Универзитет у Београду

Математички факултет

Стефан У. Милошевић

Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним p-модификованим нормама и њиховим дуалима

Докторска дисертација

Београд 2017.

University of Belgrade

Faculty of Mathematics

Stefan U. Milošević

Elementary operators and inner product type transformers on ideals of compact operators generated by p-modified norms and their duals

Doctoral dissertation

Belgrade 2017.

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор

проф. др Данко Јоцић, редовни професор

Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије

проф. др Драган Ђорђевић, редовни професор

Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу

др Ђорђе Кртинић, доцент

Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Данко Јоцић, редовни професор

Математички факултет, Универзитет у Београду

Апстракт

У овом раду представљене су неједнакости везане за норме елементарних оператора и трансформација типа скаларног производа, са посебним освртом на Шатенове норме уколико су фамилије оператора које генеришу дате трансформације произвољне, односно Q норме уколико се барем једна од датих фамилија састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора. Између осталог, показане су неједнакости које уопштавају неједнакост

$$\left|\left|\left|\sqrt{I-A^*A}X\sqrt{I-B^*B}\right|\right|\right| \leqslant |||X-AXB|||,$$

из [11, Теорема 2.3], за нормалне контракције и произвољне унитарно инваријантне норме, на случајеве произвољних контракција и Шатенових норми, као и Q норми када је једна од контракција A или B нормална.

Такође, применом неједнакости за оператор монотоне и оператор конвексне функције, постигнута су профињења операторних Коши - Шварцових неједнакости, као и неједнакости Минковског и Ландау - Гриса за норме оператора.

Кључне речи: Елементарни оператори, Унитарно инваријантне норме, Q норме, Спектрални оператори дефекта

Научна област: Математика

Ужа научна област: Анализа

A.M.S. класификација: 47B47, 47B49, 47A30, 47A60

Abstract

In this paper we present some norm inequalities for certain elementary operators and inner product type transformers, specially for Schatten norms, if the families of operators generating those transforms consists of arbitrary operators, and Q norms if at least one of those families consists of mutually commuting normal operators. Among others, we present inequalities that are generalizing the inequality

$$\left|\left|\left|\sqrt{I-A^*A}X\sqrt{I-B^*B}\right|\right|\right| \leqslant |||X-AXB|||,$$

from [11, Th. 2.3], for normal contractions and arbitrary unitarily invariant norm, to the case of Schatten norms and arbitrary contractions, as well as Q norms if at least one of the contractions A or B is normal.

Also, by applying norm inequalities for operator monotone and operator convex functions, some refined Cauchy - Schwarz operator inequalities, as well as Minkowski and Landau - Gruss norm inequalities for operators are obtained as well.

Keywords: Elementary operators, Unitarily invariant norms, Q norms, Spectral defect operators

Academic discipline: Mathematics

Academic sub-discipline: Analysis

A.M.S. classification: 47B47, 47B49, 47A30, 47A60

Садржај

Глава 1

Предговор

Нека је $\mathscr{H}$ Хилбертов[1] простор, $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ алгебра ограничених оператора на њему и $A_i, B_i \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$, $i = 1, \ldots, n$.

Елементарни оператор J је пресликавање $\mathcal{B}(\mathscr{H}) \mapsto \mathcal{B}(\mathscr{H})$ дато са $JX \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} A_i X B_i$. Ова класа трансформација обухвата неколико случајева од посебног интереса, као што су оператори множења L_A $(X \to AX)$ и R_B $(X \to XB)$, деривације $(X \to AX - XA)$, уопштене деривације $(X \to AX - XB)$ као и оператор двостраног множења $(X \to AXB)$. Такође, видимо да под датим околностима J генерише ограничено пресликавање на било ком идеалу компактних оператора.

Међу самоадјунгованим операторима може се увести поредак са $A \leqslant B$ уколико је $B - A$ позитивно дефинитан оператор, односно $\langle B - Af, f \rangle \geqslant 0$ за све $f \in \mathscr{H}$. Како дати услов обезбеђује $s_n(A) \leqslant s_n(B)$, од интереса ће бити и слабији услов када низ $s_n(B)$ слабо мајорира низ $s_n(A)$, тј. када важи $\sum_{k=1}^{n} s_k(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k(B)$, за свако $n \in \mathbb{N}$, што по Ки Фановом[2] принципу гарантује $|||A||| \leqslant |||B|||$, за било коју унитарно инваријантну норму $|||\cdot|||$.

Предмет овог рада биће операторне и неједнакости за норме одговарајућих парова елементарних оператора. Једна од познатих је неједнакост

[1] Хилберт - David Hilbert (1862 - 1943)

[2] Ки Фан - Ky Fan (1914 - 2010)

између аритметичке и геометријске средине за операторе, односно

$$2|||A^*XB||| \leqslant |||AA^*X+XBB^*|||, \tag{1.0.1}$$

где су A,B и X произвољни ограничени оператори. За доказ погледати [5, Теорема 1].

Аналогна питања се могу поставити и у општијем контексту, за случај $JX \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} A_nXB_n$, када ћемо J такође називати елементарним оператором, уколико он представља ограничену трансформацију из $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ у $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ или, општије, из једног у други идеал компактних оператора на $\mathscr{H}$.

Општије, како простор $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ има преддуал $\mathcal{C}_1(\mathscr{H})$, у њему је могуће преко Гељфандовог[3] интеграла дефинисати ширу класу трансформација облика $X \mapsto \int_{\Omega} \mathscr{A}_t X \mathscr{B}_t d\mu(t)$, које ћемо називати трансформације типа скаларног производа и које ћемо такође проучавати.

Један део биће посвећен разматрању оператор монотоних и оператор конвексних функција, односно операторних и неједнакости везаних за норме повезане са тим функцијама, као што су $|||f(A)-f(B)||| \leqslant |||f(|A-B|)|||$, погледати у [1, Теорема 1], као и $|||f(A+B)||| \leqslant |||f(A)+f(B)|||$ из [2], које важе за оператор монотону функцију $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Неједнакост $|||f(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k A_k)||| \leqslant |||\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(A_k)|||$ важи за произвољну позитивну оператор конвексну функцију, док за произвољну позитивну оператор конкавну функцију важи супротна неједнакост $|||\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f(A_k)||| \leqslant |||f(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k A_k)|||$. Последње три неједнакости уопштене су у радовима [3],[25],[20] и [6] на произвољне позитивне конвексне и позитивне конкавне функције на $[0,+\infty)$. Ови резултати примењени су у [10] за доказ Кларксон[4]-МекКартијеве[5] неједнакости за n-торке ограничених оператора.

[3]Гельфанд - Изра́иль Гельфа́нд (1913 - 2009)

[4]Кларксон - James Clarkson (1906 - 1970)

[5]МекКарти - Charles McCarthy

Глава 2

Увод и основни појмови

2.1 Сингуларне вредности

У овој глави ће бити наведени основни резултати за сингуларне вредности компактних оператора на Хилбертовом простору. И када то није експлицитно наведено докази, као и већина детаља из овог дела, могу се наћи у [9] и [24].

У овом раду означаваћемо са $\mathscr{H}$ сепарабилан Хилбертов простор, док ће $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ означавати алгебру ограничених оператора на $\mathscr{H}$. Даље, са $\mathcal{C}_\infty(\mathscr{H})$ ћемо означавати идеал компактних оператора на $\mathscr{H}$, а за $f, g \in \mathscr{H}$ користићемо ознаку $g^* \otimes f$ за оператор дат са $g^* \otimes f(x) \stackrel{def}{=} \langle x, g\rangle f$, за све $x \in \mathscr{H}$.

Свака симетрична нормирајућа функција Φ дефинисана на низовима комплексних бројева одређује унитарно инваријантну норму $\|\cdot\|_\Phi$ са $\|X\|_\Phi \stackrel{def}{=} \Phi(\{s_n(X)\}_{n=1}^\infty)$, где су $s_n(X) \stackrel{def}{=} \lambda_n^{1/2}(X^*X)$ сингуларне вредности компактног оператора X у опадајућем поретку. Простор низова на коме је функција Φ коначна означаваћемо са ℓ_Φ, а са $\mathcal{C}_\Phi(\mathscr{H}) \stackrel{def}{=} \{X \in \mathcal{B}(\mathscr{H}) | \|X\|_\Phi < +\infty\}$ придружени идеал компактних оператора. Дате норме и идеале ћемо још означавати са $|||\cdot|||$, односно $\mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathscr{H})$.

Једно од основних својстава оваквих норми је унитарна инваријантност, односно $|||UXV||| = |||X|||$ за све унитарне операторе U и V и све $X \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathscr{H})$. Добро познате примере унитарно инваријантних норми представљају Шатенове[1] p-норме, дате са $\|X\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(X)}$, за $1 \leqslant p < +\infty$, као и $\|X\|_\infty = \|X\| = s_1(X)$. Шатенове норме за $p = 1$ и $p = +\infty$ представљају тзв. максималну и минималну унитарно инваријантну норму, прецизније, за сваку унитарно инваријантну норму $|||\cdot|||$ важи $\|X\|_\infty \leqslant |||X||| \leqslant \|X\|_1$. Шатенови идеали, које ћемо означавати са $\mathfrak{C}_p(\mathscr{H})$, су сепарабилни, при чему је у њима простор оператора коначног ранга густ.

Још једна важна фамилија унитарно инваријантних норми су Ки Фанове норме дате са $\|X\|_{(k)} \stackrel{def}{=} \sum_{n=1}^{k} s_n(X)$, где је $k \in \mathbb{N}$. Важно својство Ки Фанових норми представља следећа теорема из [9, Поглавље 3.4].

Теорема 2.1.1 (Ки Фаново доминационо својство)**.** *Уколико оператори* $A, B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ *задовољавају*

$$\sum_{n=1}^{k} s_n(A) \leqslant \sum_{n=1}^{k} s_n(B) \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

тада за сваку унитарно инваријантну норму $|||\cdot|||$ *важи* $|||A||| \leqslant |||B|||$.

Из претходне теореме може се лако извести следеће својство унитарно инваријантних норми $|||\cdot|||$, које ћемо често користити у наставку рада.

Лема 2.1.2. *Нека су* $A, B, C, D, X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ *такви да* $A^*A \leqslant C^*C$ *и* $BB^* \leqslant DD^*$, *као и* $X \in \mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathscr{H})$. *Тада је*

$$\left|\left|\left|AXB\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|CXD\right|\right|\right|.$$

Доказ. На основу дефиниције сингуларних вредности, монотоности сопствених вредности самоадјунгованог оператора и како за $A, B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ оператори AB и BA имају исте ненула сопствене вредности, имамо

$$\begin{aligned} s_n(AXB) &= \lambda_n^{\frac{1}{2}}(B^*X^*A^*AXB) \leqslant \lambda_n^{\frac{1}{2}}(B^*X^*C^*CXB) \\ &= \lambda_n^{\frac{1}{2}}(CXBB^*X^*C^*) \leqslant \lambda_n^{\frac{1}{2}}(CXDD^*X^*C^*) = s_n(CXD), \end{aligned}$$

[1] Шатен - Robert Schatten (1911 - 1977)

одакле, на основу Ки Фановог својства, следи тражени закључак. $\square$

Све унитарно инваријантне норме су полунепрекидне одоздо, односно $|||w-\lim_{n\to\infty} X_n||| \leqslant \liminf_{n\to\infty} |||X_n|||$, што следи из формуле $|||X||| = \sup\Big\{ \frac{|\mathrm{tr}(XY)|}{|||Y|||_d} | Y$ је коначног ранга$\Big\}$, где $|||\cdot|||_d$ представља дуалну норму за $|||\cdot|||$.

Једна од могућности увођења нових симетрично нормирајућих функција од постојећих је тзв. њихово p-модификовање на степен $p>0$, које је дато са $\Phi^{(p)}((z_n)_{n=1}^{\infty}) \stackrel{def}{=} \sqrt[p]{\Phi((|z_n|^p)_{n=1}^{\infty})}$. Функције $\Phi^{(p)}$ природно су дефинисане на скупу свих комплексних низова $z=(z_n)_{n=1}^{\infty}$ за које низ $(|z_n|^p)_{n=1}^{\infty}$ припада простору ℓ_Φ, који ми означавамо са $\ell_\Phi^{(p)}$. Приметимо да је у случају простора ℓ^1 његова p-модификација управо простор ℓ^p. У класи норми, дате функције индукују тзв. p-модификације унитарно инваријантних норми, које су дате са $|||X|||_{\Phi^{(p)}} = |||\,|X|^p\,|||_{\Phi}^{\frac{1}{p}}$, за све X за које је $|X|^p \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathscr{H})$. Аналогно као код низова, Шатенове p-норме представљају p-модификације нуклеарне норме $\|\cdot\|_1$. Кратак доказ да су и $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ за $p \geqslant 1$ норме може се наћи у уводу [14].

У случају $p=2$ се 2-модификоване норме традиционално називају Q нормама, па се могу записати у облику $|||X|||_{(2)} = \sqrt{|||X^*X|||}$. Специјално, Шатенове норме $\|\cdot\|_p$, као и све p-модификоване норме, за $p \geqslant 2$ представљају Q норме, будући да је $\Phi^{(p)} = \left(\Phi^{(p/2)}\right)^{(2)}$.

2.2 Оператор монотоне и оператор конвексне функције

За функцију $f\colon I \to \mathbb{R}$, дефинисану на интервалу I, кажемо да је операторна монотоно растућа (опадајућа) на том интервалу уколико за самоадјунговане операторе A и B такве да је $A \leqslant B$ и чији су спектри садржани у I важи $f(A) \leqslant f(B)$, $(f(A) \geqslant f(B))$. Даље, аналогно скаларном случају, кажемо да је функција оператор конвексна (конкавна) на I уколико за самоадјунговане операторе A и B, са спектром у I, важи да је $f((1-\alpha)A+\alpha B) \leqslant$

$(\geqslant)(1-\alpha)f(A)+\alpha f(B)$. Као и у скаларном случају, степене функције $t\mapsto t^p$ за $t\in[0,+\infty)$ су и операторне монотоно растуће за $0<p\leqslant 1$, али за разлику од скаларног случаја то нису за $p>1$. Више детаља о оператор монотоним и конвексним функцијама може се наћи у [4, Глава 5].

За почетак, посматрајмо наредну операторну верзију Јенсенових[2] неједнакости за конвексне и конкавне функције.

Лема 2.2.1. *Нека је $f\colon I\to\mathbb{R}$, где је I интервал, $A\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ самоадјунгован оператор чији је спектар садржан у I и нека је $x\in\mathscr{H}$ јединични вектор.*

а) *Уколико је функција f конвексна тада је $f(\langle Ax,x\rangle)\leqslant\langle f(A)x,x\rangle$.*

б) *Уколико је функција f конкавна тада је $\langle f(A)x,x\rangle\leqslant f(\langle Ax,x\rangle)$.*

Доказ. Применом спектралног рачуна за оператор A, имамо да је $\langle Ax,x\rangle=\int_{\sigma(A)}t\,d\mu_x(t)$, где је $\mu_x=\langle Ex,x\rangle$, а E је спектрална мера придружена оператору A. Како је по особинама спектралног рачуна $\mu_x(\sigma(A))=\|x\|^2=1$, то применом Јенсенове неједнакости за скаларне функције добијамо

$$f(\langle Ax,x\rangle)=f\Big(\int_{\sigma(A)}t\,d\mu_x(t)\Big)\leqslant\int_{\sigma(A)}f(t)\,d\mu_x(t)=\langle f(A)x,x\rangle, \tag{2.2.1}$$

где последња једнакост следи из дефиниције $f(A)$, чиме је доказ дела а) завршен. Део б) се доказује аналогно, применом скаларне Јенсенове неједнакости за конкавне функције. $\square$

Приметимо да за растућу функцију $f:I\to\mathbb{R}$ и самоадјунговане операторе $A,B\in\mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$, са спектром у I, такве да је $A\leqslant B$, важи $\lambda_j(f(A))\leqslant\lambda_j(f(B))$, за све $j=1,\dots,n$, где је $\lambda_j(A)$ j-та по величини сопствена вредност од A. Видимо да нам је за дати закључак довољно да важи $\lambda_j(A)\leqslant\lambda_j(B)$, за свако $j=1,\dots,n$. Такође, уколико је f још и конвексна, видимо да из услова $\sum_{k=1}^{j}\lambda_k(A)\leqslant\sum_{k=1}^{j}\lambda_k(B)$ следи $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(f(A))\leqslant\sum_{k=1}^{j}\lambda_k(f(B))$. Иако се ови резултати не могу директно пренети на бесконачнодимензионални случај, јер

[2] Јенсен - Johan Jensen (1859 - 1925)

сопствене вредности не могу у општем случају да се поређају у опадајући низ, у неким случајевима, као нпр. када су A и B позитивно дефинитни оператори и f позитивна функција, дају одговарајуће неједнакости у унитарно инваријантним нормама, о чему ће бити речи касније. За почетак, као и у скаларном случају, важи следећа

Теорема 2.2.2. *Нека је* $f\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *оператор конкавна функција и* $A,B\in \mathfrak{C}_\infty(\mathscr{H})$ *позитивно дефинитни оператори. Тада је за све унитарно инваријантне норме* $|||\cdot|||$

$$\big|\big|\big|f(A+B)\big|\big|\big|\leqslant\big|\big|\big|f(A)+f(B)\big|\big|\big|. \tag{2.2.2}$$

Доказ се може наћи у [2, Теорема 1], као и у [6, Последица 2.2].

Аналогно растућим функцијама, за конвексну функцију $f\colon I\to\mathbb{R}$ и самоадјунговане операторе A и B, са спектром у I, не мора обавезно да важи $f((1-\alpha)A+\alpha B)\leqslant(1-\alpha)f(A)+\alpha f(B)$, али важе нешто слабије неједнакости.

Теорема 2.2.3. *Нека је f конвексна функција на интервалу I. Тада је*

$$\sum_{k=1}^{j}\lambda_k(f((1-\alpha)A+\alpha B))\leqslant\sum_{k=1}^{j}\lambda_k((1-\alpha)f(A)+\alpha f(B)), \tag{2.2.3}$$

за све самоадјунговане $A,B\in\mathscr{B}(\mathbb{C}^n)$ *са спектром у I и све* $j=1,\ldots,n$.

Доказ се може се наћи у [3, Теорема 2.3].

Како се на позитивно дефинитним компактним операторима сопствене и сингуларне вредности подударају и како се могу поређати у опадајући низ на произвољном сепарабилном Хилбертовом простору $\mathscr{H}$, на основу Теореме 2.2.3, применом Ки Фановог својства добијамо

Теорема 2.2.4. *Нека је* $f\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *конвексна функција,* $A_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{C}_\infty(\mathscr{H})$ *позитивно дефинитни оператори и* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *ненегативни бројеви такви да је* $\sum_{k=1}^n\alpha_k=1$. *Тада је за сваку унитарно инваријантну норму* $|||\cdot|||$

$$\Big|\Big|\Big|f\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_kA_k\Big)\Big|\Big|\Big|\leqslant\Big|\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n}\alpha_kf(A_k)\Big|\Big|\Big|. \tag{2.2.4}$$

Аналогни резултати за конкавне функције у коначнодимензионалном случају могу се наћи у [25, Пропозиција 4.1]. Ови резултати не могу се директно уопштити на бесконачнодимензионални случај, опет из разлога што се сопствене вредности не могу поређати од најмање до највеће. Ипак, у наредном важном случају, видимо да за конкавне функције важи и више од Теореме 2.2.4.

