = d(y,x).$$

Неједнакост троугла следи из неједнакости троугла за апсолутну вредност реалног броја:

$$d(x,y) + d(y,z) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| + |\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} z| \geq$$

$$\geq |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} z| =$$
$$= |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} z| = d(x,z).$$

Овим је показано да је дато пресликавање заиста метрика.

(б) Како је $|x-y|$ увек позитиван број и arctg позитивног броја позитиван, d је добро дефинисано пресликавање из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ у $[0, +\infty)$.
Како је arctg једнак нули ако и само ако је аргумент нула следи недегенерисаност.
Симетричност следи из:

$$d(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y| = \operatorname{arctg}|y-x| = d(y,x).$$

Како би доказали неједнакост троугла задајмо функцију:

$$\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg}(t+a), \;\; a \geq 0.$$

Овако дефинисана функција је диференцијабилна и важи:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+(a+t)^2} = \frac{2at + a^2}{(1+t^2)(1+(a+t)^2)} \geq 0.$$

Како је $\varphi(0) = 0$ следи да је функција позитивна за све позитивне вредности t и a. Заменама $t = |x-y|$, $a = |y-z|$ из неједнакости троугла за апсолутну вредност реалних бројева и како је arctg растућа функција добијамо:

$$d(x,y) + d(y,z) = \operatorname{arctg}|x-y| + \operatorname{arctg}|y-z| \geq$$

$$\geq \operatorname{arctg}(|x-y| + |y-z|) \geq \operatorname{arctg}|x-z| = d(x,z),$$

чиме је доказано да је и ово метрика на скупу реалних бројева.

2. Ако су на простору X задате две метрике d_1 и d_2 испитати да ли је задата метрика на истом простору са:

   (а) $d_3(x, y) = d_1(x, y) + \log(1 + d_2(x, y))$;

   (б) $d_4(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$;

   Решење:

   (а) Пресликавање d_3 јесте метрика. Како су d_1 и d_2 метрике и логаритам броја већег од један позитиван следи да је d_3 добро дефинисано пресликавање у ненегативне реалне бројеве.

   Ако би важило да је $d_3(x, y) = 0$ и пошто су оба сабирка ненегативна мора да важи да је и $d_1(x, y) = 0$ и како је d_1 метрика следи недегенерисаност.

   Из тога што су d_1 и d_2 метрике следи и симетричност:

$$d_3(x, y) = d_1(x, y) + \log(1 + d_2(x, y)) =$$

$$= d_1(y, x) + \log(1 + d_2(y, x)) = d_3(y, x),$$

   као и неједнакост троугла:

$$d_3(x, y) + d_3(y, z) =$$

$$= d_1(x, y) + \log(1 + d_2(x, y)) + d_1(y, z) + \log(1 + d_2(y, z)) \geq$$

$$\geq d_1(x, z) + \log(1 + d_2(x, y) + d_2(y, z) + d_2(x, y)d_2(y, z)) \geq$$

$$\geq d_1(x, z) + \log(1 + d_2(x, z)) = d_3(x, z)$$

   уз коришћење чињенице да је логаритам растућа функција. Овим је доказано да је d_3 заиста метрика.

   (б) Максимум две метрике такође мора бити метрика. Како је максимум два ненегативна броја ненегативан следи да је d_4 добро дефинисано пресликавање у ненегативне реалне бројеве.

   Ако је максимум $d_1(x, y)$ и $d_2(x, y)$ једнак нули следи да су оба броја нула. Па како је рецимо $d_1(x, y) = 0$ добијамо да је $x = y$ чиме је показана недегенерисаност.

Симетричност следи из тога што су d_1 и d_2 метрике:

$$d_4(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} =$$

$$= \max\{d_1(y,x), d_2(y,x)\} = d_4(y,x)$$

Како важи:

$$d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + d_1(y,z) \leq$$

$$\leq \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} + \max\{d_1(y,z), d_2(y,z)\}$$

$$d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z) \leq$$

$$\leq \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} + \max\{d_1(y,z), d_2(y,z)\}$$

следи да је:

$$\max\{d_1(x,z), d_2(x,z)\} \leq$$

$$\leq \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} + \max\{d_1(y,z), d_2(y,z)\}$$

односно:

$$d_4(x,z) \leq d_4(x,y) + d_4(y,z)$$

чиме је показана неједнакост троугла и доказано да је максимум две метрике опет метрика.

3. Ако је дато пресликавање $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које је метрика испитати да ли је на $\mathbb{R}^2$ задата метрика са:

$$l : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$l\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right) = \log\left(1 + (x_1 - x_2)^2\right) + d(y_1,y_2).$$

Решење:

Дато пресликавање није метрика. Задовољене су недегенерисаност и симетричност, али није неједнакост троугла.

Можемо уочити тачке $A(-1,0)$, $B(0,0)$ и $C(1,0)$. Лако се може израчунати да је:

$$l(A,B) = l(B,C) = \log 2, \quad l(A,C) = \log 5.$$

Како је $2\log 2 = \log 4 < \log 5$ следи да l не испуњава услов неједнакости троугла па не може бити метрика.

4. На скупу $\mathbb{N}$ дефинишемо пресликавање

$$d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|.$$

Доказати да је овако задата метрика.

Решење:

Очигледно је добро задато пресликавање из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ у позитивне реалне бројеве.

Како је $\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = 0$ ако и само ако је $m = n$ следи недегенерисаност.

Симетричност добијамо из:

$$d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = d(n,m),$$

док неједнакост троугла следи из неједнакости троугла за сабирање природних бројева:

$$d(m,n) + d(n,k) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right| \geq$$

$$\geq \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right| = d(n,k).$$

Овиме је показано да дато пресликавање јесте метрика.

5. Ако је дат скуп Z и метрички простор (X,d) доказати да инјективно пресликавање $f : Z \to X$ индукује метрику на Z.

Решење:

Дефинисаћемо пресликавање

$$d_1 : Z \times Z \to [0,+\infty) \quad d_1(x,y) = d(f(x), f(y)).$$

Како је d метрика ово је добро дефинисано пресликавање и кодомен јесте $[0,+\infty)$.

Ако је $d_1(x,y) = 0$ а d је метрика следи да је $f(x) = f(y)$ и како је f инјективно мора бити и $x = y$. Лако се види да за $x = y$ важи $d_1(x,y) = 0$ па је недегенерисаност испуњена.

Из тога што је d метрика добијамо симетричност:

$$d_1(x,y) = d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) = d_1(y,x)$$

и неједнакост троугла:

$$d_1(x,y)+d_1(y,z) = d(f(x),f(y))+d(f(y),f(z)) \geq d(f(x),f(z)) = d_1(x,z)$$

чиме је доказано да d_1 јесте метрика.

У случају да f није инјективно d_1 не би било метрика, јер не би била задовољена недегенерисаност.

6. За Риман интеграбилне функције $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ дефинишимо:

$$d(f,g) = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Доказати да је овако задата метрика на простору непрекидних функција $C[a,b]$ и псеудометрика на простору Риман интеграбилних функција $\mathcal{R}[a,b]$.

Решење:

Ако су f и g непрекидне функције оне су и Риман интеграбилне те је интеграл добро дефинисан. Апсолутна вредност даје да је подинтегрална функција позитивна па је вредност интеграла позитиван број.

Ако је $d(f,g) = 0$ односно $\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\ dx = 0$ мора подинтегрална функција бити нула из непрекидности. Закључујемо да је $f(x) = g(x)$ за свако $x \in [a,b]$, па је $f \equiv g$, тј. важи недегенерисаност.

Симетричност се лако проверава:

$$d(f,g) = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\ dx = \int\limits_a^b |g(x) - f(x)|\ dx = d(g,f).$$

Неједнакост троугла следи из линеарности и монотоности интеграла и неједнакости троугла за апсолутне вредности реалних бројева:

$$d(f,g) + d(g,h) = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\ dx + \int\limits_a^b |g(x) - h(x)|\ dx =$$

$$= \int_a^b \left(|f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|\right)\, dx \geq \int_a^b |f(x)-h(x)|\, dx = d(f,h).$$

Овако задато пресликавање задовољава из аналогних разлога симетричност и неједнакост троугла и на простору $\mathcal{R}[a,b]$. Међутим овде не мора бити задовољена недегенерисаност. Функције које се разликују на скупу мере нула биће на растојању нула. Можемо узети пример функције $f(x) \equiv 0$ и функције g задате са:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ 1, & x = a \end{cases}$$

7. На псеудометричком простору (X,d) дефинишемо релацију $\sim$ са $x \sim y$ ако и само ако је $d(x,y) = 0$. Доказати да је овако задата релација еквиваленција и да d индукује метрику на класама ове еквиваленције.

   Решење:

   Како је $d(x,x) = 0$ за свако x релација је рефлексивна.

   Ако је $d(x,y) = 0$ из симетричности псеудометрике следи да је $d(y,x) = 0$ односно релација је симетрична.

   Ако важи да је $d(x,y) = 0$ и $d(y,z) = 0$ из неједнакости троугла следи транзитивност релације:

$$0 \leq d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = 0.$$

   Из претходног можемо закључити да је дата релација еквиваленција и класу еквиваленције тачке x можемо означити са C_x. Треба проверити да ли је d добро задато пресликавање на класама релације, односно да ли зависи од избора елемента класе. Нека су $x_1, x_2 \in C_x$ и $y_1, y_2 \in C_y$. Примењујући два пута неједнакост троугла имамо:

$$d(x_1,y_1) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,y_2) + d(y_2,y_1) = d(x_2,y_2).$$

   Са друге стране такође важи:

$$d(x_2,y_2) \leq d(x_2,x_1) + d(x_1,y_1) + d(y_1,y_2) = d(x_1,y_1).$$

   Из овога закључујемо да је $d(x_1,y_1) = d(x_2,y_2)$ односно да вредност не зависи од избора представника класа.

Симетричност и неједнакост троугла ће важити и на класама, а класе су дефинисане тако да добијемо недегенерисаност па је пресликавање на класама еквиваленције метрика.

8. Ако су дати подскупови равни:

$$X_1 = [0,1] \times [0,2], \quad X_2 = [0,2] \times [0,1]$$

са еуклидском метриком, наћи све изометрије:

$$f : X_1 \to X_2.$$

Решење:

Уочимо да су оба скупа правоугаоници са страницама дужина 1 и 2. Како су у овим правоугаоницима најудаљеније тачке темана која су на растојању $\sqrt{5}$ да би пресликавање било изометрија мора теме правоугаоника сликати у теме. У супротном ако би се неко теме сликало у тачку која није теме друго теме које је било на растојању $\sqrt{5}$ би се пресликало у тачку која је на мањем растојању. Сликом једног темена су одређене слике и осталих темена,а ако су одређене слике темена одређене су и слике свих осталих тачака, јер постоји јединствена тачка која је на датим растојањима од три тачке. Из овога можемо закључити да постоје највише четири изометрије.

Посматрајмо следећа четири пресликавања:

$$f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f_1(x,y) = (y,x), \quad f_2(x,y) = (y, 1-x),$$
$$f_2(x,y) = (2-y, x), \quad f_4(x,y) = (2-y, 1-x).$$

Изаберимо $(x,y) \in X_1$. Тада је $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 2$. Такође важи да је $0 \leq 1-x \leq 1$ и $0 \leq 2-y \leq 2$ па дата пресликавања заиста сликају X_1 у X_2.

Како важи:

$$d(f_1(x_1,y_1), f_1(x_2,y_2)) = d((y_1,x_1),(y_2,x_2)) =$$

$$= \sqrt{(y_1-y_2)^2 + (x_1-x_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$$

$$
\begin{aligned}
d(f_2(x_1,y_1),f_1(x_2,y_2)) &= d((y_1,1-x_1),(y_2,1-x_2)) = \\
&= \sqrt{(y_1-y_2)^2+(1-x_1-(1-x_2))^2} = \\
&= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \\
d(f_3(x_1,y_1),f_1(x_2,y_2)) &= d((2-y_1,x_1),(2-y_2,x_2)) = \\
&= \sqrt{(2-y_1-(2-y_2))^2+(x_1-x_2)^2} = \\
&= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = d((x_1,y_1),(x_2,y_2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(f_4(x_1,y_1),f_1(x_2,y_2)) &= d((2-y_1,1-x_1),(2-y_2,1-x_2)) = \\
&= \sqrt{(2-y_1-(2-y_2))^2+(1-x_1-(1-x_2))^2} = \\
&= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = d((x_1,y_1),(x_2,y_2))
\end{aligned}
$$

видимо да су сва четири дата пресликавања изометрије. Закључили смо раније да постоје највише четири изометрије па следи закључак да постоје тачно четири изометрије које пресликавају X_1 у X_2.

9. Доказати да је простор непрекидних функција $C[a,b]$ са метриком $d_c(x,y) = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)|$ подпростор простора ограничених функција $M[a,b]$ са метриком $d_m(x,y) = \sup\limits_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)|$.

   Решење:

   Како за $x,y \in M[a,b]$ и за свако t важи да је $|x(t)-y(t)|$ позитиван реалан број d_m је добро дефинисано пресликавање из $M[a,b]^2$ у позитивне реалне бројеве.

   Ако је $d_m(x,y) = 0$ следи да је $\sup\limits_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)| = 0$ па како је супремум позитивних бројева нула мора бити за свако t $x(t) = y(t)$ из чега можемо закључити да је $x \equiv y$, па следи недегенерисаност.

   Није тешко проверити симетричност и неједнакост троугла, те је d_m метрика на простору ограничених функција.

   Свака непрекидна функција достиже минимум и максимум на сегменту те је и ограничена, односно $C[a,b] \subseteq M[a,b]$.

Такође за сваке две $x, y \in C[a,b]$ важи да је:

$$d_c(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| = d_m(x,y)$$

из чега следи тврђење задатка.

2 Скупови

Дефиниција 5. *Нека је дат метрички простор* (X, d)*. За тачку* $x \in X$ *и* $\varepsilon > 0$ *дефинишемо:*

1. *отворену куглу са центром у* x *полупречика* ε*:*
$$B(x, \varepsilon) = \left\{ y \in X \;\middle|\; d(x, y) < \varepsilon \right\};$$
2. *затворену куглу са центром у* x *полупречика* ε*:*
$$B[x, \varepsilon] = \left\{ y \in X \;\middle|\; d(x, y) \leq \varepsilon \right\};$$
3. *сферу са центром у* x *полупречика* ε*:*
$$S(x, \varepsilon) = \left\{ y \in X \;\middle|\; d(x, y) = \varepsilon \right\}.$$

Дефиниција 6. *Подскуп* U *метричког простора* (X, d) *је отворен ако за сваку тачку* $x \in U$ *постоји* $\varepsilon > 0$ *тако да је* $B(x, \varepsilon) \subseteq U$*.*

Подскуп F *метричког простора* (X, d) *је затворен ако му је комплемент отворен.*

Фамилију отворених скупова метричког простора означаваћемо са $\mathcal{T}$*, а фамилију затворених скупова са* $\mathcal{F}$*.*

Под околином тачке a *подразумеваћемо скуп* V *за који постоји скуп* $U \in \mathcal{T}$ *тако да је* $a \in U \subseteq V$*.*

Теорема 1. *Нека је* (X, d) *произвољан метрички простор. Тада важи:*

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;
2. $A_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$;
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap\limits_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} A_i \in \mathcal{T}$

Теорема 2. *Нека је* (X, d) *произвољан метрички простор. Тада важи:*

1. $X, \emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $A_i \in \mathcal{F}, i \in I \Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$;
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} A_i \in \mathcal{F}$

Дефиниција 7. *Тачка a је тачка нагомилавања скупа A ако за свако $\varepsilon > 0$ важи да је $(B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$. Скуп тачака нагомилавања скупа A означаваћемо са A'.*

Дефиниција 8. *За подскуп A метричког простора можемо дефинисати:*

1. *унутрашњост:*
$$\operatorname{int} A = \left\{ x \in A \;\middle|\; \exists \varepsilon > 0 \ B(x,\varepsilon) \subseteq A \right\};$$

2. *затворење:*
$$\overline{A} = A \cup A';$$

3. *руб:*
$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c};$$

4. *спољашњост:*
$$\operatorname{ext} A = A^c \setminus \overline{A}.$$

Дефиниција 9. *Дијаметар скупа A у метричком простору (X,d) дефинишемо са:*
$$\operatorname{diam} A = \sup \left\{ d(x,y) \;\middle|\; x \in A,\ y \in A \right\}.$$

Дефиниција 10. *Растојање скупова A и B у метричком простору (X,d) дефинишемо са:*
$$d(A,B) = \inf \left\{ d(x,y) \;\middle|\; x \in A,\ y \in B \right\}.$$

Дефиниција 11. *Две метрике d_1 и d_2 на истом скупу су тополошки еквивалентне ($d_1 \sim_t d_2$) ако генеришу исте фамилије отворених скупова, односно ако важи:*
$$U \in \mathcal{T}_{d_1} \Leftrightarrow U \in \mathcal{T}_{d_2}$$

.

