ANALIZA 3

I SMER

VEŽBE

GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

Radićemo u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

Rastojanje d u ovim prostorima definišemo sa:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \quad u\ \mathbb{R}^2$$

$$d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \quad u\ \mathbb{R}^3$$

Nizovi:

Niz $a_n=(x_n,y_n,z_n)$ konvergira ka tački $a=(x,y,z)$ ako

$$\forall \varepsilon>0\ \ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq n_0\ \ d(a_n,a)<\varepsilon$$

Tvrđenje: Niz konvergira ako i samo ako konvergira po koordinatama, odnosno

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n,z_n)=(x,y,z) \iff$$

$$\iff \lim_{n\to\infty}x_n=x,\ \lim_{n\to\infty}y_n=y,\ \lim_{n\to\infty}z_n=z$$

(Analogno je sve u $\mathbb{R}^2$, samo imamo jednu promenljivu manje)

OVIM JE GRANIČNA VREDNOST U $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ SVEDENA NA GRANIČNU VREDNOST JEDNE PROMENLJIVE.

① $$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}, \frac{n^2-3}{2n^2+2}, \sin\frac{x}{n}\right)=?$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3}{2n^2+2}=\frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{x}{n}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}, \frac{n^2-3}{2n^2+2}, \sin\frac{x}{n}\right)=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$$

② $$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{n^2-1}{n^3+2}}, \frac{n-1}{n+3}\sin(n+2)\right)=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2-1}{n^3+2}}=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\cos\sqrt{\frac{n^2-1}{n^3+2}}=1$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2}=1$, MEĐUTIM $\lim_{n\to\infty}\sin(n+2)$ NE POSTOJI

PA NE POSTOJI NI $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+3}\sin(n+2)$,

A SAMIM TIM NI TRAŽENI LIMES NE POSTOJI

DOMEN FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

DA BI SMO ODREDILI DOMEN FUNKCIJA:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \quad (f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R})$$

MORAMO ZNATI DA ODREDIMO DOMEN ELEMENTARNIH FUNKCIJA I ZATIM ODREDIMO PODSKUP POVRŠ PROSTORA, ODNOSNO RAVNI KOJI ZADOVOLJAVAJU USLOVE DEFINISANOSTI.

① ODREDITI DOMENE FUNKCIJA

a) $$f(x,y,z)=\cos(x^2+y^2)-xyz^3$$

U ovom slučaju nemamo nikakva ograničenja: kosinus, stepenovanje, množenje i sabiranje su uvek definisani, pa je

$$D_f = \mathbb{R}^3$$

b) $$f(x,y) = \frac{e^{x-y}}{x^2-y}$$

Eksponencijalna funkcija je uvek definisana.

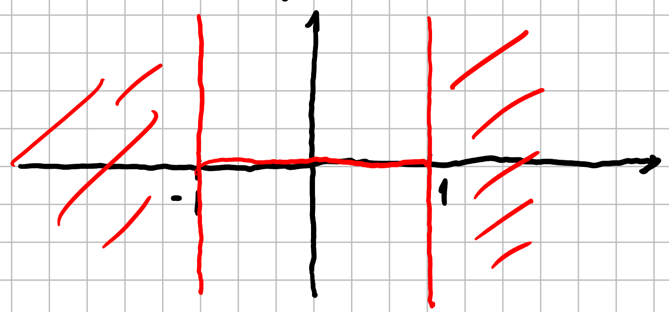
Jedini uslov je da nemamo deljenje nulom, pa je

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

v) $$f(x,y) = \sqrt{(x^2-1)\,y^2}$$

Da bi koren bio dobro definisan potkorena veličina mora biti nenegativna, odnosno $x^2 \geq 1$ ili $y = 0$.

