ANALIZA 3

I SMER

VEŽBE

EKSTREMUMI FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

KVADRATNE FORME

KVADRATNA FORMA JE PRESLIKAVANJE

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

SVAKOJ KVADRATNOJ FORMI MOŽEMO PRIDRUŽITI MATRICU

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ϕ JE POZITIVNO POLUDEFINITNA $\iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \phi(x_1, \dots, x_n) \geq 0$

ϕ JE POZITIVNO DEFINITNA $\iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \phi(x_1, \dots, x_n) > 0$

ϕ JE NEGATIVNO POLUDEFINITNA $\iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \phi(x_1, \dots, x_n) \leq 0$

ϕ JE NEGATIVNO DEFINITNA $\iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \phi(x_1, \dots, x_n) < 0$

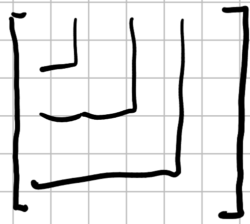
SILVESTEROV KRITERIJUM

1) AKO SU SVI GLAVNI MINORI MATRICE KVADRATNE FORME STROGO POZITIVNI KVADRATNA FORMA JE POZITIVNO DEFINITNA.

To znači da su pozitivne vrednosti determinanti (u $\mathbb{R}^3$):

$$|a_{11}| = a_{11} > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

A = 

$$\det A > 0$$

(u $\mathbb{R}^2$ imamo samo 2 determinante)

2) Ako je $a_{11} < 0$ i svi glavni minori matrice kvadratne forme naizmenično menjaju znak forma je negativno definitna.

$$a_{11} < 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\det A < 0$$

3) u $\mathbb{R}^2$ ako je $\det A < 0$ forma menja znak

Lokalni ekstremumi

$$f : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{A}} \to \mathbb{R}$$

$a \in A$

f definisana u okolini $\mathcal{U}(a)$, $a \in A$.

f u tački a ima lokalni minimum $\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}(a) \quad f(x) \geq f(a)$

f u tački a ima lokalni maksimum $\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}(a) \quad f(x) \leq f(a)$

Teorema:

$$f : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{A}} \to \mathbb{R}$$

A - OTVOREN

f IMA PARCIJALNE IZVODE U $a \in A$

a TAČKA LOKALNOG EKSTREMUMA

$\Rightarrow$ SVI PARCIJALNI IZVODI SU 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0$$

TJ. $\nabla f(a) = 0$

TAČKE U KOJIMA JE $\nabla f = 0$ NAZIVAJU SE STACIONARNE ILI KRITIČNE TAČKE.

$\nabla f(a) = 0$ JE NEOPHODAN, ALI NE I DOVOLJAN USLOV DA TAČKA a BUDE LOKALNI EKSTREMUM. PRIMER:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3$$

$$\nabla f = f'(x) = 3x^2$$

$$\nabla f(0) = f'(0) = 0$$

, A 0 NIJE LOKALNI EKSTREMUM OVE FUNKCIJE.

TEOREMA:

$$f \mapsto d^2 f(a)$$

MATRICA DRUGIH IZVODA

$$d^2 f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) \end{bmatrix}$$

Φ KVADRATNA FORMA PRIDRUŽENA $d^2 f(a)$

1) AKO JE ϕ POZITIVNO DEFINITNA $\Rightarrow$ a JE TAČKA LOKALNOG MINIMUMA

2) AKO JE ϕ NEGATIVNO DEFINITNA $\Rightarrow$ a JE TAČKA LOKALNOG MAKSIMUMA

3) AKO ϕ MENJA ZNAK $\Rightarrow$ a NIJE TAČKA LOKALNOG EKSTREMUMA

① ODREDITI LOKALNE EKSTREMNE VREDNOSTI FUNKCIJE:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = 9xy - x^3 - y^3$$

TRAŽIMO PRVO STACIONARNE TAČKE, ODNOSNO TAČKE U KOJIMA SU PARCIJALNI IZVODI 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9x - 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 9y - 3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 9x - 3y^2 = 0$$