1. Ако су A и B отворени скупови метричког простора (X,d) испитати да ли скупови $A^c \cap B^c$, $A^c \cap B$ и $(A \cap B)^c$ морају бити отворени, затворени или отворено-затворени.

   Решење:

   Ако су $A, B \in \mathcal{T}$ тада су $A^c, B^c \in \mathcal{F}$ па је и $A^c \cap B^c \in \mathcal{F}$ као пресек два затворена.

Нека је у $\mathbb{R}$ са еуклидском метриком $A = (0,1)$ и $B = (2,3)$. Тада је $A^c \cap B = (2,3)$ и отворен је и није затворен. Са друге стране на истом простору можемо узети да је $A = \mathbb{R} \setminus [0,1]$ који је отворен као унија два отворена, и да је $B = (-1,2)$. Тада је $A^c \cap B = [0,1]$ и затворен је и није отворен. Из овога видимо да не можемо знати да ли је $A^c \cap B$ отворен или затворен, а може се десити да није ни отворен ни затворен.

Како је $A \cap B \in \mathcal{T}$ као пресек два отворена за његов комплемент мора да важи $(A \cap B)^c \in \mathcal{F}$.

2. Ако је дат метрички простор (X,d) и његови подскупови A и B доказати да важи (за инклузије показати да могу бити строге):

   (а) $(\operatorname{int} A)^c = \overline{(A^c)}$;

   (б) $\overline{A}^c = \operatorname{int}(A^c)$;

   (в) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$;

   (г) $\operatorname{int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$;

   (д) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

   (е) $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$;

   (ж) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.

   Решење:

   (а)
   $$x \in (\operatorname{int} A)^c \iff \forall \varepsilon > 0 \ B(x,\varepsilon) \not\subseteq A \iff$$
   $$\iff \forall \varepsilon > 0 \ B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \iff x \in A^c \cup A^{c'} = \overline{A^c}$$

   (б) Користећи први део имамо
   $$\overline{A}^c = \overline{(A^c)^c}^c = ((\operatorname{int}(A^c))^c)^c = \operatorname{int}(A^c)$$

   .

   (в) Ако је $x \in \operatorname{int}(A \cap B)$ постоји $\varepsilon > 0$ тако да је
   $$B(x,\varepsilon) \subseteq A \cap B$$
   па је
   $$B(x,\varepsilon) \subseteq A \Longrightarrow x \in \operatorname{int} A$$

и аналогно

$$B(x,\varepsilon) \subseteq B \Longrightarrow x \in \operatorname{int} B$$

Следи да је

$$x \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B.$$

Са друге стране ако је $x \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ постоје

$$B(x,\varepsilon_1) \subseteq A \quad B(x,\varepsilon_2) \subseteq B.$$

Тада је

$$B\left(x, \min\left\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\right\}\right) \subseteq A \cap B \Longrightarrow x \in \operatorname{int}(A \cap B).$$

(г) Ако је $x \in \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$ постоји $\varepsilon > 0$ тако да је

$$B(x,\varepsilon) \subseteq A \text{ или } B(x,\varepsilon) \subseteq B.$$

У сваком случају је

$$B(x,\varepsilon) \subseteq A \cup B \Longrightarrow x \in \operatorname{int}(A \cup B).$$

Ова инклузија може бити строга. Узмимо да су

$$A = [0,1] \quad B = [1,2]$$

подскупови $\mathbb{R}$ са уобичајеном метриком. Тада је

$$\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B = (0,2) \setminus \{1\}$$

$$\operatorname{int}(A \cup B) = (0,2).$$

(д) На основу претходно доказаног и Де Моргановиx закона добијамо:

$$\overline{A \cup B} = \left(\overline{A \cup B}^c\right)^c = \operatorname{int}\left((A \cup B)^c\right)^c = \operatorname{int}\left(A^c \cap B^c\right)^c =$$

$$= (\operatorname{int}(A^c) \cap \operatorname{int}(B^c))^c = \left(\overline{A}^c \cap \overline{B}^c\right)^c = \left(\overline{A}^c\right)^c \cup \left(\overline{A}^c\right)^c = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

(е) Ако је $x \in \overline{(A \cap B)}$ знамо да је

$$x \in A \cap B \text{ или } x \in (A \cap B)'.$$

У првом случају је

$$x \in A \subseteq \overline{A} \text{ и } x \in B \subseteq \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Ако је x тачка нагомилавања пресека биће и тачка нагомилавња скупова A и B, односно у другом случају важи:

$$x \in A' \subseteq \overline{A} \text{ и } x \in B' \subseteq \overline{B} \Longrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

И ова инклузија може бити строга. Нека су:

$$A = (0,1) \text{ и } B = (1,2)$$

подскупови $\mathbb{R}$ са еуклидском метриком. Тада је:

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$$

$$\overline{A} = [0,1] \text{ и } \overline{B} = [1,2] \Longrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}.$$

(ж) Узмимо произвољно $x \in \partial (A \cup B)$. Тада користећи делове под (d) и (e) имамо:

$$x \in \overline{A \cup B} \cap \overline{(A \cup B)^c} = \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \overline{(A^c \cap B^c)} \subseteq$$

.

$$\subseteq \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A^c} \cap \overline{B^c}\right) \subseteq \left(\overline{A} \cap \overline{A^c}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{B^c}\right) = \partial A \cup \partial B.$$

За пример за строгу инклузију можемо узети скупове:

$$A = [0,2] \quad B = (1,3)$$

као подскупове $\mathbb{R}$ са еуклидском метриком. Тада је:

$$A \cup B = [0,3) \Longrightarrow \partial(A \cup B) = \{0,3\}$$

$$\partial A = \{0,2\} \;\; \partial B = \{1,3\} \Longrightarrow \partial A \cup \partial B = \{0,1,2,3\}.$$

3. Нека је дат скуп $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Одредити унутрашњост, руб и затворење скупа А, ако је на $\mathbb{R}^2$ задата уобичајена еуклидска метрика.

   Решење:

   Узмимо произвољно $(x_0, y_0) \in A$. На основу густине ирационалних бројева у $\mathbb{R}$ за свако $\varepsilon > 0$ постоји ирационалан број x_1 тако да је $|x_1 - x_0| < \varepsilon$. Следи:

$$(x_1, y_0) \in B\left((x_0, y_0), \varepsilon\right) \Longrightarrow B\left((x_0, y_0), \varepsilon\right) \nsubseteq A.$$

Како скуп A није околина ниједне своје тачке следи да је

$$\operatorname{int} A = \emptyset.$$

Показаћемо да је:

$$\overline{A} = \mathbb{D}^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Наиме за сваку тачку $(x_0, y_0) \in \mathbb{D}^2$ на основу густине рационалних бројева постоје $x_1, y_1 \in A \cap \mathbb{Q}$ тако да је:

$$|x_1 - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |y_1 - y_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow (x_1, y_1) \in B\left((x_0, y_0), \varepsilon\right) \cap A.$$

Како у свакој околини тачке (x_0, y_0) постоји тачка скупа A различита од ње, она је тачка нагомилавања скупа A и тиме смо показали да је $\overline{A} = \mathbb{D}^2$.

Како је на основу претходног задатка

$$\overline{(A^c)} = (\operatorname{int} A)^c = (\emptyset)^c = \mathbb{R}^2$$

добијамо да је:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \mathbb{D}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{D}^2.$$

4. Ако је $A \subseteq B$ доказати да је и $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$ и $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

   Решење:

   Ако је $x \in \operatorname{int} A$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $B(x, \varepsilon) \in A \subseteq B$, па је $x \in \operatorname{int} B$. Из овога следи да је $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$.

   За $x \in \overline{A}$ знамо да је $x \in A$ или $x \in A'$. Како је $A \subseteq B$ у оба случаја имамо:

   $$x \in A \subseteq B \subseteq \overline{B},$$
   $$x \in A' \subseteq B' \subseteq \overline{B}$$

   користећи да је тачка нагомилавања подскупа и тачка нагомилавања целог скупа. У сваком случају важи $x \in \overline{B}$, односно $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

5. Доказати да ако је A затворен скуп, а B отворен скуп следи да је $A \setminus B$ затворен скуп.

   Решење:

   Претпоставимо супротно да $A \setminus B \notin \mathcal{F}$. Тада $(A \setminus B)^c \notin \mathcal{T}$.

   Са друге стране $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$. Како је $A^c \in \mathcal{T}$ и $B \in \mathcal{T}$ и пресек два отворена скупа отворен следи да је $(A \setminus B)^c \in \mathcal{T}$, па смо овим добили контрадикцију.

6. Ако су A и B непразни подскупови метричког простора (X, d) доказати да важи:

   (а) $\operatorname{diam} A = 0 \Leftrightarrow \sharp A = 1$;

   (б) $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$;

   (в) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B$;

   (г) $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B + d(A, B)$.

   Решење:

   (а) Ако је A једночлан очигледно му је дијеметар 0.
   Ако A не би био једночлан садржао би две различите тачке x и y. Како важи недегенерисаност $d(x, y) = \delta > 0$, и тада је и $\operatorname{diam} A = \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in A \} \geq \delta > 0$.

   (б) Како је супремум по већем скупу већи важи:
   $$\sup \{ d(x, y) \mid x, y \in A \subseteq B \} \leq \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in B \}$$
   односно:
   $$\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B.$$

   (в) Ако су $x, y \in A$ тада је $d(x, y) \leq \operatorname{diam} A$ и аналогно за $x, y \in B$ важи $d(x, y) \leq \operatorname{diam} B$.
   Нека је сада $x \in A$ и $y \in B$. Како је $A \cap B \neq \emptyset$ постоји $z \in A \cap B$. Из тога што је $z \in A$ следи да је $d(x, z) \leq \operatorname{diam} A$, а из тога што је $z \in B$ имамо $d(z, y) \leq \operatorname{diam} B$. На основу овога и неједнакости троугла следи:
   $$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B.$$
   Можемо закључити да тврђење важи у сваком случају.

   (г) Ако су $x, y \in A$ тада је $d(x, y) \leq \operatorname{diam} A$ и аналогно за $x, y \in B$ важи $d(x, y) \leq \operatorname{diam} B$.
   Нека је $d(A, B) = \delta$. Из дефиниције дијаметра за свако $\varepsilon > 0$ постоје $a \in A$ и $b \in B$ такве да је $d(a, b) \leq \delta + \varepsilon$. Сада за $x \in A$ и $y \in B$ важи:
   $$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B + \delta + \varepsilon.$$
   Пуштањем лимеса $\varepsilon \to 0$ добијамо:
   $$d(x, y) \leq \operatorname{diam} A + \operatorname{diam} B + \delta$$
   односано тврђење задатка.

7. Ако је A непразан подскуп метричког простора (X, d) доказати да за сваке две тачке $x, y \in X$ важи:

$$d(x,y) \geq |d(x,A) - d(y,A)|.$$

Решење:

Ако би обе тачке биле из скупа A тада би било $d(x,A) = d(y,A) = 0$ па тврђење важи.

Ако је рецимо тачка $y \in A$ и $x \notin A$ тада важи:

$$|d(x,A) - d(y,A)| = d(x,A) = \inf\left\{d(x,z) \;\middle|\; z \in A\right\} \leq d(x,y)$$

односно тврђење је и сада тачно.

Претпоставимо сада да обе тачке x и y нису у скупу A. Без умањења општости претпоставимо да је $d(x,A) \geq d(y,A)$. Сада за сваку тачку $a \in A$ важи:

$$d(x,y) + d(y,a) \geq d(x,a) \geq d(x,A)$$

односно:

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a).$$

Како је тачка a била произвољна узевши инфимум по свим тачкама из скупа A важи:

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A)$$

што је еквивалентно тврђењу задатка.

8. Одредити растојање подскупова $C[0,1]$ датих са $A = B(x, \frac{1}{2})$ и $B = B(y, 1)$, где је $x = 1 + \frac{1}{2}\sin(\pi t)$ и $y = -1$, ако је метрика задата са $d(f,g) = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|$.

Решење:

За свако $f \in A$ важи да је $d(f,x) < \frac{1}{2}$. Како је $x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ мора бити за функцију из ове кугле $f\left(\frac{1}{2}\right) > 1$.

Са друге стране за функцију $g \in B$ важи $d(g,y) < 1$ па је $y\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

На основу претходног овога следи:

$$d(A,B) = \inf\left\{d(f,g) \;\middle|\; f \in A \ g \in B\right\} =$$

$$\inf\left\{\sup_{0\le t\le 1}|f(t)-g(t)| \;\middle|\; f \in A \ g \in B\right\} \geq$$

$$\inf\left\{\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1\right| \;\middle|\; f \in A \ g \in B\right\} \geq 1.$$

Можемо закључити да је $d(A,B) \geq 1$.

Уочимо сада низове:

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sin(\pi t)$$

$$b_n = -\frac{1}{n}.$$

Како је $d(a_n, x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ за свако n је $a_n \in A$.

Такође је $d(b_n, y) = 1 - \frac{1}{n} < 1$ па за свако n важи $b_n \in B$.

Функције b_n су константне, док функције a_n достижу максимум у тачки $t = \frac{1}{2}$, па је:

$$d(a_n, b_n) = \sup_{0\le t\le 1}|a_n(t) - b_n(t)| =$$

$$\left|a_n\left(\frac{1}{2}\right) - b_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 1 + \frac{2}{n}.$$

Пустивши лимес $n \to \infty$ можемо закључити да је $d(A,B) \leq 1$ па је на основу претходно доказаног:

$$d(A,B) = 1.$$

9. Дати пример подпростора A тако да $\operatorname{diam} A \neq \operatorname{diam}\,(\operatorname{int} A)$.

   Решење:

   Можемо узети пример подскупа реалних бројева:

$$A = [0,1] \cup \{5\}.$$

   Тада је $\operatorname{diam} A = 5$.

   Лако се види да је $\operatorname{int} A = (0,1)$, па је $\operatorname{diam}(\operatorname{int} A) = 1$.