Теорема 2.2.5. *Нека је* $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *конкавна функција,* $A_1,\dots,A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathscr{H})$ *позитивно дефинитни оператори и* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ *ненегативни бројеви такви да је* $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. *Тада је за све* $i \in \mathbb{N}$

$$s_i\Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k f(A_k)\Big) \leqslant s_i\Big(f\Big(\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k\Big)\Big). \tag{2.2.5}$$

Доказ. Приметимо прво да функција f из исказа теореме мора бити растућа, јер уколико је $0 \leqslant x < y < z$, тада

$$f(y) = f\Big(\big(1-\tfrac{y-x}{z-x}\big)x + \tfrac{y-x}{z-x}z\Big) \geqslant \big(1-\tfrac{y-x}{z-x}\big)f(x) + \tfrac{y-x}{z-x}f(z) \geqslant \big(1-\tfrac{y-x}{z-x}\big)f(x) \to f(x),$$

када $z \to +\infty$. Самим тим је $\lambda_i(f(A)) = f(\lambda_i(A))$ за сваки позитивно дефинитан компактан оператор A. Нека је $i \in \mathbb{N}$ и нека су $e_1,\dots,e_{i-1}$ сопствени вектори који одговарају сопственим вредностима $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{i-1}$ оператора $\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k$, што су уједно и његове сингуларне вредности, због позитивности датог оператора и нека је $x \in \{e_1,\dots,e_{i-1}\}^\perp$ (у случају $i=1$ узимамо $x \in \mathscr{H}$), такав да је $\|x\| = 1$. Тада је

$$\begin{aligned}
\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k f(A_k)x, x\rangle &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle f(A_k)x,x\rangle \\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \alpha_k f(\langle A_k x,x\rangle) && (2.2.6)\\
&\leqslant f(\sum_{k=1}^n \alpha_k \langle A_k x,x\rangle) = f(\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k x,x\rangle) && (2.2.7)\\
&\leqslant f(\lambda_i(\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k)) = \lambda_i(f(\sum_{k=1}^n \alpha_k A_k)), && (2.2.8)
\end{aligned}$$

где неједнакост у (2.2.6) следи применом дела б) Леме 2.2.1, неједнакост (2.2.7) следи из скаларне Јенсенове неједнакости, док неједнакост (2.2.8) следи из мин - макс својстава сопствених вредности и монотоности функције f. Самим тим је

$$m \stackrel{def}{=} \max_x \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(A_k)x, x \right\rangle \leqslant \lambda_i\left(f\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k\Big)\right),$$

а такође је, по мин - макс својствима сопствених вредности, $\lambda_i(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f(A_k)) \leqslant m$. Како су оператори $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(A_k)$ и $f\big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k\big)$ позитивно дефинитни, то су њихове сопствене и сингуларне вредности исте, чиме је доказ завршен. $\square$

По Ки Фановом својству, директно из претходне теореме произилази

Последица 2.2.6. *Нека је $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ конкавна функција, $A_1,\ldots,A_n \in \mathfrak{C}_\infty(\mathscr{H})$ позитивно дефинитни оператори и $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ненегативни бројеви такви да је $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Тада за сваку унитарно инваријантну норму $|||\cdot|||$ важи*

$$\left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(A_k)\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|f\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k\Big)\right|\right|\right|. \tag{2.2.9}$$

Теорема 2.2.2, као и сличан резултат за оператор конвексне функције, су проширени на скаларне конкавне и конвексне функције, а више детаља се може наћи у [20] и [6]. Следећа теорема, чији је доказ дат у [3, Теорема 2.16], важна је за даља разматрања.

Теорема 2.2.7. *Нека су $f_1, f_2\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ непрекидне функције које задовољавају неједнакост*

$$|||f_i(A) + f_i(B)||| \leqslant |||f_i(A+B)||| \tag{2.2.10}$$

за све позитивно дефинитне операторе $A, B \in \mathfrak{C}_\infty(\mathscr{H})$. Тада функције $f_1 + f_2$, $f_1 \circ f_2$ и $f_1 f_2$ такође задовољавају неједнакост (2.2.10).

Коришћењем претходне теореме, у раду [20] конструисане су функције које су једнаке произвољној конвексној функцији на одговарајућем делу спектра и које задовољавају тражену неједнакост. Помоћу њих се изводи

Теорема 2.2.8. *Нека је* $f\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *конвексна функција за коју је* $f(0)=0$ *и нека су* $A_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{C}_\infty(\mathscr{H})$ *позитивно дефинитни оператори. Тада за сваку унитарно инваријантну норму* $|||\cdot|||$ *важи*

$$\left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} f(A_k)\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|f\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)\right|\right|\right|. \tag{2.2.11}$$

Сличан резултат дат је и за конкавне функције на $[0,+\infty)$ у [6, Теорема 1.1]:

Теорема 2.2.9. *Нека је* $f\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *конкавна функција и* $A_1,\ldots,A_n\in\mathfrak{C}_\infty(\mathscr{H})$ *позитивно дефинитни оператори. Тада за сваку унитарно инваријантну норму* $|||\cdot|||$ *важи*

$$\left|\left|\left|f\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} f(A_k)\right|\right|\right|. \tag{2.2.12}$$

2.3 Гељфандов интеграл

У овом одељку кратко ћемо се осврнути на дефиницију и нека основна својства Гељфандовог интеграла. Више детаља може се наћи у [8, Глава 2], као и у [17] и [13].

Када је $(\Omega,\mathfrak{M},\mu)$ простор са мером, за пресликавање $\mathscr{A}:\Omega\to\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ кажемо да је слабо* мерљиво уколико су функције $t\mapsto \operatorname{tr}(\mathscr{A}_tY)$ мерљиве за свако $Y\in\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$. Уколико су осим тога дате функције и интеграбилне, на основу тога што је $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ дуал од $\mathfrak{C}_1(\mathscr{H})$, за свако $E\in\mathfrak{M}$ постојаће јединствени $I_E\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, који називамо Гељфандов интеграл или слаби* интеграл $\mathscr{A}$ по E, за који важи

$$\operatorname{tr}(I_EY)=\int_E \operatorname{tr}(\mathscr{A}_tY)\,d\mu(t) \quad \text{за све} \quad Y\in\mathfrak{C}_1(\mathscr{H}).$$

Доказ постојања Гељфандовог интеграла може се наћи на странама 52 и 53 у [8]. Једноставнији начин за испитивање овог типа мерљивости, односно интеграбилности оператор вредносних функција, је испитивање мерљивости, односно интеграбилности свих функција $t \mapsto \langle \mathscr{A}_t f, f \rangle$ за $f \in \mathscr{H}$. Нетривијалан смер еквиваленције ослања се на Теорему о затвореном графику, а само тврђење може се наћи у [17, Лема 1.1]. Дакле, уколико је $\mathscr{A}$ оператор вредносна функција на E, где је $E \in \mathfrak{M}$ и за коју је $\langle \mathscr{A} f, f \rangle \in L^1(E, \mu)$, за све $f \in \mathscr{H}$, тада постоји јединствен ограничен оператор који називамо Гељфандовим интегралом $\mathscr{A}$ по E, кога означавамо са $\int_E \mathscr{A}\, d\mu$ и који задовољава

$$\left\langle \left(\int_E \mathscr{A}\, d\mu \right) f, f \right\rangle = \int_E \langle \mathscr{A}_t f, f \rangle d\mu(t) \quad \text{за све} \quad f \in \mathscr{H}.$$

Наредним примером ћемо имати карактеризацију интеграбилности у Гељфандовом смислу, у одређеном случају.

Означимо са $L^2(\Omega, \mu, \mathscr{H})$ простор свих слабо* мерљивих пресликавања $f \colon \Omega \to \mathscr{H}$ за које је $\int_\Omega \|f(t)\|^2 d\mu(t) < +\infty$, као и $L^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathscr{H}))$ простор свих слабо* мерљивих пресликавања $\mathscr{F} \colon \Omega \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ за која је $\int_\Omega \|\mathscr{F}_t f\|^2 d\mu(t) < +\infty$ за све $f \in \mathscr{H}$. Приметимо да су функције $t \mapsto \|\mathscr{F}_t f\|$ и $t \mapsto \|\mathscr{F}_t\|$ мерљиве за све $f \in \mathscr{H}$ јер $\|\mathscr{F}_t f\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |\langle \mathscr{F}_t f, e_n \rangle|^2}$ као и $\|\mathscr{F}_t\| = \sup \frac{\|\mathscr{F}_t g_n\|}{\|g_n\|}$ на густом скупу $\{g_n\}$ у $\mathscr{H}$. Из дефиниције добијамо да је $\mathscr{F} \in L^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathscr{H}))$ ако и само ако је $\mathscr{F} f \in L^2(\Omega, \mu, \mathscr{H})$ за све $f \in \mathscr{H}$, а из свега претходног видимо да важи да је $\mathscr{F}^* \mathscr{F}$ Гељфанд интеграбилна ако и само ако је $\mathscr{F} \in L^2(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathscr{H}))$. Заправо, имамо да важи

$$\left\langle \left(\int_E \mathscr{F}^* \mathscr{F}\, d\mu \right) f, f \right\rangle = \int_\Omega \left\| \mathscr{F} f \right\|^2 d\mu \quad \text{за све} \quad f \in \mathscr{H}. \tag{2.3.1}$$

Напомена 1. Претходни услов (2.3.1) за слабо* мерљиву фамилију $\mathscr{F}$ ће се често појављивати у даљем раду и такве фамилије називаћемо квадратно интеграбилне. У случају бројачке мере, односно уколико имамо фамилију оператора $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, дати услов се записује

$$\sum_{n=1}^\infty \langle A_n^* A_n f, f \rangle = \sum_{n=1}^\infty \left\| A_n f \right\|^2 < +\infty \quad \text{за све} \quad f \in \mathscr{H},$$

у ком случају ограниченост оператора $\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n$ следи из Теореме Банах[3]

[3]Банах - Stefan Banach (1892 - 1945)

- Штајнхауса[4], као и слаба конвергенција низа $\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n$ ка $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n$, када $N \to \infty$. Приметимо још да је у овом случају конвергенција заправо јака због монотоности низа парцијалних сума $\{\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n,\}_{N=1}^{\infty}$ па ћемо овакве фамилије називати јако квадратно сумабилне (ј. к. с. фамилије).

Наредно својство Гељфандовог интеграла, које ће такође бити коришћено у даљем раду, дато је у [13, Лема 2.1].

Лема 2.3.1. *а) Нека је $F \in L^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathscr{H}))$ и $\mathscr{P} = \{\delta_k\}_{k=1}^{K}$ партиција скупа Ω на мерљиве скупове $\delta_k \in \mathfrak{M}$. Тада је најбоља апроксимација F простим функцијама у односу на $\mathscr{P}$ дата са*

$$F_{\mathscr{P}} = \sum_{k=1}^{K} \frac{\chi_{\delta_k}}{\mu(\delta_k)} \int_{\delta_k} F d\mu,$$

при чему је

$$\int_{\Omega} |F|^2 d\mu - \int_{\Omega} |F_{\mathscr{P}}|^2 d\mu = \int_{\Omega} |F - F_{\mathscr{P}}|^2 d\mu.$$

б) Уколико је мера μ $\sigma-$коначна, тада за сваку функцију $F \in L^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathscr{H}))$ постоји низ простих функција $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $L^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathscr{H}))$, такав да

$$\int_{\Omega} |F|^2 d\mu - \int_{\Omega} |F_n|^2 d\mu = \int_{\Omega} |F - F_n|^2 d\mu$$

јако и монотоно опадајуће тежи нули.

Уведимо сада појам трансформације типа скаларног производа.

Дефиниција 2.3.2. Нека је Ω простор са мером μ и нека су $\mathscr{A}, \mathscr{B} \colon \Omega \to \mathcal{B}(\mathscr{H})$ слабо* мерљиве функције, тада пресликавање $X \mapsto \int_{\Omega} \mathscr{A}_t X \mathscr{B}_t d\mu(t)$ називамо **трансформацијом типа скаларног производа** (трансформацијом т. с. п.). Дато пресликавање ћемо означавати са $\int_{\Omega} \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} d\mu$.

Приметимо да у ову класу линеарних трансформација спадају елементарни оператори, када се ради о бројачкој мери на коначном, односно пребројивом, скупу.

[4]Штајнхаус - Hugo Steinhaus (1887 - 1972)

У наредној теореми оправдаћемо слабу* мерљивост фамилије из претходне дефиниције и приказаћемо неке од услова под којима су трансформације т. с. п. ограничена пресликавања на $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, односно на идеалима компактних оператора. Наводимо следећу теорему из [13, Лема 3.1].

Теорема 2.3.3. *Нека је Ω простор са мером μ, нека су $\mathscr{A},\mathscr{B}\colon \Omega\to\mathcal{B}(\mathscr{H})$ слабо* мерљиве и нека је $X\in\mathcal{B}(\mathscr{H})$.*

а) Уколико је $\int_\Omega \|\mathscr{A}_t^* f\|^2+\|\mathscr{B}_t f\|^2 d\mu(t)<+\infty$ за све $f\in\mathscr{H}$, тада

а1) функција $t\to\mathscr{A}_t X\mathscr{B}_t$ је слабо интеграбилна и*

$$\left\|\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu\right\|\leqslant\sqrt{\left\|\int_\Omega \mathscr{A}\mathscr{A}^*d\mu\right\|\left\|\int_\Omega \mathscr{B}^*\mathscr{B}\right\|}\|X\|. \tag{2.3.2}$$

а2) Уколико је Ω простор са σ коначном мером μ и уколико је $\{\mathscr{A}_n^*\}_{n=1}^\infty$ ($\{\mathscr{B}_n\}_{n=1}^\infty$) низ простих оператор вредносних функција из Леме 2.3.1, који конвергира ка $\mathscr{A}^*$ ($\mathscr{B}$), тада низ оператора $\int_\Omega \mathscr{A}_n X\mathscr{B}_n d\mu$ слабо конвергира ка оператору $\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu$ када $n\to\infty$.

б) Уколико је $\int_\Omega \|\mathscr{A}_t f\|^2+\|\mathscr{B}_t^* f\|^2 d\mu(t)<+\infty$ за све $f\in\mathscr{H}$, тада

$$\left\|\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu\right\|_1\leqslant\sqrt{\left\|\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}d\mu\right\|\left\|\int_\Omega \mathscr{B}\mathscr{B}^*d\mu\right\|}\|X\|_1, \tag{2.3.3}$$

за све $X\in\mathcal{C}_1(\mathscr{H})$.

в) Уколико је $\int_\Omega \|\mathscr{A}_t f\|^2+\|\mathscr{A}_t^* f\|^2+\|\mathscr{B}_t f\|^2+\|\mathscr{B}_t^* f\|^2 d\mu(t)<+\infty$ за све $f\in\mathscr{H}$, тада

$$\left|\left|\left|\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu\right|\right|\right|\leqslant\max\left\{\sqrt{\left\|\int_\Omega \mathscr{A}\mathscr{A}^*d\mu\right\|\left\|\int_\Omega \mathscr{B}^*\mathscr{B}d\mu\right\|},\right.$$
$$\left.\sqrt{\left\|\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}d\mu\right\|\left\|\int_\Omega \mathscr{B}\mathscr{B}^*d\mu\right\|}\right\}|||X|||, \tag{2.3.4}$$

за све $X\in\mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathscr{H})$.

Доказ. На почетку, приметимо да за све $f,g \in \mathscr{H}$, по Парсеваловој једнакости, важи $\langle \mathscr{A}_t X \mathscr{B}_t f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathscr{B}_t f, X^* e_n\rangle \langle \mathscr{A}_t e_n, g\rangle$, где је $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ нека ортонормирана база од $\mathscr{H}$. Самим тим, за све $f,g \in \mathscr{H}$ функција $t \to \langle \mathscr{A}_t X \mathscr{B}_t f, g\rangle$ је мерљива, као сума таквих функција, односно функција $t \to \mathscr{A}_t X \mathscr{B}_t$ је слабо* мерљива.

Да бисмо доказали a1), приметимо да за све $f,g \in \mathscr{H}$ важи

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \int_\Omega \mathscr{A} X \mathscr{B} d\mu f, g \right\rangle\right| &= \left| \int_\Omega \langle \mathscr{A} X \mathscr{B} f, g\rangle \, d\mu \right| \leqslant \|X\| \int_\Omega \|\mathscr{A}_t^* g\| \|\mathscr{B}_t f\| d\mu(t) \\ &\leqslant \|X\| \sqrt{\int_\Omega \|\mathscr{B}_t f\|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_\Omega \|\mathscr{A}_t^* g\|^2 d\mu(t)} \\ &= \|X\| \sqrt{\left\langle \int_\Omega \mathscr{B}_t^* \mathscr{B}_t d\mu(t) f, f \right\rangle} \sqrt{\left\langle \int_\Omega \mathscr{A}_t \mathscr{A}_t^* d\mu(t) g, g \right\rangle} \\ &\leqslant \|X\| \sqrt{\left\| \int_\Omega \mathscr{B}^* \mathscr{B} d\mu \right\| \left\| \int_\Omega \mathscr{A} \mathscr{A}^* d\mu \right\|} \|f\| \|g\|, \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

одакле следи a1).

Што се тврђења a2) тиче, директном провером за све $f,g \in \mathscr{H}$ добијамо

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \langle \mathscr{A}_n X \mathscr{B}_n f - \mathscr{A} X \mathscr{B} f, g\rangle \, d\mu \right| \leqslant \|X\| \int_\Omega \|\mathscr{A}_n^* g - \mathscr{A}^* g\| \|\mathscr{B}_n f\| + \|\mathscr{A}^* g\| \|\mathscr{B}_n f - \mathscr{B} f\| d\mu \\ &\leqslant \|X\| \sqrt{\int_\Omega \|\mathscr{A}^* g\|^2 + \|\mathscr{B}_n f\|^2 d\mu \int_\Omega \|\mathscr{A}_n^* g - \mathscr{A}^* g\|^2 + \|\mathscr{B}_n f - \mathscr{B} f\|^2 d\mu} \\ &\leqslant \|X\| \sqrt{\left\| \int_\Omega \mathscr{A} \mathscr{A}^* d\mu \right\| \|g\|^2 + \left\| \int_\Omega \mathscr{B}^* \mathscr{B} d\mu \right\| \|f\|^2} \\ &\times \sqrt{\left\langle \int_\Omega \mathscr{A} \mathscr{A}^* - \mathscr{A}_n \mathscr{A}_n^* d\mu g, g \right\rangle + \left\langle \int_\Omega \mathscr{B}^* \mathscr{B} - \mathscr{B}_n^* \mathscr{B}_n d\mu f, f \right\rangle}, \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

где прва и друга неједнакост следе применом неједнакости Коши - Шварца у $\mathscr{H}$ и $L^2(\Omega,\mu)$ тим редом, а последња неједнакост следи из својстава Гељфандовог интеграла. Последњи израз у (2.3.6) тежи ка 0 оператору због јаке конвергенције гарантоване Лемом 2.3.1, чиме је завршен доказ тврђења a2). Приметимо још да је у (2.3.6) искоришћена и монотоност из исте леме у процени $\int_\Omega |\mathscr{B}_n|^2 d\mu \leqslant \int_\Omega |\mathscr{B}|^2 d\mu$.

Да бисмо доказали б), прво на основу дуалности $\mathcal{C}_\infty(\mathscr{H})^* = \mathcal{C}_1(\mathscr{H})$ имамо $\|X\|_1 = \sup_{\|K\|=1} |\mathrm{tr}(XK)|$, где су K оператори коначног ранга. Самим тим за сваки оператор K коначног ранга и норме један и за $X \in \mathcal{C}_1(\mathscr{H})$ имамо

$$\left|\mathrm{tr}\left(\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu K\right)\right| = \left|\int_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathscr{A}_t X \mathscr{B}_t K\right) d\mu(t)\right| = \left|\mathrm{tr}\left(X\int_\Omega \mathscr{B}K\mathscr{A}\,d\mu\right)\right|$$
$$\leqslant \|X\|_1 \left\|\int_\Omega \mathscr{B}K\mathscr{A}\,d\mu\right\| \leqslant \|X\|_1 \sqrt{\left\|\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu\right\| \left\|\int_\Omega \mathscr{B}\mathscr{B}^* d\mu\right\|}, \quad (2.3.7)$$

где је прва неједнакост последица дуалности $\mathcal{C}_\infty(\mathscr{H})$ и $\mathcal{C}_1(\mathscr{H})$, а друга следи применом дела а). Узимајући супремум по операторима K коначног ранга, који су норме један, добија се тражени резултат.

