ANALIZA 3

I SMER

VEŽBE

LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA VIŠEG REDA

Proučavamo jednačinu oblika

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

Ova jednačina je naziva linearna jer je preslikavanje

$$L : y \longmapsto y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0$$

linearno preslikavanje.

Kraće možemo zapisati

$$L(y) = b(x)$$

Ukoliko je $b(x)=0$ jednačina se naziva homogena.

Skup rešenja homogene jednačine je n dimenzioni vektorski prostor.

Skup od n rešenja $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ čini bazu ovog prostora ako i samo ako je

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

W – Vronskijan

$\{y_1, \dots, y_n\}$ – fundamentalni skup rešenja

Opšte rešenje $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$, $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$

HOMOGENA LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}$$

POSTAVIMO KARAKTERISTIČNU JEDNAČINU:

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

JEDNAČINA n-OG REDA I DOBIJEMO REŠENJA

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

RAZLIKUJEMO SLUČAJEVE:

1) SVA REŠENJA REALNA I RAZLIČITA

REŠENJE JE:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \quad , \quad C_i \in \mathbb{R}$$

2) REŠENJA SU RAZLIČITA, ALI POSTOJE KOMPLEKSNO KONJUGOVANA REŠENJA

AKO JE $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ NJEMU MOŽEMO DODELITI DVA REŠENJA KOJA SU REALNI I IMAGINARNI DEO $e^{\lambda_k x}$

$$e^{\lambda_k x} = e^{(\alpha_k + i\beta_k)x} = e^{\alpha_k x + i\beta_k x}$$

$$= e^{\alpha_k} (\cos \beta_k x + i \sin \beta_k x)$$

$$= \underbrace{e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x}_{y_{k_1}} + i \underbrace{e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x}_{y_{k_2}}$$

3) JEDNAČINA IMA VIŠESTRUKA REŠENJA

AKO JE λ_k REŠENJE VIŠESTRUKOST i NJEMU MOŽEMO DODELITI i REŠENJA

$$y_{k_1} = e^{\lambda_k x} \quad y_{k_2} = x e^{\lambda_k x} \quad \dots \quad y_{k_i} = x^{i-1} e^{\lambda_k x}$$

(1) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 2$$

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$$

(2) $y'' + k^2 y = 0 \qquad k \neq 0$

$$\lambda^2 + k = 0$$

$$\lambda_1 = ki \qquad \lambda_2 = -ki$$

$$y(x) = \cos kx + i \sin kx$$

(3) $y'' + 4y' + 13y = 0$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} \begin{array}{l} \nearrow -2+3i \\ \searrow -2-3i \end{array}$$

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \cos 3x + c_2 e^{-2x} \sin 3x$$

(4) $y'' + 4y' - 13y = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 13}}{2} = -2 \pm \sqrt{17}$$

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{17} \qquad \lambda_2 = -2 - \sqrt{17}$$

$$y(x) = c_1 e^{(-2+\sqrt{17})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{17})x}$$

(5) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda-1)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

6) $$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2+1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = i \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = -i$$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$$

UKOLIKO IMAMO KOŠIJEV PROBLEM

$L(y) = 0 \qquad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \qquad y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}$

PRVO REŠIMO HOMOGEN SISTEM, A ZATIM KONSTANTE $C_1, \ldots, C_n$ ODREDIMO IZ POČETNIH USLOVA.

7) $$y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0 \qquad y(0)=1 \quad y'(0)=-2 \quad y''(0)=-4$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 22\lambda + 56 = 0$$

$$(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-7) = 0$$

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{7x}$$

DIFERENCIRAMO I UVRŠTAVAMO USLOVE DA BISMO ODREDILI C_1, C_2 i C_3.

$$y'(x) = -4C_1 e^{-4x} + 2C_2 e^{2x} + 7C_3 e^{7x}$$

$$y''(x) = 16C_1 e^{-4x} + 4C_2 e^{2x} + 49C_3 e^{7x}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 1 \qquad /4 \qquad /-16 \\ y'(0) &= -4C_1 + 2C_2 + 7C_3 = -2 \\ y''(0) &= 16C_1 + 4C_2 + 49C_3 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ 6C_2 + 11C_3 &= 2 \quad /\cdot 2 \\ -12C_2 + 33C_3 &= -20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 1 \\ 6C_2 + 11C_3 &= 20 \\ 55C_3 &= -16 \end{aligned}$$

$$C_3 = \frac{-16}{55} \qquad C_2 = \frac{13}{15} \qquad C_1 = \frac{14}{33}$$

$$y(x) = \frac{14}{33} e^{-4x} + \frac{13}{15} e^{2x} - \frac{16}{55} e^{7x}$$

NEHOMOGENA LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

$$L(y) = b(x)$$

Odredimo prvo opšte rešenje homogene jednačine y_H.

Odredimo zatim jedno proizvoljno rešenje nehomogene jednačine y_p.

Rešenje je:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

Često je nehomogeni deo oblika

$$b(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$$

gde su P_m i Q_m polinomi stepena x.

