Analiza 3

I smer

Vežbe

Diferencijalne jednačine prvog reda

$$y : \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap\!\!\mid}{A}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$y = y(x)$ funkcija koja je diferencija-bilna dovoljno puta da sve bude definisano.

Diferencijalna jednačina je jednačina u kojoj se pojavljuju izvodi funkcije y.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Red diferencijalne jednačine je red najveć-ćeg izvoda koji se pojavljuje u njoj.

Diferencijalna jednačina prvog reda je

$$F(x, y, y') = 0$$

Rešenje diferencijalne jednačine je familija funkcija koja zadovoljava jednačinu.

Ukoliko tražimo rešenje koje zadovo-ljava uslov

$$F(x, y, y') = 0 \qquad y_0 = y(x_0) \quad , x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

to se naziva Košijev ili početni problem.

Diferencijalne jednačine se često ne mogu rešiti. Uradićemo nekoliko tipova jednačina koje se mogu konkretno rešiti.

1° JEDNAČINA KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE

$$y' = f(x)\, g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx \quad / \int$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$$

① $$x + xy + y'(y + xy) = 0$$

$$x(1+y) + y' y (1+x) = 0$$

$$y' y (1+x) = -x(1+y)$$

$$\frac{dy}{dx} y (1+x) = -x(1+y)$$

$$\int \frac{y\, dy}{1+y} = -\int \frac{x\, dx}{1+x}$$

$$\int \frac{x\, dx}{1+x} = \int \frac{x+1-1}{1+x}\, dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x}$$

$$= x - \log|1+x| + A \qquad A \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad y - \log|1+y| = -x + \log|1+x| + A$$

Nismo konkretno izrazili y, ali smo našli vezu y i x u kojoj se ne pojavljuje y'.

Primetimo da je rešenje jednačine i funkcija $y = -1$ koja se ne dobija ni za jedan izbor konstante A. Do ovoga je došlo jer smo delili sa $y+1$ što je 0 u ovom slučaju. Ovakvo rešenje koje se ne dobija iz opšteg se naziva singularno.

② $e^y(y'+1)=1 \qquad y(0)=\ln 2$

U JEDNAČINI SE NE POJAVLJUJE y, ALI TO NIJE BITNO. (MOGUĆE JE DA SE NE POJAVI NI y)

$$e^y(y'+1)=1 \quad / \, e^{-y}$$
$$y'+1=e^{-y}$$
$$\frac{dy}{dx}=e^{-y}-1 \quad / \, \frac{1}{e^{-y}-1}$$
$$\frac{dy}{e^{-y}-1}=dx$$

$$\int\frac{dy}{e^{-y}-1}=\int\frac{e^y\,dy}{1-e^y}=\left[\begin{array}{l} t=e^y \\ dt=e^y\,dy \end{array}\right]$$
$$=\int\frac{dt}{1-t}=-\ln|1-t|+A=-\ln|1-e^y|+A$$

$$-\ln|1-e^y|=x+c$$
$$\ln|1-e^y|=c-x \quad / \, e$$
$$|1-e^y|=e^{c-x}$$
$$y(0)=\ln 2$$
$$\Rightarrow \quad |1-e^{\ln 2}|=e^c$$
$$|1-2|=e^c$$
$$1=e^c \quad\Rightarrow\quad c=0$$
$$\boxed{|1-e^y|=e^{-x}}$$

2° LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA

$$y'+P(x)\,y=Q(x)$$

P, Q - GLATKE FUNKCIJE (NE MORAJU BITI LINEARNE)

REŠENJE JE:
$$y(x)=e^{-\int P(x)\,dx}\left(C+\int e^{\int P(x)\,dx}\,Q(x)\,dx\right)$$

$\int P(x)\,dx$ PODRAZUMEVA JEDNU PROIZVOLJNU PRIMITIVNU FUNKCIJU OVDE

(3)