JEDNO REŠENJE SISTEMA JE OČIGLEDNO TAČKA $O(0,0)$

(UKOLIKO JE JEDNA KOORDINATA 0, DRUGA JE 0)

TRAŽIMO OSTALE KRITIČNE TAČKE

$x \neq 0 \quad y \neq 0$

$3y - x^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^2 \qquad y^2 = \frac{1}{9}x^4$

$3x - y^2 = 0$

$3x - \frac{1}{9}x^4 = 0 \quad / 9$

$$27x - x^4 = 0$$

$$x(27 - x^3) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$$

$$y = \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{3}3^2 = 3$$

DOBILI SMO JOŠ JEDNU KRITIČNU TAČKU

$$A(3,3)$$

ODREĐUJEMO DRUGE PARCIJALNE IZVODE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -9x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -9y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 9$$

$$d^2 f = \begin{bmatrix} -9x^2 & 9 \\ 9 & -9y^2 \end{bmatrix}$$

$$= d^2 f(0) = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(d^2 f(0)) = -81 < 0$$

$\Rightarrow$ FORMA MENJA ZNAK

$\Rightarrow$ TAČKA O NIJE LOKALNI EKSTREMUM

$$d^2 f(A) = \begin{bmatrix} -81 & 9 \\ 9 & -81 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -81 < 0$$

$$\Delta_2 = -81 \cdot (-81) - 9 \cdot 9 > 0$$

$\Rightarrow$ TAČKA A JE TAČKA LOKALNOG MAKSIMUMA

(SA Δ ĆEMO OZNAČAVATI GLAVNE MINORE)

(2)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$

$$\nabla f = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 12x = 0 \Rightarrow y = -6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1$$

$$3x^2 + 12(-6x) = 0$$

$$x^2 - 24x = 0$$

$$x(x - 24) = 0$$

$x = 0$ ili $x = 24$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$y = 0$ $y = -144$

ZAKLJUČUJEMO DA POSTOJE 2 STACIONARNE TAČKE

$A = (0, 0, -1)$ i $B = (24, -144, -1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

$$d^2 f = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = d^2 f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 0 \Rightarrow$ NE MOŽE SILVESTEROV KRITERIJUM

ISPITUJEMO DA LI SE ZNAK FORME Φ MENJA U ZAVISNOSTI OD IZBORA t

VEKTORA $h = (h_1, h_2, h_3)$

$$\phi(h) = 24 h_1 h_2 + 2 h_2^2 + 2 h_3^2$$

$h = (0, 0, 1) \Rightarrow \phi(h) = 2 > 0$

$h = (-1, 1, 0) \Rightarrow \phi(h) = -24 + 2 < 0$

$\Rightarrow$ FORMA MENJA ZNAK $\Rightarrow$ A NIJE EKSTREMUM

$$d^2 f(B) = \begin{bmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 144 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 144 - 12 \cdot 12 > 0$$

$\Delta_3 = 2 \cdot \Delta_2 > 0$

$\Rightarrow$ FORMA JE POZITIVNO DEFINITNA $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ B JE LOKALNI MINIMUM

3

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{-x^2 - y^2}$$

PRELASKOM NA POLARNE KOORDINATE

$$f(\rho, \varphi) = \rho^2 e^{-\rho^2}$$

VIDIMO DA NE ZAVISI OD φ, TJ. FUNKCIJA JE KONSTANTNA NA SVAKOM KRUGU SA CENTROM U $(0, 0)$

MOŽEMO POSMATRATI

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(\rho) = \rho^2 e^{-\rho^2}$$

