УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милица Д. Макрагић

# О ПРСТЕНУ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ПОЛИНОМА СА ПРИМЕНАМА У ТЕОРИЈИ АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

БЕОГРАД, 2018.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Milica D. Makragić

# ON TRIGONOMETRIC POLYNOMIAL RING WITH APPLICATIONS IN THE THEORY OF ANALYTIC INEQUALITIES

DOCTORAL DISSERTATION

BELGRADE, 2018.

МЕНТОР:

др Бранко Малешевић,
редовни професор, Електротехнички факултет Универзитета у Београду

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

др Александар Липковски,
редовни професор, Математички факултет Универзитета у Београду

др Зоран Петровић,
редовни професор, Математички факултет Универзитета у Београду

др Небојша Икодиновић,
ванредни професор, Математички факултет Универзитета у Београду

Датум одбране:

______________________

*Посвећено*
*ћерки Јани*

# О ПРСТЕНУ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ПОЛИНОМА СА ПРИМЕНАМА У ТЕОРИЈИ АНАЛИТИЧКИХ НЕЈЕДНАКОСТИ


## САЖЕТАК

Ова докторска дисертација састоји се из два дела. Централна тема првог дела дисертације су прстени тригонометријских полинома. Приказано је да је прстен комплексних тригонометријских полинома, $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, домен са једнозначном факторизацијом, док прстен реалних тригонометријских полинома, $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, није домен са једнозначном факторизацијом. Дати су потребни и довољни услови за случај када у прстену $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, за разлику од прстена $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, степен производа два тригонометријска полинома није једнак збиру степена његових фактора.

Теорија тригонометријских полинома проширена је на хиперболичко-тригонометријске полиноме, скраћено ХТ-полиноме, који су дефинисани по угледу на тригонометријске полиноме. Реални односно комплексни ХТ-полиноми образују прстен, штавише интегрални домен $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$, односно $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$. Разматрана је факторизација у овим доменима и показано је да су то домени са једнозначном факторизацијом. Одређени су нерастављиви елементи, као и облик максималних идеала оба ова домена. Разматрани су алгоритми за дељење, факторисање, налажење највећих заједничких делитеља, као и алгоритми за упрошћавање количника два ХТ-полинома над пољем рационалних бројева.

У другом делу дисертације, који се односи на примене, описана су два метода доказивања неједнакости облика $f(x) > 0$ над датим коначним интервалом $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a \leq 0 \leq b$, који коришћењем коначних Маклореновых развоја генеришу полиномске апроксимације, када је функција $f(x)$ елемент раширења прстена $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, односно $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$, у ознаци $\mathbb{R}[x, \cos x, \sin x]$, односно $\mathbb{R}[x, \cosh x, \sinh x]$. За изложене методе доказана је њихова потпуност, а конкретни резултати ових метода илустровани су кроз примере доказивања актуелних неједнакости.

**Кључне речи**: интегрални домен, факторизација, локализација, тригонометријски полином, хиперболичко-тригонометријски полином, тригонометријске неједнакости, хиперболичке неједнакости.

**Научна област**: Математика

**Ужа научна област**: Алгебра

# ON TRIGONOMETRIC POLYNOMIAL RING WITH APPLICATIONS IN THE THEORY OF ANALYTIC INEQUALITIES


ABSTRACT

This doctoral dissertation comprises two parts. Trigonometric polynomial rings are the central topic of the first part of the dissertation. It is presented that the ring of complex trigonometric polynomials, $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, is a unique factorization domain, and that the ring of real trigonometric polynomials, $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, is not a unique factorization domain. Necessary and sufficient conditions for the case when in the ring $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, unlike the ring $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, the degree of the product of two trigonometric polynomials is not equal to the sum of degrees of its factors, are given.

The theory of trigonometric polynomials is extended to hyperbolic-trigonometric polynomials, or HT-polynomials for short, which are defined similarly to trigonometric polynomials. Real or complex HT-polynomials form a ring and even an integral domain $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$, or $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$. Factorization in these domains is considered, and it is shown that these are unique factorization domains. The irreducible elements, as well as the form of the maximal ideals of both these domains are determined. The algorithms for dividing, factoring, computing greatest common divisors, as well as the algorithms for simplifying ratios of two HT-polynomials are considered over the field of rational numbers.

In the second part of the dissertation, related to applications, two methods of proving inequalities of the form $f(x) > 0$ are described over the given finite interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a \leq 0 \leq b$, which by using the finite Maclaurin series expansion generate polynomial approximations, when the function $f(x)$ is element of the ring extension of $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, or $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$, denoted by $\mathbb{R}[x, \cos x, \sin x]$, or $\mathbb{R}[x, \cosh x, \sinh x]$. The completeness of the presented methods is proved and the concrete results of these methods are illustrated through examples of proving actual inequalities.

**Keywords**: integral domain, factorization, localization, trigonometric polynomial, hyperbolic-trigonometric polynomial, trigonometric inequalities, hyperbolic inequalities.

**Research area**: Mathematics

**Research sub-area**: Algebra

# Садржај

# ПРЕДГОВОР

Ова докторска дисертација садржи две целине.

Први део дисертације је теоријски, а сама теорија припада области комутативне алгебре. Подељен је на три главе.

У првој глави овог рада, укратко су изложени основни појмови и терминологија из теорије комутативних прстена. Поред тога, наведене су постојеће теореме и тврђења која користимо у наставку рада и која су потребна за боље разумевање материје која следи. Сва тврђења дата су без доказа, уз наведене референце одакле су преузета.

Друга глава бави се тригонометријским полиномима, тј. елементима скупа

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid n \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in A \right\},$$

где је $A = \mathbb{R}$ или $A = \mathbb{C}$, који образује прстен. То је, уједно, и централно место првог дела дисертације. Тригонометријски полиноми заступљени су у различитим областима математике и њеним применама, нарочито у инжењерству. У овом раду тригонометријски полиноми разматрани су са алгебарског аспекта, а главна тема истраживања су својства факторизације у прстенима тригонометријских полинома. Овакав приступ тригонометријским полиномима није чест у литератури, па отуда и идеја да се истраживања на ову тему продубе. Међутим, у последње време ова тема постаје актуелна. Најзначајнији рад на ову тему, који је и полазна тачка у нашем истраживању, је рад [71]. Остали битни радови су [64, 86, 87, 93, 94].

Ова глава поред познатих резултата, из претходно наведених радова, садржи и доприносе теорији прстена тригонометријских полинома. Како је ова тематика ретко изучавана и недовољно описана у литератури, наш циљ је да, у овој глави, поред наведених исказа познатих теорема и тврђења прикажемо и њихове доказе. При томе, многи од тих доказа детаљније су изложени него у изворним радовима. На овај начин, већина резултата везаних за прстене тригонометријских полинома биће обједињена на једном месту. У наставку наводимо доприносе теорији прстена тригонометријских полинома, по редоследу приказивања у овој глави: напомена 58; теорема 66; теорема 70; у доказу теореме 71 детаљно је објашњена димензија наведеног домена, што није урађено у изворном раду; доказ теореме 74 дат је знатно детаљније него у изворном раду; пример 87 је детаљније описан; у поглављу 2.4 кориговане су табеле, које су резултат радова [86, 87, 94]; теорема 147 (наведена са доказом у глави 4, а користи се и у глави 2).

У трећој глави, по угледу на тригонометријске полиноме, уведен је појам хиперболичко-тригонометријског полинома, као коначне линеарне комбинације функција $\sinh nx$ и $\cosh nx$ за $n \in \mathbb{N}$. Установљено је да и ови полиноми формирају прстен. Разматрана су својства факторизације у прстену хиперболичко-тригонометријских полинома, истакнувши притом сличности и разлике између овог прстена и прстена тригонометријских полинома. Цела ова глава је оригинална.

Други део дисертације, који обухвата главе 4 и 5, односи се на примене. Сама факторизација у прстенима тригонометријских и хиперболичко-тригонометријских полинома отвара могућност примене у теорији аналитичких неједнакости. Овде су описана два метода доказивања неједнакости.