Да бисмо доказали део в), приметимо да због б) оператор $\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu$ припада $\mathcal{C}_1(\mathscr{H})$ кад год је X оператор коначног ранга, као и да је компактан, кад год је X компактан, због дела а). Како за Ки Фанове норме важи $\|X\|_{(k)} = \min_{X=Y+Z} \|Y\|_1 + k\|Z\|_\infty$ за све $k \in \mathbb{N}$, што се са једне стране може видети преко неједнакости троугла и тога да је $\|X\|_{(k)} \leqslant \|X\|_1$ као и $\|X\|_{(k)} \leqslant k\|X\|_\infty$, док се са друге стране за компактан оператор $X := \sum_{n=1}^\infty s_n e_n^* \otimes f_n$ минимум достиже за $Y := \sum_{n=1}^{k-1}(s_n - s_k)e_n^* \otimes f_n$ и $Z := s_k \sum_{n=1}^k e_n^* \otimes f_n + \sum_{n=k+1}^\infty s_n e_n^* \otimes f_n$. Дакле, за $X \in \mathcal{C}_\infty(\mathscr{H})$ и Y и Z изабране на претходни начин имамо

$$\left\|\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu\right\|_{(k)} \leqslant \left\|\int_\Omega \mathscr{A}Y\mathscr{B}d\mu\right\|_{(k)} + \left\|\int_\Omega \mathscr{A}Z\mathscr{B}d\mu\right\|_{(k)}$$
$$\leqslant \left\|\int_\Omega \mathscr{A}Y\mathscr{B}d\mu\right\|_1 + k\left\|\int_\Omega \mathscr{A}Z\mathscr{B}d\mu\right\|_\infty \leqslant M\|Y\|_1 + Mk\|Z\|_\infty = M\|X\|_{(k)}, \quad (2.3.8)$$

где је прва неједнакост у (2.3.8) неједнакост троугла, друга је последица већ примећених неједнакости између Ки Фанове, нуклеарне и операторске норме, док последња неједнакост следи применом дела а) и б) на одговарајућу норму, где је са M означен максимум из (2.3.4). На крају, применом Теореме 2.1.1 неједнакост (2.3.8) се проширује на све унитарно инваријантне норме. $\square$

Глава 3

Неједнакост Коши - Шварца у Шатеновим идеалима

3.1 Основна неједнакост и спектрални оператори дефекта

У овом одељку биће приказане неједнакости за норме елеменатрних оператора и трансформација т. с. п. на Шатеновим идеалима. За фамилију Шатенових норми услови под којима важе дате неједнакости су најблажи, односно не захтевају претпоставке о комутативности и нормалности фамилија оператора које дефинишу елементарне операторе и трансформације т. с.п. Представљене неједнакости биће приказане у терминима спектралних оператора дефекта, у којима попримају компактнији облик.

У целој овој глави (Ω, μ) ће означавати простор са $\sigma-$коначном мером.

За почетак наведимо варијанту Коши[1] - Шварцове[2] неједнакости за Шатенове норме [13, Теорема 3.3], на којој ће се базирати добијени резултати.

Теорема 3.1.1. *Нека су $\mathscr{A}, \mathscr{B} \colon \Omega \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ слабо* мерљиве функције, такве да*

[1]Коши - Augustin Cauchy (1789 - 1857)

[2]Шварц - Herman Schwarz (1843 - 1921)

су $\mathscr{A}_t, \mathscr{A}_t^*, \mathscr{B}_t, \mathscr{B}_t^*$ квадратно интеграбилне фамилије. Тада је

$$\left\|\int_\Omega \mathscr{A} X \mathscr{B} d\mu\right\|_p \leqslant \left\| \sqrt[2q]{\int_\Omega \mathscr{A}^*\left(\int_\Omega \mathscr{A}\mathscr{A}^* d\mu\right)^{q-1} \mathscr{A} d\mu} X \sqrt[2r]{\int_\Omega \mathscr{B}\left(\int_\Omega \mathscr{B}^*\mathscr{B} d\mu\right)^{r-1} \mathscr{B}^* d\mu}\right\|_p, \quad (3.1.1)$$

за све $X \in \mathfrak{C}_p(\mathscr{H})$ и све $p, q, r \geqslant 1$, такве да је $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Пре него што пређемо на примене претходне теореме, посматраћемо још нека својства трансформација т. с. п. Приметимо да на основу (2.3.2) за квадратно интеграбилну фамилију $\mathscr{A}$ имамо $\left\|\int_\Omega \mathscr{A}^* \otimes \mathscr{A} d\mu\right\|_{\mathfrak{B}(\mathscr{H}) \mapsto \mathfrak{B}(\mathscr{H})} \leqslant \left\|\int_\Omega \mathscr{A}^* \mathscr{A} d\mu\right\|$, док заменом $X := I$ добијамо да претходна неједнакост заправо постаје једнакост. Самим тим неједнакост (2.3.2) можемо записати и као

$$\left\|\int_\Omega \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} d\mu\right\| \leqslant \sqrt{\left\|\int_\Omega \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}^* d\mu\right\|} \sqrt{\left\|\int_\Omega \mathscr{B}^* \otimes \mathscr{B} d\mu\right\|}, \quad (3.1.2)$$

док у наредној леми видимо да слична неједнакост важи и за спектралне радијусе датих трансформација.

Лема 3.1.2. *Нека су $\mathscr{A}, \mathscr{B} \colon \Omega \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ слабо* мерљиве функције, такве да су $\mathscr{A}^*$ и $\mathscr{B}$ квадратно интеграбилне. Тада $\int_\Omega \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} d\mu \colon \mathfrak{B}(\mathscr{H}) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ има свој спектрални радијус за који важи*

$$r\left(\int_\Omega \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} d\mu\right) \leqslant \sqrt{r\left(\int_\Omega \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}^* d\mu\right)} \cdot \sqrt{r\left(\int_\Omega \mathscr{B}^* \otimes \mathscr{B} d\mu\right)}. \quad (3.1.3)$$

Уколико је $\mathscr{B}_t = \mathscr{A}_t^*$ за све $t \in \Omega$, тада неједнакост у (3.1.3) прелази у једнакост.

Доказ. Приметимо прво да је оператор $\left(\int_\Omega \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} d\mu\right)^n$ задат са

$$\left(\int_\Omega \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} d\mu\right)^n X = \int_\Omega \cdots \int_\Omega \mathscr{A}_{t_n} \ldots \mathscr{A}_{t_1} X \mathscr{B}_{t_1} \ldots \mathscr{B}_{t_n} d\mu(t_1) \ldots d\mu(t_n),$$

где је $X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Једноставности ради, означимо са $\mathscr{A}^{|n\rangle}_{(t_1,\cdots,t_n)} \stackrel{def}{=} \mathscr{A}_{t_n} \cdots \mathscr{A}_{t_1}$, аналогно $\mathscr{B}^{|n\rangle}_{(t_1,\cdots,t_n)} \stackrel{def}{=} \mathscr{B}_{t_1} \cdots \mathscr{B}_{t_n}$ као и меру $\underbrace{\mu \times \cdots \times \mu}_{n \text{ - пута}}$ са μ^n. Како је у датој нотацији $\left(\int_\Omega \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\,d\mu\right)^n = \int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle}\otimes\mathscr{B}^{|n\rangle}\,d\mu^n$, а самим тим даље добијамо

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\int_\Omega \mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\,d\mu\right)^n\right\|^{\frac{1}{n}} &= \left\|\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle}\otimes\mathscr{B}^{|n\rangle}\,d\mu^n\right\|^{\frac{1}{n}}\\
&\leqslant \left\|\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle}\otimes\mathscr{A}^{|n\rangle*}d\mu^n\right\|^{\frac{1}{2n}}\left\|\int_{\Omega^n}\mathscr{B}^{|n\rangle*}\otimes\mathscr{B}^{|n\rangle}\,d\mu^n\right\|^{\frac{1}{2n}} \qquad (3.1.4)\\
&= \left\|\left(\int_\Omega \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}^*\,d\mu\right)^n\right\|^{\frac{1}{2n}}\left\|\left(\int_\Omega \mathscr{B}^*\otimes\mathscr{B}\,d\mu\right)^n\right\|^{\frac{1}{2n}}, \qquad (3.1.5)
\end{aligned}$$

за свако $n\in\mathbb{N}$, где (3.1.4) следи применом (3.1.2), док је једнакост (3.1.5) само примена уведене нотације. Пуштањем да $n\to\infty$, сагласно основном својству спектралног радијуса, добијамо (3.1.3).

Да би показали једнакост у случају $\mathscr{B}_t=\mathscr{A}_t^*$, као што је већ наведено, узимањем да је $X:=I$ добијамо једнакост у (3.1.2). Самим тим, у том случају, добијамо једнакост и у (3.1.4), што завршава доказ леме. □

Дефиниција 3.1.3. Нека је $\mathscr{A}:\Omega\mapsto\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ слабо* мерљива фамилија, таква да $r\left(\int_\Omega \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{A}\,d\mu\right)\leqslant 1$. За трансформацију $\int_\Omega \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{A}\,d\mu$ дефинишемо њен **спектрални оператор дефекта**

$$\Delta_{\mathscr{A}} \overset{def}{=} s-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{2n}\int_{\Omega^n}|\mathscr{A}_{t_1}\cdots\mathscr{A}_{t_n}|^2\,d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\right)^{-1/2}. \qquad (3.1.6)$$

Приметимо прво да како је $r\left(\int_\Omega \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{A}\,d\mu\right)\leqslant 1$, то је $\|(\int_\Omega \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{A}\,d\mu)^n\| = \|\int_{\Omega^n}|\mathscr{A}^{|n\rangle}|^2 d\mu^n\|\leqslant c^n$ за свако $c>1$ и све $n\geqslant N(c)$. Самим тим ред из (3.1.6) конвергира за свако $0<\rho<1$.

Даље, како су сви сабирци у суми на десној страни (3.1.6) позитивни, а функције $t\mapsto t^{-1}$ и $t\mapsto t^{1/2}$ операторне монотоно опадајућа и растућа, тим редом, имамо да је дата фамилија опадајућа (по ρ) фамилија позитивно дефинитних оператора, која самим тим и јако конвергира, што оправдава дату дефиницију. Такође, како су сви оператори на десној страни (3.1.6) контракције, то је и $\Delta_{\mathscr{A}}$ позитивно дефинитна контракција.

Напомена 2. Уколико је оператор $I+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\Omega^n}|\mathscr{A}^{|n\rangle}|^2\,d\mu^n$ ограничен, што је по Теореми Банах Штајнхауса еквивалентно са $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega^n}\|\mathscr{A}^{|n\rangle}f\|^2 d\mu^n<+\infty$ за све

$f \in \mathscr{H}$, он је и инвертибилан и инверз му је $\Delta^2_{\mathscr{A}}$. Како је ово увек случај за фамилију $\rho\mathscr{A}$ за $\rho < 1$ (или општије за било коју фамилију $\mathscr{B}$ за коју је $r\big(\int_\Omega \mathscr{B}^* \otimes \mathscr{B} d\mu\big) < 1$), видимо да је $\Delta^{-2}_{\rho\mathscr{A}} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} \int_{\Omega^n} |\mathscr{A}^{\langle n\rangle}|^2 d\mu^n$, па самим тим (3.1.6) можемо компактније записати са $\Delta_{\mathscr{A}} = s - \lim_{\rho \nearrow 1} \Delta_{\rho\mathscr{A}}$.

На следећем једноставном примеру спектрални оператор дефекта можемо и експлицитно да израчунамо.

Пример 1. Нека је Ω једночлан скуп мере један и $\mathscr{A} = \{S\}$, где је $S\colon \ell^2 \to \ell^2\colon (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (0, x_1, \cdots, x_{n-1}, \cdots)$ оператор једностраног помака у десно. Тада је $\mathscr{A}^* = \{S^*\}$ где је $S^*\colon \ell^2 \to \ell^2\colon (x_1, \cdots, x_{n+1}, \cdots) \mapsto (x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ и непосредним рачуном се проверава да је $S^{*n}S^n = I$ и $S^n S^{*n} = I - \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes e_k^*$, где је $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ стандардна база у ℓ^2. Дакле, уколико за произвољну контракцију B са Δ_B означимо $\Delta_{\{B\}}$, добијамо

$$\Delta_{S^n} = s - \lim_{\rho \nearrow 1} \Delta_{\rho S^n} = s - \lim_{\rho \nearrow 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} S^{*kn} S^{kn} \right)^{-1/2} = s - \lim_{\rho \nearrow 1} \sqrt{1 - \rho^2} I = 0.$$

Означимо даље са $P_m = \sum_{k=1}^{m} e_k \otimes e_k^*$. Опет, директно се добија

$$\begin{aligned}
\Delta_{S^{*n}} &= s - \lim_{\rho \nearrow 1} \Delta_{\rho S^{*n}} = s - \lim_{\rho \nearrow 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} S^{kn} S^{*kn} \right)^{-1/2} = s - \lim_{\rho \nearrow 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} \big(I - P_{kn}\big) \right)^{-1/2} \\
&= s - \lim_{\rho \nearrow 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{2k} \sum_{l=k+1}^{\infty} \big(P_{ln} - P_{(l-1)n}\big) \right)^{-1/2} = s - \lim_{\rho \nearrow 1} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{l-1} \rho^{2k} \sum_{j=n(l-1)+1}^{nl} e_j \otimes e_j^* \right)^{-1/2} \\
&= s - \lim_{\rho \nearrow 1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{l-1} \rho^{2k}}} \sum_{j=n(l-1)+1}^{nl} e_j \otimes e_j^* = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{j=n(l-1)+1}^{nl} e_j \otimes e_j^*.
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Дакле, $\Delta_{S^{*n}}$ припада свим $\mathfrak{C}_p(\mathscr{H})$ просторима за $p > 2$, са сопственим вредностима $\{\frac{1}{\sqrt{k}}\}_{k=1}^{\infty}$ од којих свака има вишеструкост n.

Још један случај у коме се може експлицитно дати формула за $\Delta_{\mathscr{A}}$ је случај када се фамилија $\mathscr{A}$ састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, прецизније када важи $\mathscr{A}_t^* \mathscr{A}_s = \mathscr{A}_s \mathscr{A}_t^*$ за све $s, t \in \Omega$.

Лема 3.1.4. *Нека се* $\{\mathscr{A}_t\}_{t\in\Omega}$ *састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора и нека је* $\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu \leqslant I$. *Тада*

$$\Delta_{\mathscr{A}} = \sqrt{I - \int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu}. \tag{3.1.8}$$

Доказ. Како се фамилија $\{\mathscr{A}_t\}_{t\in\Omega}$ састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, то $\mathscr{A}_t$ комутира са $\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu$ за свако $t\in\Omega$. Самим тим важи

$$\int_{\Omega^n}\left|\mathscr{A}^{|n\rangle}\right|^2 d\mu^n = \int_{\Omega^n}|\mathscr{A}_{t_1}\cdots\mathscr{A}_{t_n}|^2\,d\mu^n(t_1,\cdots,t_n) = \left(\int_\Omega \mathscr{A}_t^*\mathscr{A}_t\,d\mu(t)\right)^n = \left(\int_\Omega |\mathscr{A}|^2\,d\mu\right)^n.$$

Дакле, $r\big(\int_\Omega \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{A}\,d\mu\big) = \big\|\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu\big\| \leqslant 1$, а такође имамо

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathscr{A}} = s-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{2n}\int_{\Omega^n}\left|\mathscr{A}^{|n\rangle}\right|^2 d\mu^n\right)^{-\frac{1}{2}} &= s-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(I+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{2n}\left(\int_\Omega|\mathscr{A}|^2\,d\mu\right)^n\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= s-\lim_{\rho\nearrow 1}\sqrt{I-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu} = \sqrt{I-\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu},\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

где последња једнакост у (3.1.9) следи из јаке непрекидности операције кореновања на позитивно дефинитним операторима. □

Следеће уопштење појма спектралног оператора дефекта такође ће бити коришћено у даљем раду.

Дефиниција 3.1.5. За $A\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, такав да је $r(A)\leqslant 1$ и $\alpha>0$, дефинишемо класу његових **α-спектралних оператора дефекта**

$$\Delta_{A,\alpha} \overset{def}{=} s-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}A^n\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.1.10}$$

Аналогно претходном, како је $r(A)\leqslant 1$, то је $\|A^n\| < c^n$, за све $c>1$ и све $n\geqslant N(c)$. Како степени ред $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}$ има радијус конвергенције 1, ред под кореном из (3.1.10) конвергира за свако $\rho<1$. Даље, слично као и у (3.1.6), будући да су сви сабирци на десној страни (3.1.10) позитивни и како је први сабирак идентички оператор, види се да је фамилија оператора из

(3.1.10) опадајућа по ρ фамилија позитивно дефинитних оператора, одакле имамо да је дефиниција коректна, као и да је $\Delta_{A,\alpha}$ позитивно дефинитна контракција.

Слично као у напомени 2, уколико је оператор $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}A^n$ ограничен, што је еквивалентно томе да је $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}\|A^n f\|^2<+\infty$ за свако $f\in\mathscr{H}$, при чему је његов инверз $\Delta_{A,\alpha}^2$. Аналогно, важи и $\Delta_{A,\alpha}=\lim_{\rho\nearrow 1}\Delta_{\rho A,\alpha}$.

Приметимо још, да уколико је Ω једночлан скуп мере један, тада је $\Delta_{A,1}=\Delta_{\{A\}}$.

Како су коефицијенти $\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}$ из (3.1.10) заправо једнаки $(-1)^n\binom{-\alpha}{n}$, опет у случају нормалне контракције A оператор $\Delta_{A,\alpha}$ можемо и експлицитно израчунати.

Лема 3.1.6. *Уколико је $A\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ нормална контракција и $\alpha>0$, тада је*

$$\Delta_{A,\alpha}=\Big(I-A^*A\Big)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Доказ. Како је A нормална контракција, за $0<\rho<1$ имамо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}A^n=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}(-1)^n\binom{-\alpha}{n}(A^*A)^n=\Big(I-\rho^2A^*A\Big)^{-\alpha},$$

где се последња једнакост добија применом спектралног рачуна, као и чињенице да ред $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}(-1)^n\binom{-\alpha}{n}x^{2n}$ равномерно по x конвергира на $[0,1]$. Самим тим

$$\Delta_{A,\alpha}=\lim_{\rho\nearrow 1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}A^n\right)^{-\frac{1}{2}}=\lim_{\rho\nearrow 1}\Big(I-\rho^2A^*A\Big)^{\frac{\alpha}{2}}=\big(I-A^*A\big)^{\frac{\alpha}{2}},$$

где последња једнакост опет следи применом спектралног рачуна, чиме се завршава доказ. □

Напоменимо да је за контракцију A класични оператор дефекта $D_A\overset{def}{=}\sqrt{I-A^*A}$ (видети [23, Глава 1]), па по претходној леми, у случају нормалне контракције A важи $\Delta_{A,\alpha}=D_A^{\alpha}$, за све $\alpha>0$.

Наведимо још један технички резултат који ће бити коришћен у даљем раду.

Лема 3.1.7. *За $\alpha > 0$ и $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$, за који је $r(A) \leqslant 1$, је*

$$\Delta_{A,\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n \cdot \Delta_{A,\alpha} \leqslant I.$$

Доказ. Како је функција $t \mapsto t^{-1}$ операторна монотоно опадајућа на $(0,\infty)$, сагласно дефиницији $\Delta_{A,\alpha}$ имамо да је

$$\Delta^2_{\rho A,\alpha} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} \rho^{2n} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n \right)^{-1}, \tag{3.1.11}$$

за свако $N \in \mathbb{N}$ и свако $\rho \in [0,1)$. Као што смо већ приметили $\Delta_{\rho A,\alpha}$ јако конвергира ка $\Delta_{A,\alpha}$, а исти аргумент обезбеђује и јаку конвергенцију оператора $\left(\sum_{n=0}^{N} \rho^{2n} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n\right)^{-1}$ ка оператору $\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n\right)^{-1}$, па пуштањем да $\rho \nearrow 1$ у (3.1.11) добијамо

$$\Delta^2_{A,\alpha} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n \right)^{-1},$$

за свако $N \in \mathbb{N}$. Самим тим је

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n \right)^{\frac{1}{2}} \Delta^2_{A,\alpha} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant I,$$

што је еквивалентно са $\left\|\Delta_{A,\alpha}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n\right)^{\frac{1}{2}}\right\| \leqslant 1$. Самим тим за адјунговани оператор важи $\left\|\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n\right)^{\frac{1}{2}}\Delta_{A,\alpha}\right\| \leqslant 1$, а одатле и

$$\Delta_{A,\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n \cdot \Delta_{A,\alpha} \leqslant I.$$

Дакле, за свако $N \in \mathbb{N}$ и свако $f \in \mathscr{H}$ важи

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} \left\|A^n \Delta_{A,\alpha} f\right\|^2 = \left\langle \sum_{n=0}^{N} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} \Delta_{A,\alpha} A^{*n}A^n \Delta_{A,\alpha} f, f \right\rangle \leqslant \langle f,f \rangle = \left\|f\right\|^2, \tag{3.1.12}$$

одакле је, по теореми Банах - Штајнхауса, оператор $\Delta_{A,\alpha} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n}A^n \Delta_{A,\alpha}$ ограничен, а такође важи и $\left\langle \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} \Delta_{A,\alpha} A^{*n}A^n \Delta_{A,\alpha} f, f \right\rangle \leqslant \langle f,f \rangle$, што завршава доказ леме. $\square$

3.2 Неједнакости у Шатеновим идеалима

У овом одељку представићемо неједнакости за Шатенове норме линеарних трансформација везаних за контрактивне елементарне операторе и трансформације т. с. п. приказаним у [22] и [19]. Полазна тачка у овим разматрањима је [13, Теорема 4.1], односно њена најједноставнија варијанта [11, Теорема 2.3], коју наводимо зарад читаочеве удобности.