10. Дати пример два затворена скупа A и B таква да је $d(A, B) = 0$ и $A \cap B = \emptyset$.

Решење:

Уочимо скупове:

$$A = \left\{a_n = n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$B = \left\{b_n = n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \geq 2\right\}$$

са наслеђеном уобичајеном метриком на скупу реалних бројева.

Није тешко проверити да су ови скупови затворени, као и да су дисјунктни.

Како за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји n тако да је $\frac{1}{n} < \varepsilon$ следи да постоје a_n и b_n за које важи $d(a_n, b_n) = |a_n - b_n| < \varepsilon$. Следи да је $\inf\left\{d(a_n, b_n) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\} = 0$, односно $d(A, B) = 0$.

11. Ако су две метрике d_1 и d_2 на скупу X еквивалентне доказати да су и тополошки еквивалентне.

Решење:

Ако је $d_1 \sim_m d_2$ тада постоје $\alpha, \beta > 0$ тако да је за свако $x, y \in X$:

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Узмимо произвољан $U \in \mathcal{T}_{d_1}$ и произвољно $x \in U$.

Како је U отворен постоји $\varepsilon > 0$ тако да је:

$$B_{d_1}(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

Из прве неједнакости добијамо да је:

$$B_{d_2}(x, \alpha\varepsilon) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

Тачка x је била произвољна и показали смо да је скуп U њена околина и у метрици d_2 па је $U \in \mathcal{T}_{d_2}$.

Аналогно ако је $U \in \mathcal{T}_{d_2}$ постоји $\varepsilon > 0$ тако да је:

$$B_{d_2}(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

Из друге неједнакости добијамо:

$$B_{d_1}\left(x, \frac{\varepsilon}{\beta}\right) \subseteq B_{d_2}\left(x, \varepsilon\right) \subseteq U$$

па je $U \in \mathcal{T}_{d_1}$.

Овим смо показали да je:

$$U \in \mathcal{T}_{d_1} \Longleftrightarrow U \in \mathcal{T}_{d_2}$$

односно:

$$d_1 \sim_t d_2.$$

3 Конвергенција, непрекидност

Дефиниција 12. *За низ тачака метричког простора* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (X, d)$ *кажемо да конвергира ако постоји* $x \in X$ *и за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *тако да за свако* $n \geq n_0$ *важи* $d(a_n, x) \leq \varepsilon$. *То означавамо са:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = x.$$

Дефиниција 13. *Низ тачака метричког простора* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (X, d)$ *се назива Кошијев ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *тако да за* $m, n \geq n_0$ *важи* $d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$.

Дефиниција 14. *Нека је дато пресликавање:*

$$f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$

метричких простора и тачка $x \in X_1'$.

Тачка $y \in X_2$ *је гранична вредност пресликавања* f *у тачки* x *ако за сваки низ* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X_1 \setminus \{x\}$ *важи:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y.$$

Дефиниција 15. *Пресликавање:*

$$f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$

метричких простора је непрекидно ако је инверзна слика сваког отвореног скупа отворен скуп.

Теорема 3. *За пресликавање:*

$$f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$

метричких простора еквивалентна су тврђења:

1. f *је непрекидно;*

2. *инверзна слика сваког затвореног скупа је затворен скуп;*

3. *за сваки скуп* $A \subseteq X_1$ *важи:*

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)};$$

4. *за сваку тачку* $x_0 \in X_1$ *и свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0$ *тако да важи:*

$$d_1(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

1. Дато је непрекидно пресликавање $f : X \to Y$ између метричких простора X и Y. Ако је $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергентан низ у простору X да ли $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ мора бити конвергентан низ у простору Y? Ако је $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Кошијев низ у простору X да ли $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ мора бити Кошијев низ у простору Y?

   Решење:

   Нека је задато $\varepsilon > 0$.

   Познато је из теорије да ако је f непрекидно пресликавање постоји $\delta > 0$ тако да важи:

$$d(x,a) \leq \delta \Longrightarrow d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon.$$

   Нека је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Тада постоји n_0 тако да је за $n \geq n_0$:

$$d(a_n, a) \leq \delta.$$

   Из ове две чињенице следи да је за $n \geq n_0$:

$$d(f(a_n), f(a)) \leq \varepsilon$$

   па можемо закључити да низ $f(a_n)$ конвергира.

   Непрекидна слика Кошијевог низа не мора бити Кошијев низ.

   Узмимо за пример простор $X = \mathbb{R}$ на коме је метрика задата са $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, простор $Y = \mathbb{R}$ са уобичајеном еуклидском метриком, а пресликавање f идентитета, односно $f(x) = x$.

   Није тешко проверити да је инверзна слика произвољне отворене кугле при овом пресликавању отворен скуп, па је пресликавање непрекидно.

   Посматрајмо низ $x_n = n$. Овај низ је Кошијев низ у метрици d. Како је arctg растућа функција и $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$ можемо закључити да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $n, m \geq n_0$ важи:

$$\operatorname{arctg} m, \operatorname{arctg} n \in (\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2})$$

   па је и:

$$d(n,m) \leq \varepsilon.$$

   Овај низ није Кошијев у уобичајеној метрици јер је за $m \neq n$:

$$|m - n| \geq 1.$$

2. Дат је метрички простор (X, d), где је:

$$X = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \qquad d(x,y) = |x-y|.$$

Ако је $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ произвољан низ реалних бројева доказати да су еквивалентна тврђења:

- $$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$$

- Функција дефинисана са:

$$f : X \to \mathbb{R} \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n \quad f(0) = A$$

је непрекидна.

Решење:

Претпоставимо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$.

Како за свако $n_0 \in \mathbb{N}$ и свако $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$ важи:

$$\left|\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n}\right| \geq \frac{1}{n_0(n_0+1)}$$

закључујемо да је:

$$B\left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0(n_0+2)}\right) \cap \left(X \setminus \left\{\frac{1}{n_0}\right\}\right) = \emptyset.$$

Другим речима свака тачка из X сем тачке 0 је изолована тачка, јер постоји њена околина у којој нема других тачака из X па је самим тим функција непрекидна у тим тачкама.

Нека је задато $\varepsilon > 0$. Тада из конвергенције низа a_n постоји n_0 тако да:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - A| \leq \varepsilon.$$

Изаберимо да је $\delta = \frac{1}{n_0}$. Тада су у $B\left(0, \delta\right)$ тачке из X облика $\frac{1}{n}$ за које је $n \geq n_0$. Како је тада:

$$\left|f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = |A - a_n| \leq \varepsilon.$$

Закључујемо да је функција f непрекидна и у тачки 0, па је непрекидна на целом X.

Са друге стране ако је функција f непрекидна на X она ће специјално бити непрекидна и у тачки 0. Тада ће за свако $\varepsilon > 0$ постојати $\delta = \frac{1}{n_0}$ такво да је:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \Longrightarrow \left| A = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n \right| \leq \varepsilon.$$

То значи да: $n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n - A| \leq \varepsilon$ па можемо закључити да је:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A$$

што је и требало доказати.

3. На скупу свих реалних низова X дато је пресликавање $d : X \times X \to [0, +\infty)$:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)}.$$

   (а) Доказати да је d добро дефинисано пресликавање;

   (б) Доказати да је d метрика;

   (в) Испитати конвергенцију низа $c_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots)$.

Решење:

(а) Како је:

$$\frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} \leq \frac{1}{2^n}$$

и ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ конвергира, то и ред задат са d конвергира по поредбеном критеријуму. Ред са позитивним члановима може да конвергира само ка позитивном броју, па је f добро задато пресликавање и кодомен му је $[0, +\infty)$.

(б) Сума реда са позитивним члановима је нула ако и само ако су му сви чланови нула па је:

$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ |x_n - y_n| = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

Овим смо показали недегенерисаност.

Симетричност се лако доказује из симетричности за апсолутну вредност.

Уочимо сада функцију:

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \quad f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Како је:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

функција је растућа. Знамо да је:

$$|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| + |x_n - y_n||y_n - z_n|.$$

Применивши на први и последњи члан ове неједнакости функцију f како је функција растућа неједнакост се очувава па имамо:

$$\frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} \leq \frac{|x_n - y_n| + |y_n - z_n| + |x_n - y_n||y_n - z_n|}{1 + |x_n - y_n| + |y_n - z_n| + |x_n - y_n||y_n - z_n|} \leq$$

$$\leq \frac{|x_n - y_n| + |y_n - z_n| + 2|x_n - y_n||y_n - z_n|}{1 + |x_n - y_n| + |y_n - z_n| + |x_n - y_n||y_n - z_n|} \leq$$

$$\leq \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} + \frac{|y_n - z_n|}{1 + |y_n - z_n|}.$$

Ако просумирамо по свим члановима добијамо неједнакост троугла:

$$d(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n - z_n|}{2^n(1 + |x_n - z_n|)} \leq$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1 + |x_n - y_n|)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|y_n - z_n|}{2^n(1 + |y_n - z_n|)} = d(x, y) + d(y, z).$$

(в) Приметимо прво да низ c_n не може конвергирати ка неком низу који има бар један члан различит од нуле. Ако би конвергирао ка низу a таквом да је $a_p = \delta \neq 0$ тада би за $n > p$ важило:

$$d(a, c_n) \geq \frac{\delta}{2^p} > 0$$

што је контрадикција са тим да $c_n \to a$.

Са друге стране растојање до нула низа је:

$$d(c_n, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|c_k - 0|}{2^k(1 + |c_k - 0|)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{|c_k|}{2^k(1 + |c_k|)} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Како је последњи израз реп конвергентног реда можемо га учинити произвољно малим. Из тога што је растојање од низа c_n до нула низа произвољно мало закључујемо да дати низ конвергира ка нула низу.

4. Дато је пресликавање $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такво да инверзна слика сваке тачке има кардиналност 2. Да ли f може бити непрекидно пресликавање, ако се подразумева уобичајена метрика?

   Решење:

   Претпоставимо да је f непрекидна функција која задовољава услове задатка.

   За произвољно $m \in \mathbb{R}$ постоје $a, b \in \mathbb{R}$ такви да је:

$$f(a) = f(b) = m.$$

   Како је сегмент $[a, b]$ компактан скуп по Вајерштрасовој теореми непрекидна функција на њему достиже минимум и максимум. Бар један од ова два екстремума мора бити различит од m, иначе би функција била константна на $[a, b]$ и инверзна слика тачке m би имала кардиналност већу од 2. Без губитка општости нека функција достиже максимум у $c \in (a, b)$ тако да је $f(c) = M \neq m$.

   Означимо $\xi = \frac{m+M}{2}$.

   Функција је непрекидна на повезаном скупу $[a, c]$ па њена слика мора бити повезан скуп односно интервал те мора узимати све међувредности тако да постоји $x_1 \in (a, c)$ такво да је $f(x_1) = \xi$.

   Потпуно аналогно на повезаном скупу $[c, b]$ функција узима све међувредности па постоји $x_2 \in (c, b)$ тако да је $f(x_2) = \xi$.

   Функција мора узети и вредност $M + 1$ у некој тачки x. Како је M максимум функције f на $[a, b]$ закључујемо да $x \notin [a, b]$.

   Ако је $x > b$ функција на повезаном скупу $[b, x]$ мора узети све међувредности па постоји x_3 такво да је $f(x_3) = \xi$.

   Аналогно ако је $x < a$ функција на повезаном скупу $[x, a]$ узима све међувредности па опет постоји x_3 тако да је $f(x_3) = \xi$.

У оба претходна случаја смо добили контрадикцију, јер смо пронашли тачку чија инверзна слика има кардиналност већу од два.

Разматрање у случају да је у тачки c минимум различит од m је аналогно.

Из претходног можемо закључити да не постоји непрекидна функција која испуњава услове задатка.

5. Доказати да су пројекције на координате равномерно непрекидна пресликавања у $\mathbb{R}^n$, где се подразумева уобичајена еуклидска метрика.

   Решење:

   Нека је са:

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \pi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$$

   задата пројекција на i-ту координату.

   Како важи:

$$d(x_i, y_i) = |x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} = d(x, y)$$

   можемо узети да је у дефиницији равномерне непрекидности $\delta = \varepsilon$ јер важи:

$$d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d(\pi_i(x), \pi_i(y)) \leq d(x)y \leq \varepsilon.$$

   Овим је доказано да су пројекције на координате равномерно непрекидна пресликавања.

6. Нека су дата непрекидна пресликавања метричких простора $f, g : X \to Y$. Доказати да је скуп $A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ затворен.

   Решење:

   Доказаћемо да је комплемент скупа A отворен.

   Узмимо произвољно $x_0 \in A^c$. За то x_0 важи да је $f(x_0) \neq g(x_0)$ па је $d(f(x_0), g(x_0)) = \varepsilon > 0$.

   Из непрекидности пресликавања f постоји δ_1 такво да:

$$d(x, x_0) \leq \delta_1 \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Потпуно аналогно из непрекидности пресликавања g постоји δ_2 тако да:

$$d(x, x_0) \leq \delta_2 \Longrightarrow d(g(x), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сада за $d(x, x_0) \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ из неједнакости многоугла важи:

$$\varepsilon = d(f(x_0), g(x_0)) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x), g(x)) + d(g(x_0), g(x))$$

па је:

$$d(f(x), g(x)) \geq \varepsilon - d(f(x), f(x_0)) - d(g(x), g(x_0)) > 0.$$

Како је $d(f(x), g(x)) > 0$ и d је метрика мора бити $f(x) \neq g(x)$ па је $x \in A^c$.

За произвољну тачку $x_0 \in A^c$ смо показали да постоји околина која је цела у A^c из чега следи да је $A^c \in \mathcal{T}$ односно $A \in \mathcal{F}$.

7. Дат је метрички простор (X, d) и скуп $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Ако постоји непрекидна сурјекција $f : X \to A$ таква да за свако $a \in A$ важи $f(a) = a$ доказати да је A затворен. (Овакво пресликавање се назива ретракција.)

Решење:

Претпоставимо супротно да $A \notin \mathcal{F}$. Тада $A^c \notin \mathcal{T}$, односно $\operatorname{int} A^c \neq A^c$, па постоји $y \in A^c \setminus \operatorname{int} A^c$. За такво y постоји низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A^{c^c} = A$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

Са друге стране како је f непрекидно и свако $x_n \in A$ важи да је:

$$f(x_n) = x_n$$

$$y = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(y).$$

Како је лимес јединствен у метричком простору добијамо да је $f(y) = y$ што је контрадикција са тим да $y \notin A$ односно да y није у слици пресликавања f.

Приметимо да се задатак могао решити на други начин применом претходног задатка на функције f и id_X.

8. Описати конвергентне низове у дискретном метричком простору.

   Решење:

   Нека је a_n конвергентан низ у дискретном метричком простору. Да би низ био конвергентан мора бити Кошијев. Нека је дато $\varepsilon \in (0,1)$. Тада мора да постоји n_0 тако да је:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow d(a_n, a_{n_0}) \leq \varepsilon.$$

   Ако важи да је $a_n \neq a_{n_0}$ њихово растојање је:

$$d(a_n, a_{n_0}) = 1 > \varepsilon.$$

   Закључујемо:

$$n \geq n_0 \Longrightarrow a_n = a_{n_0}$$

   односно да конвергентан низ у дискретном метричком простору мора бити константан почевши од неког члана.

9. Дати пример метричког простора (X, d), његовог подпростора S и пресликавања f чије су рестрикције непрекидне на S и на S^c, а пресликавање није непрекидно на целом простору X. Да ли би се могао дати такав пример у случају да су S и S^c затворени простори.