У четвртој глави изложени су резултати према раду [55]. Наиме, детаљно је описан нов метод доказивања неједнакости облика $f(x) > 0$ над задатим коначним интервалом $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a \leq 0 \leq b$, где је $f(x)$ мешовит тригонометријски полином једне променљиве, тј. облика

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x,$$

$\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. Ови полиноми представљају елементе раширења прстена реалних тригонометријских полинома, у ознаци $\mathbb{R}[x, \cos x, \sin x]$. Неједнакости овог типа су у великој мери заступљене у литератури. Значајан број њих је доказан на различите начине, док су многе од њих дате као отворени проблеми. Стога је настала идеја да се поступак доказивања ове класе неједнакости, у извесној мери, аутоматизује. Метод је илустрован на већем броју познатих и отворених проблема из теорије аналитичких неједнакости.

Природно се поставља питање доказивања неједнакости које обухватају мешовите хиперболичко–тригонометријске полиноме једне променљиве, тј. полиноме облика

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \cosh^{q_i} x \sinh^{r_i} x,$$

$\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$. Овакви полиноми су елементи раширења прстена реалних хиперболичко-тригонометријских полинома, у ознаци $\mathbb{R}[x, \cosh x, \sinh x]$. Предмет истраживања пете главе је управо метод доказивања неједнакости облика $g(x) > 0$, за $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a \leq 0 \leq b$, који је настао прилагођавањем метода описаног у глави 4 овој новој класи неједнакости. Садржај пете главе је објављен у раду [56]. За изложене методе доказивања испитана је и доказана њихова потпуност.

Најзад, у глави 6 сумирани су закључци и наведени неки правци будућег рада.

Захваљујем се свом ментору, проф. др Бранку Малешевићу, на ангажовању, помоћи, подршци и разумевању током рада на овој дисертацији.

Захваљујем се проф. др Александру Липковском, проф. др Зорану Петровићу и проф. др Небојши Икодиновићу на драгоценим саветима и коментарима који су значајно унапредили садржај и квалитет ове дисертације.

Драгим колегама, пријатељима и кумовима захваљујем се на томе што су се увек интересовали како напредује рад и што су ме бодрили да на истом истрајем.

Највећу захвалност, коју је тешко изразити речима, осећам према својим родитељима и супругу који су својом подршком и разумевањем улепшали моје професионално усавршавање. Они су увек били ту и веровали у мене и онда када сама нисам. Свако од њих је, на свој начин, допринео овој дисертацији.

Београд, април 2018. *Милица Макрагић*

ГЛАВА 1

# ФАКТОРИЗАЦИЈА У ДОМЕНУ

## 1.1 Прости и максимални идеали

У овом поглављу дат је кратак преглед теорије која се односи на просте и максималне идеале, према књигама [7, 28, 44].

**Дефиниција 1.** Комутативан прстен $A$ са јединицом у коме нема правих делитеља нуле, тј. $(\forall a, b \in A)\ (ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0)$, зовемо интегрални домен (област целих) или само домен.

Неки од примера домена су: прстен $\mathbb{Z}$, свако поље је домен, прстени полинома $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{R}[x]$, прстен полинома $n$ променљивих са комплексним коефицијентима $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ (тј. прстени полинома чији су коефицијенти из домена), прстен $\mathbb{Z}_p$ за прост број $p$ итд.

У наставку, уколико се не нагласи другачије, са $A$ ћемо означавати домен. Уз то, $A^*$ представљаће мултипликативну групу јединица (тј. инвертибилне елементе) домена $A$.

**Дефиниција 2.** Идеал $P$ домена $A$ је прост ако:

$$P \neq A \quad \text{и} \quad ab \in P \Longrightarrow (a \in P \vee b \in P).$$

Еквивалентно важи да је количнички прстен $A/P$ домен.

На пример, скуп свих парних бројева је прост идеал прстена $\mathbb{Z}$; у прстену $\mathbb{Z}[x]$ идеал генерисан са 2 и $x$, тј. прстен полинома чији су сви коефи-цијенти парни, је прост идеал. С обзиром да је нула идеал у домену увек прост, просте идеале различите од нуле зваћемо *правим простим идеалима*.

**Дефиниција 3.** Идеал $M$ домена $A$ је максималан ако:

$$M \neq A \quad \text{и} \quad M \subseteq I \subseteq A \implies (I = M \vee I = A).$$

Еквивалентно важи да је количнички прстен $A/M$ поље.

Дакле, максималан идеал је прави идеал за који не постоји прави идеал различит од њега који га садржи као свој подскуп. На пример, у прстену $\mathbb{Z}$ максимални идеали су главни идеали (видети дефиницију 17) генерисани простим бројем (општије важи да су сви ненулти, прости идеали у главноидеалском домену (видети дефиницију 18) максимални); ако је $F$ поље, једини максималан идеал је $\{0\}$; максимални идеали у прстену полинома $\mathbb{C}[x]$ су главни идеали генерисани са $x - c$, за $c \in \mathbb{C}$.

На основу претходне две дефиниције можемо закључити да је сваки максималан идеал домена прост.

**Дефиниција 4.** За елемент $p \neq 0$ домена $A$ кажемо да је атом или да је нерастављив ако:

$$p \notin A^* \quad \text{и} \quad p = ab \implies a \in A^* \vee b \in A^*.$$

**Дефиниција 5.** За елемент $p \neq 0$ домена $A$ кажемо да је прост ако:

$$p \notin A^* \quad \text{и} \quad p \mid ab \implies p \mid a \vee p \mid b.$$

Претходно наведени појмови могу се на еквивалентан начин окарактерисати помоћу идеала.

**Теорема 6.** *Нека је $p \neq 0$ елемент домена $A$. Тада важи:*
*(i) $p$ је прост акко је $\langle p \rangle$ прави прост идеал;*
*(ii) $p$ је атом акко је $\langle p \rangle$ максималан међу свим правим главним идеалима у $A$.*

Веза између простих и нерастављивих елемената у произвољном домену дата је следећим тврђењем.

**Тврђење 7.** *Сваки прост елемент у домену је нерастављив.*

**Пример 8.** У домену $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ елемент 2 је нерастављив, али није прост.

Најпре, имамо да је

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \{p(i\sqrt{5}) : p \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

Јасно је да из дефиниције следи да је

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Покажимо прво да је 2 атом. Претпоставимо да је $2 = uv$. Означимо са $N(z) := z\bar{z}$, за $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, норму елемента $z$. Јасно је да је $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$, за све $z_1, z_2$. Према томе, добијамо да је $N(2) = N(u)N(v) \Longrightarrow 4 = N(u)N(v)$. Дакле, могућности су $(N(u), N(v)) = (\pm 1, \pm 4)$ (или обрнуто ако $u$ и $v$ замене места) и $(N(u), N(v)) = (\pm 2, \pm 2)$. За $u \in A$ важи $N(u) = u\bar{u} = (a + bi\sqrt{5})(a - bi\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$. Инвертибилни елементи у $A$ су они са нормом $\pm 1$. Једина целобројна решења једначине $a^2 + 5b^2 = \pm 1$ су $a = \pm 1$, $b = 0$, па је $A^* = \{1, -1\}$. Међутим, како у домену $A$ нема елемената са нормом 2, јер једначина $a^2 + 5b^2 = 2$ нема целобројних решења, следи да је $N(u) = \pm 1$ или $N(v) = \pm 1$, па из чињенице да је $2 = uv$, следи да је један од фактора инвертибилан. То заправо значи да је 2 нерастављив елемент.

Остаје да покажемо да 2 није прост. То видимо из следећег примера:

$$2 \mid 6 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}),$$

$$2 \nmid (1 + i\sqrt{5}),\ 2 \nmid (1 - i\sqrt{5}).$$

Последње важи јер су $1 + i\sqrt{5}$ и $1 - i\sqrt{5}$ нерастављиви елементи, што се може видети поређењем норми. Заправо, ако је $1 + i\sqrt{5} = uv$, онда је $6 = N(u)N(v)$. Дакле, могућности су $(N(u), N(v)) = (\pm 1, \pm 6)$, $(N(u), N(v)) = (\pm 2, \pm 3)$, или обрнуто, када $u$ и $v$ замене места. Како једначине $a^2 + 5b^2 = 2$ и $a^2 + 5b^2 = 3$ немају целобројних решења, мора бити $N(u) = \pm 1$ или $N(v) = \pm 1$, па је $1 + i\sqrt{5}$ атом. Аналогно важи да је $1 - i\sqrt{5}$ атом. Одавде можемо закључити да је број 2, који је прост у $\mathbb{Z}$, изгубио то својство у $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

Максималан идеал у сваком домену постоји. Заправо, важи следећа теорема.

