ANALIZA 3

I SMER

VEŽBE

DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

PODSEĆANJE:

$f : I \to \mathbb{R}$ I - OTVOREN INTERVAL

IZVOD FUNKCIJE f U TAČKI $x_0 \in I$ JE

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

AKO OVAJ LIMES POSTOJI.

f JE DIFERENCIJABILNA U x_0 AKO POSTOJI $L \in \mathbb{R}$ TDJ:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + o(h)$$

DOKAZANO JE DA JE $L = f'(x_0)$

HOĆEMO OVE POJMOVE DA UOPŠTIMO NA

$f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^3\ (\mathbb{R}^2)$ - OTVOREN

PARCIJALNI IZVODI I IZVOD U PRAVCU

$$f : \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{A}} \to \mathbb{R}$$

PARCIJALNI IZVODI FUNKCIJE f SU:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'_z = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}$$

OVDE „POSMATRAMO" PROMENU VREDNOSTI FUNKCIJE KADA SE JEDNA PROMENLJIVA MENJA, A OSTALE SMATRAMO KONSTANTAMA.

MOŽEMO DEFINISATI I IZVOD U PRAVCU PROIZVOLJNOG NENULA VEKTORA $l = (l_1, l_2, l_3)$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f'_l = \lim_{h \to 0} \frac{f((x,y,z) + h\, l) - f(x,y,z)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h l_1, y + h l_2, z + h l_3) - f(x, y, z)}{h}$$

1.

$$f(x, y) = \cos(xy^2) - x^3 y^4 + \operatorname{arctan} \frac{x}{y}$$

ODREDITI PARCIJALNE IZVODE FUNKCIJE f.

PRIMETIMO DA JE DOMEN FUNKCIJE ODREĐEN USLOVOM $y \neq 0$.

PARCIJALNE IZVODE TRAŽIMO KAO IZVODE FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE, A DRUGU SMATRAMO KONSTANTOM.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(xy^2)\cdot y^2 - 3x^2y^4 + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}$$

$$= -y^2\sin(xy^2) - 3x^2y^4 + \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(xy^2)\,2xy - x^2 4y^3 + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\;\frac{-x}{y^2}$$

$$= -2xy\sin(xy^2) - 4x^2y^3 - \frac{x}{x^2+y^2}$$

(2) $f(x,y,z) = e^{xz} + yx$

ODREDITI IZVOD U PRAVCU VEKTORA

$l = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

KOLIKA JE VREDNOST TOG IZVODA U TAČKI $(1,1,1)$?

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+\frac{2}{3}h)(z+\frac{2}{3}h)} + (y-\frac{1}{3}h)(x+\frac{2}{3}h) - e^{xz} - yx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{xz+\frac{2}{3}h(x+z)+\frac{4}{9}h^2} - e^{xz} + \cancel{xy} + \frac{2}{3}hy - \frac{1}{3}hx - \frac{2}{9}h^2 - \cancel{yx}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(e^{xz}\,\frac{e^{\frac{2}{3}h(x+z)+\frac{4}{9}h^2}-1}{h} + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}h\right)$$

[ZNAMO DA JE $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1$]

$$= \lim_{h\to 0}\left(e^{xz}\,\underbrace{\frac{e^{\frac{2}{3}h(x+z)+\frac{4}{9}h^2}-1}{\frac{2}{3}h(x+z)+\frac{4}{9}h^2}}_{\to 1}\;\frac{\frac{2}{3}\cancel{h}(x+z)+\frac{4}{9}h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}h\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = e^{xz}\,\frac{2}{3}(x+z) + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(1,1,1) = e^{1\cdot 1}\,\frac{2}{3}(1+1) + \frac{2}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\,1 = \frac{4}{3}e + \frac{1}{3}$$

(3) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ZA $(x,y) \neq (0,0)$ RAČUNAMO PARCIJALNE IZVODE

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}$$

IZ SIMETRIJE ZAKLJUČUJEMO

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

U TAČKI $(0,0)$ JE FUNKCIJA DRUGAČIJE DEFINISANA I MORAMO RAČUNATI PO DEFINICIJI

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

DOKAZALI SMO RANIJE DA OVA FUNKCIJA NIJE NEPREKIDNA U TAČKI $(0,0)$.

DAKLE POSTOJANJE PARCIJALNIH IZVODA NE GARANTUJE NEPREKIDNOST.