   Решење:

   Нека је простор $X = \mathbb{R}$ са уобичајеном метриком изаберимо скуп $S = [0, +\infty)$ и нека је дато пресликавање:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

   Пресликавање је константно на скупу $S = [0, +\infty)$ и на скупу $S^c = (-\infty, 0)$, па је самим тим и непрекидно. Међутим пресликавање није непрекидно на целом $\mathbb{R}$ јер је:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$$

   па f има прекид у нули.

   Овакав пример се не би могао дати у случају да су оба скупа затворена. Наиме тада би и оба скупа била отворена. За сваку тачку x постојала би отворен кугла $B(x, \varepsilon)$ која би цела била у истом скупу, па би из непрекидности на тим скуповима важило да је непрекидно на тој кугли па и у самој тачки x. Како би пресликавање било непрекидно у свакој тачки било би непрекидно и на целом простору. (Непрекидност је локално својство.)

10. Ако је у метричком простору (X, d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

Решење:

Нека је дато $\varepsilon > 0$.

Како је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ постоји n_1 тако да:

$$n \geq n_1 \Longrightarrow d(x, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

и аналогно како и низ y_n конвергира постоји n_2 тако да:

$$n \geq n_2 \Longrightarrow d(y, y_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сада за $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ на основу неједнакости четвороугла можемо закључити да важе следеће две неједнакости:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) \leq d(x, y) + \varepsilon$$

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq d(x_n, y_n) + \varepsilon.$$

Како је из претходног:

$$d(x, y) - \varepsilon \leq d(x_n, y_n) \leq d(x, y) + \varepsilon$$

можемо закључити да је:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

4 Компактност

Дефиниција 16. *Метрички простор је компактан ако се из сваког отвореног покривача може издојити коначан потпокривач.*

Теорема 4. *Непрекидна слика компактног скупа је компактан скуп.*

Непрекидна реална функција на компактном скупу достиже минимум и максимум.

Теорема 5. *Сваки бесконачан подскуп компактног простора има тачку нагомилавања.*

Савки низ у компактном простору има конвергентан подниз.

Теорема 6. *Сваки компактан скуп је затворен и ограничен.*

Затворен подскуп компактног скупа је компактан.

У $\mathbb{R}^n$ *је еквивалентно је твђење де је скуп компактан и тврђење да је скуп затворен и ограничен.*

Теорема 7. *Ако је дата непрекидна функција* $f : K \to Y$ *где је* K *компактан скуп тада је функција* f *и равномерно непрекидна.*

1. Да ли инверзна слика компактног скупа при непрекидном пресликавању мора бити компактан скуп?

   Решење:

   Инверзна слика компактног скупа не мора бити компактан скуп. Можемо посматрати пресликавање произвољног некомпактног простора у једну тачку. На пример:

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = 1.$$

   Скуп које се састоји од једне тачке $\{1\}$ је компактан, а његова инверзна слика је цео $\mathbb{R}$ који наравно није компактан.

2. Доказати да је коначна унија компактних скупова компактан скуп.

   Решење:

   Нека је дат коначан број компактних скупова $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Изаберимо произвољан покривач отвореним скуповима:

   $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \quad B_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Како је сваки од скупова A_i компактан можемо изабрати коначан отворен потпокривач:

$$A_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{l(i)} B_\alpha^k.$$

Тада ће и унија A_i бити покривена унијом ових покривача којих је опет коначно много:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{l(i)} B_\alpha^k.$$

Како смо из произвољног покривача издвојили коначан потпокривач доказана је компактност.

3. Испитати компактност подскупова равни задатих са:

   (а) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^4 \leq y \leq \operatorname{arctg} x\right\}$;

   (б) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \leq y \leq e^{\pi x}\}$;

   (в) $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^x - x + e^y - y \leq \alpha\right\}$;

   где се подразумева еуклидска метрика.

   Решење:

   (а) Како је $y \leq \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ и $x^4 \leq y < \frac{\pi}{2}$ можемо закључити да је скуп A подскуп кугле $B\left((0,0), \pi\right)$, па је скуп ограничен. Уочимо пресликавање:

   $$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \varphi(x, y) = \operatorname{arctg} x - y.$$

   Пресликавање φ је непрекидно као композиција непрекидних пресликавања. Дефинишимо скуп:

   $$A_1 = \varphi^{-1}([0, +\infty)).$$

   Скуп A_1 је затворен као инверзна слика затвореног скупа. Такође можемо дефинисати пресликавање:

   $$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \psi(x, y) = y - x^4$$

   које је непрекидно, као и скуп:

   $$A_2 = \psi^{-1}([0, \infty)).$$

Скуп A_2 је такође затворен јер је инверзна слика затвореног скупа.

Можемо закључити како је $A = A_1 \cap A_2$ да је и скуп A затворен као пресек два затворена скупа.

Скуп A је затворен и ограничен у $\mathbb{R}^2$ па мора бити компактан.

(б) Скуп B није компактан јер није ограничен. Можемо уочити низ:

$$a_n = \left(-n, \frac{e^{-\pi n}}{2}\right).$$

Како је $-n \leq 0$ и $0 \leq \frac{e^{-\pi n}}{2} \leq e^{-\pi n}$ можемо закључити да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \in B$.

Из тога што је $d(a_n, (0,0)) > n$ и тачка $(0,0) \in B$ закључујемо да скуп B није коначног дијаметра па није ограничен и самим тим није компактан.

(в) Познато је да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $e^x \geq x + 1$ па је за $\alpha < 2$ скуп C празан, а самим тим и компактан.

Такође је $e^x = x + 1$ ако и само ако је $x = 0$ па је за $\alpha = 2$ скуп $C = \{(0,0)\}$ једночлан па и компактан.

Разматраћемо надаље случај када је $\alpha > 2$ и доказати да је и тада скуп C ограничен и затворен.

Ако би x било веће од нуле можемо искористити чињеницу да је $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ и да је $e^y - y \geq 1$. Добијамо да је:

$$2 + \frac{x^2}{2} \leq e^x - x + e^y - y \leq \alpha$$

односно:

$$x \leq \sqrt{2\alpha - 4}.$$

Са друге стране за $x < 0$ имамо:

$$e^x - x \leq \alpha$$

односно:

$$-x \leq \alpha - e^x < \alpha$$

па је:

$$x > -\alpha.$$

Закључили смо да у сваком случају важи:

$$\alpha < x \leq \sqrt{2\alpha - 4}$$

а потпуно аналогно можемо тврдити да је и:

$$\alpha < y \leq \sqrt{2\alpha - 4}$$

из чега није тешко утврдити да је скуп C ограничен.
Ако дефинишемо пресликавање:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) = e^x - x + e^y - y$$

ово пресликавање је непрекидно. Како је:

$$B = \phi^{-1}((-\infty, \alpha])$$

скуп C је и затворен као инверзна слика затвореног скупа. Затворен и ограничен скуп у $\mathbb{R}^n$ је компактан, па је скуп C компактан.

4. Ако је (X, d) компактан метрички простор дијаметра ρ доказати да постоје тачке $a, b \in X$ такве да је $d(a, b) = \rho$.

   Решење:

   Како је дијаметар простора X једнак ρ за свако $\varepsilon > 0$ постоје тачке које су на растојању већем од $\rho - \varepsilon$.

   Узмимо да је $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и формирајмо два низа a_n и b_n таква да је

$$d(a_n, b_n) > \rho - \frac{1}{n}.$$

   Низ a_n у компактном метричком простору мора имати конвергентан подниз $a_{n_k} \to a$. Означимо поднизове са овим индексима са:

$$a_{n_k} = u_k \quad b_{n_k} = v_k.$$

   Сада је низ u_k конвергентан, а низ v_k има конвергентан подниз $v_{k_j} \to b$. Важиће да је за свако n:

$$d(a, b) > \rho - \frac{1}{n}$$

   па мора важити да је

$$d(a, b) = \rho.$$

5. Испитати компактност подскупова простора квадратних матрица:

(а) $C = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; \sum\limits_{1 \le i,j \le 3} |a_{ij}| = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^9$.

(б) $B = \big\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \;\big|\; \det A = 1 \big\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Метрика на $M_n(\mathbb{R})$ је задата са $d(A, B) = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2}$.

(а) Како за свако i, j важи да је $|a_{ij}| \le 1$ следи да је растојање произвољне матрице из скупа C до нула матрице:

$$d(A, 0) \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - 0)^2} \le 3.$$

Скуп C је подскуп кугле са центом у нули и полупречника 3 па је ограничен.

Ако дефинишемо пресликавање:

$$\varphi : M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \varphi(A) = \sum_{1 \le i,j \le 3} |a_{ij}|$$

лако је приметити да је непрекидно.

Како је $C = \varphi^{-1}(\{1\})$ видимо да је скуп C затворен као инверзна слика затвореног. Затворен и ограничен подскуп $\mathbb{R}^n$ је компактан.

(б) Скуп B није компактан, јер није ограничен. Уочимо низ:

$$B_n = \begin{bmatrix} n+1 & n \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Лако је проверити да је $\det(B_n) = 1$. Како је растојање до јединичне матрице E:

$$d(B_n, E) = \sqrt{n+2}$$

очигледно се скуп B не може сместити у неку куглу.

6. Ако су A и B непразни, дисјунктни и компактни подскупови метричког простора доказати да је $d(A, B) > 0$. Да ли аналогно тврђење важи за затворене скупове? Да ли тврђење важи ако је један скуп компактан, а један затворен?

Решење:

Нека је скуп A затворен, а скуп B компактан и скупови су дисјунктни. Претпоставимо да је $d(A, B) = 0$. Тада за свако n морају постојати тачке $a_n \in A$ и $b_n \in B$такве да је $d(a_n, b_n) \leq \frac{1}{n}$.

На основу тога што је скуп B компактан следи да низ b_n мора имати конвергентан подниз $b_{n_k} \to b \in B$.

Како за свако k постоји $a_{n_k} \in A$ тако да је $d(a_{n_k}, b) \leq \frac{1}{n_k}$ важи да је $b \in A' \subseteq A$, јер је скуп A затворен.

Добили смо да је $b \in A \cap B$ што је контрадикција са условом задатка. Задатак се могао урадити и надруги начин. Можемо дефнисати функцију:

$$\varphi(x) = d(x, A).$$

Није тешко утврдити да је ова функција непрекидна и позитивнана скупу B. Како је B компактан скуп непрекидна функција на њему мора достићи минимум, који у овом случају мора бити позитиван.

Тврђење не мора важити ако бар један скуп није компактан за шта је пример дат раније.

7. Нека су $V, K \subset \mathbb{R}^n$ са еуклидском метриком. Ако је V отворен, K компактан и $K \subset V$ доказати да постоји компактан скуп S такав да важи $K \subset \operatorname{int} S \subset S \subset V$.

   Решење:

   За произвољно $x \in K \subset V$ из отворености скупа V постоји кугла $B(x, \varepsilon_x) \subset V$. Направимо отворен покривач скупа K:

$$\bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{\varepsilon_x}{2}\right) \supset K.$$

   Из компактности скупа K постоји коначан подпокривач:

$$\bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}\right) \supset K.$$

   Дефинишимо да је:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} B\left[x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}\right].$$

Важи да је:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}\right) \subset S.$$

Такође је:

$$\bigcup_{i=1}^{n} B\left[x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}\right] \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \varepsilon_{x_i}\right) \subset V.$$

Скуп S је затворен, јер је коначна унија затворених скупова, тј. затворених кугли. Такође је и ограничен као коначна унија ограничених. Ограничен и затворен скуп у $\mathbb{R}^n$ је компактан чиме је доказано тврђење.

8. Ако је (X, d) компактан метрички простор и свака функција $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна доказати да је X коначан скуп.

   Решење:

   Претпоставимо супротно да је простор X бесконачан и компактан и свака функција $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна. Како је скуп бесконачан можемо направити низ са свим различитим елементима односно да важи:

$$i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j.$$

   Низ x_n мора имати конвергентан подниз $x_{n_k} \to a$.

   Дефинишимо функцију:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

   Како је $x_{n_k} \neq a$ важи да је $f(x_{n_k}) = 0$, па је:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = 0.$$

   Са друге стране из непрекидности функције f имамо:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n_k}) = f(a) = 1.$$

   Како је лимес у метричком простору јединствен овим смо добили контрадикцију и доказали тврђење.

9. Показати да не постоји непрекидна сурјективна контракција компактног метричког простора са више од две тачке на себе.

   Решење:

   На основу задатка 4. постоје тачке a и b такве да је $d(a,b) = \rho$. Ако је f сурјекција постоје тачке x и y тако да је $f(x) = a$ и $f(y) = b$. Добијамо да је:

$$d(x,y) \leq \rho = d(a,b) = d(f(x), f(y))$$

   што је контрадикција са тим да је f контракција.

10. (а) Дат је затворен скуп $A \in \mathbb{R}^n$ и непрекидно пресликавање $f : A \to \mathbb{R}^m$. Ако је скуп $B \subseteq A$ ограничен да ли и његова слика $f(B)$ мора бити ограничен скуп?

    (б) Да ли исто тврђење важи ако А није затворен?

    Решење:

    (а) Како је:

$$\overline{B} \subset \overline{A} = A.$$

    функција f је непрекидна и на скупу $\overline{B}$.

    Из тога што је $\operatorname{diam} B = \operatorname{diam} \overline{B}$ закључујемо да је скуп $\overline{B}$ ограничен. Како је и затворен скуп је компактан.

    Непрекидна функција пресликава компактан скуп на компактан, па је и $f(\overline{B})$ компактан, а самим тим и ограничен.

    Важи да је $f(B) \subseteq f(\overline{B})$, па је и скуп $f(B)$ ограничен што је тврђење задатка.

    (б) Тврђење не мора важити ако скуп A није затворен. Можемо узети да је скуп $A = (0,1)$ и пресликавање задато са:

$$f : A \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

    при чему сматрамо да је и на домену и на кодомену задата уобичајена метрика.

    Ако је скуп $B = (0, \frac{1}{2})$, тада је $f(B) = (2, +\infty)$ што наравно није ограничен скуп.

5 Комплетност

Дефиниција 17. *Метрички простор је комплетан ако у њему сваки Кошијев низ конвергира.*

Теорема 8. *Затворен подскуп комплетног метричког протора је комплетан.*

Дефиниција 18. *За пресликавање метричких простора $f : X \to Y$ кажемо да је Липшиц непрекидно ако постоји ненегативна реална константа K тако да је за свако $x, y \in X$:*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

Дефиниција 19. *Нека је дато пресликавање метричког простора у себе $f : X \to X$. За пресликавање f кажемо да је контракција ако постоји q такво да је $0 < q < 1$ и за сваке две тачке $x, y \in X$ важи $d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x, y)$.*

Теорема 9. *Ако је f непрекидна контракција комплетног метричког простора (X, d) онда постоји јединствено $x \in X$ тако да је $f(x) = x$. (Банахова теорем о фиксној тачки)*

1. Да ли непрекидна слика комплетног метричког простора мора бити комплетан метрички простор?

   Решење:

   Непрекидна слика комплетног простора не мора бити комплетан. Нека су на скупу $\mathbb{R}$ задате еуклидска метрика e и метрика d задата са $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$.

   Идентичко пресликавање

   $$f : (\mathbb{R}, e) \to (\mathbb{R}, d) \qquad f(x) = x$$

   је непрекидно што није тешко проверити.