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 1\} \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



g) $$f(x,y) = \frac{1}{\ln(2-x^2-y^2-z^2)}$$

Da bi $\ln$ bio definisan izraz u zagradi mora biti pozitivan

$$2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0,$$ tj.

$$x^2 + y^2 + z^2 < 2$$ (ovo je otvorena kugla poluprečnika 2)

MORAMO VODITI RAČUNA I DA NEMAMO DELJENJE NULOM, ODNOSNO

$$\ln(2 - x^2 - y^2 - z^2) \neq 0$$

$$2 - x^2 - y^2 - z^2 \neq 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \neq 1 \qquad \text{(SFERA POLUPREČNIKA 1)}$$

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 2,\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 1\}$$

d) $f(x, y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2}$

ZBOG DELJENJA MORA BITI $y \neq 0$.

DA BI arcsin BIO DEFINISAN:

$$\left| \frac{x}{y^2} \right| < 1$$

$$|x| < y^2$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < y^2\}$$

GRANIČNA VREDNOST I NEPREKIDNOST

$$f : \underset{\mathbb{R}^3\ (\mathbb{R}^2)}{\underset{\cap}{A}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(x_0, y_0, z_0) TAČKA NAGOMILAVANJA A

$$\lim_{(x,y,z) \to (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < d\big((x, y, z), (x_0, y_0, z_0)\big) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

FUNKCIJA JE NEPREKIDNA U (x_0, y_0, z_0) AKO JE

$$\lim_{(x,y,z) \to (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

FUNKCIJA JE NEPREKIDNA NA SKUPU AKO JE NEPREKIDNA U SVAKOJ TAČKI SKUPA.

NAPOMENA:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

GRANIČNU VREDNOST PIŠEMO

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \quad \text{ILI} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$$

(OBE PROMENLJIVE TEŽE ISTOVREMENO KA TAČKI (x_0, y_0) PO PROIZVOLJNOJ PUTANJI)

RAZLIKOVATI OD:

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \qquad \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

OVO SE NAZIVAJU PONOVLJENI LIMESI (PRVO JEDNA PROMENLJIVA TEŽI ZADATOJ KOORDINATI, PA DRUGA)

① $$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \qquad y \neq -x$$

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases} = \varphi(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = \begin{cases} -1, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases} = \psi(y)$$

$$\lim_{y \to 0} \psi(y) = -1$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) \neq \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y)$$

PONOVLJENI LIMESI SE RAZLIKUJU

- DA BI POKAZALI DA NE POSTOJI

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$$

DOVOLJNO JE PRONAĆI 2 NIZA KOJI TEŽE TAČKI $(0, 0)$, A DA JE GRANIČNA VRE- DNOST FUNKCIJE NA NJIMA RAZLIČITA.

I NIZ $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = (0, 0)$$

$$f(a_n) = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{0}{\frac{2}{n}} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = 0$$

II NIZ $b_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = (0, 0)$$

$$f(b_n) = \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{2}{n}} = \frac{-1}{3}$$

ZAKLJUČUJEMO DA $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ NE POSTOJI.

2

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = 0 \qquad \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y)$$

PONOVLJENI LIMESI SU JEDNAKI, ALI TO NIJE DOVOLJNO DA LIMES POSTOJI

I NIZ $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$f(a_n) = \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \frac{1}{2}$$

II NIZ $b_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$$f(b_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{0^2}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = 0$$

ZAKLJUČUJEMO DA $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ NE POSTOJI

3

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ A, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DA LI SE MOŽE ODREDITI KONSTANTA A, TAKO DA f BUDE NEPREKIDNA?

$f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ KAO KOMPOZICIJA NEPREKIDNIH FUNKCIJA.

(SA $C(A)$ OZNAČAVAMO NEPREKIDNE FUNKCIJE NA SKUPU A)

SLEDI DA JE $f \in C(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = A$

ODREĐUJEMO OVAJ LIMES.

