

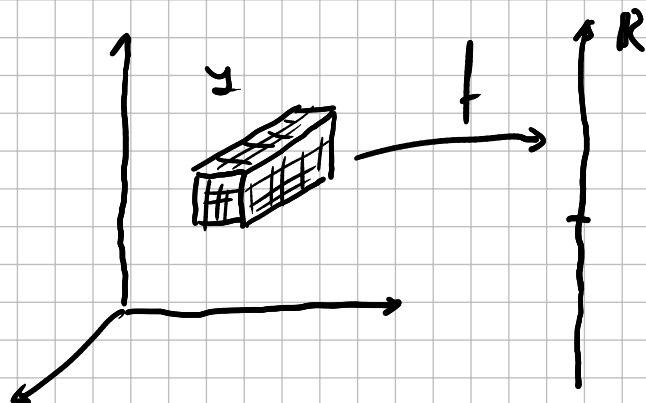
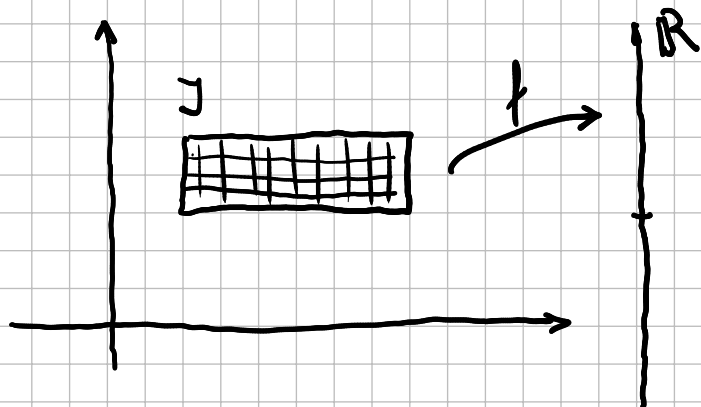
ANALIZA 3

ISMER VEŽBE

VIŠESTRUKI INTEGRALI

$$f: J \rightarrow \mathbb{R}$$

J KVADAR $\cup \mathbb{R}^3$, PRAVOUTGAONIK $\cup \mathbb{R}^2$



$$\mathcal{P} = \{ I_j \mid j \in J \} \quad \text{— PODELA}$$

I_j — MAH, I KVADRI

$$\xi_j \in I_j \quad \xi_j \text{ — ISTAKHUTE TAČKE}$$

$$\xi = \{ \xi_j \mid j \in J \}$$

$$\sigma(f; \mathcal{P}, \xi) = \sum_{j \in J} f(\xi_j) \mu(I_j)$$

$\mu(I_j)$ — ZAPREMINA (POVRŠINA) — MERA

$\lambda(\mathcal{P})$ — PARAMETAR PODELE

$$\lambda(\mathcal{P}) = \max_{j \in J} \{ \mu(I_j) \}$$

$I \in \mathbb{R}$ — INTEGRAL AKO VAŽI:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathcal{P} \quad \forall \xi \quad \lambda(\mathcal{P}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f; \mathcal{P}, \xi) - I| < \varepsilon$$

ОЗНАКА

$$\iint_I f(x, y) dx dy$$

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz$$

DEFINICIA:

$A \in \mathbb{R}^n$ има ЛЕБЕГОВУ МЕРУ НУЛА АКО ЗА $\forall \epsilon > 0$ ПОСТОЈИ ПОКРИВАЊЕ СКУПА A КВАДРИМА $I_j, j \in \mathbb{J}$ КОЈИМА ИМА НАЈВИШЕ ПРЕБРОЈИВО МНОГО

$$\sum_{j \in \mathbb{J}} \mu(I_j) < \epsilon$$

- КОНАЧАН СКУП ТАЧКА ЗА МЕРЕ НУЛА
- ПОДСКУП СКУПА МЕРЕ НУЛА ЈЕ МЕРЕ НУЛА
- НАЈВИШЕ ПРЕБРОЈИВА УНИЈА СКУПОВА МЕРЕ НУЛА ЈЕ МЕРЕ НУЛА