$\uparrow$
$\rho \geq 0$

$f(0) = 0 \qquad \lim_{\rho \to \infty} f(\rho) = 0$

$$f'(\rho) = 2\rho \, e^{-\rho^2} + \rho^2 e^{-\rho^2}(-2\rho)$$

$$f'(\rho) = 2\rho \, e^{-\rho^2}(1-\rho^2)$$

$f'(\rho) = 0 \Rightarrow \rho = 0$ ILI $\rho = 1$

$\rho = 1$ MORA BITI MAKSIMUM $f(1) = e^{-1}$

$\rho = 0$ JE GLOBALNI MINIMUM $f(0) = 0$

MOŽEMO ZAKLJUČITI DA JE SLIKA DOMENA

$$f[\mathbb{R}^2] = [0, e^{-1}]$$

TEOREMA:

NEPREKIDNA FUNKCIJA NA KOMPAKTNOM SKUPU DOSTIŽE MINIMUM I MAKSIMUM.

U $\mathbb{R}^n$ SKUP JE KOMPAKTAN $\Leftrightarrow$ OGRANIČEN I ZATVOREN

(NEĆEMO DETALJNO DOKAZIVATI DA SU SKUPOVI KOMPAKTNI, VODITE RAČUNA DA SU OGRANIČENI I SADRŽE SVE TAČKE NAGOMILAVANJA)

4

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = xy \, e^{-x^2-y^2}$$
$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

D JE KOMPAKTAN SKUP $\Rightarrow$ f DOSTIŽE EKSTREMUME

1) UNUTRAŠNJOST D $\quad x^2 + y^2 < 1$

TRAŽIMO KRITIČNE TAČKE

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \, e^{-x^2-y^2} + xy \, e^{-x^2-y^2}(-2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\, e^{-x^2-y^2}(1-2x^2) \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ili } y=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\, e^{-x^2-y^2}(1-2y^2) \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ili } x=0$$

$$y=0 \Rightarrow x\, e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

DOBILI SMO STACIONARNE TAČKE

$$O = (0,0)$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad A_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$B_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad B_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

NE MORAMO TRAŽITI DRUGE IZVODE, DOVOLJNO JE NA KRAJU UPOREDITI VREDNOSTI FUNKCIJE NA SVIM KANDIDATIMA ZA EKSTREMUME.

$$f(0) = 0$$

$$f(A_1) = f(A_2) = \frac{1}{2} e^{-1}$$

$$f(B_1) = f(B_2) = \frac{1}{2} e^{-1}$$

2) MORAMO ISPITATI I RUB SKUPA D

$$x^2 + y^2 = 4$$

TU KANDIDATI ZA EKSTREMUME NE MORAJU ISPUNJAVATI USLOV $\nabla f = 0$

AKO JE $x^2+y^2 = 4$

I PREĐEMO NA POLARNE KOORDINATE

$$\rho = 2 \qquad x = 2\cos\varphi \qquad y = 2\sin\varphi$$

OPET DOBIJAMO FUNKCIJU JEDNE PROMENLJIVE

$$f(\varphi) = 4\cos\varphi \sin\varphi\, e^{-4} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$f(\varphi) = 2\sin(2\varphi)\, e^{-4}$$

KAKO JE MINIMUM $\sin(2\varphi)$ JEDNAK -1

I A MAKSIMUM JE JEDNAK 1

Zaključujemo da je na rubu maksimum $2e^{-4}$

i a minimum $-2e^{-4}$.

Kako je $2e^{-4} < \frac{1}{2}e^{-1}$

i $-\frac{1}{2}e^{-1} < -2e^{-4}$

Zaključujemo da funkcija dostiže maksimum u tačkama A_1 i A_2, a minimum u tačkama B_1 i B_2.

$$f[D] = \left[-\frac{1}{2}e^{-1}, \frac{1}{2}e^{-1}\right]$$

Uslovni ekstremumi

$$f : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{A}} \to \mathbb{R}$$

i imamo funkcije uslova $g_1, g_2, \dots, g_m$

$$\underset{A}{\overset{\cap}{B}} = \{x \in A \mid g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_m(x) = 0\}$$

Hoćemo da odredimo minimum i maksimum funkcije f na skupu B.