**Теорема 9.** *Нека је $I$ прави идеал у домену $A$. Тада постоји максималан идеал $M$ за који је $I \subseteq M$.*

## 1.2 Факторизација и локализација

У овом поглављу дат је кратак преглед теорије која се односи на факторизацију у домену и локализацију домена, према [13, 19, 28, 75, 84].

**Дефиниција 10.** Елементи $a$ и $b$ домена $A$ су придружени ако $\exists u \in A^*$ тако да је $a = ub$.

Очигледно је да је придруженост елемената релација еквиваленције. Ако је елемент $a$ нерастављив, онда је то и сваки њему придружен елемент. Ово важи и за просте елементе домена.

**Дефиниција 11.** Домен $A$ је атомичан ако је сваки ненулти, неинвертибилан елемент производ атома.

**Дефиниција 12.** Домен $A$ је домен са једнозначном факторизацијом (факторијалан, UFD) ако задовољава следеће услове:
(i) A је атомичан;
(ii) Факторизација је једнозначна у следећем смислу: Две атомичне факторизације истог елемента $a \in A$ једнаке су до на редослед атома у факторизацији и до на множење инвертибилним елементима.

Према томе, ако је $A$ UFD и $a \in A$ тако да је:

$$a = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m,$$

где су $p_i$ и $q_j$ атоми у $A$, мора бити $n = m$, и уз одговарајућу пренумерацију $p_i$ и $q_i$ су придружени, тј. $p_i = u_i q_i$, за $u_i \in A^*$.

**Тврђење 13.** *Нека је домен $A$ UFD. Елемент $p \in A$ је прост акко је атом.*

Из овог тврђења видимо да у факторијалним доменима нерастављиви елементи који учествују у факторизацији имају јаче својство - прости су. Ипак, треба бити обазрив у применама овог тврђења.

**Пример 14.** У прстену $A = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ важи $2 \cdot 11 = (5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})$, одакле би могли закључити да факторизација није једнозначна. Међутим, $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ јесте UFD. Ово следи из чињенице да прости цели бројеви 2 и 11 у прстену $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ нису атоми, па тиме ни прости. Елементи $\alpha = 1+\sqrt{3}$ и $\beta = -1+\sqrt{3}$ су овде нерастављиви, јер ако претпоставимо да је $\alpha = uv$, следи једнакост норми $N(\alpha) = N(u)N(v)$, тј. $-2 = N(u)N(v)$. Одавде следи да мора бити $N(u) = \pm 1$ или $N(v) = \pm 1$, па су једини делитељи броја $\alpha$ придружени њему. Према томе, $\alpha$ је атом. Из истих разлога и $\beta$ је атом. Слично се може показати да су елементи $\gamma = 1 + 2\sqrt{3}$ и $\delta = -1 + 2\sqrt{3}$ нерастављиви у овом прстену. Уочимо да је $5 + \sqrt{3} = \alpha\delta$ и $5 - \sqrt{3} = \beta\gamma$. Једнакости $2 = \alpha\beta$ и $11 = \gamma\delta$ показују да 2 и 11 нису атоми. Међу факторизацијама $2 \cdot 11$, $(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})$ и $(1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})(-1+2\sqrt{3})$ броја 22, само последња је атомична тј. факторизација у смислу наше дефиниције.

**Тврђење 15.** *Проста факторизација елемената домена увек је једнозначна.*

Комбинујући претходна тврђења, услови (i) и (ii) из дефиниције 12 се могу заменити еквивалентним условом:
(iii) Сваки ненулти, неинвертибилан елемент домена има просту факторизацију.
У складу са тим, дајемо и следећу дефиницију.

**Дефиниција 16.** Домен $A$ је UFD ако задовољава услов (iii).

Подсетимо се сада главноидеалског домена, према [70].

**Дефиниција 17.** За $a \in A$ идеал $\langle a \rangle = \{r \cdot a : r \in A\}$ се назива главни идеал генерисан елементом $a$.

**Дефиниција 18.** Домен $A$ је главноидеалски (PID) уколико је сваки идеал у њему главни.

На пример, $\mathbb{Z}$ и $K[X]$, за произвољно поље $K$, су главноидеалски домени, док $\mathbb{Z}[X]$ није главноидеалски домен.

**Теорема 19.** *Сваки главноидеалски домен* (*PID*) *је и домен са једнозначном факторизацијом* (*UFD*).

За одређене класе домена један од начина за рачунање највећег заједничког делитеља је Еуклидов[1] алгоритам.

[1]Еуклид из Александрије (око 330. пне. - око 275. пне.), антички математичар

**Дефиниција 20.** Домен $A$ је Еуклидов ако постоји функција $\varphi : A \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ са особинама:

$$ab \neq 0 \Longrightarrow \varphi(ab) \geq \varphi(a);$$

$$(\forall a, b \in A,\, b \neq 0)\ (\exists q, r \in A) \quad a = bq + r \quad \text{и} \quad \varphi(r) < \varphi(b).$$

**Пример 21.** Неки од примера Еуклидових домена су:
1. Поље $K$ са еуклидском функцијом $\varphi(x) = 1$, за свако $x \neq 0$;
2. Прстен $\mathbb{Z}$ са еуклидском функцијом $\varphi(n) = |n|$;
3. Прстен полинома над пољем $K$ са еуклидском функцијом $\varphi : K[X] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ дефинисаном са $\varphi(p) = \deg(p)$.

Функција $\varphi$ из претходне дефиниције је Еуклидов алгоритам. Он не мора постојати, а и ако постоји не мора бити одређен једнозначно. Карактеристика Еуклидових домена је да се у њима може спровести алгоритам дељења са остатком. Елементе $q$ и $r$ из дефиниције функције $\varphi$ зовемо еуклидским количником и остатком.

**Теорема 22.** *Еуклидов домен је главноидеалски, па тиме и домен са једнозначном факторизацијом.*

Пређимо сада на важан метод *локализације*, којим се од датог домена прелази на нови домен, а у коме су неки изабрани елементи из почетног домена инвертибилни у новом домену.

**Дефиниција 23.** Нека је $A$ домен и $S \subseteq A \setminus \{0\}$. За скуп $S$ кажемо да је мултипликативан ако $1 \in S$ и ако из $s, t \in S$ следи да $st \in S$.

Нека је $S$ било који мултипликативан подскуп домена $A$. На скупу $A \times S$ дефинишемо релацију $\sim$ са:

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow ta = sb.$$

Очигледно је да је $\sim$ релација еквиваленције.

Са $S^{-1}A$ означимо скуп свих класа еквиваленције, а са $\frac{a}{s}$ класу еквиваленције елемента $(a, s)$. На $S^{-1}A$ дефинишемо операције $+$ и $\cdot$ са:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{ta + sb}{st};$$

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}.$$

Структура $(S^{-1}A, +, \cdot)$ је комутативан прстен са јединицом. Овај прстен се назива локализација домена $A$ у односу на мултипликативан скуп $S$. За $S^{-1}A$ користи се и ознака $A_S$.

**Напомена 24.** 1. У домену $A$ је $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ акко $at - bs = 0$.
2. Постоји природан хомоморфизам $i : A \longrightarrow A_S$ дат са $i : a \to \frac{a}{1}$, који у општем случају није 1-1. Приметимо да је $\ker(i) = \{a \mid \frac{a}{1} = 0\} = \{a \mid as = 0, s \in S\}$; према томе $\ker(i) = 0$, тј. $i$ је 1-1 акко $S$ не садржи делитеље нуле. Пошто је $A$ домен, то је $i$ 1-1. У случају да је $i$ 1-1 сматрамо да је $A \leq A_S$, тј. $A_S$ је раширење домена $A$.
3. Ако је $s \in S$, тада је $\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1$ у $A_S$, па је $A_S$ нови домен у коме смо домену $A$ додали инвертибилне елементе из $S$.