ОСОБИНЕ ИНТЕГРАЛА:

(у $\mathbb{R}^2$, у $\mathbb{R}^3$ ВАЖЕ ИСТЕ ОСОБИНЕ)

1) LINEARNOST

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f dx dy + \beta \iint_D g dx dy$$

2) ADITIVNOST PO SKUPU

$$D = D_1 \cup D_2 \quad \mu(D_1 \cap D_2) = 0$$

$$\iint_D f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy$$

3) MONOTONOST

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) \geq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy$$

SPECIJALNO

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) \geq 0 \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

$$4) \text{ POKRIVANJE } P(D) = \iint_D 1 dx dy$$

ZAPREHETA $V(T) = \iiint_T 1 \, dx \, dy \, dz$

5) POSLEDICA FUBINIOVE TEOREME

$D: a \leq x \leq b \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

VEASTOPNI RIMANOV I INTEGRALI

I ZOSTAVLJAČENO ZAGRAĐU KO D VEASTOPNIH INTEGRALA I PODRAZUMEVATI DA SE INTEGRALI PRVO PO PROČEH, I VOJ ČI, JE D PRVI NAPISATI

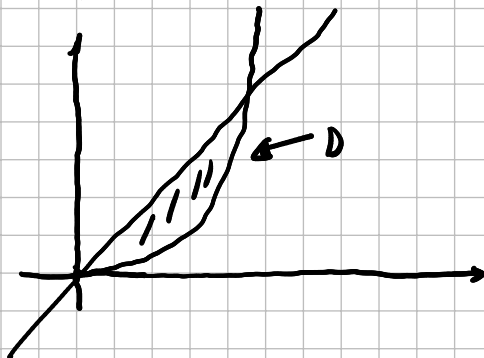
$$\int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

↑ prvo po y.

①

$$\iint_D (4x+2) \, dx \, dy$$

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y \geq x^2 \}$$



GRANICE ZA y SU DATI

GRANICE ZA x NALAZIMO IZ PRESEKA KRIVIH:

$$y = x$$

$$y = x^2$$

$$\Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x \in \{0, 1\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (4x+2) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (4x+2) \, dy \, dx = \\ &= \int_0^1 (4x+2) y \Big|_{x^2}^x \, dx = \int_0^1 (4x+2)x - (4x+2)x^2 \, dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (4x^2 + 2x - 4x^3 - 2x^2) dx = \int_0^1 (-4x^3 + 2x^2 + 2x) dx \\
 &= \left(-x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 \\
 &= -1 + \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

② $\iint_P \sin(x+y) dx dy$

$$P = \underbrace{[0, \pi]}_x \times \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}_y$$

$$\begin{aligned}
 \iint_P \sin(x+y) dx dy &= \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x+y) dy dx = \\
 &= \int_0^\pi \left(-\cos(x+y) \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \\
 &= \int_0^\pi \left(-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \right) dx = \\
 &= \int_0^\pi (\sin x + \sin x) dx = 2 \int_0^\pi \sin x dx \\
 &= 2 \left(-\cos x \right) \Big|_0^\pi = 2 \left(-\cos \pi + \cos 0 \right) = \boxed{4}
 \end{aligned}$$

MOGU I MO RAČUNATI I OBRNUTIM REDOSLEDOM

$$\iint_P \sin(x+y) dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\pi \sin(x+y) dx dy = \dots$$

③

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E: x^2 + y^2 \leq y$$

$\iint_E f(x,y) dx dy$ PREĐSTAVITI KAO PONOVLENE
INTEGRALE U OBA MOGUĆA PORETKA.