Stacionarne tačke dobijamo iz

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 + \dots + \lambda_m \nabla g_m$$

1

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = xyz$$

uz uslov $x^2+y^2+z^2 = 4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy \qquad \nabla f = (yz, xz, xy)$$

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z \qquad \nabla g = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$yz = \lambda 2x$$
$$xz = \lambda 2y$$
$$xy = \lambda 2z$$

I USLOV $x^2+y^2+z^2=4$

(4 JEDNAČINE SA 4 PROMENLJIVE)

1) $\lambda = 0$

$$\left.\begin{aligned} yz&=0\\ xz&=0\\ xy&=0\end{aligned}\right\} \text{ BAR 2 KOORDINATE SU 0}$$

DOBIJAMO TAČKE

$A_1=(0,0,2)$ $A_2=(0,0,-2)$ $A_3=(0,2,0)$

$A_4=(0,-2,0)$ $A_5=(2,0,0)$ $A_6=(-2,0,0)$

$$f(A_1)=f(A_2)=f(A_3)=f(A_4)=f(A_5)=f(A_6)=0$$

2) $\lambda \neq 0$

AKO BI JEDNA PROMENLJIVA BILA 0 TADA BI BAR JOŠ JEDNA BILA 0 I DOBILI BISMO TAČKE IZ 1), MOŽEMO PRETPOSTAVITI $x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0.$

$$yz = \lambda 2x \quad /\, x$$
$$xz = \lambda 2y \quad /\, y$$
$$xy = \lambda 2z \quad /\, z$$

$$xyz = \lambda 2x^2$$
$$xyz = \lambda 2y^2$$
$$xyz = \lambda 2z^2$$
$$\Rightarrow x^2 = y^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad |x| = |y| = |z|$$

IZ USLOVA $x^2+y^2+z^2=4$

$$3x^2=4 \qquad x=\pm\frac{2}{\sqrt3}$$

$$y=\pm\frac{2}{\sqrt3} \qquad z=\pm\frac{2}{\sqrt3}$$

DOBIJAMO TAČKE:

$$B_1=\left(\frac{2}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3}\right) \qquad B_2=\left(\frac{2}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3}\right)$$

$$B_3=\left(-\frac{2}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3}\right) \qquad B_4=\left(-\frac{2}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3}\right)$$

$$C_1=\left(\frac{2}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3}\right) \qquad C_2=\left(\frac{2}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3}\right)$$

$$C_3=\left(-\frac{2}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3}\right) \qquad C_4=\left(-\frac{2}{\sqrt3},-\frac{2}{\sqrt3},\frac{2}{\sqrt3}\right)$$

$$f(B_1)=f(B_2)=f(B_3)=f(B_4)=\frac{8}{3\sqrt3}$$

$$f(C_1)=f(C_2)=f(C_3)=f(C_4)=\frac{-8}{\sqrt3}$$

KAKO SMO PRONAŠLI SVE STACIONARNE TAČKE ZAKLJUČUJEMO DA JE MAKSIMUM FUNKCIJE f $\frac{8}{\sqrt3}$, A MINIMUM $\frac{-8}{\sqrt3}$

$$f[D]=\left[-\frac{8}{\sqrt3},\frac{8}{\sqrt3}\right]$$

2. NAĆI EKSTREMUME FUNKCIJE

$$f(x,y)=xy$$

NA ELIPSI

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

FUNKCIJA USLOVA JE $g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1$

$$\nabla f=(y,x)$$

$$\nabla g=\left(\frac{x}{4},y\right)$$

$$\nabla f=\lambda\nabla g$$

$$y = \lambda \frac{x}{4}$$
$$x = \lambda y$$

$$\cancel{y} = \lambda \frac{\lambda \cancel{y}}{4}$$

$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ TAČKA NIJE NA ELIPSI

$\Rightarrow \lambda^2 = 4$

$\Rightarrow \lambda = 2$ ILI $\lambda = -2$

$\lambda = 2$

$x = 2y$

IZ USLOVA ELIPSE $\frac{(2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

$\Rightarrow y^2 = 1$

DOBIJAMO TAČKE

$A = (2, 1)$ I $B = (-2, -1)$

$f(A) = f(B) = 2$

$\lambda = -2$

$x = -2y$

DOBIJAMO TAČKE

$C = (-2, 1)$ $D = (2, -1)$

$f(C) = f(D) = -2$

MAKSIMUM JE 2, A MINIMUM -2.