Уколико је $S = A \setminus \{0\}$, у прстену $S^{-1}A$ је сваки елемент различит од нуле инвертибилан, па је у овом случају $S^{-1}A$ тј.$A_S$ поље. Ово поље назива се *поље разломака* или *количничко поље* домена $A$ и означава се са $Q(A)$ или $Frac(A)$. Тиме је показано да се, на овај начин, сваки домен може утопити у неко поље. Приметимо да је овде $S$ најшири подскуп по коме се може локализовати. Сужавањем скупа $S$, одговарајуће локализације $S^{-1}A$ биће потпрстени количничког поља $Frac(A)$, па на локализације домена можемо гледати као на потпрстене његовог поља разломака.

Нека је $B$ раширење домена $A$. Интересантно је посматрати факторијалност и у раширењу. На пример, ако је $A = \mathbb{Z}$ и $B = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, имамо да је $A$ домен са једнозначном факторизацијом, а $B$ није (пример 8).

Од посебног значаја је веза међу простим идеалима домена и његовог раширења. Ако је $\overline{P} \lhd B$ прост идеал у $B$, онда је $\overline{P} \cap A = P$ прост идеал у $A$, који зовемо *контракцијом* идеала $\overline{P}$. Ако је $P$ прост идеал у $A$, онда идеал $PB \lhd B$ зовемо *екстензијом* идеала $P$. Универзалне особине које су значајне у сваком раширењу су: LO (lying-over, наткривање), GU (going-up, раст), GD (going-down, опадање) и INC (incomparability, неупоредивост).

**Дефиниција 25.** Нека је $B$ раширење прстена $A$. Означимо са $P$ и $Q$ просте идеале у $A$, и са $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ просте идеале у $B$. Пар $(A, B)$ задовољава редом LO, GU, GD и INC, ако је испуњено:
(LO) $\forall P \;\; \exists\, \overline{P}$ тако да је $\overline{P} \cap A = P$.
(GU) $\forall P \;\; \forall Q \;\; \forall \overline{P} \;\; (P \subseteq Q,\; \overline{P} \cap A = P)\; (\exists \overline{Q})$ тако да је $\overline{P} \subseteq \overline{Q},\; \overline{Q} \cap A = Q$.
(GD) $\forall P \;\; \forall Q \;\; \forall \overline{Q} \;\; (P \subseteq Q,\; \overline{Q} \cap A = Q)\; (\exists \overline{P})$ тако да је $\overline{P} \subseteq \overline{Q},\; \overline{P} \cap A = P$.
(INC) $\forall \overline{P} \;\; \forall \overline{Q} \;\; \overline{P} \cap A = \overline{Q} \cap A \Longrightarrow \overline{P} = \overline{Q}$.

Веза између идеала у домену $A$ и његовом раширењу $A_S$ потпуно је одређена теоремом о кореслоденцији.

**Теорема 26.** *Нека је $A$ домен, $S \subseteq A$ мултипликативно затворен подскуп и $A_S$ одговарајућа локализација домена $A$.*
*$(i)$ Сви идеали из $A_S$ су екстензије идеала из $A$, тј. облика $IA_S$ за неки идеал $I \lhd A$. Прецизније, $J = (J \cap A)A_S$ за сваки идеал $J \lhd A_S$, и пресликавање $J \longrightarrow J \cap A$ је растућа инјекција уређеног скупа свих идеала из $A_S$ у уређен скуп свих идеала из $A$.*
*$(ii)$ Прости идеали из $A_S$ су у узајамно једнозначној коресподенцији са простим идеалима из $A$ дисјунктним са $S$. Прецизније, ако је $\overline{P} \lhd A_S$ прост, пресликавање $\overline{P} \longrightarrow \overline{P} \cap A$ скупа свих простих идеала из $A_S$ у скуп простих идеала из $A$ дисјунктних са $S$ је бијективно и чува уређење.*

Ова теорема користи се у доказу наредне важне теореме.

**Теорема 27.** *Нека је $A$ домен са једнозначном факторизацијом и $S \subseteq A$ мултипликативно затворен подскуп. Тада је и $A_S$ факторијалан домен, тј. локализација UFD-а је UFD.*

## 1.3 Факторизација у Нетериним и Дедекиндовим доменима

Различите класе комутативних прстена нису факторијални домени. Неки од њих имају нешто слабија својства, која можемо посматрати као неку врсту уопштења једнозначне факторизације. У Нетериним[2] прстенима, уместо факторизације елемената посматра се „факторизација” идеала. Једнозначна факторизација елемената у производ атома у UFD-у се

[2]Amalie Emmy Noether (1882-1935), немачка математичарка

у Нетериним прстенима може заменити примарном декомпозицијом идеала, док се у Дедекиндовим[3] доменима, посебној класи Нетериних домена, може заменити једнозначном „факторизацијом” идеала у производ простих идеала.

Дефинишимо сада Нетерин домен према [7].

**Дефиниција 28.** Комутативан прстен $A$ је Нетерин ако задовољава неки од еквивалентних услова:
1) Сваки растући ланац идеала у $A$ је коначан (ACC).
2) Сваки непразан скуп идеала у $A$ има максималан елемент у односу на инклузију.
3) Сваки идеал прстена $A$ је коначно генерисан.

Нетерини прстени чине широку и веома значајну класу прстена. Са становишта факторизације нарочито су занимљиви Дедекиндови и главноидеалски домени, као посебне класе Нетериних домена. Овде ће бити споменуте само неке од теорема које се односе на факторизацију. Детаљнија анализа ових прстена, као и докази свих наведених теорема и тврђења могу се наћи у [13, 48, 59]. Једна од најважнијих теорема везаних за ове прстене је Крулова[4] главноидеалска теорема, која гласи:

**Теорема 29.** *Нека је прстен $A$ Нетерин, $x \in A$, $x \notin A^*$ и $P$ минималан прост идеал прстена $A$ који садржи главни идеал $\langle x \rangle$. Тада је $ht(P) \leq 1$. Специјално, ако је $A$ домен, важи једнакост тј. $ht(P) = 1$.*

Присетимо се појма *минималног простог идеала*, према [75], који се јавља у претходној теореми.

**Дефиниција 30.** Прост идеал $P$ је висине или ранга $n$, у ознаци $ht(P) = n$, ако постоји ланац простих идеала $P = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \ldots \supsetneq P_n$ и нема дужих ланаца. Просте идеале висине 1 зовемо минималним простим идеалима.

Иначе, максимална дужина поменутог ланца простих идеала домена $A$ назива се још и *димензија домена*, у ознаци dim. У овом случају је $\dim(A) = n$.

За минималне просте идеале важи следећа теорема.

[3]Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), немачки математичар
[4]Wolfgang Krull (1899-1971), немачки математичар

**Теорема 31.** *Нека је $A$ UFD. Минимални прости идеали су онда главни.*

У Нетериним доменима је сваки растући ланац идеала:

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \dots$$

коначан. Стога, имамо да је и сваки растући ланац главних идеала:

$$\langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_2 \rangle \subseteq \langle a_3 \rangle \dots$$

коначан.

Ако постоји $a \in A$, $a \notin A^*$, који нема атомичну декомпозицију, тада $a$ није атом, јер у супротном би $a = a \cdot 1$ било атомично разлагање. Према томе, постоје елементи $b, c \in A$, $b, c \notin A^*$, за које је $a = bc$. Ако би $b$ и $c$ имали атомичну декомпозицију, онда би је имао и $a$. Стога, претпоставимо да један од њих, нпр. $b$, нема атомично разлагање. Тада имамо:

$$a = bc \Longrightarrow b \mid a \Longrightarrow \langle a \rangle \subsetneqq \langle b \rangle.$$

Како $c \notin A^*$, важи строга инклузија $\langle a \rangle \neq \langle b \rangle$. С обзиром да $\langle b \rangle$ нема атомичну декомпозицију, овај поступак се може наставити. На овај начин, сваком елементу $a \in A$, који се не може раставити на производ атома, може се придружити строго растући ланац главних идеала: $\langle a \rangle \subsetneqq \langle a_1 \rangle \subsetneqq \langle a_2 \rangle \subsetneqq \dots$. Довољан услов за атомичност домена је услов кидања оваквих ланаца, тј. сваки строго растући ланац главних идеала у $A$ је коначан, или се може рећи да за сваки ланац $\langle a \rangle \subsetneqq \langle a_1 \rangle \subsetneqq \langle a_2 \rangle \subsetneqq \dots$ постоји $n$ тако да је $\langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = \dots$.