TRAŽIMO GRANICE

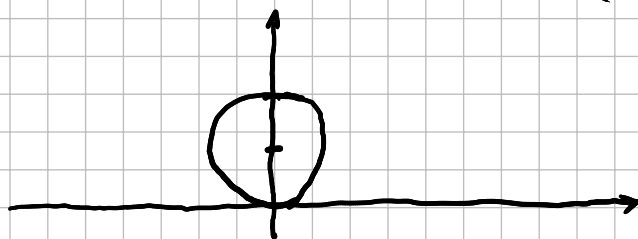
$$x^2 + y^2 \leq y$$

$$x^2 + y^2 - y \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

0.0. је круг са центром $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ радијуса $\frac{1}{2}$



$$I) \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$$

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$II) \quad 0 \leq y \leq 1 \quad -\sqrt{y - y^2} \leq x \leq \sqrt{y - y^2}$$

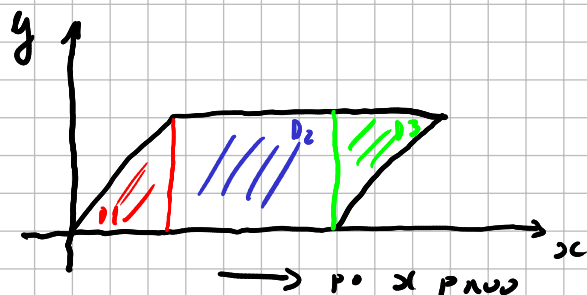
$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y - y^2}}^{\sqrt{y - y^2}} f(x, y) dx dy$$

Како редослед је боље упутљивије зависи од конкретне функције f , т.ј. зависи како се добијају такви интеграл.

$$(4) \quad \iint_D \frac{dx dy}{1+x+y}$$

D : PARALELOGRAM SA TEMENIMA

$(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ i $(3, 1)$



↑ po y prvo

Ако прво радимо по y морамо и поде-

лити на 3 дела - различите су границе за y

$$D_1 : \quad 0 \leq y \leq x \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$D_2 : \quad 0 \leq y \leq 1 \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$D_3: \quad x=y \leq 1 \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{1+x+y} = \iint_{D_1} \frac{dx dy}{1+x+y} + \iint_{D_2} \frac{dx dy}{1+x+y} + \iint_{D_3} \frac{dx dy}{1+x+y} = \dots$$

LAKEJE DE NA RADIHO PARO PO X.

$$D: \quad y \leq x \leq y+2 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{1+x+y} = \int_0^1 \int_y^{y+2} \frac{dx}{1+x+y} dy =$$

$$= \int_0^1 \log(1+x+y) \Big|_y^{y+2} dy =$$

$$= \int_0^1 (\log(2y+3) - \log(2y+1)) dy$$

$$= \int_0^1 \log(2y+3) dy - \int_0^1 \log(2y+1) dy$$

OBRA REJAVAMO PARCIJALNO.

$$u_1 = \log(2y+3) \quad dv_1 = dy$$

$$u_2 = \log(2y+1)$$

$$dv_2 = dy$$

$$du_1 = \frac{2 dy}{2y+3}$$

$$v_1 = y$$

$$du_2 = \frac{2 dy}{2y+1}$$

$$v_2 = y$$

$$= y \log(2y+3) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{y dy}{2y+3} + y \log(2y+1) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{y dy}{2y+1}$$

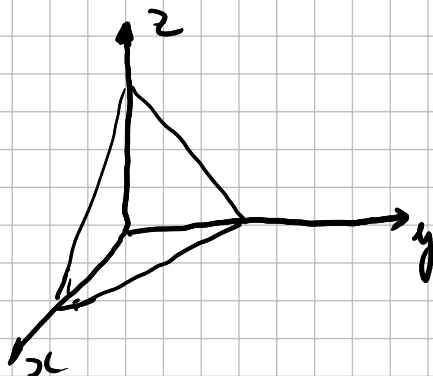
$$= \dots$$

⑤

$$\iiint_T \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$$

T: TETRAEDAR OGRAHICHEN RAVNIMA

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0 \quad ; \quad x+y+z=1$$



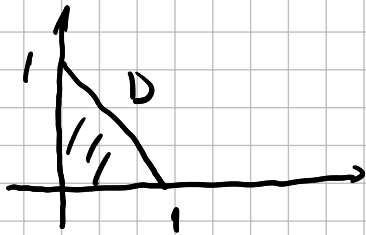
$$I \text{ druzgo pravo po } z : 0 \leq z \leq 1-x-y$$

$$\iiint_T \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} = \iint_D \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} dx dy$$

$$= \iint_D \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \Big|_0^{1-x-y} dx dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dx dy =$$