3) NAĆI TAČKU NAJBLIŽU TAČKI $A = (0, 3, 3)$ SA KRUŽNICE ZADATE SA

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 1}_{\text{SFERA}}, \quad \underbrace{x + y + z = 1}_{\text{RAVAN}}$$

(PRESEK SFERE I RAVNI JE KRUŽNICA)

RASTOJANJE PROIZVOLJNE TAČKE (x, y, z) OD TAČKE A JE :

$$d((x,y,z), A) = \sqrt{x^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2}$$

KAKO JE KOREN RASTUĆA FUNKCIJA ČUVA NEJEDNAKOSTI, PA MOŽEMO UMESTO RASTOJANJA MOŽEMO TRAŽITI MINIMUM FUNKCIJE

$$f(x,y,z) = x^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2$$

USLOVI SU DA JE TAČKA NA KRUŽNICI

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\nabla f = (2x, 2(y-3), 2(z-3))$$
$$\nabla g_1 = (2x, 2y, 2z)$$
$$\nabla g_2 = (1, 1, 1)$$

DOBIJAMO SISTEM

$$\left.\begin{aligned} 2x &= \lambda 2x + \mu \\ 2(y-3) &= \lambda 2y + \mu \\ 2(z-3) &= \lambda 2z + \mu \\ x^2 + y + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} 5 \text{ JEDNAČINA} \\ 5 \text{ NEPOZNATIH} \end{array}$$

ODUZMEMO TREĆU JEDNAČINU OD DRUGE

$$2(y-z) = \lambda 2(y-z)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad \text{ILI} \quad y = z$$

1) $\lambda = 1$

$$2x = 2x + \mu \quad \Rightarrow \mu = 0$$
$$2(y-3) = 2y + \mu \quad \Rightarrow \mu = -6 \quad \lightning$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \neq 1$$

2) $y = z$

ZAMENOM U USLOVE:

$$x^2 + 2y^2 = 1$$
$$x + 2y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2y$$

$$(1-2y)^2 + 2y^2 = 1$$
$$\cancel{1} - 4y + 4y^2 + 2y^2 = \cancel{1}$$
$$6y^2 - 4y = 1$$
$$2y(3y-2) = 1$$

$y = 0$ ILI $y = \frac{2}{3}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$z = 0 \quad x = 1$ $\qquad z = \frac{2}{3} \quad x = -\frac{1}{3}$

DOBILI SMO DVE STACIONARNE TAČKE:

$C = (1, 0, 0)$ I $B = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$f(C) = 1^2 + (0-3)^2 + (0-3)^2 = 19$$
$$f(B) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 3\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{49}{9} + \frac{49}{9} = 11$$

$$f(B) < f(C)$$

SLEDI DA JE TAČKA B NAJBLIŽA OD SVIH TAČAKA SA KRUGA TAČKI A I UDALJENA JE $\sqrt{11}$ OD TAČKE A.

DOMAĆI!

1. ODREDITI MINIMUM I MAKSIMUM FUNKCIJE

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

UZ USLOVE

$$x^2 + y^2 \leq 1 \qquad y \geq x^2$$

(2) NAĆI MINIMUM I MAKSIMUM FUNKCIJE

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2x + 4y$$

NA SFERI

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

(3) NAĆI NAJBLIŽE I NAJDALJE TAČKE OD KOORDINATNOG POČETKA KOJE SE NALAZE NA RAVNI $x + y + z = 0$ I PRIPADAJU CILINDRU $x^2 + y^2 = 1$.

(4) DAT JE KVADAR POVRŠINE $6a^2$. KOLIKA JE MAKSIMALNA ZAPREMINA KVADRA?