Како код Нетериних домена, где је погодније радити са идеалима, важи услов кидања ланаца, следи да је сваки Нетерин домен атомичан. Тиме је задовољен први услов дефиниције 12. Према томе, да би Нетерин домен био факторијалан, треба да задовољи и други услов поменуте дефиниције или неки од његових еквивалената (детаљније је описано у [75]):

– Сваки атом је прост.
– Свака два елемента у $A$ имају НЗД.
– Свака два елемента у $A$ имају НЗС.
– Пресек свака два главна идеала у $A$ је главни идеал.

С тим у вези, наводимо тврђење које даје одговор на питање када је Нетерин домен UFD.

**Тврђење 32.** *Нетерин домен $A$ је UFD ако задовољава један од следећих услова:*
$(i)$ *Сваки атом у $A$ је прост.*
$(ii)$ *Пресек главних идеала у $A$ је главни идеал.*

Поред овога, применом Крулове главноидеалске теореме може се показати да у Нетериним доменима важи и обрат теореме 31. С тим у вези, важи следећа теорема.

**Теорема 33.** *Нетерин домен $A$ је UFD акко је сваки минималан прост идеал $P$ главни.*

У наставку, бавићемо се примарном декомпозицијом идеала у Нетериним доменима. Биће дат краћи приказ ових разлагања према [44], где се може наћи детаљнији опис ове тематике.

Нека је $A$ главноидеалски домен, тиме и UFD, и $a \in A$ ненулти, неинвертибилан елемент домена $A$. Тада $a$ има просту факторизацију:

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}. \tag{1.3.1}$$

Прост идеал домена $A$ је на неки начин уопштење простог броја. Одговарајуће уопштење степена простог броја је *примаран идеал.*

**Дефиниција 34.** Идеал $I \lhd A$ је примаран ако: $ab \in I \Longrightarrow a \in I \vee b^k \in I$, за неко $k > 0$. Идеал $I$ је нерастављив ако: $I = J \cap K \Longrightarrow I = J \vee I = K$, за све идеале $J, K$ прстена $A$ за које је $I \subseteq J$ и $I \subseteq K$.

Јасно је да је сваки прост идеал примаран (за $k = 1$), док обратно не мора да важи.

Ако уместо елемената домена у (1.3.1) посматрамо идеале, то би значило да сваки прави идеал $\langle a \rangle \lhd A$ има једнозначну „факторизацију":

$$\langle a \rangle = \langle p_1 \rangle^{n_1} \langle p_2 \rangle^{n_2} \dots \langle p_k \rangle^{n_k} = \langle p_1 \rangle^{n_1} \cap \langle p_2 \rangle^{n_2} \cap \dots \cap \langle p_k \rangle^{n_k}, \tag{1.3.2}$$

где су $p_i$ прости елементи, $n_i > 0$ и $\langle p_i \rangle^{n_i} = \langle p_i^{n_i} \rangle$. Одавде можемо закључити да је аритметика главноидеалских домена слична аритметици прстена $\mathbb{Z}$, што их чини удобним за рад. Може се показати да идеали $\langle p_i \rangle^{n_i}$ у декомпозицији (1.3.2) имају особину: $bc \in \langle p_i \rangle^{n_i}$, $b \notin \langle p_i \rangle^{n_i} \Longrightarrow c \in \langle p_i \rangle^{n_i}$, тј. они су примарни. Дакле, видимо да се сваки идеал главноидеалског домена може на јединствен начин разложити у пресек примарних идеала. У главноидеалским доменима је $\langle p^k \rangle = \langle p \rangle^k$, па је сваки примаран идеал степен простог идеала. Међутим, то не важи у произвољном Нетерином домену. Нпр., у прстену полинома $k[X,Y]$ над пољем $k$ идеал $\langle X, Y^2 \rangle$ је примаран и није степен простог. Циљ нам је да добијемо неку врсту уопштења једнозначне факторизације идеала у овим доменима, па стога производ мењамо пресеком идеала, док степен простог мењамо примарним идеалом.

Може се показати да је у Нетериним доменима сваки нерастављив идеал примаран (видети [7]). Степен простог идеала не мора бити примаран, нити примаран мора бити степен простог. Степени максималних идеала су примарни. Међутим, сваком примарном идеалу $Q$ можемо придружити један прост идеал, његов *радикал*

$$P = \sqrt{Q} = \{x \in A \mid x^k \in Q \text{ за неко } k > 0\} = \bigcap_{J \supseteq Q,\, J \text{ прост}} J.$$

У том случају, кажемо да је $Q$ *$P$-примаран* или да је $P$ *придружен прост идеал* идеалу $Q$. За примаран идеал $Q$, идеал $P = \sqrt{Q}$ одређен је једнозначно, али идеал $P$ може бити придружен и другим примарним идеалима. Нпр., у прстену $\mathbb{Z}$ примарни идеали $\langle p^2 \rangle, \langle p^3 \rangle, \ldots$ имају исти придружен прост идеал $\langle p \rangle$. Сваки идеал је садржан у свом радикалу. Идеале који су једнаки свом радикалу зовемо *радикалним идеалима.* Сваки прост идеал је према томе и радикалан. Ако је $I$ радикалан идеал, онда је:

$$I = \sqrt{I} = \bigcap_{P \supseteq I} P,$$

па је радикалан идеал пресек фамилије простих идеала који га садрже. Можемо се у овом пресеку ограничити само на минималне просте идеале над $I$, којих је у Нетерином прстену коначно много. Према томе, сваки радикалан идеал Нетериног прстена је пресек коначно много простих.

**Дефиниција 35.** Идеал $I \lhd A$ има примарну декомпозицију ако постоје примарни идеали $Q_1, \ldots, Q_n$ такви да је $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$. Ова декомпозиција је редукована ако ниједан од идеала $Q_i$ не садржи пресек осталих и ако су придружени прости идеали $P_i = \sqrt{Q_i}$ међусобно различити.

Услов кидања ланаца у Нетериним доменима довољан је да би се сваки идеал представио као коначан пресек нерастављивих идеала. Ако тај услов не би био задовољен, постојао би максималан идеал $I$ са том особином, јер је домен Нетерин. Тај идеал није нерастављив, па је једнак пресеку два идеала $I = J \cap K$. Како су $J$ и $K$ према претпоставци коначни пресеци нерастављивих идеала, добија се контрадикција. Према томе, сваки идеал $I$ Нетериног домена има коначну декомпозицију:

$$I = J_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_n, \text{ где су } J_i \text{ нерастављиви.}$$

Међутим, једнозначност ове декомпозиције није испуњена и може бити нарушена.

Важи следећа теорема о декомпозицији.

**Теорема 36.** (Ласкер[5]–Нетер) *Нека је $A$ Нетерин домен и $I$ идеал у $A$. Тада постоје примарни идеали $Q_1, \ldots, Q_n$ такви да је:*

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n.$$

*Идеали $Q_i$ имају различите придружене просте идеале $P_i$, и ниједан од њих не садржи пресек осталих. У свакој другој примарној декомпозицији за $I$ мора бити $n$ идеала, и скуп придружених простих је исти.*

Према овој теореми, придружени прости идеали $P_i = \sqrt{Q_i}$ једнозначно су одређени идеалом $I$, и потпуно су независни од избора примарних компонената $Q_i$. На овај начин, сваком идеалу $I$ Нетериног прстена можемо придружити једнозначно одређен природан број $n$ и коначан скуп простих идеала $Ass(I) = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.

Опишимо укратко и Дедекиндове домене према [28, 48, 57]. То су домени у којима се сваки идеал једнозначно факторише у производ простих идеала. Ову особину имају и главноидеалски домени. За разлику од идеала, факторизација елемената Дедекиндовог домена не мора бити једнозначна. Зато се на ове домене може гледати као на уопштење главноидеалских домена. Дедекиндови домени се могу дефинисати на различите еквивалентне начине. Најчешћа дефиниција Дедекиндових домена је следећа.

**Дефиниција 37.** Домен $A$ је Дедекиндов ако је Нетерин, интегрално затворен и сваки прави прост идеал у $A$ је максималан (може се рећи и $\dim(A) \leq 1$).

[5] Emanuel Lasker (1868-1941), немачки шахиста, математичар и филозоф

Присетимо се сада интегрално затворених домена, према [59].