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \qquad Q(x) = \sin x$$

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$y(x) = e^{-\ln|x|}\left(C + \int e^{\ln|x|}\sin x\,dx\right)$$

$$= e^{\ln\frac{1}{|x|}}\left(C + \int |x| \sin x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{|x|}\left(C + \int |x|\sin x\,dx\right)$$

$$|x| = \operatorname{sgn} x \cdot x$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

SGNx JE KONSTANTA NA INTERVALIMA PA MOŽE „IZAĆI" ISPRED INTEGRALA.

$$\int |x|\sin x\,dx = \operatorname{sgn} x \int x \sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x\,dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right|$$

$$= \operatorname{sgn} x\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right) =$$

$$= \operatorname{sgn} x\,(\sin x - x\cos x)$$

$$y(x) = \boxed{\frac{1}{|x|}\Big(C + \operatorname{sgn} x\,(\sin x - x\cos x)\Big)}$$

(4)

$$y' + y\operatorname{ctg} x = 5e^{\cos x} \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$$

$$P(x) = \operatorname{ctg} x \qquad Q(x) = 5e^{\cos x}$$

$$\int P(x)\,dx = \int ctg\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$$

$$= \ln|\sin x|$$

$$y(x) = e^{-\ln|\sin x|}\left(C + \int e^{\ln|\sin x|}\, 5\, e^{\cos x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{|\sin x|}\left(C + 5\int |\sin x|\, e^{\cos x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{|\sin x|}\left(C - 5\,\mathrm{sgn}(\sin x)\, e^{\cos x}\right)$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$-4 = C - 5 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{|\sin x|}\left(1 - 5\,\mathrm{sgn}(\sin x)\, e^{\cos x}\right)}$$

3° BERNULIJEVA JEDNAČINA

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

ZA $\alpha = 0$ I $\alpha = 1$ DOBIJAJU SE JEDNAČINE KOJE SMO VEĆ URADILI (1° I 2°)

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha} \quad / \, y^{-\alpha}$$

$$y^{-\alpha}y' + P(x)\,y^{1-\alpha} = Q(x)$$

SMENA:

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) \qquad z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}y'$$

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + P(x)\,z = Q(x) \quad / \,(1-\alpha)$$

$$z' + (1-\alpha)P(x)\,z = (1-\alpha)\,Q(x)$$

OVO JE LINEARNA JEDNAČINA KOJU SMO VEĆ URADILI.

⑤ $$x y' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$$

$$x y' - 4 y = x^2 \sqrt{y}$$

$$y' - \frac{4}{x} y = x\, y^{\frac{1}{2}} \quad / \, y^{-\frac{1}{2}}$$

$$y^{-\frac{1}{2}} y' - \frac{4}{x} y^{\frac{1}{2}} = x$$

SMENA $$z = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$$

$$z' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y'$$

$$2z' - \frac{4}{x} z = x$$

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{x}{2}$$

LINEARNA

$$P(x) = -\frac{2}{x} \qquad Q(x) = \frac{x}{2}$$

$$\int P(x)\,dx = \int -\frac{2\,dx}{x} = -2 \ln|x| = \ln\frac{1}{x^2}$$

$$z(x) = e^{-\ln\frac{1}{x^2}} \left(C + \int e^{\ln\frac{1}{x^2}} \frac{x}{2}\, dx \right)$$

$$= x^2 \left(C + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} \right)$$

$$= x^2 \left(C + \frac{1}{2} \ln|x| \right) = x^2 \left(C + \ln\sqrt{|x|} \right)$$

$$y(x) = z(x)^2$$

$$y(x) = \boxed{x^4 \left(C + \ln\sqrt{|x|} \right)^2}$$

<u>NAPOMENA:</u>

POSTOJI I SINGULARNO REŠENJE $y = 0$.
OVO REŠENJE UVEK POSTOJI KOD BERNULI-JEVE JEDNAČINE AKO JE $\alpha > 0$.