Теорема 3.2.1. *Нека су* $\mathscr{A},\mathscr{B}\colon\Omega\to\mathcal{B}(\mathscr{H})$ *слабо** *мерљиве фамилије, од којих се свака састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, таквих да је* $\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu\leqslant I$ *и* $\int_\Omega \mathscr{B}^*\mathscr{B}\,d\mu\leqslant I$. *Тада је*

$$\left|\!\left|\!\left|\sqrt{I-\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu}\,X\sqrt{I-\int_\Omega \mathscr{B}^*\mathscr{B}\,d\mu}\right|\!\right|\!\right|\leqslant\left|\!\left|\!\left|X-\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}\,d\mu\right|\!\right|\!\right|,\tag{3.2.1}$$

за све $X\in\mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathscr{H})$.

Применом резултата из претходног одељка, добијамо наредно уопштење за Шатенове идеале, приказано у [19, Теорема 3.1].

Теорема 3.2.2. *Нека су* $\mathscr{A},\mathscr{B}\colon\Omega\to\mathcal{B}(\mathscr{H})$ *слабо** *мерљиве фамилије, такве да је* $r\Big(\int_\Omega \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{A}\,d\mu\Big)\leqslant 1, r\Big(\int_\Omega \mathscr{B}^*\otimes\mathscr{B}\,d\mu\Big)\leqslant 1$ *и*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Omega^n}\left\|\mathscr{A}_{t_1}^*\cdots\mathscr{A}_{t_n}^*f\right\|^2+\left\|\mathscr{B}_{t_1}^*\cdots\mathscr{B}_{t_n}^*f\right\|^2 d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)<+\infty,\qquad \text{за све}\qquad f\in\mathscr{H}.\tag{3.2.2}$$

Тада је $r\Big(\int_\Omega \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}^*\,d\mu\Big)\leqslant 1$ *и* $r\Big(\int_\Omega \mathscr{B}\otimes\mathscr{B}^*\,d\mu\Big)\leqslant 1$ *и важи*

$$\left\|\Delta_{\mathscr{A}}^{1-\frac{1}{q}}X\Delta_{\mathscr{B}}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p\leqslant\left\|\Delta_{\mathscr{A}^*}^{-\frac{1}{q}}\left(X-\int_\Omega \mathscr{A}_t^*X\mathscr{B}_t\,d\mu(t)\right)\Delta_{\mathscr{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p,\tag{3.2.3}$$

за све $X\in\mathcal{C}_p(\mathscr{H})$ *и све* $p,q,r\geqslant 1$, *такве да је* $\frac{2}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.

Доказ. Покажимо прво да је под датим претпоставкама $r\Big(\int_\Omega \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}^*\,d\mu\Big)\leqslant 1$, што је неопходан услов за дефинисаност спектралног оператора дефекта $\Delta_{\mathscr{A}^*}$. На основу услова (3.2.2), оператор $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Omega^n}\left|\mathscr{A}_{t_1}^*\cdots\mathscr{A}_{t_n}^*\right|^2 d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)$ је ограничен на $\mathscr{H}$, а према напомени 2 једнак је оператору $\Delta_{\mathscr{A}^*}^{-2}$. Такође, $\Delta_{\mathscr{A}}^{-2}$ је одоздо ограничен са I. Како је

$$\left\|\left(\int_\Omega \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}^* d\mu\right)^n\right\| = \left\|\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle}\otimes\mathscr{A}^{|n\rangle *}\,d\mu^n\right\|$$
$$= \left\|\int_{\Omega^n}\left|\mathscr{A}^{*|n\rangle}\right|^2 d\mu^n\right\| \leqslant \left\|\sum_{n=0}^\infty\int_{\Omega^n}\left|\mathscr{A}^{*|n\rangle}\right|^2 d\mu^n\right\| = \left\|\Delta_{\mathscr{A}^*}^{-2}\right\|,$$

добијамо

$$r\left(\int_\Omega \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}^*\,d\mu\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\|\left(\int_\Omega \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}^*\,d\mu\right)^n\right\|^{1/n} \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\|\Delta_{\mathscr{A}^*}^{-2}\right\|^{1/n} = 1.$$

Аналогно, $\Delta_{\mathscr{B}^*}^{-2} = \sum_{n=0}^\infty \int_{\Omega^n}\left|\mathscr{B}^{|n\rangle *}\right|^2 d\mu^n$ је ограничен оператор на $\mathscr{H}$ и такође је $r\left(\int_\Omega \mathscr{B}\otimes\mathscr{B}^*\,d\mu\right)\leqslant 1$. Даље, за свако $\rho\in[0,1)$ је

$$\left(I-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{B}d\mu\right)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\left(\int_\Omega \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{B}d\mu\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle *}\otimes\mathscr{B}^{|n\rangle}\,d\mu^n, \quad (3.2.4)$$

одакле следи

$$\left\|\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}X\Delta_{\rho\mathscr{B}}^{1-\frac1s}\right\|_p = \left\|\sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle *}\left(X-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right)\mathscr{B}^{|n\rangle}\,d\mu^n\Delta_{\rho\mathscr{B}}^{1-\frac1s}\right\|_p$$
$$\leqslant \left\|C_\rho\left(X-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}d\mu\right)D_\rho\right\|_p \quad (3.2.5)$$

по Теореми 3.1.1, где је

$$C_\rho \stackrel{def}{=} \left(\sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle}\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}\left(\sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}\int_{\Omega^n}\left|\mathscr{A}^{|n\rangle}\right|^2 d\mu^n\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}\right)^{q-1}\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}\mathscr{A}^{|n\rangle *}\,d\mu^n\right)^{\frac{1}{2q}}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle}\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}\left(\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{-2}\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}\right)^{q-1}\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac1q}\mathscr{A}^{|n\rangle *}\,d\mu^n\right)^{\frac{1}{2q}}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle}\mathscr{A}^{|n\rangle *}d\mu^n\right)^{\frac{1}{2q}} = \Delta_{\rho\mathscr{A}^*}^{-\frac1q}. \quad (3.2.6)$$

На исти начин добија се и

$$D_\rho \stackrel{def}{=} \left(\sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\int_{\Omega^n}\mathscr{B}^{|n\rangle}\Delta_{\rho\mathscr{B}}^{1-\frac1s}\left(\sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\Delta_{\rho\mathscr{B}}^{1-\frac1s}\int_{\Omega^n}\left|\mathscr{B}^{|n\rangle}\right|^2 d\mu^n\Delta_{\rho\mathscr{B}}^{1-\frac1s}\right)^{s-1}\Delta_{\rho\mathscr{B}}^{1-\frac1s}\mathscr{B}^{|n\rangle *}\,d\mu^n\right)^{\frac{1}{2s}}$$
$$= \Delta_{\rho\mathscr{B}^*}^{-\frac1s}. \quad (3.2.7)$$

За комплетирање доказа (3.2.3), остаје да се у (3.2.5) са $\rho\mathscr{A}$ и $\rho\mathscr{B}$ пређе на $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Прво, приметимо да неједнакост $\Delta_{\rho\mathscr{A}^*}^{-2} \leqslant \Delta_{\mathscr{A}^*}^{-2}$, коју имамо на основу $\rho^{2n}\int_{\Omega^n}|\mathscr{A}^{|n\rangle}|^2 d\mu^n \leqslant \int_{\Omega^n}|\mathscr{A}^{|n\rangle}|^2 d\mu^n$ и дефиниције оператора $\Delta_{\mathscr{A}}$, даље повлачи неједнакост $\Delta_{\rho\mathscr{A}^*}^{-2/q} \leqslant \Delta_{\mathscr{A}^*}^{-2/q}$, захваљујући томе што су функције $t \mapsto t^{1/q}$ операторне монотоно растуће на $[0,+\infty)$ (због $q \geqslant 1$). Аналогно имамо и да је $\Delta_{\rho\mathscr{B}^*}^{-2/r} \leqslant \Delta_{\mathscr{B}^*}^{-2/r}$, а самим тим, на основу Леме 2.1.2 и

$$\left\|\Delta_{\rho\mathscr{A}^*}^{-\frac{1}{q}}\left(X-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right)\Delta_{\rho\mathscr{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{\mathscr{A}^*}^{-\frac{1}{q}}\left(X-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right)\Delta_{\mathscr{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p. \quad (3.2.8)$$

Да бисмо завршили доказ, остаје да применимо полунепрекидност одоздо Шатенових норми

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_{\mathscr{A}}^{1-\frac{1}{q}}X\Delta_{\mathscr{B}}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p = \left\|w-\lim_{\rho\nearrow 1}\Delta_{\rho\mathscr{A}}^{1-\frac{1}{q}}X\Delta_{\rho\mathscr{B}}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p\\
&\leqslant \liminf_{\rho\nearrow 1}\left\|\Delta_{\rho\mathscr{A}^*}^{-\frac{1}{q}}\left(X-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right)\Delta_{\rho\mathscr{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p\\
&\leqslant \liminf_{\rho\nearrow 1}\left\|\Delta_{\mathscr{A}^*}^{-\frac{1}{q}}\left(X-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right)\Delta_{\mathscr{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p = \left\|\Delta_{\mathscr{A}^*}^{-\frac{1}{q}}\left(X-\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}d\mu\right)\Delta_{\mathscr{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p,
\end{aligned}$$

што завршава доказ (3.2.3). $\square$

Напомена 3. Приметимо да у случају $p := +\infty$, где формално узимамо $\frac{1}{q} := \frac{1}{r} := 0$, претходна неједнакост важи за све $X \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ (дакле, не само за $X \in \mathfrak{C}_\infty(\mathscr{H})$). Заиста, у овом случају тражена неједнакост гласи

$$\left\|\Delta_{\mathscr{A}}X\Delta_{\mathscr{B}}\right\| \leqslant \left\|X-\int_\Omega \mathscr{A}_t^*X\mathscr{B}_t\,d\mu(t)\right\|, \quad (3.2.9)$$

па аналогним аргументацијом као у претходном доказу, за све $\rho \in [0,1)$ добијамо

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_{\rho\mathscr{A}}X\Delta_{\rho\mathscr{B}}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^\infty \rho^{2n}\Delta_{\rho\mathscr{A}}\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle *}\left(X-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right)\mathscr{B}^{|n\rangle}\,d\mu^n\Delta_{\rho\mathscr{B}}\right\|\\
&\leqslant \sqrt{\left\|\sum_{n=1}^\infty \rho^{2n}\Delta_{\rho\mathscr{A}}\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle *}\mathscr{A}^{|n\rangle}\,d\mu^n\Delta_{\rho\mathscr{A}}\right\|\left\|\sum_{n=1}^\infty \rho^{2n}\Delta_{\rho\mathscr{B}}\int_{\Omega^n}\mathscr{B}^{|n\rangle *}\mathscr{B}^{|n\rangle}\,d\mu^n\Delta_{\rho\mathscr{B}}\right\|} \quad (3.2.10)\\
&\times\left\|X-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right\| \leqslant \left\|X-\rho^2\int_\Omega \mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right\|. \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

Неједнакост (3.2.10) следи применом (2.3.2), а видимо и да су сагласно дефиницији оператора $\Delta_{\mathscr{A}}$ операторне суме у (3.2.10) контракције, одакле следи и неједнакост у (3.2.11). Остатак доказа је исти као и у случају Шатенових норми. Приметимо још да нам у овом случају услов (3.2.2) није потребан.

За произвољне $A,B\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ један од основних примера елементарног оператора, а тиме и трансформације т.с.п, јесте оператор двостраног множења $A^*\otimes B\colon \mathfrak{B}(\mathscr{H})\to\mathfrak{B}(\mathscr{H})\colon X\mapsto A^*XB$, када се простор са мером састоји само од једне тачке мере један. Уколико је $r(A)\leqslant 1$ имамо

$$r\big(A^*\otimes A\big)=\inf_{n\in\mathbb{N}}\Big\||A^n|^2\Big\|^{\frac{1}{2n}}=\inf_{n\in\mathbb{N}}\big\|A^n\big\|^{\frac{1}{n}}=r(A)=r(A^*)=r(A\otimes A^*)\leqslant 1,$$

као и $\Delta_{rA}=\sum_{n=0}^{\infty}r^{2n}A^{*n}A^n$, а самим тим $\Delta_A=s-\lim_{\rho\nearrow 1}\big(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}A^{*n}A^n\big)^{-1/2}$, што је заправо $\sqrt{s-\lim_{\rho\nearrow 1}\big(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}A^{*n}A^n\big)^{-1}}$ на основу јаке непрекидности кореновања позитивно дефинитних оператора. Заједно са аналогним закључком за Δ_B, Теорема 3.2.2 у овом специјалном случају даје

Последица 3.2.3. *Нека су $A,B\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ такви да $r(A),r(B)\leqslant 1$. Тада је за свако $X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$*

$$\left\|\sqrt{s-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}A^{*n}A^n\right)^{-1}}X\sqrt{s-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}B^{*n}B^n\right)^{-1}}\right\|\leqslant\big\|X-A^*XB\big\|. \tag{3.2.12}$$

Уколико је још и $\sum_{n=0}^{\infty}\big\|A^{*n}f\big\|^2+\big\|B^{*n}f\big\|^2<+\infty$ за све $f\in\mathscr{H}$, тада важи

$$\begin{aligned}\left\|\left(s-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}A^{*n}A^n\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}}X\left(s-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}B^{*n}B^n\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}\right\|_p&\\ \leqslant\left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty}A^nA^{*n}\right)^{\frac{1}{q}}\Big(X-A^*XB\Big)\left(\sum_{n=0}^{\infty}B^nB^{*n}\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_p&,\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

за све $X\in\mathfrak{C}_p(\mathscr{H})$ и све $p,q,r\geqslant 1$, такве да је $\frac{2}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.

На основу Леме 3.1.4, претходни резултат даје варијанту [11, Теорема 2.3] за Шатенове норме и за операторе који нису обавезно нормални. Уколико претходну последицу применимо на оператор једностраног помака у десно, на основу примера 1, добијамо

Последица 3.2.4. *За оператор S једностраног помака у десно, за све $m,n \in \mathbb{N}$ и све $X \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ важи*

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{l=m(k-1)+1}^{mk} e_l \otimes e_l{}^* \right) X \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{l=n(k-1)+1}^{nk} e_l \otimes e_l{}^* \right) \right\| \leqslant \left\| X - S^m X S^{*n} \right\|. \quad (3.2.14)$$

Други правац уопштавања Теореме 3.2.1, прецизније [11, Теореме 2.3], имаће за циљ да на левој страни неједнакости те теореме, осим другог корена буде и произвољан позитиван степен $\alpha > 0$. Тада ћемо разматрати Шатенове норме и користити α-спектрални оператор дефекта $\Delta_{A,\alpha}$, на сличан начин као у Теореми 3.2.2. За почетак наводимо тврђење које се добија директном применом Теореме 3.1.1, у њеној дискретној варијанти.

Лема 3.2.5. *Нека је $\alpha > 0$ и $A,B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ такви да важи $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} (\left\|A^n f\right\|^2 + \left\|A^{*n} f\right\|^2 + \left\|B^n f\right\|^2 + \left\|B^{*n} f\right\|^2) < +\infty$, за све $f \in \mathscr{H}$. Тада је*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n \right\|_p \leqslant & \left\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^n \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} A^n \right)^{q-1} A^{*n} \right)^{\frac{1}{2q}} \right. \\ & \left. \times X \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} B^n \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} B^{*n} B^n \right)^{r-1} B^{*n} \right)^{\frac{1}{2r}} \right\|_p, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

за све $X \in \mathcal{C}_p(\mathscr{H})$ и све $p,q,r \geqslant 1$ такве да је $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Коришћењем термина спектралних оператора дефекта, као и у Теореми 3.2.2, сличну неједнакост добијамо у једноставнијем запису и под другачијим условима, како је показано у [22]. У доказу ћемо користити неке од основних особина холоморфног функционалног рачуна Данфорд[3] - Риса[4] на $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, специјално формулу $(fg)(A) = f(A)g(A)$, за чији се доказ може погледати [7, Лема 2.1].

Теорема 3.2.6. *Нека је $\alpha > 0$ и $A,B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ такви да је $r(A) \leqslant 1$, $r(B) \leqslant 1$, као и $r(A)r(B) < 1$, а нека је још и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} \left(\left\|A^{*n} f\right\|^2 + \left\|B^{*n} f\right\|^2 \right) < +\infty, \qquad \text{за све} \qquad f \in \mathscr{H}. \quad (3.2.16)$$

[3] Данфорд - Nelson Dunford (1906 - 1986)

[4] Рис - Frigyes Riesz (1880 - 1956)

Тада је
$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}}X\Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\tag{3.2.17}$$
и
$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}X\Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}A^{*n}XB^{n}\Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p},\tag{3.2.18}$$
за све $X\in\mathfrak{C}_p(\mathscr{H})$ *и све* $p,q,r\geqslant 1$, *такве да је* $\frac{2}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.

Напомена 4. Приметимо да је услов $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}\left\|A^{*n}f\right\|^2<+\infty$ испуњен у случају $r(A)<1$, тако да је он релевантан само када је $r(A)=1$. Истоветан закључак примењив је и на оператор B.