**Дефиниција 38.** Нека је $A$ потпрстен прстена $B$. Елемент $\alpha \in B$ је цео над $A$ ако постоји моничан полином $g \in A[X]$ такав да је $g(\alpha) = 0$.

Скуп свих целих елемената $A' = \{\alpha \in B \mid \alpha \text{ цео над } A\}$ је један потпрстен прстена $B$ који зовемо *интегралним затворењем* прстена $A$ у $B$. Специјално, ако је $A' = B$ кажемо да је $B$ *цело раширење прстена* $A$, а ако је $A' = A$ кажемо да је $A$ *интегрално затворен* у $B$.

**Дефиниција 39.** Нека је $A$ домен и $k = Frac(A)$ његово поље разломака. Домен $A$ је интегрално затворен ако је интегрално затворен у $k$.

Дефинишимо сада појмове *разломљеног* и *инвертибилног идеала*, према [44].

**Дефиниција 40.** Нека је $A$ домен и $k = Frac(A)$. $A$-подмодул $I$ поља $k$ је разломљен идеал ако постоји $d \in A \setminus \{0\}$ тако да је $dI \subseteq A$.

Према овој дефиницији, обични идеали домена $A$ су разломљени и зовемо их целим идеалима. Разломљен идеал је прави разломљен идеал ако је различит од нуле. Скуп свих правих разломљених идеала означавамо са $I(A)$.

За разломљен идеал $I$ домена $A$ дефинише се његов инверзни $I^{-1}$ са:

$$I^{-1} = A : I = \{x \in k \mid xI \subseteq A\},$$

где је $k = Frac(A)$. Очигледно увек важи $II^{-1} \subseteq A$. Код инвертибилних идеала важи и обрнута инклузија, тј. дефиниција гласи:

**Дефиниција 41.** Разломљен идеал $I$ домена $A$ је инвертибилан ако је $II^{-1} = A$.

У наставку дајемо неке од карактеризација Дедекиндових домена.

**Теорема 42.** *У Дедекиндовом домену $A$ сваки ненулти идеал једнозначно се факторише у производ простих идеала.*

Могу се наћи и друге еквивалентне карактеризације ових домена, као и обрат претходне теореме. Неке од тих карактеризација биће наведене у склопу наредног тврђења. Докази свих еквиваленција могу се наћи у [13, 44, 57, 78].

**Тврђење 43.** *За домен $A$ следећи услови су еквивалентни:*
(1) *Сваки прави идеал у $A$ једнозначно се факторише у производ простих идеала.*
(2) *Сваки прави идеал у $A$ се факторише у производ простих идеала.*
(3) *Сваки прави идеал у $A$ је инвертибилан.*
(4) *Сваки разломљен идеал у $A$ је инвертибилан.*
(5) *Скуп свих правих разломљених идеала у $A$ је група у односу на множење.*
(6) *$A$ је Нетерин, интегрално затворен и $dim(A) = 1$.*
(7) *$A$ је Нетерин и $A_M$ је DVR за сваки максималан идеал $M$ у $A$.*
(8) *$A$ је Нетерин и $A_P$ је DVR за сваки прост идеал $P$ у $A$.*

Из једнозначне факторизације идеала не мора да следи једнозначна факторизација елемената (видети пример 4.4.1. из [75]). Не мора да важи ни обрнуто. На пример, прстен полинома $k[X, Y]$ над пољем $k$ је UFD, али није Дедекиндов, јер је димензије 2. Однос факторизације елемената и идеала дат је следећом теоремом.

**Теорема 44.** *Дедекиндов домен $A$ је UFD акко је главноидеалски.*

Дакле, претходна теорема карактерише главноидеалске домене као Дедекиндове UFD домене.

Ако са $\mathcal{D}$ означимо класу Дедекиндових домена, са $\mathcal{U}$ класу факторијалних домена и са $\mathcal{G}$ класу главноидеалских домена, тада важи $\mathcal{D} \cap \mathcal{U} = \mathcal{G}$. Одступање Дедекиндовог домена од факторијалности је заправо његово одступање од главноидеалског домена. Означимо са $F(A)$ групу свих главних разломљених идеала Дедекиндовог домена $A$. Тада је $F(A)$ подгрупа групе свих ненултих разломљених идеала $I(A)$, док је одговарајућа група која мери одступање од главноидеалског, тј. UFD домена, количничка група:

$$C(A) = I(A)/F(A).$$

Група $C(A)$ зове се још и *група класа идеала.* Она је заправо специјалан случај групе класа делитеља Круловог домена. Уз то је Дедекиндов домен $A$ UFD акко је група $C(A)$ тривијална, тј. акко је њен класни број или ред групе $|C(A)| = 1$.

За испитивање заједничких особина Дедекиндових и факторијалних домена, тј. факторизације како елемената тако и идеала, значајни су Крулови домени.

## 1.4 Крулови домени

Пре саме дефиниције Круловог домена дефинисаћемо делитеље домена према [13] и групу класа делитеља домена према [31].

Нека је $A$ домен, $k = Frac(A)$ и $I(A)$ скуп свих разломљених идеала различитих од нуле. За $P$ и $Q \in I(A)$ дефинишимо релацију $P$ „испред” $Q$ са:

$$P \prec Q \Longleftrightarrow \forall x \in k^* \ (Ax \supseteq P \Longrightarrow Ax \supseteq Q).$$

Ако ставимо

$$P \sim Q \Longleftrightarrow P \prec Q, \ \ Q \prec P,$$

релација „испред” постаје уређење на количничком скупу $I(A)/\sim$. Означимо тај скуп са $D(A)$. Елементи скупа $D(A)$ су класе еквиваленције разломљених идеала, у ознаци $\mathrm{div}(P)$, $P \in I(A)$, и зовемо их *делитељима домена* $A$. Делитељи главних разломљених идеала $\mathrm{div}(Ax)$, $x \in k^*$, зову се *главни делитељи*, у ознаци $\mathrm{div}(x)$, $x \in k^*$. Дакле, према дефиницији, разломљен идеал је садржан у неком главном разломљеном идеалу, па има смисла посматрати пресек

$$\hat{P} = \bigcap_{Ax \supseteq P} Ax, \ \ P \in I(A).$$

**Дефиниција 45.** Разломљен идеал $P \in I(A)$ је дивизорски ако је $P = \hat{P}$.

Према овој дефиницији, дивизорски идеали су ненулти пресеци непразних фамилија главних разломљених идеала. Из овога непосредно следи:
$*$ Главни идеали и ненулти пресеци главних идеала су дивизорски идеали.
$*$ Ненулти пресек фамилије дивизорских идеала је дивизорски идеал.
$*$ Ако је $P$ дивизорски идеал, онда је $Px$ дивизорски идеал, $x \in k^*$.

Дефинишимо сада *групу класа делитеља домена* $A$.
Нека је $A$ домен и $k = Frac(A)$. Елемент $x \in k$ је *скоро цео над* $A$ ако је потпрстен $A[x] = \sum_{k=0}^{\infty} Ax^k$ од $k$, генерисан са $A$ и $x$, разломљен идеал домена $A$, тј. ако постоји $d \neq 0$ тако да је $dx^n \in A$ за свако $n \geq 0$. За домен $A$ кажемо да је *комплетно интегрално затворен* ако је сваки скоро цео елемент из $k$ садржан у $A$.

**Дефиниција 46.** У случају комплетно интегрално затвореног домена $A$ количничку групу $D(A)/F(A)$ зовемо групом класа делитеља, у ознаци:

$$Cl(A) = D(A)/F(A),$$

где је $F(A) = \{\mathrm{div}(x) \mid x \in k^*\}$.

Коначно, дефинишимо Крулов домен. Све везано за Крулове домене наведено је према [13] и [31].

**Дефиниција 47.** Домен $A$ је Крулов ако постоји фамилија $(V_i)_{i\in I}$ валуационих прстена, $A \subseteq V_i \subseteq k$, $k = Frac(A)$, таква да су испуњена следећа три услова:
(1) $V_i$ су главноидеалски валуациони прстени (тј. DVR).
(2) $A = \bigcap_{i\in I} V_i$.
(3) Ако је $a \in A$, $a \neq 0$, онда се $a$ налази у највише коначно много максималних идеала $M_i$ домена $V_i$, тј. инвертибилан је у скоро сваком $V_i$.

Присетимо се валуационих домена према [45].