DIFERENCIJABILNOST

$f: A \to \mathbb{R}$ A - OTVOREN

$A \subseteq \mathbb{R}^2$

(ANALOGNO JE U $\mathbb{R}^3$)

f JE DIFERENCIJABILNA U TAČKI (x_0, y_0) AKO POSTOJI LINEARNO PRESLIKAVANJE L TDJ.

$$f((x_0, y_0) + h) = f(x_0, y_0) + L\, h + o(h), \quad h \to 0$$

ILI AKO JE $h = (h_1, h_2)$ $L = (L_1, L_2)$

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + L_1 h_1 + L_2 h_2 + o(h), \quad h \to 0$$

DOKAZUJE SE DA JE:

$$L_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad i \quad L_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

DA BI PROVERILI DA LI JE FUNKCIJA DIFERENCIJABILNA U TAČKI (x_0, y_0) PROVERAVAMO DA LI JE:

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

JEDNAK NULI. AKO JE JEDNAK NULI FUNKCIJA JE DIFERENCIJABILNA, A AKO UZIMA DRUGU VREDNOST ILI NE POSTOJI NIJE DIFERENCIJABILNA.

MOŽEMO KORISTITI ZNANJE OD RANIJE KOJE FUNKCIJE SU DIFERENCIJABILNE.

AKO JE FUNKCIJA DIFERENCIJABILNA ONA MORA BITI I NEPREKIDNA.

AKO FUNKCIJA IMA PARCIJALNE IZVODE I ONI SU NEPREKIDNI FUNKCIJA JE DIFERENCIJABILNA. (NIJE DOVOLJNO SAMO POSTOJANJE PARCIJALNIH IZVODA - VIDETI PRETHODNI ZADATAK).

④

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

VAN TAČKE $(0,0)$ FUNKCIJA JE DIFERENCIJABILNA KAO KOMPOZICIJA DIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA. TO KRAĆE ZAPISUJEMO

$$f \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right)$$

ZA TAČKU $(0,0)$ NE ZNAMO DA LI JE DIFERENCIJABILNA JER $\sqrt[3]{\ }$ NIJE DIFERENCIJABILAN U NULI. PROVERAVAMO PO DEFINICIJI

PRVO TRAŽIMO PARCIJALNE IZVODE

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3 - 0} - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$$

TREBA PROVERITI SADA DA LI JE FUNKCIJA DIFERENCIJABILNA PO DEFINICIJI

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{\sqrt[3]{h_1^3 + h_2^2} - 0 - h_1 - h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

OVAJ LIMES NIJE NULA

UZMIMO $h_1 = h_2 = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^3}} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\cancel{n}}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{n}}} \neq 0$$

ZAKLJUČUJEMO DA FUNKCIJA NIJE DIFERENCIJABILNA U TAČKI $(0,0)$

(DOVOLJNO JE NAĆI JEDAN NIZ NA KOME FUNKCIJA NE TEŽI 0)

5

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ KAO KOMPOZICIJA NEPREKIDNIH FUNKCIJA (SA C OZNAČAVAMO NEPREKIDNE FUNKCIJE).

PROVERAVAMO NEPREKIDNOST U TAČKI $(0,0)$. (AKO NIJE NEPREKIDNA FUNKCIJA NIJE NI DIFERENCIJABILNA).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \underbrace{\rho^2}_{\to 0} \overbrace{\sin\frac{1}{\rho^2}}^{\leq 1} = 0 = f(0,0)$$

$$\Rightarrow f \in C(\mathbb{R}^2)$$

$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ KAO KOMPOZICIJA DIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA.

PROVERAVAMO DIFERENCIJABILNOST U TAČKI $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{(h^2+0^2)\sin\frac{1}{h^2+0^2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{2}} \sin\frac{1}{\rho^2}}{\cancel{\rho}} = 0 \qquad \begin{bmatrix} h_1 = \rho\cos\varphi \\ h_2 = \rho\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$$

Domaći:

Pokazati da parcijalni izvodi nisu neprekidni u tački $(0,0)$ iz čega sledi zaključak da je neprekidnost parcijalnih izvoda dovoljan, ali ne i neophodan uslov diferencijabilnosti.

Domaći:

Ispitati neprekidnost i diferencija-bilnost funkcije:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} + x\sin\frac{y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 5, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

- Voditi računa da se diferencija-bilnost mora ispitati i u tački $(3,4)$

- Zadatak se može olakšati ta-

KO ŠTO SE f MOŽE PREDSTAVITI KAO ZBIR DVE FUNKCIJE I SVAKA ZASEBNO ISPITIVATI I ZAKLJUČIVATI ŠTA SE ZNA ZA ZBIR NEPREKIDNIH I DIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA.

$$f : \underset{\mathbb{R}^3}{\underset{\cap}{A}} \to \mathbb{R}$$

GRADIJENT FUNKCIJE f U TAČKI $a \in A$ JE

$$\operatorname{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial f}{\partial z}(a)\right)$$