Доказ. Како је $r(A^*)=r(A)\leqslant 1$, то је оператор $\Delta_{A^*,\alpha}$ добро дефинисан, а због (3.2.16) заправо је једнак $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^nA^{*n}\right)^{-\frac{1}{2}}$, при чему слично важи и за $\Delta_{B^*,\alpha}$. По Теореми 3.1.1 за $0<\rho<1$ имамо
$$\begin{aligned}\left\|\Delta_{\rho A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{\rho B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}&=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}C_nXD_n\right\|_{p}\\&\leqslant\left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_n^*\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_nC_n^*\right)^{q-1}C_n\right)^{\frac{1}{2q}}X\left(\sum_{n=0}^{\infty}D_n\left(\sum_{n=0}^{\infty}D_n^*D_n\right)^{r-1}D_n^*\right)^{\frac{1}{2r}}\right\|_{p},\end{aligned}\tag{3.2.19}$$
где је $C_n\stackrel{def}{=}\rho^n\sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}}\Delta_{\rho A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}A^{*n}$ и $D_n\stackrel{def}{=}\rho^n\sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}}B^n\Delta_{\rho B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}$. Како је $r(A^*)\leqslant 1$, за све $\rho<1$ је $\rho\sqrt[n]{\left\|A^{*n}\right\|}\leqslant\frac{1+\rho}{2}<1$, за све $n\geqslant N(\rho)$, а самим тим су услови Теореме 3.1.1 испуњени. Као и у доказу Теореме 3.2.2, добија се
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_n^*\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_nC_n^*\right)^{q-1}C_n\right)^{\frac{1}{2q}}=\Delta_{\rho A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}},\tag{3.2.20}$$
односно
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}D_n\left(\sum_{n=0}^{\infty}D_n^*D_n\right)^{r-1}D_n^*\right)^{\frac{1}{2r}}=\Delta_{\rho B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}},\tag{3.2.21}$$
одакле видимо да се (3.2.19) може записати као
$$\left\|\Delta_{\rho A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{\rho B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\left\|\Delta_{\rho A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}}X\Delta_{\rho B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}.\tag{3.2.22}$$
Како и оператори $\Delta_{A^*,\alpha}^{-2}$ и $\Delta_{B^*,\alpha}^{-2}$ представљају ограничене операторе, а како су функције $t\mapsto t^{\frac{1}{q}}$ и $t\mapsto t^{\frac{1}{r}}$ операторне монотоно растуће на $[0,+\infty)$ (због

$r,q \geqslant 1)$, имамо $\Delta_{\rho A^*,\alpha}^{-\frac{2}{q}} \leqslant \Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{2}{q}}$ и $\Delta_{\rho B^*,\alpha}^{-\frac{2}{r}} \leqslant \Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{2}{r}}$. Даље према Леми 2.1.2, слично као код доказа Теореме 3.2.2, имамо

$$\left\|\Delta_{\rho A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}} X \Delta_{\rho B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}} X \Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p. \tag{3.2.23}$$

Због монотоности $\Delta_{\rho A,\alpha}^{-2}$ по ρ и како је функција $t \mapsto t^{-1}$ операторна монотоно опадајућа на $(0,+\infty)$ имамо $\Delta_{A,\alpha}^{2} \leqslant \Delta_{\rho A,\alpha}^{2}$, а како је $0 \leqslant 1-\frac{1}{q} \leqslant 1$, функција $t \mapsto t^{1-\frac{1}{q}}$ је операторна монотоно растућа на $[0,\infty)$, чиме је $\Delta_{A,\alpha}^{2-\frac{2}{q}} \leqslant \Delta_{\rho A,\alpha}^{2-\frac{2}{q}}$, као и $\Delta_{B,\alpha}^{2-\frac{2}{r}} \leqslant \Delta_{\rho B,\alpha}^{2-\frac{2}{r}}$. Сличном аргументацијом као и у доказу за (3.2.23) добијамо

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n \Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{\rho A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n \Delta_{\rho B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p, \tag{3.2.24}$$

за све $\rho \in (0,1)$. За завршетак доказа (3.2.17), остало је још само да пустимо да $\rho \nearrow 1$ на левој страни (3.2.24). Како је $r(A^*)r(B) = r(A)r(B) < 1$, за све $n \geqslant N$ имамо $\sqrt[n]{\|A^{*n}\|\|B^n\|} \leqslant c < 1$, а самим тим $\|A^{*n}XB^n\|_p \leqslant c^n \|X\|_p$, одакле ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n$ конвергира у Шатеновој p-норми. На основу тога добијамо

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n - \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n\right\|_p \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left|\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}(1-\rho^{2n})\right| \|A^n\| \|B^n\| \|X\|_p \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}(1-\rho^{2n}) M \|X\|_p + \sum_{n=N+1}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} c^n \|X\|_p,
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

где је $M := \max_{n\in\mathbb{N}}\{\|A^n\|\|B^n\|\}$, који се достиже будући да разматрани низ тежи нули. За N довољно велико други сабирак у (3.2.25) може се учинити произвољно малим, јер дати ред конвергира, а за тако изабрано N, први сабирак тежи нули када $\rho \nearrow 1$. Самим тим оператор $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n$ конвергира ка $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n$ у Шатеновој p-норми када $\rho \nearrow 1$. Како ово повлачи слабу конвергенцију $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{2n} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n$ када $\rho \nearrow 1$, на основу полунепрекидности одоздо Шатенових p - норми, из (3.2.22), (3.2.23) и (3.2.24), добијамо

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\\
&=\left\|w-\lim_{\rho\to 1-}\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\\
&\leqslant\liminf_{\rho\to 1-}\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\\
&\leqslant\liminf_{\rho\to 1-}\left\|\Delta_{\rho A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{\rho B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\\
&\leqslant\liminf_{\rho\to 1-}\left\|\Delta_{\rho A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}}X\Delta_{\rho B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\liminf_{\rho\to 1-}\left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}}X\Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}=\left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}}X\Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p},
\end{aligned}\tag{3.2.26}$$

што завршава доказ (3.2.17).

Да бисмо доказали (3.2.18), означимо са $\mathscr{I}_\rho\colon \mathcal{B}(\mathscr{H})\to\mathcal{B}(\mathscr{H})$ елементарне операторе дате са $\mathscr{I}_\rho X\stackrel{def}{=}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}$. Како је $r(A)\leqslant 1$ и $r(B)\leqslant 1$, то је $\sqrt[n]{\rho^{2n}\|A^{*n}\|\|B^{n}\|}\leqslant\rho^2<1$, видимо да су дати оператори дефинисани за све $\rho<1$ и ограничени, а такође видимо да важи $\mathscr{I}_\rho=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}(A^*\otimes B)^n$. Одатле добијамо да је $\mathscr{I}_\rho=\Big(I-\rho^2A^*\otimes B\Big)^{-\alpha}$ у смислу Данфорд - Рисовог функционалног рачуна на $\mathcal{B}(\mathscr{H})$, а самим тим је $\mathscr{I}_\rho^{-1}=\Big(I-\rho^2A^*\otimes B\Big)^{\alpha}$. Одатле, уколико је $Z\stackrel{def}{=}\mathscr{I}_\rho X$, следи да је $X=\mathscr{I}_\rho^{-1}Z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^{*n}ZB^{n}$ и увођењем дате смене у (3.2.22) добијамо

$$\left\|\Delta_{\rho A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}Z\Delta_{\rho B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\left\|\Delta_{\rho A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^{*n}ZB^{n}\Delta_{\rho B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}.\tag{3.2.27}$$

Слично као у доказу (3.2.23) и (3.2.24), може се показати

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_{\rho A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^{*n}ZB^{n}\Delta_{\rho B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\\
&\qquad\leqslant\left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^{*n}ZB^{n}\Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p},
\end{aligned}\tag{3.2.28}$$

као и

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}Z\Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\left\|\Delta_{\rho A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}Z\Delta_{\rho B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p},\tag{3.2.29}$$

одакле је

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}} Z \Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} \rho^{2n} A^{*n} Z B^n \Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p. \tag{3.2.30}$$

Како је $r(A^*)r(B)<1$, имамо да је $\left\|A^{*n}\right\|\left\|B^n\right\|<c^n$ за неко $0<c<1$ и све $n \geqslant N(c)$. Одатле следи да ред на десној страни конвергира апсолутно у Шатеновој p - норми за $\rho=1$, па пуштањем да $\rho \nearrow 1$ у (3.2.30) добијамо тражену неједнакост (3.2.18). □

Из доказа претходне теореме видимо да су услови $r(A), r(B) \leqslant 1$ и (3.2.16) (између осталог, као и у Теореми 3.2.2) неопходни за дефинисаност оператора $\Delta_{A,\alpha}, \Delta_{B,\alpha}$ као и за инвертибилност $\Delta_{A^*,\alpha}$ и $\Delta_{B^*,\alpha}$. Услов $r(A)r(B)<1$ је довољан да оправда конвергенције у нормама одговарајућих елементарних оператора, па није био неопходан у доказу (3.2.3), јер је на десној страни те неједнакости само један сабирак, док је на десној страни (3.2.18) (што је у ствари аналогна неједнакост неједнакости (3.2.3)) бесконачна сума. У наредној теореми дајемо довољне услове и за случај $r(A)=r(B)=1$.

Теорема 3.2.7. *Нека је $\alpha>0$, $A, B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ такви да је $r(A) \leqslant 1, r(B) \leqslant 1$ и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} \left(\left\|A^{*n} f\right\|^2 + \left\|B^{*n} f\right\|^2\right) < +\infty, \qquad \text{за све} \qquad f \in \mathscr{H}. \tag{3.2.31}$$

а) *Уколико важи*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} \left(\left\|A^{n} f\right\|^2 + \left\|B^{n} f\right\|^2\right) < +\infty, \qquad \text{за све} \qquad f \in \mathscr{H}, \tag{3.2.32}$$

тада је

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} X B^n \Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}} X \Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p. \tag{3.2.33}$$

б) *Уколико су A и B контракције, тада је*

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}} X \Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{A^*,\alpha}^{-\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} A^{*n} X B^n \Delta_{B^*,\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p, \tag{3.2.34}$$

за све $X \in \mathcal{C}_p(\mathscr{H})$ и све $p, q, r \geqslant 1$, такве да је $\frac{2}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.

Доказ. Као што се може закључити из доказа Теореме 3.2.6, за доказ неједнакости

$$\left\|\Delta_{\rho A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{\rho B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\left\|\Delta_{\rho A^{*},\alpha}^{-\frac{1}{q}}X\Delta_{\rho B^{*},\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}, \tag{3.2.35}$$

за свако $\rho\in(0,1)$, довољно је имати $r(A^{*})\leqslant 1$ и $r(B)\leqslant 1$, што је и претпостављено у формулацији Теореме 3.2.7. Слично, на основу услова (3.2.31), оператори $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{n}A^{*n}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}B^{n}B^{*n}$ су ограничени и једнаки су операторима $\Delta_{A^{*},\alpha}^{-2}$ и $\Delta_{B^{*},\alpha}^{-2}$, тим редом, одакле опет следи

$$\left\|\Delta_{\rho A^{*},\alpha}^{-\frac{1}{q}}X\Delta_{\rho B^{*},\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\left\|\Delta_{A^{*},\alpha}^{-\frac{1}{q}}X\Delta_{B^{*},\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}, \tag{3.2.36}$$

као и

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\left\|\Delta_{\rho A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}\Delta_{\rho B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}. \tag{3.2.37}$$

За завршетак доказа (3.2.33), остала је још да се покаже слаба конвергенција оператора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}$ ка оператору $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^{n}$. Заиста, за све $f,g\in\mathscr{H}$ имамо

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho^{2n})\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}\langle A^{*n}XB^{n}f,g\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho^{2n})\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}\langle XB^{n}f,A^{n}g\rangle\\
&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho^{2n})\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}\|X\|_{p}\|B^{n}f\|\|A^{n}g\|\\
&\leqslant\|X\|_{p}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho^{2n})\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}\|B^{n}f\|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho^{2n})\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}\|A^{n}g\|^{2}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.2.38}$$

одакле следи да последњи израз у (3.2.38) тежи ка 0 кад $\rho\nearrow 1$, сагласно услову (3.2.32). Остатак доказа је потпуно аналоган доказу (3.2.17).

Да бисмо доказали (3.2.34), као и код доказа (3.2.18), имамо

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}^{1-\frac{1}{q}}X\Delta_{B,\alpha}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_{p}\leqslant\left\|\Delta_{A^{*},\alpha}^{-\frac{1}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^{*n}XB^{n}\Delta_{B^{*},\alpha}^{-\frac{1}{r}}\right\|_{p}. \tag{3.2.39}$$

Приметимо да ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}$ апсолутно конвергира и за $\rho=1$, што се једноставно може видети из чињенице да конвергира ка $(1-1)^{\alpha}=0$ и тога да сабирци $(-1)^n\binom{\alpha}{n}$ имају сталан знак за $n > \alpha$. Из тога даље видимо да важи

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^nXB^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}A^nXB^n\right\|_p \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\binom{\alpha}{n}(1-\rho^{2n})\right|\|A^n\|\|B^n\|\|X\|_p \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N}\left|(-1)^n\binom{\alpha}{n}(1-\rho^{2n})\right|\|X\|_p + \sum_{n=N+1}^{\infty}2\left|(-1)^n\binom{\alpha}{n}\right|\|X\|_p, \qquad (3.2.40)
\end{aligned}$$

зато што су A и B контракције. Слично као у доказу (3.2.25), због апсолутне конвергенције другог сабирка, имамо да израз из (3.2.40) тежи нули када $\rho \nearrow 1$, а самим тим и оператор $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^{*n}XB^n$ конвергира ка оператору $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}A^{*n}XB^n$ и то у Шатеновој p-норми. Самим тим, пуштањем да $\rho \nearrow 1$ у (3.2.39) добијамо тражену неједнакост (3.2.34). $\square$

Напомена 5. Слично као у напомени 3, у случају $p := +\infty$, када узимамо $\frac{1}{q} := \frac{1}{r} := 0$, неједнакост (3.2.33) поприма облик

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^n\Delta_{B,\alpha}\right\| \leqslant \|X\|. \qquad (3.2.41)$$

Уколико означимо са $C_n \stackrel{def}{=} \sqrt{\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}}\Delta_{A,\alpha}A^{*n}$ и $D_n \stackrel{def}{=} \sqrt{\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}}B^n\Delta_{B,\alpha}$, на основу Леме 3.1.7 имамо да су оператори $\sum_{n=0}^{\infty}C_nC_n^*$ и $\sum_{n=0}^{\infty}D_n^*D_n$ контракције. Самим тим испуњени су услови за примену (2.3.2) на леву страну (3.2.41), чиме добијамо

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^{*n}XB^n\Delta_{B,\alpha}\right\| \leqslant \sqrt{\left\|\sum_{n=0}^{\infty}C_nC_n^*\right\|}\sqrt{\left\|\sum_{n=0}^{\infty}D_n^*D_n\right\|}\|X\| \leqslant \|X\|,$$

што представља тражену неједнакост (3.2.33). Приметимо да нам у овом случају нису неопходни услови (3.2.31) и (3.2.32).

Везано за неједнакост (3.2.34), која у овом случају гласи

$$\left\|\Delta_{A,\alpha}X\Delta_{B,\alpha}\right\| \leqslant \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}A^{*n}XB^n\right\|, \qquad (3.2.42)$$

сличном аргументацијом као и у напомени 3, имамо да услов (3.2.31) није неопходан. Такође, обе неједнакости (3.2.41) и (3.2.42) важе за све $X \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$.

Глава 4

Неједнакост Коши - Шварца у идеалима компактних оператора индукованим p-модификованим нормама

4.1 Основне неједнакости

У овом одељку биће изнете неке од основних метода за процену норми елементарних оператора и трансформација т.с.п. у идеалима компактних оператора индукованим Q нормама, уколико се барем једна од фамилија којима се те трансформације дефинишу састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора. Такође, те методе биће примењене на конкретне трансформације т.с.п. из претходне главе. Детаљи из овог дела могу се наћи у радовима [13], [11] и [12], као и тамо наведеним референцама.
Такође и у целој овој глави (Ω, μ) означаваће простор са $\sigma-$коначном мером.

Уколико се свака од фамилија $\mathscr{A}_t$ и $\mathscr{B}_t$ састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора неједнакости из Теореме 2.3.3 могу се побољшати.

Доказ за елементарне операторе, може се наћи у [11, Теорема 2.2], док се уопштење на трансформације т.с.п. може наћи у [13, Теорема 3.2].

Теорема 4.1.1. *Нека су* $\mathscr{A},\mathscr{B}\colon \Omega\to\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ *слабо** *мерљиве и квадратно интеграбилне фамилије, од којих се свака састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора. Тада је*

$$\left|\left|\left|\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|\sqrt{\int_\Omega \mathscr{A}^*\mathscr{A}\,d\mu}\,X\sqrt{\int_\Omega \mathscr{B}^*\mathscr{B}d\mu}\right|\right|\right|, \qquad (4.1.1)$$

за све $X\in\mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathscr{H})$ *и све унитарно инваријантне норме* $|||\cdot|||$.

Још две опште неједнакост Коши - Шварцовог типа ће нам бити од интереса у овој глави, а то је случај када се само једна од фамилија $\{\mathscr{A}_t\}_{t\in\Omega}$ или $\{\mathscr{B}_t\}_{t\in\Omega}$ састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора. Под тим мање рестриктивним условима од услова Теореме 4.1.1 поправљамо процену из Теореме 2.3.3 дела в), која за сужену класу Q норми тврди

Теорема 4.1.2. *Нека су* $\mathscr{A},\mathscr{B}\colon \Omega\to\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ *слабо** *мерљиве функције, такве да су* $\mathscr{A}^*$ *и* $\mathscr{B}$ *квадратно интеграбилне фамилије.*

а) Уколико се фамилија $\mathscr{A}$ *састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, тада је за све симетричне нормирајуће функције* Φ *и све* $p\geqslant 2$

$$\left\|\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\|\sqrt{\int_\Omega \mathscr{A}\mathscr{A}^*d\mu}\,X\right\|_{\Phi^{(p)}}\left\|\sqrt{\int_\Omega \mathscr{B}^*\mathscr{B}d\mu}\right\|, \qquad (4.1.2)$$

за све $X\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathscr{H})$.

б) Уколико се фамилија $\mathscr{B}$ *састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, тада је за све симетричне нормирајуће функције* Φ *и све* $p\geqslant 2$

$$\left\|\int_\Omega \mathscr{A}X\mathscr{B}d\mu\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\|\sqrt{\int_\Omega \mathscr{A}\mathscr{A}^*d\mu}\right\|\cdot\left\|X\sqrt{\int_\Omega \mathscr{B}^*\mathscr{B}d\mu}\right\|_{\Phi^{(p)}}, \qquad (4.1.3)$$

за све $X\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathscr{H})$.

Доказ. Да бисмо доказали део а), специјалним избором $\alpha := 2, \theta := 0, |||\cdot|||_{\Phi_1} := |||\cdot|||_{\Phi_2} := \|\cdot\|_{\Phi^{(p/2)}}$ и $|||\cdot|||_{\Phi_3} := \|\cdot\|$ у [13, Теорема 3.1.(е)] ($\|\cdot\|_{\Phi^{(p/2)}}$ је такође унитарно инваријантна норма због $p \geqslant 2$) добијамо

$$\begin{aligned}\left\|\int_\Omega \mathscr{A} X \mathscr{B} d\mu\right\|^2_{\Phi^{(p)}} &= \left\|\left|\int_\Omega \mathscr{A} X \mathscr{B} d\mu\right|^2\right\|_{\Phi^{(p/2)}} \\ &\leqslant \left\|\int_\Omega \mathscr{A} X X^* \mathscr{A}^* d\mu\right\|_{\Phi^{(p/2)}} \cdot \left\|\int_\Omega \mathscr{B}^* \mathscr{B} d\mu\right\|. \quad (4.1.4)\end{aligned}$$

Како се фамилија $\mathscr{A}_t$ састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, на основу Теореме 4.1.1 имамо

$$\begin{aligned}\left\|\int_\Omega \mathscr{A} X X^* \mathscr{A}^* d\mu\right\|_{\Phi^{(p/2)}} &\leqslant \left\|\sqrt{\int_\Omega \mathscr{A}\mathscr{A}^* d\mu}\, X X^* \sqrt{\int_\Omega \mathscr{A}\mathscr{A}^* d\mu}\right\|_{\Phi^{(p/2)}} \\ &= \left\|\left|\sqrt{\int_\Omega \mathscr{A}\mathscr{A}^* d\mu}\, X\right|^2\right\|_{\Phi^{(p/2)}} = \left\|\sqrt{\int_\Omega \mathscr{A}\mathscr{A}^* d\mu}\, X\right\|^2_{\Phi^{(p)}}, \quad (4.1.5)\end{aligned}$$

чиме је доказ дела а) завршен.
Део б) се доказује аналогно. □

Наравно, случај $p = 2$ је свакако најважнији у Теореми 4.1.2.

4.2 Неједнакости везане за Q норме неких класа елементарних оператора

Настављајући приступ проблематици из претходне главе, у овом одељку биће приказани резултати за елементарне операторе и трансформације т.с. п, под додатним претпоставкама о нормалности и комутативности фамилија оператора које их дефинишу. Као што је већ примећено, Теорема 3.2.2 је варијанта Теореме 3.2.1 за Шатенове норме у некомутативном случају, па за почетак износимо њену варијанту за Q норме, у случају када се само једна од генеришућих фамилија састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, приказану у [19, Теорема 3.5].