Tada partikularno rešenje tražimo u obliku:

$$y_p = x^k e^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x\right)$$

gde je:

k višestrukost $\alpha + i\beta$ kao rešenja karakteristične jednačine.

R_m, S_m polinomi stepena m čije koeficijente određujemo uvrštavanjem u jednačinu.

Napomena:

Ukoliko nehomogeni deo ima više delova

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_i(x)$$

nađemo partikularno rešenje jednačina

$$L(x) = b_1(x) \rightsquigarrow y_{p_1}(x)$$

$$\vdots$$

$$L(x) = b_i(x) \rightsquigarrow y_{p_i}(x)$$

A rešenje je

$$y(x) = y_H(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \dots + y_{p_i}(x)$$

8.
$$y'' - 4y' + 3y = x e^x + \sin^2 x$$

Ovde na prvi pogled nehomogeni deo nije odgovarajućeg oblika, međutim

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$y'' - 4y' + 3y = x e^x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Imamo tri nehomogena dela

$$x e^x, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}\cos 2x$$

koja su sva odgovarajućeg oblika

- Homogena jednačina

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$$

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

– PRVI NEHOMOGENI DEO

$$y'' - 4y' + 3y = x e^{x}$$

$b_1(x) = x\ e^{x}$ JESTE OD GOVARAJUĆEG OBLIKA $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_m(x) = x$, $m=1$

(Q_m NIJE BITAN JER JE $\sin \beta x = \sin 0 = 0$)

$\alpha + i\beta = 1$ JESTE REŠENJE KARAKTERISTIČNE JEDNAČINE VIŠESTRUKOSTI 1

$$y_{p_1}(x) = x(Ax+B)\ e^{x}$$
$$y_{p_1}(x) = (Ax^2 + Bx)\ e^{x}$$

KOEFICIJENTE A I B DOBIJAMO DIFERENCIRANJEM I UVRŠTAVANJEM U JEDNAČINU

$$y_{p_1}'(x) = (2Ax+B)\ e^{x} + (Ax^2+Bx)\ e^{x}$$
$$y_{p_1}'(x) = (Ax^2 + (2A+B)x + B)\ e^{x}$$

$$y_{p_1}''(x) = (2Ax + 2A+B)\ e^{x} + (Ax^2+(2A+B)x+B)\ e^{x}$$
$$y_{p_1}''(x) = (Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B)\ e^{x}$$

$$y_{p_1}'' - 4y_{p_1}' + 3y_{p_1} = x e^{x}$$

$$(Ax^2+(4A+B)x + 2A+2B)\cancel{e^{x}} - 4(Ax^2 + (2A+B)x + B)\ \cancel{e^{x}}$$
$$+ 3(Ax^2 + Bx)\ \cancel{e^{x}} = x\cancel{e^{x}}$$

$$-4Ax + 2A - 2B = 0$$

OVO VAŽI ZA SVAKO x, PA JE

$$A = -\frac{1}{4} \qquad B = -\frac{1}{4}$$

$$y_{p_1} = (-\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x)\ e^{x}$$

– DRUGI PARTIKULARNI DEO

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{1}{2}$$

OVDE JE $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_m(x) = \frac{1}{2}$, $m=0$

$\alpha + i\beta = 0$ NIJE REŠENJE KARAKTERISTIČNE JEDNAČINE, PA JE DRUGO PA-

RTIKULARNO REŠENJE POLINOM NULTOG STEPENA, ODNOSNO KONSTANTA.

$$y_{p_2} = C \qquad y_{p_2}' = 0 \qquad y_{p_2}'' = 0$$

UVRŠTAVANJEM U JEDNAČINU

$$3C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{6}$$

$$y_{p_2}(x) = \frac{1}{6}$$

- TREĆI PARTIKULARNI DEO

$$y'' - 4y' + 3y = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

OVDE JE

$$\alpha = 0, \ \beta = 2, \ Q_m(x) = -\frac{1}{2}, \ m = 1$$

$0 + i\beta = -2i$ NIJE REŠENJE KARAKTERISTIČNE JEDNAČINE

$$y_{p_3}(x) = D\cos 2x + E\sin 2x$$

$$y_{p_3}'(x) = -2D\sin 2x + 2E\cos 2x$$

$$y_{p_3}''(x) = -4D\cos 2x - 4E\sin 2x$$

$$-4D\cos 2x - 4E\sin 2x - 4(-2D\sin 2x + 2E\cos 2x) + 3D\cos 2x + 3E\sin 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$(-D - 8E)\cos 2x + (-E + 8D)\sin 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$x = 0 \Rightarrow$ $\quad -D - 8E = -\frac{1}{2} \quad / 8$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\quad 8D - E = 0$

$$-65E = -4$$

$$E = \frac{4}{65} \qquad D = \frac{1}{130}$$

$$y_{p_2} = \frac{1}{130}\cos 2x + \frac{4}{65}\sin 2x$$

REŠENJE CELE JEDNAČINE JE

$$y(x) = y_H(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x)$$

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} + \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\right)e^x + \frac{1}{6} + \frac{1}{130}\cos 2x + \frac{4}{65}\sin 2x}$$

DO PARTIKULARNOG REŠENJA MOŽEMO DOĆI I METODOM VARIJACIJE KONSTANTI. NEKA JE REŠENJE HOMOGENOG DELA:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

POSMATRAMO SAD KONSTANTE C_i KAO FUNKCIJE OD x, TJ. $C_i = C_i(x)$ I POSTAVLJAMO SISTEM:

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n &= 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} &= b(x) \end{aligned}$$

REŠIMO SISTEM PO NEPOZNATIM C_i' I ZATIM INTEGRALJENJEM DOBIJAMO C_i.