OPERATOR NABLA

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{grad} f = \nabla f$$

<u>TVRĐENJE:</u>

AKO JE f DIFERENCIJABILNA U TAČKI a TADA POSTOJI IZVOD U PRAVCU PROIZVOLJNOG VEKTORA $\vec{l}$ I VAŽI:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \operatorname{grad} f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SKALARNI PROIZVOD}}}{\cdot} \vec{l}$$

⑥

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z) = x^2 y + \cos(xz) + e^{xz}$$

ODREDITI IZVOD U PRAVCU PROIZVOLJNOG VEKTORA $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ U TAČKI $A = (1, 1, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - z\sin(xz) + z\,e^{xz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -x\sin xz + x\,e^{xz}$$

$$\nabla f = \left(2xy - z\sin(xz) + z\,e^{xz},\ x^2,\ -x\sin xz + x\,e^{xz}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \nabla f \cdot \vec{l}$$

(f JE DIFERENCIJABILNA FUNKCIJA)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left(2xy - z\sin(xz) + z\,e^{xz},\ x^2,\ -x\sin xz + x\,e^{xz}\right)\cdot(l_1, l_2, l_3)$$

$$= (2xy - z\sin(xz) + z\,e^{xz})\,l_1 + x_2\,l_2 + (-x\sin xz + x\,e^{xz})\,l_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(A) = 2\,l_1 + l_2 + l_3$$

7

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) ISPITATI NEPREKIDNOST FUNKCIJE f.

b) ISPITATI DIFERENCIJABILNOST FUNKCIJE f.

v) ODREDITI PARCIJALNE IZVODE FUNKCIJE f I ISPITATI NJIHOVU NEPREKIDNOST.

g) ODREDITI IZVOD FUNKCIJE f U PRAVCU PROIZVOLJNOG VEKTORA U PROIZVOLJNOJ TAČKI.

a) $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ KAO KOMPOZICIJA NEPREKIDNIH FUNKCIJA.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y^2}{x^4+y^4} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^3 \cos^3\varphi \; \rho^2 \sin^2\varphi}{\rho^4 \cos^4\varphi + \rho^4 \sin^4\varphi} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \underbrace{\rho}_{\to 0} \underbrace{\left(\frac{\cos^3\varphi \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}\right)}_{\text{OGRANIČENO}} = 0 = f(0,0)$$

$\sin^4\varphi + \cos^4\varphi \neq 0 \quad \forall \varphi$

$$\Rightarrow f \in C(\mathbb{R}^2)$$

b) $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ KAO KOMPOZICIJA DIFERENCIJABILNIH FUNKCIJA.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3 0^2}{h^4 + 0^4} - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{0^2 h^3}{0^4 + h^4} - 0}{0} = 0$$

$$f(x,y) \stackrel{?}{=} \overset{=0}{f(0,0)} + \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\, x + \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}\, y + o(\|(x,y)\|)$$

$$f(x,y) \stackrel{?}{=} o(\|(x,y)\|)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0, \; n \to \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\frac{1}{n^3}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{2}{n^4}}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{n}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

$$\Rightarrow f \notin \mathcal{D}((0,0))$$

v) $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y^2(x^4+y^4) - x^3y^2 4x^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{3x^2y^6 - x^6y^2}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^3y(x^4+y^4) - x^3y^2 4y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2x^7y - 2x^3y^5}{(x^4+y^4)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ KAO KOMPOZICIJA NEPREKIDNIH FUNKCIJA.

PARCIJALNI IZVODI NISU NEPREKIDNI U TAČKI $(0,0)$, JER BI U SUPROTNOM FUNKCIJA BILA DIFERENCIJABILNA U $(0,0)$.

g) $\vec{l} = (l_1, l_2)$

PROIZVOLJAN NENULA VEKTOR

$(x,y) \neq (0,0)$

$\Rightarrow f \in \mathcal{D}((x,y))$ PA VAŽI

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \nabla f \cdot \vec{l}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{3x^2y^6 - x^6y^2}{(x^4+y^4)^2} l_1 + \frac{2x^7y - 2x^3y^5}{(x^4+y^4)^2} l_2$$

$(x,y) = (0,0)$

$f \notin \mathcal{D}((0,0))$ PA MORAMO IZVOD U PRAVCU RAČUNATI PO DEFINICIJI.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + tl) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\cancel{t^3} l_1^3 \cancel{t^2} l_2^2}{\cancel{t^4} l_1^4 + \cancel{t^4} l_2^4} - 0}{\cancel{t}} = \frac{l_1^3 l_2^2}{l_1^4 + l_2^4}$$