Теорема 4.2.1. *Нека су* $\mathscr{A},\mathscr{B}\colon \Omega\to\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ *слабо** *мерљиве фамилије оператора, код којих је* $r\big(\int_\Omega \mathscr{A}^*\otimes\mathscr{A}\,d\mu\big)\leqslant 1$ *и* $r\big(\int_\Omega \mathscr{B}^*\otimes\mathscr{B}d\mu\big)\leqslant 1$. *Тада:*

а) *Уколико се фамилија* $\mathscr{A}$ *састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, тада за све симетричне нормирајуће функције* Φ, *све* $p\geqslant 2$ *и за све* $X\in\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathscr{H})$ *је*

$$\left\|\sqrt{I-\int_\Omega \mathscr{A}_t^*\mathscr{A}_t\,d\mu(t)}X\Delta_{\mathscr{B}}\right\|_{\Phi^{(p)}}\leqslant\left\|X-\int_\Omega \mathscr{A}_t^*X\mathscr{B}_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)}},\tag{4.2.1}$$

б) *Уколико се фамилија* $\mathscr{B}$ *састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, тада за све симетричне нормирајуће функције* Φ, *све* $p\geqslant 2$ *и за све* $X\in\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathscr{H})$ *је*

$$\left\|\Delta_{\mathscr{A}}X\sqrt{I-\int_\Omega \mathscr{B}_t^*\mathscr{B}_t\,d\mu(t)}\right\|_{\Phi^{(p)}}\leqslant\left\|X-\int_\Omega \mathscr{A}_t^*X\mathscr{B}_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)}},\tag{4.2.2}$$

Доказ. Уколико се фамилија $\mathscr{A}$ састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, за све $\rho\in[0,1)$, из развоја (3.2.4) добијамо

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_{\rho\mathscr{A}}X\Delta_{\rho\mathscr{B}}\right\|_{\Phi^{(p)}}=\left\|\Delta_{\rho\mathscr{A}}\left(\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\left(\int_\Omega\mathscr{A}^*\otimes\mathscr{B}\,d\mu\right)^n\left(X-\rho^2\int_\Omega\mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right)\right)\Delta_{\rho\mathscr{B}}\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&=\left\|\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\Delta_{\rho\mathscr{A}}\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle *}\left(X-\rho^2\int_\Omega\mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right)\mathscr{B}^{|n\rangle}\,d\mu^n\Delta_{\rho\mathscr{B}}\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\leqslant\left\|\sqrt{\Delta_{\rho\mathscr{A}}\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\int_{\Omega^n}\mathscr{A}^{|n\rangle *}\mathscr{A}^{|n\rangle}\,d\mu^n\Delta_{\rho\mathscr{A}}}\left(X-\rho^2\int_\Omega\mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right)\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\times\left\|\sqrt{\Delta_{\rho\mathscr{B}}\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\int_{\Omega^n}\mathscr{B}^{|n\rangle *}\mathscr{B}^{|n\rangle}\,d\mu^n\Delta_{\rho\mathscr{B}}}\right\|=\left\|X-\rho^2\int_\Omega\mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right\|_{\Phi^{(p)}},
\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

где неједнакост у трећем реду следи применом (4.1.2). Како је свака p-модификована норма $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ такође и унитарно инваријантна норма, она је и полунепрекидна одоздо, па важи

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_{\mathscr{A}}X\Delta_{\mathscr{B}}\right\|_{\Phi^{(p)}}&=\left\|w-\lim_{\rho\nearrow 1}\Delta_{\rho\mathscr{A}}X\Delta_{\rho\mathscr{B}}\right\|_{\Phi^{(p)}}\leqslant\liminf_{\rho\nearrow 1}\left\|\Delta_{\rho\mathscr{A}}X\Delta_{\rho\mathscr{B}}\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\leqslant\liminf_{\rho\nearrow 1}\left\|X-\rho^2\int_\Omega\mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right\|_{\Phi^{(p)}}=\left\|X-\int_\Omega\mathscr{A}^*X\mathscr{B}\,d\mu\right\|_{\Phi^{(p)}}.
\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

На основу Леме 3.1.4 је $\Delta_{\mathscr{A}} = \sqrt{I - \int_\Omega \mathscr{A}^* \mathscr{A}\, d\mu}$, а самим тим видимо да (4.2.4) завршава доказ (4.2.1). Део б) се доказује аналогно, коришћењем дела б) Теореме 4.1.2. $\square$

Опет, у случају када се простор Ω састоји од једне тачке мере један, претходна теорема се своди на

$$\left\|\sqrt{I-A^*A}X\Delta_B\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\|X - AXB\right\|_{\Phi^{(p)}},$$

кад год је A нормална контракција, $r(B) \leqslant 1$, а $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathscr{H})$. Самим тим, ово представља уопштење [11, Теорема 2.3] у случају Q норми.

Даље уопштавање [11, Теорема 2.3] дато је у [22, Теорема 2.1] и односи се на случај када су оба оператора A и B нормалне контракције.

Теорема 4.2.2. *Нека су* $A, B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ *нормалне контракције и* $\alpha > 0$. *Тада за све* $X \in \mathcal{C}_{|||\cdot|||}(\mathscr{H})$ *важе неједнакости:*

$$\left|\left|\left|\left(I - A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^n X B^n \left(I - B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right|\right|\right| \leqslant |||X|||, \tag{4.2.5}$$

$$\left|\left|\left|\left(I - A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} X \left(I - B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tbinom{\alpha}{n} A^n X B^n\right|\right|\right|. \tag{4.2.6}$$

Доказ. Прво, имамо

$$\begin{aligned} &\left|\left|\left|\left(I - A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!} A^n X B^n \left(I - B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right|\right|\right| \\ &\qquad = \Gamma(\alpha) \left|\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(-1)^n \tbinom{-\alpha}{n}} \left(I - A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} A^n X B^n \sqrt{(-1)^n \tbinom{-\alpha}{n}} \left(I - B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right|\right|\right|, \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

јер је $(-1)^n \binom{-\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}$. Једноставности записа ради, означимо са $C_n \stackrel{def}{=} \sqrt{(-1)^n \binom{-\alpha}{n}} \left(I - A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} A^n$ и $D_n \stackrel{def}{=} B^n \sqrt{(-1)^n \binom{-\alpha}{n}} \left(I - B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}$. Како је A нормална контракција, то оператори A и A^* комутирају са $\left(I - A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}}$, а самим тим имамо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|C_nf\|^2=\left\langle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\alpha}{n}\Big(I-A^*A\Big)^{\alpha}(A^*A)^nf,f\right\rangle$$
$$=\int\limits_{\sigma(A^*A)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\alpha}{n}x^n(1-x)^{\alpha}d\mu_f(x)$$
$$=\int\limits_{\sigma(A^*A)}\chi_{[0,1)}d\mu_f=\|f-P_{N(I-A^*A)}f\|^2=\|P_{\overline{R(I-A^*A)}}f\|^2\leqslant\|f\|^2,\qquad(4.2.8)$$

где је $\mu_f(\delta)\overset{def}{=}\langle E(\delta)f,f\rangle$ за све $\delta\in\mathfrak{M}$, а E је спектрална мера придружена оператору A^*A. Дакле, имамо да сума $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|C_nf\|^2$ конвергира за све $f\in\mathscr{H}$, слично као и сума $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|D_nf\|^2$. Самим тим, испуњени су услови Теореме 4.1.1, чијом применом добијамо

$$\Gamma(\alpha)\left|\!\left|\!\left|\sum_{n=0}^{\infty}C_nXD_n\right|\!\right|\!\right|\leqslant\Gamma(\alpha)\left|\!\left|\!\left|\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}C_n^*C_n}X\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}D_n^*D_n}\right|\!\right|\!\right|\leqslant\Gamma(\alpha)|||X|||,\qquad(4.2.9)$$

где последња неједнакост важи због чињенице да су $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n^*C_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}D_n^*D_n$ редом пројектори на $\overline{R(I-A^*A)}$ и $\overline{R(I-B^*B)}$, сагласно (4.2.8). Тиме је завршен доказ (4.2.5).

Да бисмо доказали (4.2.6), приметимо прво да из (4.2.5) следи

$$\left|\!\left|\!\left|\Big(I-\rho^2A^*A\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\alpha}{n}\rho^{2n}A^nXB^n\Big(I-\rho^2B^*B\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\right|\!\right|\!\right|\leqslant|||X|||,\qquad(4.2.10)$$

за све $0<\rho<1$. Остатак доказа неједнакости (4.2.6) следи из (4.2.10) и сличан је доказима Теорема 3.2.6 и 3.2.7. Наиме, како су оператори A и B контракције, то је $\|A\otimes B\|\leqslant\|A\|\|B\|\leqslant1$, а тим пре је $r(A\otimes B)\leqslant1$. Одатле је, слично као и у доказу Теореме 3.2.6, елементарни оператор $\mathscr{J}_\rho\colon\mathcal{B}(\mathscr{H})\to\mathcal{B}(\mathscr{H})\colon X\mapsto\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho^{2n}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}A^nXB^n$ ограничен и једнак $\mathscr{J}_\rho=\big(I-\rho^2A\otimes B\big)^{-\alpha}$, а самим тим је и $\mathscr{J}_\rho^{-1}=\big(I-\rho^2A\otimes B\big)^{\alpha}$. Поновним увођењем смене $Z\overset{def}{=}\mathscr{J}_\rho X$, за који онда важи и $X=\mathscr{J}_\rho{}^{-1}Z=\big(I-\rho^2A\otimes B\big)^{\alpha}Z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^2A^nZB^n$, добијамо да је (4.2.10) еквивалентно са

$$\left|\!\left|\!\left|\Big(I-\rho^2A^*A\Big)^{\frac{\alpha}{2}}Z\Big(I-\rho^2B^*B\Big)^{\frac{\alpha}{2}}\right|\!\right|\!\right|\leqslant\left|\!\left|\!\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^nZB^n\right|\!\right|\!\right|,\qquad(4.2.11)$$

где, на основу Теореме 2.3.3, Z такође припада идеалу $\mathfrak{C}_{|||\cdot|||}(\mathscr{H})$. Како оператори $\left(I-\rho^2A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ и $\left(I-\rho^2B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ јако конвергирају редом ка операторима $\left(I-A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}}$ и $\left(I-B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}$, што се лако проверава спектралним рачуном, то лева страна од (4.2.11) слабо конвергира ка оператору $\left(I-A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}}Z\left(I-B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}$. Што се десне стране (4.2.11) тиче, како ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}$ апсолутно конвергира за $\rho=1$, како је већ примећено у доказу Теореме 3.2.7, тада слично доказу (3.2.40) имамо да $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^nZB^n$ конвергира ка $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}A^nZB^n$ у норми $|||\cdot|||$. Најзад, из полунепрекидности одоздо унитарно инваријантне норме $|||\cdot|||$ добијамо

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\left|\left(I-A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}}Z\left(I-B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right|\right|\right| = \left|\left|\left|w-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(I-\rho^2A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}}Z\left(I-\rho^2B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right|\right|\right| \\
&\leqslant \liminf_{\rho\nearrow 1}\left|\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^nZB^n\right|\right|\right| \\
&= \lim_{\rho\nearrow 1}\left|\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}\rho^{2n}A^nZB^n\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}A^nZB^n\right|\right|\right|, \qquad (4.2.12)
\end{aligned}$$

што завршава доказ (4.2.6). □

Напомена 6. Претходна теорема (специјално неједнакост (4.2.6)) очигледно уопштава [11, Теорема 2.3] са случаја $\alpha=1$ на случај $\alpha>0$. Приметимо још, да у случају када $\alpha\in\mathbb{N}$, Теорема 4.2.2 може да се докаже вишеструком применом [11, Теорема. 2.3] на операторе $(I-A^*A)^{\frac{\alpha-1}{2}}X(I-B^*B)^{\frac{\alpha-1}{2}}, (I-A^*A)^{\frac{\alpha-2}{2}}(X-AXB)(I-B^*B)^{\frac{\alpha-2}{2}}, (I-A^*A)^{\frac{\alpha-3}{2}}(X-AXB-A(X-AXB)B)(I-B^*B)^{\frac{\alpha-3}{2}}$, итд. уместо X. На пример, за $\alpha=2$ имамо

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\left|(I-A^*A)X(I-B^*B)\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\sqrt{I-A^*A}\sqrt{I-A^*A}X\sqrt{I-B^*B}\sqrt{I-B^*B}\right|\right|\right| \\
&\leqslant \left|\left|\left|\sqrt{I-A^*A}X\sqrt{I-B^*B}-A\sqrt{I-A^*A}X\sqrt{I-B^*B}B\right|\right|\right| \qquad (4.2.13) \\
&= \left|\left|\left|\sqrt{I-A^*A}(X-AXB)\sqrt{I-B^*B}\right|\right|\right| \qquad (4.2.14) \\
&\leqslant \left|\left|\left|X-AXB-A(X-AXB)B\right|\right|\right| = \left|\left|\left|X-2AXB-A^2XB^2\right|\right|\right|, \qquad (4.2.15)
\end{aligned}$$

где се (4.2.13) и (4.2.15) добијају применом [11, Теорема 2.3] на операторе $\sqrt{I-A^*A}X\sqrt{I-B^*B}$ и $X-AXB$ редом, док (4.2.14) следи захваљујући комутативности A и $\sqrt{I-A^*A}$. Видимо да је десна страна (4.2.15) једнака десној страни (4.2.6) за $\alpha = 2$.

Даљом применом Коши - Шварцове неједнакости за Q норме, добија се

Теорема 4.2.3. *Нека је $\alpha > 0$, $A, B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ такви да је $r(A) \leqslant 1$ и $r(B) \leqslant 1$. Уколико је A нормалан, тада за све симетричне нормирајуће функције Φ, све $p \geqslant 2$ и све $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathscr{H})$ је*

$$\left\|\left(I-A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^n X B^n \Delta_{B,\alpha}\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \|X\|_{\Phi^{(p)}}, \tag{4.2.16}$$

а уколико је B још и контракција или важи $r(A)r(B) < 1$, тада је

$$\left\|\left(I-A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} X \Delta_{B,\alpha}\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} A^n X B^n\right\|_{\Phi^{(p)}}. \tag{4.2.17}$$

Аналогно, уколико је B нормалан, тада за све симетричне нормирајуће функције Φ, све $p \geqslant 2$ и све $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathscr{H})$ је

$$\left\|\Delta_{A,\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^n X B^n \left(I-B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \|X\|_{\Phi^{(p)}}, \tag{4.2.18}$$

а уколико је A још и контракција или важи $r(A)r(B) < 1$, тада је

$$\left\|\Delta_{A,\alpha} X \left(I-B^*B\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} A^n X B^n\right\|_{\Phi^{(p)}}. \tag{4.2.19}$$

Доказ. Да бисмо доказали (4.2.16), све што треба јесте да применимо (4.1.2) на леву страну од (4.2.16), чиме добијамо

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(I-A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^n X B^n \Delta_{B,\alpha}\right\|_{\Phi^{(p)}} \\
&\leqslant \left\|\sqrt{\left(I-A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} A^{*n} A^n \left(I-A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} X}\right\|_{\Phi^{(p)}} \\
&\times \left\|\sqrt{\Delta_{B,\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)} B^{*n} B^n \Delta_{B,\alpha}}\right\| \leqslant \|X\|_{\Phi^{(p)}}
\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

где су $A_n \stackrel{def}{=} \sqrt{\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}}\left(I-A^*A\right)^{\frac{\alpha}{2}} A^n$ и $B_n \stackrel{def}{=} \sqrt{\tfrac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}} B^n \Delta_{B,\alpha}$, изабрани за примену Теореме 4.1.2. Приметимо да је $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A_n f\|^2 < +\infty$ већ доказано у (4.2.8), док

$\sum_{n=0}^{\infty}\|B_n f\|^2 < +\infty$, као и $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} B_n^* B_n\right\| \leqslant 1$ следе из Леме 3.1.7. Доказ за (4.2.17) следи из (4.2.16) као и у теоремама 4.2.2 и 3.2.6. Доказ за (4.2.18) иде слично, али коришћењем (4.1.3) уместо (4.1.2). $\square$

Глава 5

Примене неједнакости за оператор монотоне и оператор конвексне функције

5.1 Неједнакост Кларксон - МекКартија

На основу претходно изложених резултата за конвексне и конкавне функције могу се детаљније проучити одређена својства елементарних оператора. Пример који овде наводимо детаљно је разматран у [10] (погледати такође и [15]), а како ће нам ова разматрања бити од користи и у остатку рада, наредних неколико тврђења наводимо са потребним детаљима.
За почетак уочимо идентитет

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|^2=\sum_{j=0}^{n-1}\left|A_j\right|^2, \tag{5.1.1}$$

где су $A_0,\ldots,A_{n-1}\in\mathcal{B}(\mathscr{H})$ а $\omega_0,\ldots,\omega_{n-1}$ су n-ти корени јединице, тј. $\omega_j\stackrel{def}{=}e^{2\pi ij/n}$, $0\leqslant j\leqslant n-1$, који се директно проверава. Из њега следи

Теорема 5.1.1. *Нека су $A_0,\ldots,A_{n-1}\in\mathcal{C}_\infty(\mathscr{H})$ и нека је функција $f\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ таква да $f(0)=0$ и да је функција дата са $g(t)\stackrel{def}{=}f(\sqrt{t})$ за $t\geqslant0$ конвексна.*

Тада је за сваку унитарно инваријантну норму $|||\cdot|||$

$$\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|\right)\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|f\left(\left(\sum_{j=0}^{n-1}|A_j|^2\right)^{1/2}\right)\right|\right|\right| \leqslant \frac{1}{n}\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|\right)\right|\right|\right| \quad (5.1.2)$$

Доказ. Како је $g(t) = f(\sqrt{t})$ конвексна функција, на основу Теореме 2.2.8 и идентитета (5.1.1) имамо

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|\right)\right|\right|\right| &= \left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|^2\right)\right|\right|\right| \\ &\leqslant \left|\left|\left|g\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|^2\right)\right|\right|\right| = \left|\left|\left|g\left(\sum_{j=0}^{n-1}|A_j|^2\right)\right|\right|\right| = \left|\left|\left|f\left(\left(\sum_{j=0}^{n-1}|A_j|^2\right)^{1/2}\right)\right|\right|\right|, \quad (5.1.3)\end{aligned}$$

чиме је доказана прва неједнакост у (5.1.2).

Да би доказали другу неједнакост, на основу истог идентитета и Теореме 2.2.4 имамо

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|f\left(\left(\sum_{j=0}^{n-1}|A_j|^2\right)^{1/2}\right)\right|\right|\right| &= \left|\left|\left|g\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|^2\right)\right|\right|\right| \\ &\leqslant \left|\left|\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|^2\right)\right|\right|\right| = \frac{1}{n}\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|\right)\right|\right|\right|, \quad (5.1.4)\end{aligned}$$

што је и требало показати. □

Слично, коришћењем истог идентитета и одговарајућих резултата за конкавне функције, добијамо следећи резултат.

Теорема 5.1.2. *Нека су* $A_0, \ldots, A_{n-1} \in \mathcal{C}_\infty(\mathscr{H})$ *и нека* $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *таква да је функција* $g(t) \stackrel{def}{=} f(\sqrt{t})$ *конкавна. Тада је за сваку унитарно инваријантну норму* $|||\cdot|||$

$$\frac{1}{n}\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|\right)\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|f\left(\left(\sum_{j=0}^{n-1}|A_j|^2\right)^{1/2}\right)\right|\right|\right| \leqslant \left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k A_j\right|\right)\right|\right|\right| \quad (5.1.5)$$

Специјално, уколико претходне теореме применимо на степене функције добијамо

Последица 5.1.3. *Нека су* $A_0,\ldots,A_{n-1}\in\mathcal{C}_\infty(\mathscr{H})$. *Тада за сваку унитарно инваријантну норму* $|||\cdot|||$ *важи*

$$n^{-p/2}\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^kA_j\right|^p\right|\right|\right|\leqslant\left|\left|\left|\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left|A_j\right|^2\right)^{p/2}\right|\right|\right|\leqslant\frac{1}{n}\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^kA_j\right|^p\right|\right|\right|,\tag{5.1.6}$$

за $2\leqslant p<+\infty$, *док је за* $0<p\leqslant 2$

$$\frac{1}{n}\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^kA_j\right|^p\right|\right|\right|\leqslant\left|\left|\left|\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left|A_j\right|^2\right)^{p/2}\right|\right|\right|\leqslant n^{-p/2}\left|\left|\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^kA_j\right|^p\right|\right|\right|.\tag{5.1.7}$$

Специјално, уколико је $|||\cdot|||:=\|\cdot\|_1$ и $n:=2$, непосредним рачуном се из неједнакости (5.1.6) може извести класична Кларксон - МекКартијева неједнакост, која за случај $p\geqslant 2$ гласи

$$2\left(\left\|A\right\|_p^p+\left\|B\right\|_p^p\right)\leqslant\left\|A+B\right\|_p^p+\left\|A-B\right\|_p^p\leqslant 2^{p-1}\left(\left\|A\right\|_p^p+\left\|B\right\|_p^p\right),$$

где су $A,B\in\mathcal{C}_p(\mathscr{H})$, док за $0<p\leqslant 2$ важе супротне неједнакости. Другачији доказ ове неједнакости може се наћи у [24, Поглавље 1.9]. Више детаља о Кларксон - МекКартијевој неједнакости у Шатеновим нормама може се наћи и у [21, Теорема 2.7].

5.2 Профињене неједнакости Коши - Шварца и Минковског за p-модификоване норме

У овом одељку применићемо резултате из одељка 2.2. и, слично као и за неједнакост Кларксон - МекКартија, показаћемо како се од њих добијају неједнакости Коши - Шварца и Минковског[1] за p-модификоване норме. Такође, у одређеним класама унитарно инваријантних норми имаћемо и процену разлике између леве и десне стране тих неједнакости. У ту сврху наводимо резултате из [18].