   Знамо да је $\mathbb{R}$ са еуклидском метриком комплетан.

   Показаћемо да $\mathbb{R}$ са метриком d није комплетан. Уочимо низ чији је општи члан задата са $x_n = n$. Овај низ је Кошијев. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$ и низ је растући важиће да је за произвољно $\varepsilon > 0$ и за $m, n \geq n_0$:

   $$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \operatorname{arctg} m, \operatorname{arctg} n \leq \frac{\pi}{2}$$

односно:

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Међутим овај низ не конвергира, јер ако би конвергирао морао би конвергирати ка броју x за који важи да је $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ што није могуће. Како је дати низ Кошијев и не конвергира простор није комплетан.

2. Испитати комплетност простора:

   (а)
   $$A = \left\{ f \in C\,[0,1] \;\middle|\; f(0) = 0 \right\},$$

   (б)
   $$B = \left\{ f \in C\,[0,1] \;\middle|\; f(0) > 0 \right\},$$

   ако је метрика на $C[0,1]$ задата са:
   $$d(f,g) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|.$$

   Решење:

   (а) Уочимо пресликавање:
   $$\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R} \quad \varphi(f) = f(0)$$
   .
   Није тешко проверити да је дато пресликавање непрекидно. Како је тачка 0 затворен скуп њена инверзна слика, а то је скуп $A = \varphi^{-1}(0)$ мора бити затворен скуп. Познато је да је затворен подскуп комплетног метричког простора комплетан, из чега следи да је дати простор комплетан.

   (б) Овај простор није комплетан.
   Уочимо низ константних функција $x_n(t) = \frac{1}{n}$, који очигледно припада овом простору. Овај низ је Кошијев. За задато $\varepsilon > 0$ изаберемо n_0 тако да је $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Тада је за $m, n \geq n_0$:
   $$d(x_m, x_n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon.$$
   У већем простору $C[0,1]$ овај низ конвергира ка нула функцији. Међутим ова функција није у датом простору, па из јединствености лимеса овај низ не конвергира у њему.
   Како смо нашли Кошијев низ који није конвергентан простор B није комплетан.

3. На комплетном метричком простору $C[0,1]$ са метриком задатом са $d(f,g) = \sup\limits_{0\le t\le 1} |f(t) - g(t)|$ дато је пресликавање:

$$F : C[0,1] \to C[0,1] \qquad F(f)(x) = \frac{1}{5}\int_0^x \sin(x-t)f(t)dt.$$

а) Показати да је F контракција;

б) Доказати да једначина $F(f) = f$ има јединствено решење $f \equiv 0$.

Решење:

(а) За две произвољне функције $f, g \in C[0,1]$ користећи линеарност интеграла, основну интегралну неједнакост и ограниченост синуса важи:

$$d(F(f), F(g)) =$$

$$= \sup_{0\le x\le 1}\left|\frac{1}{5}\int\limits_0^x \sin(x-t)f(t)\ dt - \frac{1}{5}\int\limits_0^x \sin(x-t)g(t)\ dt\right| \le$$

$$\le \sup_{0\le x\le 1}\frac{1}{5}\left|\int\limits_0^x \sin(x-t)(f(t)-g(t))\right| \le$$

$$\le \sup_{0\le x\le 1}\frac{1}{5}\int\limits_0^x |\sin(x-t)||f(t)-g(t)|\ dt \le$$

$$\le \frac{1}{5}\int\limits_0^1 \sup_{0\le x\le 1}|f(t)-g(t)|\ dt \le \frac{1}{5}\ d(f,g)\int\limits_0^1 dt \le \frac{1}{5}\ d(f,g)$$

чиме је доказано да је дато пресликавање контракција.

(б) Како је дато пресликавање контракција комплетног метричког простора једначина $F(f) = f$ мора имати јединствено решење. Није тешко уочити да је $F(0) = 0$ па следи тврђење.

4. Нека је X простор реалних низова са коначно много чланова различитих од нуле, и нека је задато пресликавање $d : X \times X \to \mathbb{R}$ са $d(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{|x_k - y_k|}{k^2}$. Доказати да је d метрика, и затим испитати комплетност овако задатог простора.

   Решење:Није тешко проверити да је дато пресликавање d добро дефинисано и да је заиста метрика.

   Уочимо низ у овом простору:

$$x_1 = (1, 0, 0 \ldots, 0, \ldots)$$

$$x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\right)$$

$$x_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$$

   Растојање два члана овога низа за $m > n$ је:

$$d(x_n, x_m) = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3}.$$

   Како је последњи израз реп конвергентног реда можемо га учинити мањим од произвољно малог ε за довољно велико n и m, па је дати низ Кошијев.

   Претпоставимо да низ конвергира ка неком низу x који има p чланова различитих од нуле. Тада је за $n > p$ растојање x_n и x:

$$d(x, x_n) \geq \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{k^3} > \frac{1}{(p+1)^3}$$

   Како последњи израз није мањи од произвољно малог ε за било које $n > p$ добили смо контрадикцију и дат низ не може конвергирати. из овога следи да простор није комплетан.

5. Нека је $S \subseteq \mathbb{R}^2$ конвексан скуп и нека је дата тачка $a \in \mathbb{R}^2$ за коју важи да је $d(a, S) = \delta$. Ако је низ тачака $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ такав да је $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a, b_n) = \delta$ доказати да низ конвергира у $\mathbb{R}^2$. Да ли тврђење мора важити ако скуп није конвексан?

Решење:

Како је $\mathbb{R}^2$ комплетан простор довољно је доказати да је низ Кошијев. Из конвексности скупа S важи да је за произвољне две тачке b_m и b_n и тачка $\frac{b_n+b_m}{2}$ у скупу S. Применићемо косинусну теорему на троугао са теменима b_n, $\frac{b_n+b_m}{2}$ и a и на троугао са теменима b_m, $\frac{b_n+b_m}{2}$ и a:

$$d\left(a,b_n\right)^2 = d\left(a,\frac{b_n+b_m}{2}\right)^2 + d\left(b_n,\frac{b_n+b_m}{2}\right)^2 -$$

$$-2d\left(a,\frac{b_n+b_m}{2}\right)d\left(b_n,\frac{b_n+b_m}{2}\right)\cos\varphi$$

$$d\left(a,b_m\right)^2 = d\left(a,\frac{b_n+b_m}{2}\right)^2 + d\left(b_m,\frac{b_n+b_m}{2}\right)^2 -$$

$$-2d\left(a,\frac{b_n+b_m}{2}\right)d\left(b_m,\frac{b_n+b_m}{2}\right)\cos\left(\pi-\varphi\right)$$

где смо са φ означили угао између дужи које спајају тачке a и $\frac{b_n+b_m}{2}$ и дужи која спаја тачке $\frac{b_n+b_m}{2}$ и b_n. Сабирањем горњих једначина и корстећи да је тачка $\frac{b_n+b_m}{2}$ на средини дужи b_nb_m добијамо:

$$d(a,b_n)^2 + d(a,b_m)^2 = 2d\left(a,\frac{b_n+b_m}{2}\right)^2 + \frac{d(b_m,b_n)^2}{2}$$

односно:

$$d(b_m,b_n)^2 = 2\left(d(b_m,a)^2 + d(b_n,a)^2 - 2d\left(a,\frac{b_n+b_m}{2}\right)\right)$$

$$0 \leq d(b_m,b_n)^2 \leq 2\left(d(b_m,a)^2 + d(b_n,a)^2 - 2\delta\right).$$

Како $d(a,b_n)$ и $d(a,b_m)$ теже δ из услова задатка то на основу теореме о два полицајца мора $\lim\limits_{n\to+\infty} d(b_n,b_m) = 0$.

Показали смо да је низ Кошијев и како је $\mathbb{R}^2$ комплетан он мора конвергирати.

Конвексност је неопходан услов. За контрапример можемо узети да је скуп S комплемент јединичног круга и да је тачка $a = (0, 0)$. Ако посматрамо низ:

$$b_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

није тешко проверити да је ће за свако n важити да је $b_n \in S$ и да је

$$\lim_{n\to+\infty} d(b_n, a) = 1 = d(S, a)$$

а да низ дивергира.

6. Испитати да ли је скуп полинома

$$A = \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1 \right\}$$

комплетан са метриком задатом са

$$d(x, y) = \max_{0\le t\le 1} |x(t) - y(t)|.$$

Решење:

Уочимо низ полинома задат са $x_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \frac{t^n}{n!}$.

Овај низ је Кошијев јер је за $n > m$:

$$d(x_m, x_n) = \max_{0\le t\le 1} |x_n(t) - x_m(t)| = \max_{0\le t\le 1} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{t^k}{k!} \le \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}$$

а последњи израз можемо учинити произвољно малим јер је реп конвергентног реда.

Међутим познато је да је гранична вредност овог низа полинома функција e^x која се не налази у скупу полинома, па овај низ у скупу полинома дивергира.

Како смо пронашли Кошијев низ који дивергира простор није комплетан.

7. Дато је пресликавање $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$:

$$d(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n} & m \ne n \\ 0 & m = n \end{cases}$$

Доказати да је d метрика и испитати комплетност овако задатог простора.

Решење:

Недегенерисаност и симетричост су очигледни, а неједнакост троугла следи из:

$$d(m,n)+d(n,k)=1+\frac{1}{m+n}+1+\frac{1}{n+k}\geq 2\geq 1+\frac{1}{m+k}=d(m,k)$$

па дато пресликавање јесте метрика.

За произвољно $0<\varepsilon<1$ и произвољан Кошијев низ мора бити да је за $m,n\geq n_0$ мора бити да је

$$d(x_m,x_n)\leq\varepsilon<1.$$

Како је за $x_m\neq x_n$:

$$d(x_m,x_n)=1+\frac{1}{m+n}>1$$

закључујемо да за $m,n\geq n_0$ важи

$$x_m=x_n.$$

Прозвољан Кошијев низ је константан почевши од неког члана па мора конвергирати из чега закључујемо да је простор комлетан.

8. Доказати да пресликавање

$$f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)\quad f(x)=x+\frac{1}{x}$$

смањује растојање, али није контракција.

Решење:

За произвољне две тачке $x,y\in[1,+\infty)$ важи:

$$|f(x)-f(y)|=\left|x+\frac{1}{x}-y-\frac{1}{y}\right|=|x-y|\left|1-\frac{1}{xy}\right|\leq|x-y|$$

односно:

$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$$

па дато пресликавање заиста смањује растојање.

Ако би пресликавање било контракција на затвореном подскупу $[1,+\infty)$ комплетног метричког простора $\mathbb{R}$ једначина

$f(x) = x$ би имала јединствено решење. Међутим дата једначина нема решење:

$$f(x) = x \Longleftrightarrow x + \frac{1}{x} = x \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = 0.$$

На основу овога можемо закључити да иако смањује растојање дато пресликавање није контракција.

9. На комплетном метричком простору (X, d) је задато пресликавање $f : X \to X$ за које важи да је:

$$d(f(x), f(y)) \geq q\ d(x, y) \quad q > 1.$$

Доказати да f има фиксну тачку.

Решење:

Уочимо да је дато пресликавање инјективно. Наиме ако је $f(x) = f(y)$ имамо:

$$0 = d(f(x), f(y)) \geq q\ d(x, y) \geq 0$$

па на основу овога закључујемо да је $x = y$.

На основу овога имамо бијекцију:

$$f : X \to f(X)$$

па постоји инверзно пресликавање:

$$f^{-1} : f(X) \to X.$$

На основу задате неједнакости добијамо:

$$q\ d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = d(x, y)$$

$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq \frac{1}{q}\ d(x, y).$$

Како је $\frac{1}{q} < 1$ закључујемо да је f^{-1} контракција на комплетном метричком простору па постоји x такво да је $f^{-1}(x) = x$, односно $x = f(x)$.

10. Нека је дат $B_n = B[a_n, \delta_n]$ опадајући низ затворених кугли (у смислу инклузије, односно важи $B_{n+1} \subset B_n$) у комплетном метричком простору. Доказати да ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ следи да

је $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ једночлан. Да ли тврђење важи ако простор није комплетан?

Решење:

Уочимо низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ центара ових кугли. Овај низ је Кошијев. Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ следи да постоји n_0 тако да за свако $\varepsilon > 0$

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \delta_n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

За свако $m, n \geq n_0$ важи да је:

$$a_m \in B(a_m, \delta_m) \subseteq B(a_{n_0}, \delta_{n_0})$$

$$a_n \in B(a_n, \delta_n) \subseteq B(a_{n_0}, \delta_{n_0}).$$

Како су a_m,a_n у кугли полупречника мањег од $\frac{\varepsilon}{2}$ морају бити на растојању мањем од ε. Како је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Кошијев у комплетном метричком простору мора бити и конвергентан, односно постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Ова гранична вредност ће бити у пресеку свих кугли. За произвољно n и свако $m > n$ биће $a_m \in B[a_n, \delta_n]$ па како је овај скуп затворен и гранична вредност мора бити у овом скупу.

Пресек је једночлан, јер ако би постојале две различите тачке a и b у пресеку свих кугли оне би биле на неком растојању ρ и не би могле да буду у кугли полупречника мањег од $\frac{\rho}{2}$ која ће постојати у низу јер полупречници теже нули.

Тврђење неће важити у простору који није комплетан. Можемо посматрати простор $(0, +\infty)$ са Еуклидском метриком и кугле $B[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Овај низ кугли је опадајући међутим пресек му је празан скуп у датом простору.

6 Повезаност

Дефиниција 20. *Метрички простор (X, d) је неповезан ако постоје подскупови $X_1, X_2 \subseteq X$ такви да је $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1, X_2 \neq \emptyset$ и $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$.*

Простор је повезан ако није неповезан.

Теорема 10. *Метрички простор (X, d) је неповезан ако и само ако постоји непрекидна сурјекција $f : X \to \{0, 1\}$, где на скупу $\{0, 1\}$ подразумевамо дискретну метрику.*

Теорема 11. *При непрекидном пресликавању слика повезаног скупа је повезан скуп.*

Теорема 12. *У $\mathbb{R}$ једини повезани скупови су интервали.*

Теорема 13. *Ако су $A_\alpha, \alpha \in A$ повезани скупови и B повезан скуп тако да за свако $\alpha \in A$ важи $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ онда је повезан и скуп:*

$$B \cup \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha.$$

Дефиниција 21. *Метрички простор (X, d) је путно повезан ако за сваке две тачке $x, y \in X$ постоји непрекидно пресликавање $\gamma : [0, 1] \to X$ тако да је $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$.*

Теорема 14. *Сваки путно повезан простор је и повезан, док обратно не важи.*

У $\mathbb{R}^n$ сваки отворен и повезан скуп је путно повезан.

Теорема 15. *При непрекидном пресликавању слика путно повезаног скупа је путно повезан скуп.*

1. Ако су скупови A и B повезани испитати да ли морају бити повезани скупови ∂A, $\operatorname{int} A$, A^C,$A \cup B$ и $A \cap B$?

   Решење:

   Ниједан од ових скупова не мора бити повезан. Сви примери ће бити подскупови равни са еуклидском метриком.

   Ако је скуп
   $$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1\right\}$$
   тада је:

   $$\partial A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 0\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 1\right\}$$

односно унија две дисјунктне праве што није повезан скуп. Такође у овом случају ни

$$A^c = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x < 0\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x > 1\big\}$$

није повезан скуп.