Γ_D : PROJEKCIJA NA RAVAN $z=0$



$$D: 0 \leq y \leq 1-x$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \iint_D dx dy - \iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^2} \right)$$

$$\iint_D dx dy = \frac{1}{2} \quad \text{— POUŽIJTE PRÁVO UGLOU TROJÚHLA S KATETAMI DŮLEŽITÉ!}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^2} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x+y} \right) \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \dots$$

$$\textcircled{6} \int_0^1 \int_y^1 \frac{xy}{1+x^4} dx dy$$

OVDĚ SV ZADATI VĚA STO PHÍ INTEGRÁLI.

MEĐUTIM VEĆ PRAVI INTEGRAL PO x ZA-
HTEVA DOSTA RAČUNA. PREĆI ĆEMO NA DVO-
STANAKI INTEGRAL I ZATIM OBRNUTI REDO-
SLED INTEGRACIJE

$$D: \quad y \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$



U OBRNUTOM REDOSLEDU

$$D: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x$$

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{xy}{1+x^4} dx dy = \iint_D \frac{xy}{1+x^4} dx dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \frac{xy}{1+x^4} dy dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} \int_0^x y dy dx$$

↑ ILO ZAVISI OD y I A MOŽE REŠITI ISPRED

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^4}$$

$$= \sqrt{t = 1+x^4} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} dt = 4x^3 dx \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{4t} = \frac{1}{8} \log t \Big|_1^2 = \frac{1}{8} \log 2$$

SMENA PROMENLIVIH U VIJESTANAKOM INTEGRALU

$$\varphi: D \rightarrow \Delta$$

φ - DIFEOMORFIZAM KLASI C^1

(То значи да је φ биекција ; φ ; φ^{-1}
 су диференцијабилна пресликавања)

f - интегрална на D

$$J = \det \varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in D$$

Тадa је :

$(f \circ \varphi)$ је интегрална на D и важи

$$\int_D f(x) dx = \int_D (f \circ \varphi)(t) |J(t)| dt$$

Честе замене :

- Покарне координате

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$J_{\text{акобијан}} |J| = \rho$$

- Цилиндричне координате

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad z = z$$

$$|J| = \rho$$

- Сферне координате

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \theta$$

$$|J| = \rho^2 \sin \theta$$

⑦ Одредити површину описану кривом

$$D : (a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1 \quad a_1, b_1 \neq a_2, b_2$$

Уводимо нове променљиве

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1$$

$$v = a_2 x + b_2 y + c_2$$

Граница постаје : $u^2 + v^2 = 1$ (круж.)

Рачунамо J^{-1} (појто су нове координате)

НАТБ ИЗНАЋЊЕ ПНЕКО СТАНИЦ

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0 \text{ (из условия)}$$

$$|J| = \frac{1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \neq 0$$

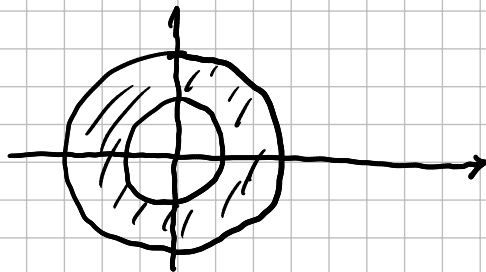
$$\begin{aligned} P(D) &= \iint_D dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \frac{du dv}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} = \\ &= \frac{1}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} \iint_{u^2+v^2 \leq 1} du dv = \frac{\pi}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} \end{aligned}$$