I) NAČIN

$$0 \le \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{DELIMO MANJIM BROJEM}}}{\le} \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| = |y| \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$$

II) NAČIN

PRELAZAK NA POLARNE KOORDINATE

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi$$

$$(x,y) \to (0,0) \iff \rho \to 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos^2\varphi\, \rho \sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho \underbrace{\cos^2\varphi \sin\varphi}_{\text{OGRANIČENO}} = 0$$

ZAKLJUČAK

$$f \in C(\mathbb{R}^2) \iff A = 0$$

④

$$f(x,y) = x + y \sin\frac{1}{x}$$

$$0 \le \left| x + y \sin\frac{1}{x} \right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{NEJEDNAKOST} \\ \text{TROUGLA}}}{\le} |x| + \left| y \sin\frac{1}{x} \right| \le |x| + |y| \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{} 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\left(x + y\sin\frac{1}{x}\right) \text{ — NE POSTOJI}$$

OVAJ $\lim$ NE POSTOJI ZA FIKSIRANO y

DAKLE $\lim$ MOŽE POSTOJATI, A DA PONOVLJENI LIMESI NE POSTOJE.

⑤

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f JE NEPREKIDNA DUŽ SVAKOG PRAVCA KROZ $(0,0)$, A NIJE NEPREKIDNA KAO FUNKCIJA DVIJE PROMENLJIVE.

KOJE PRAVE PROLAZE KROZ $(0,0)$?

$y = kx$ i $x = 0$

$\underline{x = 0}$

$$y \neq 0 \quad f(0,y) = \frac{0^2 y}{0^4 + y^2} = 0$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \forall y \quad f(0,y) = 0$$

KONSTANTNA FUNKCIJA JE NEPREKIDNA

$\underline{y = kx}$

$$f(x,kx) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{x^2} kx}{x^{\cancel{4}2} + k^2 \cancel{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{kx}{x^2 + k^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \varphi(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 = \varphi(0)$$

$\Rightarrow \varphi$ JE NEPREKIDNA

POSMATRAMO SAD KAO FUNKCIJU 2 PROMENLJIVE

TRAŽIMO NIZ $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$, ALI DA $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq 0$

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$f(a_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\overset{\to 0}{\cancel{\frac{1}{n}}}}{\underset{\to 0}{\cancel{\frac{1}{n^2}}}+1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$$

I DALJE NEMAMO ZAKLJUČAK.

POKUŠAVAMO SA DRUGIM NIZOM:

$$b_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$$

$$f(b_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

$\Rightarrow$ f NIJE NEPREKIDNA U TAČKI $(0,0)$

⑥ $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

I NAČIN

PRELAZAK NA POLARNE KOORDINATE

$(x,y)\to(\infty,\infty) \Rightarrow \rho\to\infty$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi-\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}$$

$$= \lim_{\rho\to\infty} \overset{\to 0}{\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\cos\varphi\sin\varphi} = 0$$

OGRANIČENO NE MOŽE BITI $\cos\varphi\sin\varphi = 1$

II način

$$0 \le (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - xy + y^2 \geq xy$$

$$\frac{1}{x^2 - xy + y^2} \le \frac{1}{xy}$$

$$0 \le \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \le \left| \frac{x+y}{xy} \right| \le \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|} \xrightarrow[\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}]{} 0$$

VEKTORSKE FUNKCIJE

KOD OVIH FUNKCIJA JE I KODOMEN VIŠEDIMENZION. NA PRIMER:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ldots$$

OVDE MOŽEMO POSMATRATI KOORDINATNE FUNKCIJE, NIŠTA SUŠTINSKI DRUGAČIJE

1.
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y) = \left(x^2 \sin y, \; x^2 - e^y, \; xy \right)$$

f JE NEPREKIDNA, JER SU KOORDINATNE FUNKCIJE:

$$f_1(x,y) = x^2 \sin y, \quad f_2(x,y) = x^2 \cdot e^y, \quad f_3(x,y) = xy$$

NEPREKIDNE FUNKCIJE

2.
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y,z) = \left(z \sin(xy), \; \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \; z \cdot x \right)$$

VIDELI SMO U JEDNOM OD PRETHODNIH ZADATAKA DA FUNKCIJA

$$f_2(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

NIJE NEPREKIDNA, PA NI f NIJE NEPREKIDNA U TAČKI $(0, 0, z)$.