Ако је скуп

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (x-1)^2 + y^2 \leq 1\big\} \cup$$

$$\cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (x+1)^2 + y^2 \leq 1\big\}$$

што је повезан скуп, тада је

$$\operatorname{int} A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (x-1)^2 + y^2 < 1\big\} \cup$$

$$\cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| (x+1)^2 + y^2 < 1\big\}.$$

Унутрашност скупа је унија два дисјунктна отворена диска па није повезан скуп.

За унију је довољно узети да су скупови A и B две различите тачке. Тада је њихова унија неповезан скуп.

Ако су дати скупови:

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x = 0 \ y \leq 0\big\}$$

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x = 0 \ y > 0\big\}$$

тада је

$$A \cap B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x > 0\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x < 0\big\}$$

што наравно није повезан скуп.

2. Дати су подскупови $C[0,1]$:

$$A = \left\{ f \in C[0,1] \mid f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) \right\}$$

$$B = \left\{ f \in C[0,1] \mid f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{1}{4}\right) \right\}$$

$$C = \left\{ f \in C[0,1] \mid f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right) \right\}$$

Испитати повезаност и путну повезаност скупова $A \cup C$ и $B \cup C$, ако је метрика задата са:

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| .$$

Решење:

Како мора важити да је или $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f\left(\frac{1}{4}\right)$ или $f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{4}\right)$ заправо је:

$$A \cup C = C[0,1].$$

Овај простор је путно повезан: за $f, g \in C[0,1]$ можемо конструисати пут:

$$\gamma : [0,1] \to C[0,1] \quad \gamma(t) = (1-t)f - tg.$$

За свако t је $\gamma(t)$ непрекидна функција као композиција непрекидних, са доменом $[0,1]$, и важи да је $\gamma(0) = f$ и $\gamma(1) = g$. Како је простор путно повезан он је и повезан.

$B \cup C$ није повезан скуп. Скупови B и C су дисјунктни и очигледно непразни.

Такође су отворени. За $f \in B$ можемо узети куглу

$$B(f, \delta), \quad \delta = \frac{f(\frac{1}{2}) - f(\frac{1}{4})}{2}.$$

За ову куглу важи да је:

$$B(f, \delta) \subseteq B$$

и како је f била произвољна функција $B \in \mathcal{T}$. Аналогно се може показати да је C отворен скуп.

Како $B \cup C$ није повезан не може бити ни путно повезан.

3. Доказати да је $\mathbb{S}^1$ повезан скуп.

   Решење:

   Дефинишимо пресликавање:

   $$f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \quad f(x) = (\cos x, \sin x).$$

   Пресликавање f је непрекидно, јер је непрекидно по координатама.

   Слика пресликавања f је $\mathbb{S}^1$ па овај скуп мора бити повезан као непрекидна слика повезаног.

4. Ако за два непразна подскупа метричког простора A и B важи да је за сваку тачку x из тог простора $d(x, A) \neq d(x, B)$ доказати да простор није повезан.

Решење:

Дефинишимо скупове:

$$X_1 = \left\{ x \in X \;\middle|\; d(x, A) < d(x, B) \right\}$$

$$X_2 = \left\{ x \in X \;\middle|\; d(x, A) > d(x, B) \right\}.$$

Тачке из непразног скупа A су у скупу X_1, а тачке из непразног скупа B су у X_2 па важи:

$$X_1 \neq \emptyset, \quad X_2 \neq \emptyset.$$

Као је свако $x \in X$ важи да је $d(x, A) \neq d(x, B)$ следи да је свака тачка или у X_1 или у X_2, односно:

$$X_1 \cup X_2 = X.$$

Уочимо произвољну тачку $x_0 \in X_1$ и куглу:

$$B(x_0, \delta) \quad \delta = \frac{d(x_0, B) - d(x_0, A)}{2}.$$

За произвољно $x \in B(x_0, \delta)$ важи:

$$d(x, A) \leq d(x, x_0) + d(x_0, A) < d(x_0, A) + \delta$$

$$d(x, B) \geq d(x_0, B) - d(x, x_0) > d(x_0, B) - \delta.$$

Сабирањем ове две неједнакости добијамо:

$$d(x, B) + d(x_0, A) + \delta > d(x, A) + d(x_0, B) - \delta$$

односно:

$$d(x, B) - d(x, A) > d(x_0, B) - d(x_0, A) - 2\delta = 0.$$

Како је x било произвољно следи да је:

$$B(x_0, \delta) \subseteq X_1.$$

Такође је x_0 било произвољно па је скуп X_1 околина сваке своје тачке односно:

$$X_1 \in \mathcal{T}, \quad X_1^c = X_2 \in \mathcal{F}.$$

Истим поступком се може доказати да је $X_2 \in \mathcal{T}$, па како простор може да се представи као унија два дисјунктна непразана отворенозатворена скупа није повезан.

5. Испитати да ли је подпростор

$$X = \left\{ f : [0,1] \to [0,1] \;\middle|\; f \in C[0,1], f \text{ је строго монотона} \right\}$$

простора непрекидних функција повезан. Подразумева се метрика $d(x,y) = \sup\limits_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|$.

Решење:

Дефинишимо скупове:

$$X_1 = \left\{ f : [0,1] \to [0,1] \;\middle|\; f \in C[0,1], f \text{ је строго растућа} \right\}$$

$$X_2 = \left\{ f : [0,1] \to [0,1] \;\middle|\; f \in C[0,1], f \text{ је строго опадајућа} \right\}.$$

Како је свака строго монотона функција строго растућа или строго опадајућа:

$$X = X_1 \cup X_2.$$

Функција не може бити строго растућа и строго опадајућа па је:

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset.$$

Доказујемо још да су скупови X_1 и X_2 отворенозатворени.

Уочимо произвољно $x_0 \in X_1$. Како је x строго растућа функција мора бити:

$$x_0(1) - x_0(0) = \delta > 0.$$

Посматрајмо куглу $B\left(x_0, \frac{\delta}{2}\right)$ и произвољно x из ове кугле. Важи да је $d(x, x_0) < \frac{\delta}{2}$ па је сигурно:

$$x(0) < x_0(0) + \frac{\delta}{2},$$

$$x(1) > x_0(1) - \frac{\delta}{2}.$$

Из овога закључујемо да је $x(1) > x(0)$ па како је x строго монотона мора бити растућа односно $x \in X_1$ па је и

$$B\left(x_0, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq X_1.$$

Скуп X_1 је околина сваке своје тачке па је $X_1 \in \mathcal{T}$.

Истим поступком се може доказати да је и $X_2 \in \mathcal{T}$, па су оба скупа и затворена јер су један другом комплементи.

Простор X смо представили као унију два непразна дисјунктна отворенозатворена скупа па није повезан.

6. Дати су непразни подскупови A и B повезаног метричког протора (X, d).

   (а) Да ли мора постојати $x \in X$такво да је $d(x, A) = 2d(x, B)$?

   (б) Ако је $d(A, B) = 2$ да ли мора постојати x такво да је $d(x, A) = d(x, B) = 1$?

   Решење:

   (а) Мора постојати таква тачка, иначе се поступком као у задатаку 4. добија да простор није повезан.

   (б) Не мора важити. Нека је цео простор $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, а скупови $A = (1, 0)$ и $B = (-1, 0)$. Простор је повезан, а једина тачка која је на растојању 1 од A и B је тачка $(0, 0)$ која се не налази у простору.

7. Нека је X повезан метрички простор, $f, g : X \to [0, 1]$ непрекидна пресликавања и нека је f сурјективно. Доказати да постоји $x \in X$ тако да важи $f(x) = g(x)$.

   Решење:

   Дефинишимо пресликавање:

$$\varphi : X \to [0, 1] \quad \varphi(x) = f(x) - g(x).$$

   Ово пресликавање је непрекидно као разлика непрекидних и како је X повезан слика преликавања мора бити повезан скуп, тј. интервал.

   Пресликавање f је сурјективно па постоје x_1 и x_2 тако да је $f(x_1) = 0$ и $f(x_2) = 1$.

За ове тачке важи да је

$$\varphi(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = 0 - g(x_1) \leq 0$$

$$\varphi(x_2) = f(x_2) - g(x_1) = 1 - g(x_1) \geq 0.$$

Како је слика пресликавања φ интервал који садржи и позитивне и негативне вредности мора садржати и 0, тј. постоји x_0 тако да је $\varphi(x_0) = 0$ односно:

$$f(x_0) = g(x_0).$$

8. На метричком простору дефинишемо релацију $x \sim y$ ако постоји повезан скуп A такав да су $x, y \in A$. Доказати да је ово релација еквиваленције и да су класе највећи у смислу инклузије повезани скупови. Доказати да су класе и затворени скупови. Да ли су класе затворени скупови и у случају путне повезаности?

   Решење:

   Како је свака тачка повезан скуп релација је рефлексивна.

   Лако се види да је релација и симетрична.

   Ако је $x \sim y$ постоји повезан скуп A тако да $x, y \in A$. Такође ако су $y \sim z$ постоји скуп повезан B тако да $y, z \in B$. На основу теореме цветић како су A и B повезани скупови и $y \in A \cap B$ па $A \cap B \neq \emptyset$ и скуп $A \cup B$ је повезан те је $x \sim z$. Следи да је релација и транзитивна.

   Овим је показано да је $\sim$ релација еквиваленције и класу елемента x ћемо означавати са C_x.

   Претпоставимо да постоји повезан скуп A тако да је $A \supsetneq C_x$. Тада постоји $y \in A \setminus C_x$. Како су $y, x \in A$ и A је повезан скуп следи да су $x \sim y$ што је контрадикција са тиме да $y \notin C_x$. Закључујемо да су компоненте повезаности заиста највећи повезани скупови у смислу инклузије.

   Компонента повезаности C_x је повезан скуп, а како је затворење повезаног скупа повезан то је и $\overline{C_x}$. Како је C_x највећи повезан скуп мора бити $\overline{C_x} \subseteq C_x$, а обрнута инклузија увек важи те је $C_x = \overline{C_x}$. Како је C_x једнак свом затворењу $\overline{C_x}$ следи да је затворен скуп.

У случају путне повезаности компоненте не морају бити затворени скупови. Можемо узети пример тополошке синусоиде:

$$\left\{(x, \sin x) \;\middle|\; 0 < x \leq 1\right\} \cup \{0\} \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Познато је да је ово повезан скуп који није путно повезан. Ако би компоненте путне повезаности били затворени скупови, оне би како су једна другој комплементи биле и отворени скупови и простор би био унија два непразна отворенозатворена скупа па не би био повезан.

9. Ако је (X, d) повезан метрички простор $a, b \in X$, $a \neq b$ и ако је дато непрекидно пресликавање $f : X \to \mathbb{R}$ доказати да постоји $x \in X$ такво да је $2\,(f(x))^2 = (f(a))^2 + (f(b))^2$.

   Решење:

   Дефинишимо функцију:

$$\varphi : X \to \mathbb{R} \quad \varphi(x) = (f(x))^2\,.$$

   Овако дефинисано пресликавање је непрекидно као композиција непрекидних.

   Како је X повезан простор његова непрекидна слика мора бити повезан скуп, а једини повезани скупови у $\mathbb{R}$ су интервали, па је $f(X)$ интервал.

   Без губитка општости нека је $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. Тада је:

$$[\varphi(a), \varphi(b)] \subseteq \varphi(X)$$

   па мора постојати $x \in X$ такво да је:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}.$$

   Закључујемо да је:

$$2\varphi(x) = (f(a))^2 + (f(b))^2$$

   што је и требало доказати.

10. Ако је (X, d) повезан метрички простор и $M, N \subseteq X$ тако да је

$$X = M \cup N \quad M, N \neq \emptyset$$

$$\operatorname{diam} M + \operatorname{diam} N < \operatorname{diam} X$$

доказати да X није повезан.

Решење:

Како увек важи да је:

$$\operatorname{diam} X \leq \operatorname{diam} M + \operatorname{diam} N + d(M, N)$$

из претпоставке задатака можемо закључити да је

$$d(M, N) = \delta > 0, \quad M \cap N = \emptyset.$$

За прозвољно $x \in M$ кугла $B(x, \delta) \cap N = \emptyset$ па је скуп M отворен. Аналогно и скуп N је отворен. Па како су скупови M и N отворено затворени, дисјунктни, непразни и дају цео простор, простор X није повезан.

11. Дат је метрички простор (X, d) са барем два елемента. Дефинишимо пресликавање $f : X \to \mathbb{R}$ са $f(x) = d(x, X \setminus \{x\})$.

   (а) Доказати да је f непрекидно;

   (б) Ако је простор повезан доказати да је $f \equiv 0$.

   Решење:

   (а) Приметимо да за произвољне $x, y \in X$ важе неједнакости:

   $$0 \leq f(x) = d(x, X \setminus \{x\}) = \inf_{z \in X \setminus \{x\}} d(x, z) \leq d(x, y)$$

   $$0 \leq f(y) = d(y, X \setminus \{y\}) = \inf_{z \in X \setminus \{y\}} d(x, z) \leq d(x, y)$$

   чијим одузимањем добијамо да је:

   $$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$$

   па је функција f непрекидна у тачки x, а како је избор тачке био произвољан непрекидна је и на целом X.

(б) Претпоставимо супротно да постоји $x_0 \in X$ такво да је:

$$f(x_0) = d(x_0, X \setminus \{x_0\}) = \delta > 0.$$

Тада можемо дефинисати скупове

$$X_1 = \{x_0\}$$

$$X_2 = X \setminus \{x_0\}.$$

Ови скупови су непразни, дисјунктни и дају цео простор. Такође су отворени затворени, јер су на позитивном растојању, чиме дају дисконексију повезаног простора што је контрадикција.

12. Ако X_1 и X_2 праве дисконексију метричког простора (X, d) и ако је $A \subseteq X$ такав да је $A \cap X_1 \neq \emptyset$ и $A \cap X_2 \neq \emptyset$ доказати да A није повезан.

Решење:

Дефинишимо скупове

$$A_1 = A \cap X_1$$

$$A_2 = A \cap X_2.$$

По услову задатка ови скупови се непразни и њихова је унија цео скуп A.

Такође су дисјунктни, јер су подскупови два различита дисјунктна скупа.

Ако изаберемо произвољно $x \in A_1$ оно је и у X_1 па како је $X_1 \in \mathcal{T}$ постоји кугла $B(x, \delta) \subseteq X_1$.

Из тога што је $X_1 \cap A_2 = \emptyset$ закључујемо да је и $B(x, \delta) \cap A_2 = \emptyset$ па је A_1 отворен у A.

Аналогно је и A_2 отворен. Из овога се може закључити да је A неповезан скуп.

13. Ако је (X, d) повезан метрички простор и $a, b \in X$, $a \neq b$ доказати да за непрекидну функцију $f : X \to \mathbb{R}$ постоји $x \in X$ тако да важи једнакост:

$$\sin(f(b)) - \sin(f(a)) = (f(b) - f(a)) \cos(f(a)) - \frac{1}{2}(f(b) - f(a))^2 \sin(f(x)).$$

Решење:

Тејлоров полином са остатком у Лагранжовом облику функције $\sin t$ у околини тачке α је:

$$\sin t = \sin \alpha + (t-\alpha)\cos \alpha - \frac{1}{2}(t-\alpha)^2 \sin \xi$$

за неко $\xi \in (t, \alpha)$.Означивши $f(b) = t$ и $f(a) = \alpha$ добијамо:

$$\sin f(b) = \sin f(a) + (f(b) - f(a))\cos f(a) - \frac{1}{2}(f(b) - f(a))^2 \sin \xi.$$

Можемо узети да је $f(a) \leq f(b)$.