⑥ $$y\,dy = \left(\frac{y^2}{x} - x^3 \right) dx \qquad y(1) = 2$$

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} - x^3$$

$$y y' - \frac{1}{x} y^2 = -x^3$$

SMENA:

$$z = y^2 \qquad z' = 2 y y'$$

$$\frac{1}{2} z' - \frac{1}{x} z = -x^3 \quad /2$$

$$z' - \frac{2}{x} z = -\frac{1}{2} x^3$$

$$P(x) = -\frac{2}{x} \qquad Q(x) = -\frac{1}{2} x^3$$

$$\int P(x)\,dx = \int -\frac{2}{x}\,dx = -2 \ln|x| = \ln \frac{1}{x^2}$$

$$z(x) = e^{-\ln \frac{1}{x^2}} \left(C + \int e^{\ln \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{2}\right) x^3\,dx \right)$$

$$= x^2 \left(C - \frac{1}{2} \int x\,dx \right)$$

$$= x^2 \left(C - \frac{1}{4} x^2 \right)$$

$$z(x) = C x^2 - \frac{1}{4} x^4$$

$$y(x) = \sqrt{C x^2 - \frac{1}{4} x^4}$$

$$y(2) = 2 \implies 2 = \sqrt{4C - 4}$$

$$4C - 4 = 4 \qquad C = 2$$

$$y(x) = \boxed{\sqrt{2x^2 - \frac{1}{4} x^4}}$$

4° JEDNAČINA TOTALNOG DIFERENCIJALA

$$M(x,y) + N(x,y) \frac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\, y' = 0$$

AKO POSTOJI FUNKCIJA $f(x, y)$ TDJ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

TADA JE REŠENJE JEDNAČINE

$f(x,y) = C$ C - KONSTANTA

7

$$(2 - 9xy^2)x = (6x^3 - 4y^2)\, y\, y'$$

$$2x - 9x^2y^2 + (4y^3 - 6x^3y)\, y' = 0$$

$$M(x,y) = 2x - 9x^2y^2 \qquad N(x,y) = 4y^3 - 6x^3y$$

TRAŽIMO FUNKCIJU $f(x,y)$ TDJ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 9x^2y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 6x^3y$$

$\Downarrow$

$$f(x,y) = \int (2x - 9x^2y^2)\, dx$$

$$= x^2 - 3x^3y^2 + C(y)$$

KONSTANTA PO x, MOŽE ZAVISITI OD y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6x^3y + C'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = 4y^3 - 6x^3y$$

$$\Rightarrow C'(y) = 4y^3 \qquad C(y) = y^4$$

$$f(x,y) = x^2 + y^4 - 3x^3y^2$$

$$\boxed{x^2 + y^4 - 3x^3y^2 = A, \quad A \in \mathbb{R}}$$

8

$$2xy^2 + 4 - 2(3 - x^2y)\, y' = 0 \qquad y(-1) = 8$$

$$M(x,y) = 2xy^2 + 4 \qquad N(x,y) = -2(3 - x^2y)$$
$$= 2x^2y - 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 4$$

$$f(x,y) = \int (2xy^2 + 4)\,dx = x^2y^2 + 4x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 6$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = -6 \qquad \varphi(y) = -6y$$

$$f(x,y) = x^2y^2 + 4x - 6y$$

$$x^2y^2 + 4x - 6y = C$$

$$y(-1) = 8 \Rightarrow (-1)^2 \cdot 8^2 + 4(-1) - 6 \cdot 8 = C$$

$$\Rightarrow C = 12$$

$$\boxed{x^2y^2 + 4x - 6y = 12}$$

5° Neke česte smene

U mnogim slučajevima se jednačina pogodnom smenom može svesti na neki od oblika koje smo uradili. Obradićemo nekoliko karakterističnih slučajeva.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Dobra smena je $z = \dfrac{y}{x}$

$$y = zx \qquad y' = z'x + z$$

$$z'x + z = f(z)$$

$$z'x = f(z) - z$$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad \text{- razdvojene promenljive}$$