Да бисмо реформулисали резултате одељка 2.2, у форми погодној за реализацију наведеног циља, прво наводимо [15, Последица 2.3].

[1]Минковски - Hermann Minkowski (1864 - 1909)

Лема 5.2.1. *Нека је $0 < p \leqslant q$, као и $\sum_{m=1}^{M} |A_m|^2 = \sum_{n=1}^{N} |B_n|^2$ за неке $A_i, B_j \in \mathcal{C}_\infty(\mathscr{H})$, где је $1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant M$ и нека је $\|\cdot\|_\Phi$ произвољна унитарно инваријантна норма. Тада је за $0 < p \leqslant 2$*

$$M^{\frac{p}{2}-1}\left\|\sum_{m=1}^{M}|A_m|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \leqslant \left\|\left(\sum_{m=1}^{M}A_m^*A_m\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(q)}}^p = \left\|\left(\sum_{n=1}^{N}B_n^*B_n\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(q)}}^p \tag{5.2.1}$$

$$\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{N}|B_n|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \leqslant N^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left(\sum_{n=1}^{N}B_n^*B_n\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(q)}}^p \tag{5.2.2}$$

$$= N^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left(\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(q)}}^p \leqslant N^{1-\frac{p}{2}}\left\|\sum_{m=1}^{M}|A_m|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \leqslant N^{1-\frac{p}{2}}\sum_{m=1}^{M}\|A_m\|_{\Phi^{(q)}}^p. \tag{5.2.3}$$

Уколико је $2 \leqslant p < +\infty$, тада је

$$N^{1-\frac{p}{2}}\left\|\sum_{m=1}^{M}|A_m|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \leqslant N^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left(\sum_{m=1}^{M}A_m^*A_m\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(q)}}^p = N^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left(\sum_{n=1}^{N}B_n^*B_n\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(q)}}^p \tag{5.2.4}$$

$$\leqslant \min\left\{\left\|\sum_{n=1}^{N}|B_n|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}, N^{1-\frac{p}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}\|B_n\|_{\Phi^{(q)}}^2\right)^{\frac{p}{2}}\right\} \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{N}|B_n|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{N}B_n^*B_n\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(q)}}^p \tag{5.2.5}$$

$$= \left\|\left(\sum_{m=1}^{M}A_m^*A_m\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(q)}}^p \leqslant \min\left\{M^{\frac{p}{2}-1}\left\|\sum_{m=1}^{M}|A_m|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}, \left(\sum_{m=1}^{M}\|A_m\|_{\Phi^{(q)}}^2\right)^{\frac{p}{2}}\right\} \tag{5.2.6}$$

$$\leqslant M^{\frac{p}{2}-1}\left\|\sum_{m=1}^{M}|A_m|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \leqslant \max\left\{M^{\frac{p}{2}-1}\left\|\sum_{m=1}^{M}|A_m|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}, \left(\sum_{m=1}^{M}\|A_m\|_{\Phi^{(q)}}^2\right)^{\frac{p}{2}}\right\} \tag{5.2.7}$$

$$\leqslant M^{\frac{p}{2}-1}\sum_{m=1}^{M}\|A_m\|_{\Phi^{(q)}}^p. \tag{5.2.8}$$

Доказ. Прва неједнакост у (5.2.1) следи из Теореме 2.2.6 за конкавну функцију $t \mapsto t^{p/2}$ и $\alpha_i := \frac{1}{M}$. Наредна једнакост је последица претпостављене једнакости $\sum_{m=1}^{M} A_m^*A_m = \sum_{n=1}^{N} B_n^*B_n$, док су неједнакости у (5.2.2) последица Теорема 2.2.9 и 2.2.6 за исту функцију. Прва неједнакост у (5.2.3) је последица Теореме 2.2.9, а последња неједнакост је неједнакост троугла за $\|\cdot\|_{\Phi^{(q/p)}}$ норму, комбинована са чињеницом да је $\left(\Phi^{(q/p)}\right)^{(p)} = \Phi^{(q)}$. Преостали случај $2 \leqslant p < +\infty$ се слично доказује. □

Један од првих резултат који је добијен применом претходне леме се односи на добро познату операторну неједнакост Коши - Шварца, која гласи

$\left|\sum_{n=1}^N A_n^*B_n\right|^2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^N A_n^*A_n\right\| \sum_{n=1}^N B_n^*B_n$. У наредној леми дајемо идентитет из [18, Лема 2.2] на коме се она базира, т.ј, којим се она профињује.

Лема 5.2.2. *Нека су* $\{A_1,\cdots,A_N\}$ *и* $\{B_1,\cdots,B_N\}$ *коначне фамилије у* $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ *заједно са* $X\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. *Тада за све* $c \geqslant \|\sum_{n=1}^N A_n^*A_n\|^{1/2}$ *и* $d>0$ *важе следећи идентитети:*

$$\left|\sum_{n=1}^N A_n^*XB_n\right|^2 + \sum_{n=1}^N \left|A_n\left(cI+\sqrt{c^2I-\sum_{n=1}^N A_n^*A_n}\right)^{-1}\sum_{m=1}^N A_m^*XB_m - cXB_n\right|^2 = c^2\sum_{n=1}^N |XB_n|^2, \quad (5.2.9)$$

$$\sum_{n=1}^N \left|A_n\left(dI+\sqrt{d^2I+\sum_{n=1}^N A_n^*A_n}\right)^{-1}\sum_{m=1}^N A_m^*XB_m + dXB_n\right|^2 = \left|\sum_{n=1}^N A_n^*XB_n\right|^2 + d^2\sum_{n=1}^N |XB_n|^2. \quad (5.2.10)$$

Самим тим је

$$\left|\sum_{n=1}^N A_n^*XB_n\right|^2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^N A_n^*A_n\right\| \sum_{n=1}^N B_n^*X^*XB_n, \quad (5.2.11)$$

а неопходан и довољан услов да важи једнакост у (5.2.11) *јесте да постоји* $D\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ *такав да*

$$A_nD = XB_n \quad \text{за све } n=1,\cdots,N \quad \text{и} \quad (5.2.12)$$

$$\left(\left\|\sum_{n=1}^N A_n^*A_n\right\| - \sum_{n=1}^N A_n^*A_n\right)D = 0. \quad (5.2.13)$$

Доказ. Идентитет (5.2.9) је последица следећег непосредног рачуна

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-cXB_n\right|^2=\left(\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m\right)^*\\
&\times\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m\\
&-2c\Re\left(\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m\right)^*\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+c^2\sum_{n=1}^{N}B_n^*X^*XB_n\\
&=-\left(\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m\right)^*\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(c^2I+2c\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right.\\
&\left.+c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+c^2\sum_{n=1}^{N}B_n^*X^*XB_n\\
&=c^2\sum_{n=1}^{N}B_n^*X^*XB_n-\left|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^2,
\end{aligned}
$$

што је еквивалентно са (5.2.9). Доказ (5.2.10) је аналоган.

Приметимо прво да у случају једнакости у (5.2.11), због хомогености дате неједнакости, можемо претпоставити $\|\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\|=1$. Што се неопходности услова (5.2.12) и (5.2.13) тиче, видимо да је довољно да узмемо да је $D\overset{def}{=}\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n$ одакле из израза (5.2.9) видимо да је задовољен услов (5.2.12). Даље, у овом случају имамо

$$
\begin{aligned}
D&=\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_n^*A_nD\\
&=\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(I-\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)D\\
&=D-\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}D,
\end{aligned}
$$

одакле имамо $\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}D=0$, а самим тим и $\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)D=0$, што је услов (5.2.13).

Довољност датих услова следи директно из

$$
\left|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^2=D^*\left(\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^2D=D^*\left(\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)D=\sum_{n=1}^{N}B_n^*X^*XB_n,
$$

што завршава доказ. $\square$

Самим тим, на основу (5.2.11), за сваку симетричну нормирајућу функцију Φ важи

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big\|_{\Phi} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\Phi}. \tag{5.2.14}$$

Важније, израз (5.2.9) нам омогућава да даље профинимо неједнакост Коши - Шварца (5.2.14) за елементарне операторе, како је то урађено у [18, Теорема 2.3].

Теорема 5.2.3. *Ако је под претпоставкама Леме* 5.2.2 *још и* $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathscr{H})$, *тада је за све симетричне нормирајуће функције* Φ

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} &= \Big\|\Big(\Big|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big\|\Big(\Big|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^2 + \sum_{n=1}^{N}\Big|A_n\Big(\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} I \\ &+ \Big(\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\| I - \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{-1} \sum_{m=1}^{N} A_m^* X B_m - \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} X B_n\Big|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \\ &= \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\Phi^{(p)}},\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

за све $0 < p \leqslant 2$, *док је за све* $2 \leqslant p < +\infty$

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} &= \Big\|\Big|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^p\Big\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big\|\Big|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\Big|^p + \sum_{n=1}^{N}\Big|A_n\Big(\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} I \\ &+ \Big(\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\| I - \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{-1} \sum_{m=1}^{N} A_m^* X B_m - \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} X B_n\Big|^p\Big\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

$$\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\|\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n\Big\|_{\Phi^{(p/2)}}^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2.17}$$

Уколико се фамилија $\{B_1, \cdots, B_N\}$ *додатно састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, тада се последњи израз у неједнакости* (5.2.17) *може даље проценити са* $\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\|^{\frac{1}{2}} \big\|X\big(\sum_{n=1}^{N} B_n^* B_n\big)^{\frac{1}{2}}\big\|_{\Phi^{(p)}}$.

Доказ. Неједнакости у изразима (5.2.15) и (5.2.16) следе из монотоности унитарно инваријантних норми, док последња једнакост у изразу (5.2.15) следи из идентитета (5.2.9). Неједнакост у (5.2.17) следи из

$$\begin{aligned}
&\left\|\left|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\right|^p + \sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(\left\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\right\|^{\frac{1}{2}} I + \left(\left\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\right\| I - \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \sum_{m=1}^{N} A_m^* X B_m\right.\right.\\
&\left.\left.- \left\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\right\|^{\frac{1}{2}} X B_n\right|^p\right\|_{\Phi}^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \left\|\left|\sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n\right|^2 + \sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(\left\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\right\|^{\frac{1}{2}} I\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+\left(\left\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\right\| I - \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \sum_{m=1}^{N} A_m^* X B_m - \left\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\right\|^{\frac{1}{2}} X B_n\right|^2\right\|_{\Phi^{(p/2)}}^{\frac{1}{2}}\\
&= \left\|\sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n\right\|^{\frac{1}{2}} \left\|\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n\right\|_{\Phi^{(p/2)}}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

на основу последње неједнакости у (5.2.5).

Даље, уколико је $\{B_1, \cdots, B_N\}$ фамилија међусобно комутирајућих нормалних оператора, тада је

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(p)}} &= \left\|\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n\right\|_{\Phi^{(p/2)}}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{N} B_n^* B_n\right)^{\frac{1}{2}} X^* X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n^* B_n\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(p/2)}}^{\frac{1}{2}} = \left\|X\left(\sum_{n=1}^{N} B_n^* B_n\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(p)}},
\end{aligned}$$

на основу Теореме 4.1.1 и чињенице да је $\|\cdot\|_{\Phi^{(p/2)}}$ унитарно инваријантна норма за све $p \geqslant 2$. □

Директном применом Леме 5.2.1 на идентитете (5.2.9) и (5.2.10) даље профињујемо претходну неједнакост, како је то показано у [18, Последица 2.4].

Последица 5.2.4. *Ако је под претпоставкама Леме* 5.2.2 *још и* $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(q)}}(\mathscr{H})$, *тада је за све* $0<p\leqslant q$ *и све симетричне нормирајуће функције* Φ

$$(N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left\|\left|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-cXB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant c^p\left\|\left(\sum_{n=1}^{N}\left|B_nX^*XB_n\right|^{\frac{1}{2}}\right)\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\leqslant c^p\left\|\sum_{n=1}^{N}\left|XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant N^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-cXB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant N^{1-\frac{p}{2}}\left(\left\|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{N}\left\|A_n\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-cXB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right),\tag{5.2.18}$$

за $0<p\leqslant 2$, *док је за* $2\leqslant p<+\infty$

$$N^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-cXB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant c^p\left\|\sum_{n=1}^{N}\left|XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}\leq c^p\left\|\left(\sum_{n=1}^{N}\left|B_nX^*XB_n\right|^{\frac{1}{2}}\right)\right\|_{\Phi^{(q)}}^p$$
$$\leqslant (N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left\|\left|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-cXB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant (N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left(\left\|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{N}\left\|A_n\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-cXB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right).\tag{5.2.19}$$

Такође, за $0 < p \leqslant 2$ *је*

$$
\begin{aligned}
& N^{\frac{p}{2}-1}\left\|\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(dI+\left(d^2I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+dXB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\
& \leqslant \left\|\left|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+d^p\sum_{n=1}^{N}\left|XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\
& \leqslant (N+1)^{1-\frac{p}{2}}\left\|\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(dI+\left(d^2I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+dXB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\
& \leqslant (N+1)^{1-\frac{p}{2}}\sum_{n=1}^{N}\left\|A_n\left(dI+\left(d^2I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+dXB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p, \qquad (5.2.20)
\end{aligned}
$$

док је за $2 \leqslant p < +\infty$

$$
\begin{aligned}
& (N+1)^{1-\frac{p}{2}}\left\|\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(dI+\left(d^2I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+dXB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\
& \leqslant \left\|\left|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+d^p\sum_{n=1}^{N}\left|XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\
& \leqslant N^{\frac{p}{2}-1}\left\|\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(dI+\left(d^2I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+dXB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\
& \leqslant N^{\frac{p}{2}-1}\sum_{n=1}^{N}\left\|A_n\left(dI+\left(d^2I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+dXB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p. \qquad (5.2.21)
\end{aligned}
$$

Доказ. Директном применом Леме 5.2.1 на идентитет (5.2.9) добијамо неједнакости (5.2.18) и (5.2.19), а њеном применом на идентитет (5.2.10) добијамо неједнакости (5.2.20) и (5.2.21). □

Још једна последица Леме 5.2.2, која је приказана у [18, Теорема 2.5] каже да уколико је оператор $\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n$ контракција, претходне неједнакости могу се једноставније изразити.

Теорема 5.2.5. *Ако је под претпоставкама Леме* 5.2.2 *још* $\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n \leqslant I$ *и*

$X\in\mathcal{C}_{\Phi^{(q)}}(\mathscr{H})$, *тада је за све* $0<p\leqslant q$ *и све симетричне нормирајуће функције* Φ

$$(N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left\|\left|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant\left\|\left|\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)X\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_nX-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant(N+1)^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant(N+1)^{1-\frac{p}{2}}\left(\left\|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{N}\left\|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right)\tag{5.2.22}$$

за $0<p\leqslant 2$, *док је за све* $2\leqslant p<+\infty$

$$(N+1)^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant\left\|\left|\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)X\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_nX-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant(N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left\|\left|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$$
$$\leqslant(N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left(\left\|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{N}\left\|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right).\tag{5.2.23}$$

Такође, за $0 < p \leqslant q$ *је*

$$
\begin{aligned}
&(N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left\|\left|X+\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_nX-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{\left(\frac{q}{p}\right)}}\\
&\leqslant\left\|\left|\left(I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)X\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{\left(\frac{q}{p}\right)}}\\
&\leqslant(N+1)^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left|X+\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_nX-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{\left(\frac{q}{p}\right)}}\\
&\leqslant(N+1)^{1-\frac{p}{2}}\left(\left\|X+\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p+\sum_{n=1}^{N}\left\|A_nX-XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right),
\end{aligned}
\tag{5.2.24}
$$

док је за $2 \leqslant p < +\infty$

$$
\begin{aligned}
&(N+1)^{1-\frac{p}{2}}\left\|\left|X+\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_nX-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{\left(\frac{q}{p}\right)}}\\
&\leqslant\left\|\left|\left(I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}X\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{\left(\frac{q}{p}\right)}}\\
&\leqslant(N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left\|\left|X+\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^p+\sum_{n=1}^{N}\left|A_nX-XB_n\right|^p\right\|_{\Phi^{\left(\frac{q}{p}\right)}}\\
&\leqslant(N+1)^{\frac{p}{2}-1}\left(\left\|X+\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p+\sum_{n=1}^{N}\left\|A_nX-XB_n\right\|_{\Phi^{(q)}}^p\right).
\end{aligned}
\tag{5.2.25}
$$

Доказ. Да бисмо добили неједнакости (5.2.22) и (5.2.23), све што треба јесте да применимо Лему 5.2.1 на идентитет

$$
\begin{aligned}
&\left|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^2+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\right|^2\\
&\qquad=\left|\left(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}X\right|^2+\sum_{n=1}^{N}\left|A_nX-XB_n\right|^2,
\end{aligned}
\tag{5.2.26}
$$

док за добијање неједнакости (5.2.24) и (5.2.25) треба да применимо Лему 5.2.1 на идентитет

$$
\begin{aligned}
&\left|X+\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\right|^2+\sum_{n=1}^{N}\left|A_nX-XB_n\right|^2\\
&\qquad=\left|\left(I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}X\right|^2+\sum_{n=1}^{N}\left|A_n\left(I+\left(I+\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m+XB_n\right|^2.
\end{aligned}
\tag{5.2.27}
$$

Заиста, због (5.2.9) важи

$$\begin{aligned}
&\Big|X-\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\Big|^2+\sum_{n=1}^{N}\Big|A_n\Big(I+\Big(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\Big)^{\frac12}\Big)^{-1}\sum_{m=1}^{N}A_m^*XB_m-XB_n\Big|^2\\
&=X^*X-2\Re\sum_{n=1}^{N}X^*A_n^*XB_n+\Big|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\Big|^2+\sum_{n=1}^{N}B_n^*X^*XB_n-\Big|\sum_{n=1}^{N}A_n^*XB_n\Big|^2\\
&=X^*X-\sum_{n=1}^{N}X^*A_n^*A_nX+\sum_{n=1}^{N}\Big|A_nX-XB_n\Big|^2=\Big|\Big(I-\sum_{n=1}^{N}A_n^*A_n\Big)^{\frac12}X\Big|^2+\sum_{n=1}^{N}|A_nX-XB_n|^2,
\end{aligned}$$

што доказује (5.2.26). Идентитет (5.2.27) се показује слично. $\square$

Сада смо у могућности да представимо и следеће профињење неједнакости Минковског за p-модификоване норме, доказане у [18, Теорема 2.6].

Теорема 5.2.6. *Уколико је $p\geqslant 2$, тада за све симетричне нормирајуће функције Φ и све $C_1,\cdots,C_N\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathscr{H})$ важи*

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{n=1}^{N}C_n\Big\|_{\Phi^{(p)}}^{p}\\
&\leqslant\Bigg\|\Big|\sum_{n=1}^{N}C_n\Big|^p+\Big(\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}\Big)^{-\frac{p}{2}}\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}^{-\frac{p}{2}}\Big|\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}\sum_{m=1}^{N}C_m-\sum_{m=1}^{N}\|C_m\|_{\Phi^{(p)}}C_n\Big|^p\Bigg\|_{\Phi}\\
&\qquad\leqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}^{1-p}}{\Big(\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}\Big)^{1-p}}\big\||C_n|^p\big\|_{\Phi}=\Big(\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}\Big)^{p}. \qquad (5.2.28)
\end{aligned}$$

Једнакост у (5.2.28) се достиже ако и само ако су сви C_n међусобно пропорционални са неким позитивним коефицијентом пропорционалности.

Специјално, када је $\|\cdot\|_\Phi$ нуклеарна норма $\|\cdot\|_1$, неједнакост (5.2.28) се може записати и као

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{n=1}^{N}C_n\Big\|_p^p\leq\Big\|\sum_{n=1}^{N}C_n\Big\|_p^p+\Big(\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_p\Big)^{-\frac{p}{2}}\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_p^{-\frac{p}{2}}\Big\|\|C_n\|_p\sum_{m=1}^{N}C_m-\sum_{m=1}^{N}\|C_m\|_pC_n\Big\|_p^p\\
\leqslant\Big(\sum_{n=1}^{N}\|C_n\|_p\Big)^p. \quad (5.2.29)
\end{aligned}$$

Доказ. Покажимо прво специјални случај идентитета (5.2.9), где за операторе $C_1,\cdots,C_N$ и скаларе $\alpha_1,\cdots,\alpha_N \in (0,1)$, за које је $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = 1$, важи

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} C_n\Big|^2 + \sum_{n=1}^{N}\Big|\sqrt{\alpha_n}\sum_{m=1}^{N} C_m - \frac{C_n}{\sqrt{\alpha_n}}\Big|^2 = \sum_{n=1}^{N}\frac{|C_n|^2}{\alpha_n}. \tag{5.2.30}$$

Заиста, све што треба да би показали (5.2.30) јесте да узмемо $X := I$, $A_n := \sqrt{\alpha_n} I$ и $B_n := \frac{C_n}{\sqrt{\alpha_n}}$ за $n = 1,\cdots,N$ и $c = 1$ у (5.2.9).