Како је $\xi \in [f(a), f(b)]$ а простор X повезан мора постојати $x \in X$ такво да је $f(x) = \xi$. Овим је показано тврђење задатка.

14. Нека је (X, d) метрички простор и $A \subseteq X$.

 (а) Ако је $C \subseteq X$ повезан скуп, доказати да важи тачно једна од релација

$$C \subseteq \operatorname{int} A \qquad C \subseteq (X \setminus \overline{A}) \qquad C \cap \partial A \neq \emptyset.$$

 (б) Нека је $f : [0,1] \to X$ непрекидна функција, $f(0) \in A$, $f(1) \in X \setminus A$. Доказати да постоји $t \in [0,1]$ тако да је $f(t) \in \partial A$.

Решење:

(а) Претпоставимо супротно да је C повезан скуп који не задовољава ни једну од датих скуповних релација.

Дефинишимо скупове:

$$C_1 = C \cap \operatorname{int} A$$

$$C_2 = C \cap (X \setminus \overline{A}).$$

Тривијално је да је:

$$C = C_1 \cup C_2.$$

Из тога што је $\operatorname{int} A \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$ следи да је и:

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset.$$

Знамо да је $X = \operatorname{int} A \cup \partial A \cup (X \setminus \overline{A})$.

Како је $C \cap \partial A = \emptyset$ и $C \nsubseteq \operatorname{int} A$ знамо да C_2 није празан скуп.

Аналогно како $C \nsubseteq (X \setminus \overline{A})$ ни скуп C_1 није празан.

Скупови $\operatorname{int} A$ и $(X \setminus \overline{A})$ су отворени у X па су отворени и у C.

Овим смо показали да се скуп C може представити као унија два дисјунктна непразна отворенозатворена скупа што је контрадикција са тим да је повезан.

(б) Интервал $[0,1]$ је повезан скуп, па је и његова непрекидна слика повезан скуп. Означимо са:

$$f([0,1]) = C = \left\{x \in X \;\middle|\; x = f(t),\ t \in [0,1]\right\}.$$

Како је $f(0) \in A$ мора бити $f(0) \in \operatorname{int} A$ или $f(0) \in \partial A$. У другом случају је задатак завршен па предпоставимо да важи прво. Тада је $C \nsubseteq (X \setminus \overline{A})$.

Исто тако како је $f(1) \in (X \setminus \overline{A})$ мора важити или $f(1) \in \partial(X \setminus \overline{A}) = \partial A$ или $f(1) \in \operatorname{int}(X \setminus \overline{A})$. У првом случаају је испуњен услов задатка, па ћемо предпоставити да важи други случај и тада $C \nsubseteq \operatorname{int} A$.

Сада се можемо позвати на први део задатка и како нису испуњене прве две релације и скуп C је повезан мора бити $C \cap \partial A \neq \emptyset$ па постоји $x = f(t) \in \partial A$.

15. Ако је (X,d) повезан метрички простор и $a, b \in X$, доказати да за непрекидну функцију $f : X \to \mathbb{R}$ постоји $x \in X$ такво да важи:

$$\sum_{k=0}^{7} (f(a))^k (f(b))^{7-k} = 8(f(x))^7.$$

Решење:

Ако је $f(a) = f(b)$ тврђење тривијално важи.

Нека је, без губитка општости $f(b) > f(a)$. Приметимо да је:

$$\sum_{k=0}^{7} (f(a))^k (f(b))^{7-k} = f(b)^7 + f(a)f(b)^6 + \cdots + f(a)^6 f(b) + f(b)^7 =$$

$$\frac{\left(f(b)^7 + f(a)f(b)^6 + \cdots + f(a)^6 f(b) + f(b)^7\right)\left(f(b) - f(a)\right)}{f(b) - f(a)} =$$

$$= \frac{f(b)^8 - f(a)^8}{f(b) - f(a)}.$$

Функција f је непрекидна, па је слика повезаног простора повезан, односно интервал I.

За функцију:

$$\varphi : I \to \mathbb{R} \quad \varphi(x) = x^8$$

лако видимо да испуњава услове Лагранжове теореме на скупу $[f(a), f(b)] \subseteq I$, па постоји $\xi \in [f(a), f(b)]$ тако да је:

$$\frac{\varphi(f(b)) - \varphi(f(a))}{f(b) - f(a)} = \varphi'(\xi) = 8(f(\xi)))^7.$$

Како се ξ налази у слици пресликавања f мора постојати тачка $x \in X$ тако да је $f(x) = \xi$ чиме је доказано тврђење задатка.

16. Нека је (X, d) повезан метрички простор и $a, b \in X$, $a \neq b$. Дефинишимо пресликавање $f : X \to \mathbb{R}$ са $f(x) = |d(x,a) - d(x,b)|$.

(а) Доказати да је f непрекидно на X;

(б) Постоји $\xi \in X$ тако да је $f(\xi) = 0$;

(в) Доказати да је $Im(f) = [0, d(a,b)]$.

Решење:

(а) Није тешко утврдити да је растојање од тачке непрекидно пресликавање, па је и пресликавање f непрекидно као композиција непрекидних пресликавања.

(б) Мора постојати тачка за коју важи да је $d(x,a) = d(x,b)$ па самим тим и $f(x) = 0$. У супротном би се скуп X могао представити као унија два непразна отворенозатворена скупа:

$$X_1 = \big\{x \in X \;\big|\; d(x,a) > d(x,b)\big\}$$
$$X_2 = \big\{x \in X \;\big|\; d(x,a) < d(x,b)\big\}$$

што је контрадикција са тим да је X повезан.

(в) За произвољно $x \in X$ важи :

$$d(x,a) - d(x,b) \leq d(a,b),$$

$$d(x,b) - d(x,a) \leq d(a,b).$$

Из ове две неједнакости добијамо:

$$f(x) = |d(x,a) - d(x,b)| \leq d(a,b).$$

Приметимо да је:

$$f(a) = f(b) = d(a,b).$$

Како је X повезан и његова слика мора бити повезан скуп, односно интервал. Из претходног можемо закључити да је:

$$Im(f) = [0, d(a,b)].$$

17. Нека је $f : I \to \mathbb{R}$ непрекидно пресликавање, где је I интервал. Доказати да је скуп $\Gamma = \big\{(x, f(x)) \;\big|\; x \in I\big\}$ повезан.

    Решење:

    Ако посматрамо пресликавање:

    $$\tilde{f} : I \to \mathbb{R}^2 \quad \tilde{f}(x) = (x, f(x))$$

    није тешко утврдити да је непрекидно. Наиме по првој координати је идентитета, а по другој је непрекидно f из услова задатка, па је непрекидно јер је непрекидно по координатама.

    Како је интервал I повезан скуп његова непрекидна слика мора бити повезан скуп те је Γ повезан.

18. Доказати да је повезан метрички простор (X, d) са барем две тачке непребројив.

    Решење:

    Нека је $a \in X$ произвољна тачка и дефинишимо преликавање $f : X \to \mathbb{R}$ са $f(x) = d(x,a)$. Ово пресликавање је непрекидно, а како постоје две различите тачке слика пресликавања ће бити нетривијалан интервал, који је непребројив. Како простор X мора имати већу кардиналност од слике и он мора бити непребројив.

19. Ако су A и B подскупови метричког простора (X, d), A повезан и важи да је $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ тада је и B повезан скуп.

    Решење:

    Претпоставимо супротно да B није повезан скуп. Тада постоји непрекидна сурјекција $f : B \to \{0, 1\}$. Како је A повезан скуп мора бити да је пресликавање f на скупу A константно. Без губитка општости рецимо да је за свако $x \in A$ $f(x) = 0$. Као је f сурјективно на B постоји $y \in B \subset \overline{A}$ такво да је $f(y) = 1$. Из тога што је $f(y) = 1$ следи да y није у A, и како је у $\overline{A}$ мора постојати низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Из овога добијамо контрадикцију јер важи:

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(y) = 1.$$

20. Доказати да јединична кугла у повезаном простору не мора бити повезан скуп.

Решење:

Нека је простор:

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 0,\ y > 0\right\}$$

са уобичајеном метриком. Уочимо куглу:

$$B = B\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right), 1\right).$$

Ова кугла није повезан скуп јер имамо дисконексију

$$B_1 = B \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0\right\},$$
$$B_2 = B \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < 0\right\}.$$

21. Доказати да ако су скупови $A_i, i \in I$ и B путно повезани и за свако i важи да је $B \cap A_i \neq \emptyset$ онда је и скуп $B \bigcup \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ путно повезан.

Решење:

Изаберимо две произвољне тачке $x, y \in B \bigcup \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Ако постоји i тако да су $x, y \in A_i$ како је A_i путно повезан следи да постоји пут који повезује x и y, и слично ако су $x, y \in B$.

Нека је $x \in A_i$ а $y \in B$. Из тога што је $A_i \cap B \neq \emptyset$ постоји $z \in A_i \cap B$. Скуп A_i је путно повезан па постоји пут γ_1 који повезује x и z, а такође B је путно повезан па постоји пут γ_2 који повезује z и y. Сада можемо конструисати следећи пут:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

На основу тога што је $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)=z$ овај пут је непрекидан. За $t\in[0,\frac{1}{2}]$ пут је у A_i, а за $t\in[\frac{1}{2},1]$ пут је у B , па смо на овај начин конструисали пут који повезује x и y у $B\cup A_i$.

Нека је сада $x\in A_i$, а $y\in A_j$. Из услова задатка постоје $z\in A_i\cap B$ и $u\in B\cap A_j$, као и путеви γ_1 који повезује x и z, γ_2 који повезује z и u, као и γ_3 који повезује u и y. Конструишемо пут:

$$\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(3t), & 0\le t\le\frac{1}{3}\\ \gamma_2(3t-1), & \frac{1}{3}\le t\le\frac{2}{3}\\ \gamma_3(3t-2), & \frac{2}{3}\le t\le 1.\end{cases}$$

Из тога што је $\gamma_1(1)=\gamma_2(0)=z$ и $\gamma_2(1)=\gamma_3(0)=u$ можемо закључити да је γ непрекидан. Такође важи да је $\gamma(0)=\gamma_1(0)=x$ и $\gamma(1)=\gamma_3(1)=y$ и пут је у датом простору па смо пронашли пут који повезује x и y.

Како смо за произвољан избор тачака пронашли пут који их повезује простор је путно повезан.

22. Показати да је простор $X=\{(0,0)\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0<y<x^2\right\}$, са еуклидском метриком, путно повезан, а није полигонално повезан. (Скуп је полигонално повезан ако за сваке две тачке из скупа постоји пут од коначног броја дужи који их повезује.)

Решење:

Доказаћемо да произвољну тачку $(x,y)\in X$ можемо спојити путем са тачком $(0,0)$ која је такође у X, па из тога следи да је простор путно повезан.

Нека је $(x,y)\in X$ таква да је $x>0$.

Уочимо прво пут:

$$\gamma_1(t)=\left(\frac{t}{2},\frac{t^3}{8}\right).$$

Како за свако $t\in(0,1]$ важи да је $\frac{t^3}{8}<\left(\frac{t}{2}\right)^2$ можемо закључити да је за свако t $\gamma(t)\in X$ и нашли смо пут који спаја тачку $(0,0)$ са тачком $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$.

Како тачку (x,y) можемо са две дужи лако спојити са тачком $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$ добијамо за $x\ge\frac{1}{2}$ пут:

$$\gamma(t)=\left(\begin{array}{cl}\left(\frac{3t}{2},\frac{27t^3}{8}\right) & ,0\le t\le\frac{1}{3}\\ \left(\frac{1}{2}(1-t)+tx,\frac{1}{8}\right) & ,\frac{1}{3}\le t\le\frac{2}{3}\\ \left(x,\frac{1}{8}(1-t)+ty\right) & ,\frac{2}{3}\le t\le 1.\end{array}\right.$$

Аналогно за $x < \frac{1}{2}$ имамо пут:

$$\gamma(t) = \left(\begin{array}{cc} \left(\frac{3t}{2}, \frac{27t^3}{8}\right) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}(1-t) + ty\right) & , \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \left(\frac{1}{2}(1-t) + tx, \frac{1}{8}(1-t) + ty\right) & , \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{array} \right.$$

Исти поступак можемо применити и за тачке из скупа X за које је $x < 0$ тако што ћемо прво тачку $(0,0)$ спојити са тачком $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ путем:

$$\gamma_1(t) = \left(-\frac{t}{2}, \frac{t^3}{8}\right).$$

На основу претходног видимо да сваку тачку скупа X можемо спојити путем са тачком $(0,0)$ па је простор путно повезан.

Претпоставимо да је простор и полигонално повезан. У том случају постоји дуж која спаја тачку $(0,0)$ и тачку (x_0, kx_0), $k > 0$ која је у простору X. На основу овога морало би важити да је $kx < x^2$, односно $k < x$ за свако x тако да је $0 < x \leq x_0$. Међутим није могуће наћи овакво k, па из тога закључујемо да није могуће спојити тачку $(0,0)$ неком дужи са другом тачком простора X, те простор није полигонално повезан.

7 Све и свашта

1. Дат је скуп $A \subseteq C[0,1]$ који садржи све функције облика $f_\alpha(t) = \alpha t + 1 - \alpha$, где је $0 < \alpha \leq 2$. Одредити дијаметар скупа A, а затим испитати његову комплетност и компактност, ако је метрика на $C[0,1]$ задата са $d(f,g) = \max\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t) - g(t)|$.

   Решење:

   Како је за произвољно α, $\beta \in (0,2]$ важи:

$$d(f_\alpha, f_\beta) = \max_{0\leq t\leq 1} |f_\alpha(t) - f_\beta(t)| = \max_{0\leq t\leq 1} |\alpha t + 1 - \alpha - \beta t - 1 + \beta| =$$

$$= \max_{0\leq t\leq 1} |(\alpha - \beta)(t-1)| \leq |\alpha - \beta| \leq 2$$

   можемо закључити да је:

$$\operatorname{diam} A \leq 2.$$

   Уочимо сада низ $f_{\frac{1}{n}}(t)$ и посматрајмо његову удаљеност од f_2:

$$d(f_{\frac{1}{n}}, f_2) = \max_{0\leq t\leq 1} \left| f_{\frac{1}{n}}(t) - f_2(t) \right| =$$

$$= \max_{0\leq t\leq 1} \left| \frac{1}{n}t + 1 - \frac{1}{n} - 2t - 1 + 2 \right| = \max_{0\leq t\leq 1} \left| (2 - \frac{1}{n})(1-t) \right| = 2 - \frac{1}{n}.$$

   За свако n постоји члан низа тако да је:

$$d(f_{\frac{1}{n}}, f_2) \geq 2 - \frac{1}{n}$$

   и из тога можемо закључити да је:

$$\operatorname{diam} A \geq 2$$

   односно на основу претходног:

$$\operatorname{diam} A = 2.$$

   Приметимо да је:

$$d\left(f_{\frac{1}{n}}, f_{\frac{1}{m}}\right) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

   На основу овога видимо да је низ $f_{\frac{1}{n}}$ Кошијев.