9

$$y' = \frac{9x - 4y}{y - 4x}$$

$$y' = \frac{9 - 4\frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - 4}$$

$$z = \frac{y}{x} \qquad y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{9 - 4z}{z - 4}$$

$$z'x = \frac{9-4z}{z-4} - z = \frac{9 - 4z - z^2 + 4z}{z-4} = \frac{9-z^2}{z-4}$$

$$\frac{z-4}{9-z^2}\,dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{z-4}{9-z^2}\,dz = \int \frac{z-4}{(3-z)(3+z)}\,dz = \int\left(-\frac{1}{6}\frac{1}{3-z} - \frac{7}{6}\frac{1}{3+z}\right)dz$$

$$= \frac{1}{6}\ln|3-z| - \frac{7}{6}\ln|3+z| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3-z}{(3+z)^7}\right|$$

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3-z}{(3+z)^7}\right| = \ln|x| + c \quad = \ln c_1$$

$$\ln\left|\frac{3-z}{(3+z)^7}\right| = \ln c_1 x^6$$

$$\left|\frac{3-\frac{y}{x}}{\left(3+\frac{y}{x}\right)^7}\right| = c_1 x^6$$

$$y = f(ax + by + c)$$

DOBRA SMENA JE

$$z = ax + by + c$$

$$z' = a + by' \qquad y' = \frac{1}{b}(z' - a)$$

10 $$y' = 2\sqrt{y-x} + 1 \qquad y \geq x$$

$$z = y - x \qquad z' = y' - 1 \qquad y' = 1 + z'$$

$$\cancel{1} + z' = 2\sqrt{z} + \cancel{1}$$

$$\frac{dz}{dx} = 2\sqrt{z}$$

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = dx$$

$$\int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \int dx$$

$$\sqrt{z} = x + C$$

$$\sqrt{y-x} = x + C$$

$$y - x = (x+C)^2$$

$$\boxed{y = (x+C)^2 + x}$$

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right)$$

SMENOM : $y = z + \alpha \qquad x = t + \beta$

SVODIMO NA JEDNAČINU U KOJOJ U RAZLOMKU NEMA SLOBODNOG ČLANA ŠTO JE JEDAN OD PRETHODNIH SLUČAJEVA.

11 $$y' = \frac{3x - y + 1}{2x + y + 4}$$

$$y = z + \alpha \qquad x = t + \beta \qquad y' = z'$$

TRAŽIMO α I β TAKO DA „NESTANE" SLOBODAN ČLAN

$$\frac{3(t+\beta)-z-\alpha+1}{2(t+\beta)+z+\alpha+4} =$$

$$= \frac{3t-z+3\beta-\alpha+1}{2t+z+2\beta+\alpha+4}$$

HOĆEMO DA JE:

$$3\beta-\alpha+1=0$$
$$2\beta+\alpha+4=0$$

$$\beta=-1 \qquad \alpha=-2$$

$$z' = \frac{3t-z}{2t+z} = \frac{3-\frac{z}{t}}{2+\frac{z}{t}}$$

NOVA SMENA: $h=\frac{z}{t}$ $\qquad z' = h't+h$

$$h't+h = \frac{3-h}{2+h}$$

$$h't = \frac{3-h}{2+h} - h = \frac{3-h-2h-h^2}{2+h}$$

$$\frac{2+h}{3-3h-h^2}\,dh = \frac{dt}{t}$$

ZAVRŠITI RAČUN DO KRAJA

DOMAĆI:

① $xy' = y(1+x\cos x)$

② $y'\sin x = y\ln y \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

③ $y'\sin x - y\cos x = -\cos^2 x$

④ $xy' - \frac{y}{x+1} = x \qquad y(1)=1$

⑤ $xy' + y = y^2\ln x$

⑥ $x^3 y^2 + xy = y' \qquad y(1) = 1$

⑦ $\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right) e^x \, dx + (x^2 + y^2) e^x \, dy = 0$

⑧ $(x^2 - 3y^2) \, dx + 2xy \, dy = 0$

⑨ $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x} \qquad y(1) = \frac{\pi}{6}$