9 $$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \frac{e^{4x}}{1+e^{2x}}$$

- HOMOGENI DEO

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$
$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

POGAĐAMO DA JE $\lambda_1 = 1$, DELIMO POLINOME I DOBIJAMO REŠENJA

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$
$$y_H = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

- PARTIKULARNI DEO

PARTIKULARNI DEO NIJE OBLIKA DA MOŽEMO POGODITI REŠENJE, PA MORAMO RADITI METODU VARIJACIJE KONSTANTI

$$C_1' e^{x} + C_2' e^{2x} + C_3' e^{3x} = 0$$

$$C_1' e^{x} + 2C_2' e^{2x} + 3C_3' e^{3x} = 0$$

$$C_1' e^{x} + 4C_2' e^{2x} + 9C_3' e^{3x} = \frac{e^{4x}}{1+e^{2x}}$$

REŠAVANJEM SISTEMA DOBIJAMO:

$$C_1'(x) = \frac{e^{3x}}{2(1+e^{2x})} \qquad C_1(x) = \int \frac{e^{3x}\,dx}{2(1+e^{2x})} = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{x} + A$$

$$C_2'(x) = \frac{-e^{2x}}{1+e^{2x}} \qquad C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}\,dx}{1+e^{2x}} = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + B$$

$$C_3'(x) = \frac{e^{x}}{2(1+e^{2x})} \qquad C_3(x) = \int \frac{e^{x}\,dx}{2(1+e^{2x})} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{x} + C$$

OPŠTE REŠENJE JEDNAČINE JE

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{1}{2}e^{x} - \operatorname{arctg} e^{x} + A\right)e^{x} + \left(B - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}\arctan e^{x} + C\right)e^{3x}}$$

OJLEROVA JEDNAČINA

OJLEROVA JEDNAČINA JE JEDNAČINA OBLIKA

$$\alpha_n (ax+b)^n y^{(n)} + \alpha_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(ax+b)y' + \alpha_0 y = f(x)$$

OVA JEDNAČINA SE SMENOM

$$ax + b = e^{t}$$

SVODI NA LINEARNU JEDNAČINU SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.

(10)

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2 \qquad , x > 0$$

SMENA : $x = e^{t}$ $\qquad dx = e^{t}\,dt$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = e^{-t} y'_t$$

$$y''_x = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{d}{dx}(e^{-t}y'_t) = \frac{d}{dt}(e^{-t}y'_t)\,\frac{dt}{dx}$$

$$= (-e^{-t}y'_t + e^{-t}y''_t)\,e^{-t} = e^{-2t}(y''_t - y'_t)$$

JEDNAČINA POSTAJE :

$$\underbrace{e^{2t}e^{-2t}}_{=1}(y''_t - y'_t) - 3\underbrace{e^{t}e^{-t}}_{=1}y'_t + 5y = 3e^{2t}$$

$$y''_t - 4y'_t + 5y = 3e^{2t}$$

- HOMOGENA JEDNAČINA

$$y''_t - 4y'_t + 5y = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$$

$$y_H = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t$$

- PARTIKULARNO REŠENJE

MOŽEMO PRETPOSTAVITI DA JE OBLIKA

$$y_p = A e^{2t}$$

$$y_p' = 2A e^{2t}$$

$$y_p'' = 4A e^{2t}$$

$$4Ae^{2t} - 4\cdot 2Ae^{2t} + 5Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$A = 3$$

$$y_p = 3e^{2t}$$

REŠENJE JE:

$$y = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t + 3e^{2t}$$

MORAMO VRATITI SMENU $t = \ln x$

$$y = C_1 e^{2\ln x}\cos(\ln x) + C_2 e^{2\ln x}\sin(\ln x) + 3e^{2\ln x}$$

$$\boxed{y(x) = C_1 x^2\cos(\ln x) + C_2 x^2 \sin(\ln x) + 3x^2}$$

JEDNAČINA SE MOGLA REŠAVATI I U OBLASTI $x < 0$ SMENOM $x = -e^t$

DOMAĆI:

1. $y''' + 9y' = e^x \sin 3x + \cos 3x + 3x$

2. $(2x+3)^{''} y''' + 3(2x+3) y' - 6y = 0$

3. $y'' - 4y' - 12y = x e^{4x}$ $\quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$

   $y'' - 4y' - 12y = e^{6x}$

4. $y'' - 8y' + 17y = 0$ $\quad y(0) = -4 \quad y'(0) = -1$