↑
површина → ограничена крива

⑧

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$D: \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$



Кривина ОБЛАСТ - ЧЕСТО ДА НА ОБОД, Е ДА

ОРИСАТИ ПОЛАРИМ КООРДИНАТАМА

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad |\rho| = \rho$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\pi^2 \leq \rho^2 \leq 4\pi^2$$

$$\pi \leq \rho \leq 2\pi$$

$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

↑
НЕЧАМО НИКАКВО ОГРАНИЧЕНИЕ

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{\substack{\pi \leq \rho \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \sin \rho \cdot \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi}^{2\pi} \rho \sin \rho d\rho = 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \rho \sin \rho d\rho$$

= РАДИКАЛЬНА ИНТЕГРАЦИЯ

$$u = g \quad dv = \sin g \, dg$$

$$du = dg \quad v = -\cos g$$

$$= 2\pi \left(-g \cos g \Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos g \, dg \right)$$

$$= 2\pi \left(-2\pi \cos 2\pi + \pi \cos \pi + \sin g \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = -6\pi^2$$

⑨ РАСОНОВ ИНТЕГРАЛ

$$\int e^{-x^2} dx$$

НИДЕ РАДИКАЛ, ОДНОЧНО НЕ МОЋЕ

СЕ ИЗМЕНИТИ ПРЕКО ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

РАДИКАЛНО : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\substack{0 \leq x < +\infty \\ 0 \leq y < +\infty}} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

ПОЛАЖАЈЕ КООРДИНАТЕ

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$0 \leq g \leq +\infty$$

$$I^2 = \iint_{\substack{0 \leq g < +\infty \\ 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}}} g e^{-g^2} dg d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{+\infty} g e^{-g^2} dg = \sqrt{\begin{matrix} t = g^2 \\ dt = 2g dg \end{matrix}} \quad \begin{matrix} g|0|+\infty \\ t|0|+\infty \end{matrix}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{4} (-e^{-t}) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

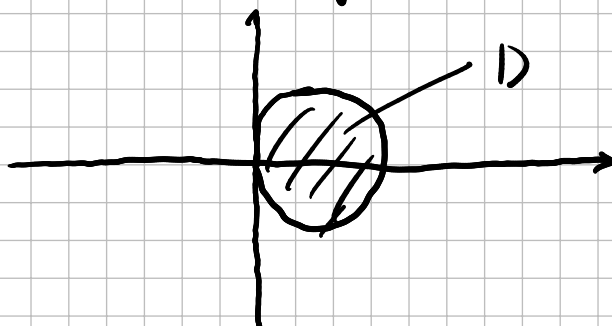
10

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$D: x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$



D је почене и круг-сентар (1,0)

Да ли је боље узети поличајење поларне координате, или почене так.

На је сентар круга координати почета.

Задатак се може урадити на ова два начина

I

начин

$$x-1 = \rho \cos \varphi$$

$$|\rho| = \rho$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} ((1 + \rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2) \rho d\rho d\varphi$$

$$= \iint_{\substack{0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} (1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

$$= \iint_{\substack{0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} (1 + 2\rho^2 \cos \varphi + \rho^3) d\rho d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho + 2\rho^2 \cos \varphi + \rho^3) d\rho d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \rho + \frac{2}{3} \rho^3 \cos \varphi + \frac{1}{4} \rho^4 \right) \Big|_0^1 d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = \\
 &= \left(\frac{3}{4} \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

II

НАЧЕ ИИ

УОБИЋАЈЕ ИЕ ПОКАИИЕ УОБЛИИИТЕ

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$|\vec{r}| = \rho$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

ОИИИЕ ООБИЋАЈИ И УОБЛИИ

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$\rho^2 = 2\rho \cos \varphi$$

$$\Rightarrow 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\cos \varphi \geq 0)$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{\substack{0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}} \rho^3 d\rho d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^3 d\rho d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} (2 \rho^4) \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \dots$$