Из (5.2.30), за $p \geqslant 2$ даље добијамо

$$\begin{aligned}\bigg\|\Big|\sum_{n=1}^{N} C_n\Big|^p + \sum_{n=1}^{N}\Big|\sqrt{\alpha_n}\sum_{m=1}^{N} C_m - \frac{C_n}{\sqrt{\alpha_n}}\Big|^p\bigg\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} &\leqslant \bigg\|\bigg(\sum_{n=1}^{N}\frac{|C_n|^2}{\alpha_n}\bigg)^{\frac{p}{2}}\bigg\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \\ &\leqslant \bigg\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\frac{|C_n|^p}{\alpha_n^p}\bigg\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \leq \sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{1-p}\big\||C_n|^p\big\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}.\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

Избором $p := q$ и $\alpha_n := \frac{\|C_n\|_{\Phi^{(p)}}}{\sum_{m=1}^{N}\|C_m\|_{\Phi^{(p)}}}$ у (5.2.31), добијамо последњу неједнакост у (5.2.28). □

Приметимо да Теорема 5.2.6 даје n алтернативних сабирака при профињењу неједнакости Минковског, док их у [10, Последица 2.1] има $\frac{n(n-1)}{2}$.

5.3 Профињене Грисове неједнакости за p-модификоване норме

У овом одељку, одредићемо изједначавајуће сабирке у операторној Ландау[2] - Грисовој[3] неједнакости и на њих применити Лему 5.2.1. Детаљи овог поглавља могу се наћи у [16], а излагање почињемо формулацијом полазног идентитета којим се профињује операторна Ландау - Грисова неједнакост.

Лема 5.3.1. *Нека су $\alpha_n \in (0,1]$ за $n = 1,\cdots,N$ такви да је $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = 1$. Ако су $\{A_1,\ldots,A_N\}$ и $\{B_1,\ldots,B_N\}$ заједно са X ограничени оператори, тада је за све*

[2] Ландау - Edmund Landau (1877 - 1938)

[3] Грис - Gerhard Grüss (1902 - 1950)

$c \geqslant \left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right\|^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^{N} B_n\Big)\right|^2 \\
&+ \sum_{1\le m<n\le N} \alpha_m \alpha_n \left|(\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n)\left(cI + \left(c^2 I - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right. \\
&\times \left.\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^{N} B_n\Big)\right) - cX(\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n)\right|^2 \\
&= c^2 \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left|X \sum_{n=1}^{N} B_n\right|^2\right),
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

а специјално, за све $c \geqslant \left\|N \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n - \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right\|^{\frac{1}{2}}$ *је*

$$\begin{aligned}
&\left|N \sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right|^2 \\
&+ \sum_{1\le m<n\le N} \left|(A_m - A_n)\left(cI + \left(c^2 I - N \sum_{n=1}^{N} A_n^* A_n + \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right. \\
&\times \left.\left(N \sum_{n=1}^{N} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right) - cX(B_m - B_n)\right|^2 \\
&= c^2 \left(N \sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n - \left|X \sum_{n=1}^{N} B_n\right|^2\right).
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Доказ. Полазећи од специјалног случаја идентитета Коркиновог[4] типа (2.3) из [17] за вероватносну меру μ дефинисану са $\mu(\{n\}) \overset{def}{=} \alpha_n$ за $1 \leqslant n \leqslant N$, који примењен на операторе $\frac{A_n}{\alpha_n}$ и $\frac{B_n}{\alpha_n}$ уместо A_n и B_n тим редом, добијамо

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant m<n\leqslant N} \alpha_m \alpha_n \big(\alpha_m^{-1} A_m^* - \alpha_n^{-1} A_n^*\big) X \big(\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n\big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{N} \alpha_m \alpha_n \big(\alpha_m^{-1} A_m^* - \alpha_n^{-1} A_n^*\big) X \big(\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n\big) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^{N} B_n\Big).
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

[4]Коркин - Александар Коркин (1837 - 1908)

Уколико означимо $C \stackrel{def}{=} \left(cI + \left(c^2 I - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \left|\sum_{n=1}^N A_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ и $D \stackrel{def}{=} \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^N A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^N B_n\right)$, лева страна израза (5.3.1) постаје

$$
\begin{aligned}
& D^*D + \sum_{1\le m<n\le N} \alpha_m\alpha_n \left|\left(\alpha_m^{-1}A_m - \alpha_n^{-1}A_n\right)CD - cX\left(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n\right)\right|^2 \\
= {} & D^*D + \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^N \alpha_m\alpha_n \left|(\alpha_m^{-1}A_m - \alpha_n^{-1}A_n)CD - cX(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n)\right|^2 \qquad (5.3.4) \\
= {} & D^*D + \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^N \alpha_m\alpha_n \left|\left(\alpha_m^{-1}A_m - \alpha_n^{-1}A_n\right)CD\right|^2 \qquad (5.3.5) \\
- {} & c\Re \sum_{m,n=1}^N \alpha_m\alpha_n \left(\alpha_m^{-1}D^*CA_m^* - \alpha_n^{-1}D^*CA_n^*\right)X\left(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n\right) \qquad (5.3.6) \\
+ {} & \frac{c^2}{2}\sum_{m,n=1}^N \alpha_m\alpha_n \left|X\left(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n\right)\right|^2 \qquad (5.3.7) \\
= {} & D^*D + D^*C\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1}A_n^*A_n - \left|\sum_{n=1}^N A_n\right|^2\right)CD \qquad (5.3.8) \\
- {} & 2c\Re D^*C\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1}A_n^*XB_n - \left(\sum_{n=1}^N A_n^*\right)X\left(\sum_{n=1}^N B_n\right)\right) \qquad (5.3.9) \\
+ {} & c^2\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n - \left|X\sum_{n=1}^N B_n\right|^2\right) \qquad (5.3.10) \\
= {} & D^*C\left(C^{-2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1}A_n^*A_n - \left|\sum_{n=1}^N A_n\right|^2 - 2cC^{-1}\right)CD \qquad (5.3.11) \\
+ {} & c^2\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n - \left|X\sum_{n=1}^N B_n\right|^2\right) \\
= {} & D^*C\left(\left(C^{-1} - cI\right)^2 - c^2I + \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1}A_n^*A_n - \left|\sum_{n=1}^N A_n\right|^2\right)CD \qquad (5.3.12) \\
+ {} & c^2\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n - \left|X\sum_{n=1}^N B_n\right|^2\right) \\
= {} & c^2\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n - \left|X\sum_{n=1}^N B_n\right|^2\right),
\end{aligned}
$$

будући да израз (5.3.12) нестаје сагласно самој дефиницији оператора C. Формула за ограничене операторе

$$|A+B|^2 = |A|^2 + A^*B + B^*A + |B|^2 = |A|^2 + 2\Re A^*B + |B|^2$$

је коришћена за развој израза (5.3.4) у изразе (5.3.5), (5.3.6) и (5.3.7). Други сабирак у (5.3.8) се добија из другог сабирка из (5.3.5) применом идентитета (5.3.3) за $X := I$ и A_nCD уместо A_n и B_n. Сабирак (5.3.9) је добијен из (5.3.6) применом (5.3.3) на A_nCD уместо A_n, док је сабирак (5.3.10) добијен из (5.3.7) опет применом (5.3.3) на XB_n уместо A_n. На крају је и дефиниција оператора D примењена на (5.3.9) да би се добио израз (5.3.11).

Заменом $\alpha_1 := \cdots := \alpha_N := \frac{1}{N}$ добијамо (5.3.2), као једну од често коришћених форми операторних неједнакости Ландау - Гриса. $\square$

Последица 5.3.2. *Под претпоставкама Леме* 5.3.1*, за све* $0 < p \leqslant 2$ *важи*

$$\left|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^N A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^N B_n\right)\right|^p$$
$$\leq \left\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left|\sum_{n=1}^N A_n\right|^2\right\|^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left|X \sum_{n=1}^N B_n\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}, \tag{5.3.13}$$

Доказ. Неједнакост (5.3.13) следи директно из идентитета (5.3.1), узимањем да је $c := \left\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left|\sum_{n=1}^N A_n\right|^2\right\|^{\frac{1}{2}}$, као и због чињенице да је функција $t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$ операторна монотоно растућа на $[0, +\infty)$ за све $0 < p \leqslant 2$. $\square$

Из идентитета (5.3.1) се применом Леме 5.2.1 добијају профињене неједнакости Ландау - Гриса за p-модификоване норме.

Теорема 5.3.3. *Под претпоставкама Леме* 5.3.1 *је за све* $p > 0$

$$\left\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^N A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^N B_n\right)\right\|_{\Phi^{(p)}}$$
$$\leqslant \left\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left|\sum_{n=1}^N A_n\right|^2\right\|^{\frac{1}{2}} \left\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left|X \sum_{n=1}^N B_n\right|^2\right\|_{\Phi^{(p/2)}}, \tag{5.3.14}$$

за све унитарно инваријантне норме $\|\cdot\|_\Phi$.

Уколико је још и $2 \leqslant p \leqslant q < +\infty$, *тада је додатно*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right) \right\|_{\Phi^{(q)}}^{p} \tag{5.3.15}$$

$$\begin{aligned} \leqslant \quad & \Bigg\| \left| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right) \right|^{p} \\ & + \sum_{1 \leq m < n \leq N} \alpha_m^{\frac{p}{2}} \alpha_n^{\frac{p}{2}} \Bigg| (\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n) \left(cI + \left(c^2 I - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \left| \sum_{n=1}^{N} A_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \\ & \times \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right) \right) - cX (\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n) \Bigg|^{p} \Bigg\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}} \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

$$\leqslant \; c^p \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} B_n^*\right) X^* X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right) \right\|_{\Phi^{(\frac{q}{2})}}^{\frac{p}{2}}. \tag{5.3.17}$$

Уколико се фамилија $\{B_n\}_{n=1}^{N}$ *састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, тада се израз у* (5.3.17) *може даље проценити са*

$$c^p \left\| X \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} B_n^* B_n - \left| \sum_{n=1}^{N} B_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\Phi^{(q)}}^{p}. \tag{5.3.18}$$

Слично, уколико се фамилија $\{A_n\}_{n=1}^{N}$ *састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, тада*

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right) \right\|_{\Phi^{(q)}}^{p} \\ & \qquad \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} B_n^* B_n - \left| \sum_{n=1}^{N} B_n \right|^2 \right\|^{\frac{p}{2}} \left\| \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^{N} A_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} X \right\|_{\Phi^{(q)}}^{p}. \end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Специјално, када је $p \geqslant 2$, за Шатенове p-норме имамо

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*XB_n-\left(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\right)X\left(\sum_{n=1}^{N}B_n\right)\right\|_p^p \tag{5.3.20}$$

$$+\sum_{1\leq m<n\leq N}\alpha_m^{\frac{p}{2}}\alpha_n^{\frac{p}{2}}\left\|(\alpha_m^{-1}A_m-\alpha_n^{-1}A_n)\left(cI+\left(c^2I-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*A_n+\left|\sum_{n=1}^{N}A_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right.$$

$$\left.\times\ \left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*XB_n-\left(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\right)X\left(\sum_{n=1}^{N}B_n\right)\right)-cX(\alpha_m^{-1}B_m-\alpha_n^{-1}B_n)\right\|_p^p \tag{5.3.21}$$

$$\leqslant\ c^p\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n-\left(\sum_{n=1}^{N}B_n^*\right)X^*X\left(\sum_{n=1}^{N}B_n\right)\right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \tag{5.3.22}$$

$$\leqslant\ c^p\left\|X\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left|\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*B_n-\left|\sum_{n=1}^{N}B_n\right|^2\right)^{\frac{p}{4}-1}\left(\alpha_n^{-1}B_n-\sum_{n=1}^{N}B_n\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_p^p. \tag{5.3.23}$$

Доказ. Неједнакост (5.3.14) је последица неједнакости (5.3.13), својстава монотоности сингуларних вредности и унитарно инваријантних норми, као и чињенице да је функција $t\mapsto t^p$ монотоно растућа на $[0,+\infty)$ за све $p>0$.

Случај $2\leqslant p\leqslant q$ добија се применом (5.2.5) из Леме 5.2.1 на идентитет (5.3.1).

Уколико се фамилија $\{B_n\}_{n=1}^N$ састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, применом [17, Теорема 2.1], на вероватносни простор (већ коришћен у доказу Леме 5.3.1) који се састоји од N тачака, од којих свака има меру α_n и фамилију оператора $\left\{\alpha_n^{-1}B_n\right\}_{n=1}^N$, добијамо

$$c^p\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n-\left(\sum_{n=1}^{N}B_n^*\right)X^*X\left(\sum_{n=1}^{N}B_n\right)\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{2})}}^{\frac{p}{2}}$$

$$\leqslant c^p\left\|\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*B_n-\left|\sum_{n=1}^{N}B_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}X^*X\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*B_n-\left|\sum_{n=1}^{N}B_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{2})}}^{\frac{p}{2}}.$$

Како је последњи израз једнак десној страни у (5.3.18), тиме се доказ овог дела теореме завршава.

У случају када се фамилија $\{A_n\}_{n=1}^N$ састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора, избором $c:=\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*A_n-\left|\sum_{n=1}^{N}A_n\right|^2\right\|^{\frac{1}{2}}$ и заменама

A_n, X и B_n у (5.3.18) са B_n, X^* и A_n респективно, добијамо (5.3.19).

Даље, неједнакости од (5.3.20) до (5.3.22) следе применом неједнакости од (5.3.15) до (5.3.17) за случај $p := q \geq 2$ и нуклеарну норму $\|\cdot\|_\Phi := \|\cdot\|_1$, док последња неједнакост у (5.3.23) следи применом [17, Теорема 2.4] на израз у (5.3.22), узимањем X^*X уместо X, $\frac{p}{2}$ уместо p, $q := r := \frac{p}{2}, \alpha_n^{-1} B_n$ уместо и A_n^* и B_n, као и $\mu(\{n\}) \stackrel{def}{=} \alpha_n$ за $n = 1, \ldots, N$. $\square$

Избором $c := \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^N A_n \right|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}$ у изразима (5.3.20) до (5.3.23), видимо да се овиме побољшава неједнакост Ландауовог типа дата у [17, Теорема 2.4], у овом специјалном случају вероватносног простора, додавањем позитивних сабирака на леву страну разматране неједнакости.

Референце

[1] T. Ando. Comparison of Norms $|||f(A)-f(B)|||$ and $|||f(|A-B|)|||$. *Mathematische Zeitschrift*, 197(3):403–409, 1988.

[2] T. Ando and X. Zhan. Norm Inequalities Related to Operator Monotone Functions. *Mathematische Annalen*, 315(4):771–780, 1999.

[3] J. S. Aujla and F. C. Silva. Weak Majorization Inequalities and Convex Functions. *Linear Algebra and its Applications*, 369:217 – 233, 2003.

[4] R. Bhatia. *Matrix Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1996.

[5] R. Bhatia and C. Davis. More Matrix Forms of the Arithmetic-Geometric Mean Inequality. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 14(1):132–136, 1993.

[6] J.-C. Bourin and M. Uchiyama. A Matrix Subadditivity Inequality for $f(A+B)$ and $f(A)+f(B)$. *Linear Algebra and its Applications*, 423(2–3):512 – 518, 2007.

[7] J.L. Daleckii and M.G. Krein. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 2002.

[8] J. Diestel and J.J. Uhl. *Vector Measures*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1977.

[9] I. Gohberg and M.G. Krein. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1988.

[10] O. Hirzallah and F. Kittaneh. Non-commutative Clarkson Inequalities for n-Tuples of Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 60(3):369–379, 2008.

[11] D. R. Jocić. Cauchy-Schwarz and Means Inequalities for Elementary Operators into Norm Ideals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(9):2705–2711, 1998.

[12] D. R. Jocić. The Cauchy–Schwarz Norm Inequality for Elementary Operators in Schatten Ideals. *Journal of the London Mathematical Society*, 60(3):925, 1999.

[13] D. R. Jocić. Cauchy–Schwarz Norm Inequalities for Weak*-Integrals of Operator Valued Functions. *Journal of Functional Analysis*, 218(2):318 – 346, 2005.

[14] D. R. Jocić. Multipliers of Elementary Operators and Comparison of Row and Column Space Schatten p norms. *Linear Algebra and its Applications*, 431(11):2062 – 2070, 2009.

[15] D. R. Jocić. Clarkson–McCarthy Inequalities for Several Operators and Related Norm Inequalities for p-Modified Unitarily Invariant Norms. *Complex Analysis and Operator Theory*, Електронски објављен 23.9.2017. DOI 10.1007/s11785-017-0724-y 2017.

[16] D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, P. Melentijević, and S. Milošević. Refinements of Inequalities Related to Landau–Grüss Inequalities for Elementary Operators Acting on Ideals Associated to p-Modified Unitarily Invariant Norms. *Complex Analysis and Operator Theory*, Електронски објављен 20.12.2016. DOI 10.1007/s11785-016-0622-8 2016.

[17] D. R Jocić, Đ. Krtinić, and M. S. Moslehian. Landau and Gruss Type Inequalities for Inner Product Type Integral Transformers in Norm Ideals. *Mathematical Inequalities and Applications*, 16(1):109–125, 2013.

[18] D. R. Jocić and S. Milošević. Refinements of Operator Cauchy–Schwarz and Minkowski Inequalities For p-Modified Norms and Related Norm Inequalities. *Linear Algebra and its Applications*, 488:284 – 301, 2016.

[19] D. R. Jocić, S. Milošević, and V. Đ urić. Norm Inequalities for Elementary Operators and Other Inner Product Type Integral Transformers with the Spectra Contained in the Unit Disc. *Filomat*, 31(2):197–206, 2017.

[20] T. Kosem. Inequalities Between $||f(A+B)||$ and $||f(A)+f(B)||$. *Linear Algebra and its Applications*, 418(1):153 – 160, 2006.

[21] C. A. McCarthy. C_p. *Israel Journal of Mathematics*, 5(4):249–271, Oct 1967.

[22] S. Milošević. Norm Inequalities for Elementary Operators Related to Contractions and Operators with Spectra Contained in the Unit Disk in Norm Ideals. *Advances in Operator Theory*, 1(2):147–159, 2016.

[23] B.S. Nagy, C. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*. Universitext. Springer New York, 2010.

[24] B. Simon. *Trace Ideals and Their Applications*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2010.

[25] M. Uchiyama. Subadditivity of Eigenvalue Sums. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(5):1405–1412, 2006.

Биографија кандидата

Стефан Милошевић рођен је 1988. године. Математички факултет у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписао је 2007. године и дипломирао 2011. године, са просечном оценом 9,63. Исте године уписао је Мастер студије на Матаматичком факултету у Београду, студијски програм Математика, модул Теоријска математика и примене и положио све испите са просечном оценом 10. Мастер рад под насловом „Бесконачнодимензионе квантне групе” одбранио је 2012. године (ментор проф. др Зоран Ракић). Докторске студије на Математичком факултету у Београду, модул Теоријска математика и примене, уписао је 2012. године и положио испите предвиђене планом и програмом студија са просечном оценом 10. Од 2011. до 2014. године радио је као сарадник у настави, а од 2014. године до данас ради као асистент за научну област Математичка анализа на Математичком факултету Универзитета у Београду.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Милошевић Стефан

број уписа 2033/2012

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним p–модификованим нормама и њиховим дуалима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 10.11.2017

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _Милошевић Стефан_______________________

Број уписа _2033/2012_________________________________

Студијски програм _Математика___________________________

Наслов рада _Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним *p*-модификованим нормама и њиховим дуалима_______________________________

Ментор _проф. др Данко Јоцић______________________________

Потписани _Стефан Милошевић_________________________

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, _10.11.2017_______________

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Елементарни оператори и трансформације типа скаларног производа на идеалима компактних оператора генерисаним p-модификованим нормама и њиховим дуалима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, _10.11.2017____________

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.