**Дефиниција 48.** Нека је $A$ домен и $k = Frac(A)$. $A$ је валуациони домен ако задовољава један од еквивалентних услова:
1) $\forall a, b \in A \quad a \mid b \vee b \mid a$,
2) $\forall a, b \in A \quad \langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle \vee \langle b\rangle \subseteq \langle a\rangle$,
3) $\forall x \in k \quad x \in A \vee x^{-1} \in A$ тј. $A \cup A^{-1} = k$.

Следећом теоремом дата је веза између валуационих и интегрално затворених домена према [48].

**Теорема 49.** *Домен $A$ је интегрално затворен акко $A = \bigcap_\alpha V_\alpha$, где су $V_\alpha$ валуациони домени, $A \subseteq V_\alpha \subseteq k$, $k = Frac(A)$.*

Како је сваки UFD интегрално затворен (видети [37]), према претходној теореми сваки UFD је пресек неких валуационих домена, па је ова класа домена занимљива по питању факторијалности. Детаљније о валуационим прстенима може се наћи у [6].

Наредне две теореме су непосредна последица дефиниције Криловог домена и особина фамилије валуација које се могу придружити сваком Дедекиндовом домену.

**Теорема 50.** *UFD је Крулов домен.*

**Теорема 51.** *Дедекиндов домен је Крулов.*

Како постоје Дедекиндови домени са неједнозначном факторизацијом, као и факторијални домени који нису Дедекиндови, из претходних теорема види се значај Крулових домена као шире, обједињујуће класе, у оквиру које се могу испитати њихова заједничка својства. Претходна теорема се може добити и као последица следеће теореме, из које се види да класа Крулових домена садржи и широку класу Нетериних интегрално затворених домена.

**Теорема 52.** *Нетерин интегрално затворен домен је Крулов.*

Сваки Крулов домен је и интегрално затворен као пресек валуационих домена који су интегрално затворени (видети [6]).

**Теорема 53.** *Сваки Крулов домен је комплетно интегрално затворен.*

Значај групе класа делитеља $Cl(A)$ Круловог домена $A$, при испитивању факторијалности, је у томе што се њеним рачунањем може не само утврдити да ли је $A$ UFD, већ се у супротном на неки начин може „измерити његова нефакторијалност". Неки аутори користе групу класа делитеља при дефинисању факторијалног домена $A$. При томе се факторијални домени дефинишу као Крулови домени са тривијалном групом класа делитеља, тј. дефиниција Круловог домена на овај начин гласи:

**Дефиниција 54.** $A$ је домен са једнозначном факторизацијом ако је Крул–ов и $Cl(A) = 0$.

Ова дефиниција факторијалног домена суштински се разликује од ранијих дефиниција. Њом се проблем једнозначне факторизације у Круловом домену $A$ своди на технике рачунања његове групе класа делитеља $Cl(A)$. Ова група даје и одговор на питање колико је неки Крулов домен са неједнозначном факторизацијом „далеко" од UFD-а. Факторијалност Круловог домена $A$ еквивалентна је тривијалности групе $Cl(A)$, тј. услову да је сваки дивизорски идеал у $A$ главни. Више о овоме може се наћи у [31].

Сада ћемо навести један пример испитивања факторијалности домена рачунањем његове групе класа делитеља, који се доказан може наћи у [31, пропозиција 11.8]. Овај пример биће од посебног значаја код испитивања факторијалности прстена реалних тригонометријских полинома, што је предмет истраживања друге главе ове дисертације.

**Пример 55.** Нека су дати прстени полиномних функција на сфери:

$$A_n = \mathbb{R}[X_0, X_1, \ldots, X_n]/\langle X_0^2 + X_1^2 + \ldots + X_n^2 - 1\rangle,$$

$$B_n = \mathbb{C}[X_0, X_1, \ldots, X_n]/\langle X_0^2 + X_1^2 + \ldots + X_n^2 - 1\rangle.$$

Тада важи:
а) $n \geq 3 \Longrightarrow Cl(A_n) = Cl(B_n) = 0$, тј. $A_n$ и $B_n$ су факторијални,
б) $n = 1 \Longrightarrow Cl(A_1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $Cl(B_1) = 0$, тј. факторијалан је само $B_1$,
в) $n = 2 \Longrightarrow Cl(A_2) = 0$, $Cl(B_2) = \mathbb{Z}$, тј. факторијалан је само $A_2$.

Детаљнији доказ овог примера може се наћи у [75].

## 1.5 Домени са слабијим особинама факторизације од једнозначности

У последњем поглављу ове главе биће дат кратак преглед неколико врста домена са слабијим особинама факторизације од једнозначности, према раду [3].

Нека је $A$ домен са количничким пољем $k$. Интересује нас факторизација у $A$. Једнозначну факторизацију дефинисали смо у поглављу 1.2. Домени са једнозначном факторизацијом (*unique factorization domains*, UFD) су интензивно проучавани и о њима постоји опсежна литература ([19, 31, 82, 83], итд.). У наставку се бавимо доменима са нешто слабијим особинама факторизације.

На почетку ове главе дефинисали смо атомичне домене (дефиниција 11). Добро је познато да су UFD, главноидеалски и Нетерини домени атомични (*atomic domains*). Домен $A$ задовољава услов растућег ланца главних идеала (*acsending chain condition on principal ideals*, ACCP) ако не постоји бесконачан, строго растући ланац главних идеала у $A$. Нетерини, UFD и главноидеалски домени задовољавају ACCP, па су стога атомични. Примери атомичних домена који не задовољавају ACCP могу се наћи у радовима [35, 105].

Домен $A$ је домен са ограниченом факторизацијом (*bounded factorization domain*, BFD) ако је атомичан и ако је, за сваки ненулти, неинвертибилан елемент домена $A$, дужина факторизације у производ нерастављивих елемената ограничена. Даље, за домен $A$ кажемо да је полу-факторијалан (*half-factorial domain*, HFD) ако је атомичан и ако је свака факторизација ненултог, неинвертибилног елемента из $A$ у производ нерастављивих елемената једнаке дужине, тј. кадгод је $x_1 \ldots x_m = y_1 \ldots y_n$, где су $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ нерастављиви елементи у $A$, тада је $m = n$. Ови домени су први пут уведени у раду [103]. Такође су описани и у раду [104]. UFD је очигледно HFD, али обрнуто не важи с обзиром да је сваки Крулов домен $A$ за који је $Cl(A) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ HFD, према [104], али није UFD.

Домен $A$ је домен са коначно много нерастављивих делитеља (*for irreducible-divisor-finite*, idf-domain) ако сваки ненулти елемент домена $A$ има највише коначан број непридружених, нерастављивих делитеља. Ови домени први пут су уведени у раду [36]. На пример, сваки UFD је idf-домен. Међутим, од већег интереса су атомични idf-домени, тј. домени у којима сваки ненулти, неинвертибилан елемент има само коначан број непридружених делитеља, па стога има само коначан број факторизација до на редослед и придружене елементе. Такви домени названи су, у раду [3], домени са коначном факторизацијом (*finite factorization domains*, FFD). То су дакле атомични idf-домени. На пример, сваки UFD је FFD. У примеру 4.1. из рада [3], показано је да HFD као и BFD не морају бити idf-домени, а тиме и FFD. Такође, FFD не мора бити HFD.

Овде нећемо улазити у све детаље, јер то није циљ овог рада, а више о овој теми може се наћи у [3]. За потребе разумевања материје која следи у наредној глави, довољно је познавање горенаведених чињеница.

Као закључак свега описаног у раду [3], дајемо следећу шему:

$$\text{UFD} \Longrightarrow \text{HFD} \Longrightarrow \text{BFD} \Longrightarrow \text{ACCP} \Longrightarrow \text{atomic domain}$$

$$\text{UFD} \Longrightarrow \text{FFD} \Longrightarrow \text{BFD} \Longrightarrow \text{ACCP} \Longrightarrow \text{atomic domain}$$

$$\text{UFD} \Longrightarrow \text{idf–domain} \Longleftarrow \text{FFD}.$$

Уз то, ниједна од приказаних импликација не важи у супротном смеру.