У простору $C[0,1]$ важи да је растојање чланова низа до функције $g(t)=1$:

$$d\left(f_{\frac{1}{n}}, g\right) = \max_{0\leq t\leq 1}\left|f_{\frac{1}{n}} - g(t)\right| = \max_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{1}{n}t + 1 - \frac{1}{n} - 1\right| =$$

$$= \max_{0\leq t\leq 1}\left|\frac{1}{n}(t-1)\right| = \frac{1}{n}$$

па можемо закључити да је:

$$\lim_{n\to+\infty} f_{\frac{1}{n}} = g.$$

Међутим функција g не припада скупу A. Наиме ако би за неко α важило да је $f_\alpha = g$ добили бисмо:

$$\alpha t + 1 - \alpha = 1$$

а из овога следи да је $\alpha = 0$ што је у контрадикцији са условима задатка.

Како је лимес у метричком простору јединствен, а функција g не припада скупу A закључујемо да низ $f_{\frac{1}{n}}$ дивергира у A. Пронашли смо Кошијев низ који конвергира па скуп A није комплетан.

На основу претходног разматрања нула финкција је тачка нагомилавања скупа A а не налази се у њему па скуп A није затворен, па самим тим није ни компактан.

2. Дат је метрички простор (X,d) и непрекидна сурјекција $f : X \to \mathbb{N}$, где је на $\mathbb{N}$ задата еуклидска метрика. Испитати да ли X може бити повезан метрички простор. Да ли X може бити компактан метрички простор?

   Решење:

   Дефинишимо пресликавање:

$$\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\} \qquad \varphi(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

   Није тешко видети да је ово пресликавање непрекидно, па је непрекидно и пресликавање:

$$\varphi \circ f : X \to \{0,1\}\,.$$

Како су f и φ сурјективни и њихова композиција је такође сурјективна. Добили смо непрекидну сурјекцију из простора X у скуп $\{0,1\}$, па X не може бити повезан простор.

Претпоставимо да је X компактан.

Изаберимо произвољан отворен прекривач скупа $\mathbb{N}$:

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \supseteq \mathbb{N} \quad U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Знамо да је f непрекидно пресликавање па за свако α важи да је $f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T}$ па и њихова унија $\bigcup\limits_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T}$. Овако смо добили отворен покривач простора X:

$$\bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(U_\alpha) \supseteq X$$

који због компактности мора имати коначан потпокривач:

$$\bigcup_{\alpha\in\tilde{A}} f^{-1}(U_\alpha) \supseteq X, \quad \tilde{A} \text{ коначан.}$$

Захваљујући сурјективности пресликавања f имамо да је:

$$f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\tilde{A}} f^{-1}(U_\alpha)\right)\right) = \bigcup_{\alpha\in\tilde{A}} U_\alpha \supseteq \mathbb{N}.$$

коначан отворен потпокривач скупа $\mathbb{N}$. Како смо из произвољног отвореног покривача добили коначан потпокривач следило би да је $\mathbb{N}$ компактан што наравно није тачно. Следи да скуп X не може бити компактан.

3. Испитати ограниченост, повезаност и компактност скупа $A = \big\{f \in C[0,1] \bigm| f(t) = at + b,\ a, b \in [0,1]\big\}$, ако је метрика на $C[0,1]$ задата са $d(f,g) = \max\limits_{0\le t\le 1} |f(t) - g(t)|$.

   Решење:

   Уочимо пресликавање:

   $$\varphi : \mathbb{R}^2 \to C[0,1] \quad \varphi(x,y) = xt + y$$

   где се у $\mathbb{R}^2$ подразумева еуклидска метрика.

Приметимо да је:

$$d\left(\varphi(x_1, y_1), \varphi(x_2, y_2)\right) = \max_{0 \le t \le 1} |x_1 t + y_1 - x_2 t - y_2| \le$$

$$\le |x_1 - x_2 + y_1 - y_2| \le |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \le d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right)$$

па је пресликавање φ непрекидно.

Скуп $[0,1]^2$ је повезан и компактан у $\mathbb{R}^2$ са еуклидском метриком, па и његова непрекидна слика мора бити повезан и компактан скуп. На основу овога је скуп A повезан и компактан. Како је A компактан скуп мора бити и ограничен.

4. Ако је дат повезан метрички простор (X, d) са барем две различите тачке доказати да $X \setminus \{a\}$ није компактан за произвољан избор тачке $a \in X$. Да ли тврђење важи у случају да простор није повезан?

   Решење:

   Како је простор X повезан за свако $\varepsilon > 0$ постоји $x \in B\left(a, \varepsilon\right) \setminus \{a\}$. У супротном можемо дефинисати скупове:

$$X_1 = X \setminus \{a\} \qquad X_2 = \{a\}.$$

   Скупови X_1 и X_2 су очигледно непразни дисјунктни и њихова је унија цео простор. Такође није тешко проверити да су оба скупа и отворена па дају дисконексију повезаног простора што доводи до контрадикције.

   На основу претходног можемо формирати низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ за чије чланове важи:

$$x_1 \in B\left(a, 1\right)$$
$$x_2 \in B\left(a, \frac{1}{2}\right)$$
$$x_3 \in B\left(a, \frac{1}{3}\right)$$
$$\vdots$$

   За свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 тако да је за свако $n \ge n_0$, $\frac{1}{n} \le \varepsilon$, па је и $x_n \in B\left(a, \varepsilon\right)$. Можемо закључити да низ x_n конвергира тачки a. Овај низ не може имати конвергентан подниз у $X \setminus \{a\}$. Како смо пронашли низ који нема конвергентан подниз закључујемо да $X \setminus \{a\}$ није компактан.

У случају да простор X није повезан тврђење не мора важити. Узмимо за пример:

$$X = [0,1] \cup \{3\}$$

са еуклидском метриком. Очигледно је:

$$X \setminus \{3\} = [0,1]$$

компактан, чиме смо показали неопходност повезаности у формулацији тврђења.

5. Ако је $x \in C[0,1]$ са метриком задатом са $d(x,y) = \max\limits_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|$ испитати конвергенцију низа функција $x_n(t) = x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$.

Решење:

Уочимо помоћну функцију:

$$g(t) = t^{1+\frac{1}{n}} - t.$$

Очигледно је:

$$g(0) = g(1) = 0.$$

Функција g је диференцијабилна па можемо потражити извод ове функције:

$$g'(t) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) t^{\frac{1}{n}} - 1$$

па је:

$$g'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Можемо закључити да је:

$$\max_{0 \le t \le 1} |g(t)| = \left| g\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) \right| = \left| \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \right| \le$$

$$\le \left| \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\frac{!}{n}} - 1 \right| = \left| e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(\frac{n}{n+1}\right)} - 1 \right|.$$

Није тешко проверити да последњи израз тежи нули кад n тежи бесконачности, па можемо закључити да постоји n_0 тако да за свако $n \ge n_0$ важи да је $\left| t^{1+\frac{1}{n}} - t \right| \le \delta$ за произвољан избор $\delta > 0$ и $t \in [0,1]$. Са друге стране x је непрекидна, па и равномерно непрекидна на компактном скупу те за прозвољан избор $\varepsilon > 0$ важи да је за $\left|t^{1+\frac{1}{n}} - t\right| \leq \delta$, $x(t^{1+\frac{1}{n}}) - x(t) \leq \varepsilon$.

На основу претходног можемо закључити да је:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n(t) = x(t).$$

6. Ако је $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ непрекидна функција доказати да постоји $x \in \mathbb{S}^1$ такво да је $f(x) = f(-x)$.

   Решење:

   Скуп $\mathbb{S}^1$ је компактан, па непрекидна функција f на њему достиже максимум и минимум у неким тачкама $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$.

   Ако је $f(x_1) = f(x_2)$ функција је константна и тврђење важи. Ако ово није случај можемо дефинисати функцију:

$$\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R} \quad \varphi(x) = f(x) - f(-x)$$

   која је очигледно непрекидна.

   У тачки x_1 је максимум па је:

$$f(x_1) - f(-x_1) \geq 0$$

   а у тачки x_2 минимум те важи:

$$f(x_2) - f(-x_2) \leq 0.$$

   Скуп $\mathbb{S}^1$ је повезан па је његова непрекидна слика повезан, односно интервал. Тај интервал садржи позитиван и негативан број па мора садржати нулу, односно постоји x тако да је:

$$\varphi(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = f(-x).$$

7. Доказати да ако је свака јединична кугла компактан скуп да је простор комплетан.

   Решење:

   Изаберимо произвољан Кошијев низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\varepsilon > 0$. Низ је Кошијев па важи:

$$\forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

односно:

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \in B\left(x_{n_0}, 1\right).$$

Јединична кугла је компактан протор из претпоставке па низ x_n има конвергентан подниз $x_{n_k} \to x$, па је за довољно велико k $d(x_{n_k}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Следи да је за довољно велико n:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon$$

односно низ конвергира. Показали смо да произвољан Кошијев низ конвергира, па простор јесте комплетан.

8. Нека је дат метрички простор (X, d) и затворени скупови $A, B \subseteq X$ такви да је $A \cap B = \emptyset$.

   (а) Доказати да постоји непрекидно пресликавање $f : X \to \mathbb{R}$ тако да је $A = f^{-1}(\{0\})$, а $B = f^{-1}(\{1\})$.

   (б) Доказати да постоје $U, V \in \mathcal{T}$ такви да је:

$$A \subseteq U \quad B \subseteq V \quad U \cap V = \emptyset.$$

Решење:

(а) Дефинишимо пресликавање:

$$f : X \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

које је непрекидно као композиција непрекидних. Није тешко видети да је именилац већи од бројиоца, па функција f може узети вредности само из скупа $[0, 1]$.

Скуп A је затворен па су на растојању нула од њега само његове тачке, те је:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} = 0 \Longleftrightarrow x \in A.$$

Такође из затворености скупа B важи:

$$f(x) = 1 \Longleftrightarrow \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} = 1 \Longleftrightarrow x \in B.$$

(б) За пресликавање f дефинисано у првом делу решења задајмо скупове:

$$U = f^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right) \quad V = f^{-1}\left((\frac{1}{2}, 1]\right).$$

Скупови $[0, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, 1]$ су отворени у простору $[0, 1]$, па су и скупови U, V такође отворени. Како је $f(A) = 0$ следи да је $A \subseteq U$, а како је $f(B) = 1$ имамо да је $B \subseteq V$. Скупови U и V су из дефиниције дисјунктни па смо показали тврђење задатка.

9. За сваки скуп $A \subset \mathbb{N}$ дефинишемо функцију $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такву да је:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A. \end{cases}$$

За свака два скупа $A, B \subset \mathbb{N}$ дефинишемо пресликавање:

$$d(A, B) = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_A(n) - f_B(n)| \cdot 2^{-n}.$$

(а) Доказати да је пресликавање d добро дефинисано на скупу $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

(б) Показати да је $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), d)$ метрички простор;

(в) Дефинишимо низ скупова са $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}, n \in \mathbb{N}$. Испитати конвергенцију овако дефинисаног низа и у случају да он конвергира одредити граничну вредност.

Решење:

(а) Како за произвољне подскупове A и B скупа природних бројева важи да је:

$$|f_A(n) - f_B(n)| \cdot 2^{-n} \leq 2^{-n}$$

а знамо да ред са општим чланом 2^{-n} конвергира закључујемо да по поредбеном критеријуму за позитивне редове дати ред конвергира, па је пресликавање d добро дефинисано.

(б) Ред са позитивним члановима мора конвергирати ка позитивном броју па кодомен пресликавања d јесте $[0, +\infty)$.

Ако је $d(A, B) = 0$ морају сви чланови реда бити нула, односно:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_A(n) = f_B(n)$$

па је и $A = B$.

Симетричност следи из:

$$d(A, B) = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_A(n) - f_B(n)| \cdot 2^{-n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} |f_B(n) - f_A(n)| \cdot 2^{-n} = d(B, A).$$

Како важи неједнакост троугла за природне бројеве:

$$|f_A(n) - f_B(n)| + |f_B(n) - f_C(n)| \geq$$

$$\geq |f_A(n) - f_B(n) + f_B(n) - f_C(n)| = |f_A(n) - f_C(n)|$$

и множењем са 2^{-n} и сумирањем се неједнакост очувава добијамо:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_A(n) - f_B(n)| \cdot 2^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} |f_B(n) - f_C(n)| \cdot 2^{-n} \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{+\infty} |f_A(n) - f_C(n)| \cdot 2^{-n}$$

односно неједнакост троугла:

$$d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C).$$

Овим је показано да d јесте метрика.

(в) Како ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}$ конвергира за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 тако да је $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon$.

Из овога следи да дати ред конвергира ка празном скупу, јер за $\varepsilon > 0$ постоји n_0 тако да је за $n \geq n_0$ $d(A_n, \emptyset) \leq \varepsilon$.

10. Дато је пресликавање:

$$d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{\|x\|+\|y\|}{2} & , x \neq y \\ 0 & , x = y. \end{cases}$$

а) Доказати да је d метрика;

б) Описати отворене кугле:

$$B\left((0,0,0),1\right) \qquad B\left((0,2,2),2\right);$$

в) Испитати отвореност, затвореност и повезаност скупа A задатог са:

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=0, y=2, 1 \leq z \leq 3\right\} \cup \left\{a \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \| a \| < 1\right\};$$

г) Испитати непрекидност пресликавања:

$$f : \left(\mathbb{R}^3, d\right) \to \left(\mathbb{R}^3, e\right) \quad f(x) = x$$

$$g : \left(\mathbb{R}^3, e\right) \to \left(\mathbb{R}^3, d\right) \quad g(x) = x$$

где је са e означена еуклидска метрика.

Решење:

(а) Како је норма увек ненегативан број d је добро дефинисано пресликавање у $[0, +\infty)$.

Ако су x и y различите тачке бар једна норма је различита од 0, па је и $d(x,y) > 0$ односно следи недегенерисаност.

Симетричност и неједнакост троугла су очигледни, па d заиста јесте метрика.

(б) Ако је $x \in B\left((0,0,0),1\right)$ односно $d(x,(0,0,0)) < 1$ мора бити да је $\| x \| < 2$, па је:

$$B\left((0,0,0),1\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \| x \| < 2\right\}.$$

За $x \in B\left((0,2,2),2\right)$ мора важити да је $x = (0,2,2)$ или

$$\frac{\| x \| + \| (0,2,2) \|}{2} < 2$$

односно $\| x \| < 4 - 2\sqrt{2}$, па је:

$$B\left((0,2,2),2\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \| x \| < 4 - 2\sqrt{2}\right\} \cup \{(0,2,2)\}.$$

(в) За свако $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ уочимо куглу са центром у тој тачки и полупречника $\delta = \frac{\|(x,y,z)\|}{4}$. На основу дефиниције метрике d можемо уочити да је:

$$B\left((x, y, z), \delta\right) = \left\{(x, y, z)\right\}.$$

На основу овога су све тачке различите од координатног почетка отворени скупови.

За тачку кооординатног почетка није тешко проверити да су кугле које је садрже уобичајене еуклидске кугле.

Закључујемо да је скуп A отворен као унија отворених кугли.

Такође је комплемент скупа A отворен скуп као унија отворених, па A мора бити и затворен.

Скуп A нећe бити повезан јер можемо издвојити произвољну тачку различиту од нуле која ће бити отворен скуп, а и остатак ће остати отворен и тако можемо направити дисконексију.

(г) Како је скуп A из претходног дела задатка отворен у метрици d, а није у еуклидској метрици можемо закључити да инверзна слика отвореног скупа при пресликавању g не мора бити отворен, па пресликавање није непрекидно.

Са друге стране сваки отворен скуп у еуклидској метрици је скуп тачака различитих од нуле или садржи неку околину нуле, па је отворен и у метрици d. Из овога следи да f јесте непрекидно пресликавање.

А сад само рад