**ГЛАВА 2**

# ПРСТЕНИ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ПОЛИНОМА

Тригонометријски полиноми су у великој мери заступљени у различитим областима математике и њеним применама. Тригонометријска интерполација примењује се у интерполацији периодичних функција, теорији апроксимација, реалној и комплексној анализи, дискретној Фуријеовој[6] трансформацији итд.

Недавно су, у радовима [23, 24, 26, 27], објављени занимљиви резултати који се односе на ненегативне тригонометријске полиноме и њихове примене код Фуријеових редова, у обради сигнала, у теорији апроксимација, теорији функција и теорији бројева. Бројне примене, нарочито у нумеричкој анализи и машинству, у вези су са проблемима елиминације квантора, који укључују тригонометријске функције [69]. Примену тригонометријских полинома можемо наћи и у теорији вероватноће [18].

У овој глави тригонометријски полиноми биће разматрани користећи алгебарски приступ. Сама теорија факторизације у прстену полинома дуго је била проучавана и многа њена својства могу се наћи у литератури. Алгебарски приступ тригонометријским полиномима је, пак, у знатно мањој мери био предмет истраживања и на ову тему нема пуно материјала у литератури. Међутим, у последње време ова тема постаје актуелна.

[6]Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), француски математичар и физичар

Предмет истраживања овог дела дисертације су својства факторизације у прстенима тригонометријских полинома, а циљ истраживања је да се проучавањем ових својстава допринесе и помогне проучавању горенаведених области.

## 2.1 Појам тригонометријског полинома

У математичкој и нумеричкој анализи под тригонометријским полиномом подразумевамо коначну линеарну комбинацију функција $\sin nx$ и $\cos nx$, за природан број $n$. Коефицијенти ових полинома могу бити из скупа реалних или комплексних бројева. Када су коефицијенти комплексни, не постоји разлика између такве коначне линеарне комбинације и коначног Фуријеовог реда. Свака функција облика

$$t^c(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где је $x \in \mathbb{R}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, $(a_n, b_n) \neq (0,0)$, је комплексан тригонометријски полином степена $n$ [81, стр. 88]. Користећи Ојлерову[7] формулу, која успоставља основну везу између тригонометријске и експоненцијалне функције са комплексним експонентом, и која гласи

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \;\; x \in \mathbb{R},$$

овај полином може бити записан и као

$$t^c(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; c_k \in \mathbb{C}.$$

Аналогно, нека су $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ и $a_n \neq 0$ или $b_n \neq 0$, тада је

$$t(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \;\; x \in \mathbb{R},$$

реалан тригонометријски полином степена $n$ [74, стр. 150].
У наставку, највише пажње посвећује се особинама факторизације тригонометријских полинома.

Рит[8] се први бавио факторизацијом експоненцијалних полинома. Он је 1927. године доказао следећу теорему.

[7] Leonhard Euler (1707-1783), швајцарски математичар и физичар
[8] Joseph Fels Ritt (1893-1951), амерички математичар

**Теорема 56.** [79] *Ако је експоненцијални полином* $1 + a_1e^{\alpha_1 x} + \cdots + a_ne^{\alpha_n x}$ *дељив експоненцијалним полиномом* $1+b_1e^{\beta_1 x}+\cdots+b_re^{\beta_r x}$ *за свако* $b \neq 0$, $a_i$, $b_j, \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$ *(при чему је реалан део коефицијента уз* $x$ *већи или једнак нули, а када је једнак нули, имагинаран део је позитиван), тада је свако* $\beta$ *линеарна комбинација* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *са рационалним коефицијентима.*

При томе се под дељивошћу подразумева да се израз $1+a_1e^{\alpha_1 x}+\cdots+a_ne^{\alpha_n x}$ факторише у производ $(1 + b_1e^{\beta_1 x} + \cdots + b_re^{\beta_r x}) \cdot (1 + c_1e^{\gamma_1 x} + \cdots + c_se^{\gamma_s x})$ за свако $b \neq 0$ и $c \neq 0$. Приметимо да ако $\alpha_k$ из претходне теореме заменимо са $im$, за $m \in \mathbb{Z}$, према Ојлеровој формули добијамо тригонометријске полиноме.

Означимо редом са

$$T = \left\{ \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid n\in\mathbb{N},\ a_k, b_k \in \mathbb{R}\right\}$$

и

$$T^c = \left\{ \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid n\in\mathbb{N},\ a_k, b_k \in \mathbb{C}\right\}$$

скупове тригонометријских полинома са реалним и комплексним коефицијентима. Степен ненултог тригонометријског полинома, као што је већ речено, дефинише се као највећа вредност $n$ за коју $a_n$ и $b_n$ нису истовремено једнаки нули. Наредна, добро позната лема, показује нам да реални тригонометријски полиноми формирају прстен, као и да степени реалних тригонометријских полинома имају особине као и степени обичних полинома.

**Лема 57.** [93] *Производ два реална тригонометријска полинома степена* $m$ *и* $n$ *је реалан тригонометријски полином степена* $m + n$.

*Доказ:* Ако је $m$ или $n$ једнако нули тврђење је очигледно, јер је тригонометријски полином степена 0 константна функција. Зато претпоставимо да је $m$, $n > 0$. Присетимо се следећих тригонометријских идентитета:

$$\sin a \cdot \sin b = [\cos(a - b) - \cos(a + b)]/2,$$

$$\cos a \cdot \cos b = [\cos(a + b) + \cos(a - b)]/2,$$

$$\sin a \cdot \cos b = [\sin(a+b) + \sin(a-b)]/2,$$
$$\cos a \cdot \sin b = [\sin(a+b) - \sin(a-b)]/2.$$

Ако ове једнакости применимо на производ

$$(p\cos mx + q\sin mx)\cdot(r\cos nx + s\sin nx), \tag{2.1.1}$$

$p$, $q$, $r$, $s \in \mathbb{R}$, добијамо следећи резултат

$$A\cos(m-n)x + B\sin(m-n)x + C\cos(m+n)x + D\sin(m+n)x, \tag{2.1.2}$$

где је $A = (pr+qs)/2$, $B = (qr-ps)/2$, $C = (pr-qs)/2$ и $D = (ps+qr)/2$. Када је $m > n$, израз (2.1.2) припада скупу $T$. Ако је пак $n > m$, тада $\cos(m-n)$ и $\sin(m-n)$ заменимо редом са $\cos(n-m)$ и $-\sin(n-m)$ у изразу (2.1.2), и добијени израз такође припада скупу $T$. На крају, ако је $m = n$, заменимо $\sin 0$ са 0 и $\cos 0$ са 1, па израз (2.1.2) и у овом случају припада скупу $T$.

Директним рачунањем добијамо да је

$$C^2 + D^2 = (p^2+q^2)(r^2+s^2)/4. \tag{2.1.3}$$

Одавде видимо да ако ниједан фактор није нула ($p^2+q^2 \neq 0$ и $r^2+s^2 \neq 0$), следи да је $C^2 + D^2 \neq 0$. Дакле, користимо чињеницу да је сума квадрата два реална броја једнака нули једино када су оба броја нула, па је производ (2.1.1) заиста степена $m+n$.

Посматрајмо сада производ било која два реална тригонометријска полинома, одговарајућих степена $m$ и $n$. Тај производ биће једнак суми производа облика (2.1.1), који су размотрени у претходном тексту овог доказа, па се може закључити да је тражени производ заправо реалан тригонометријски полином.

Производ два израза највећег степена, облика (2.1.1), даје ненулти израз степена $m+n$, облика (2.1.2), који не може бити поништен неким другим изразом у производу, па ће тражени резултат бити заиста степена $m+n$. $\square$

**Напомена 58.** Из доказа претходне леме може се закључити да је и производ два комплексна тригонометријска полинома такође комплексан тригонометријски полином, што се доказује потпуно аналогно претходном доказу. Међутим, оно што се разликује код комплексних, у односу на реалне тригонометријске полиноме, су особине њихових степена.

Наиме, посматрајући једнакост (2.1.3) не можемо извести исти закључак као за реалне тригонометријске полиноме, јер сума квадрата два комплексна броја може бити једнака нули и ако нису оба броја истовремено једнака нули. Дакле, може се догодити да су $p, q, r, s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а да су $C$ и $D$ истовремено једнаки нули, као нпр. у случају када је: $p = 1$, $q = i$, $r = 1 + i$ и $s = 1 - i$. Тада производ (2.1.1), тј. производ $(\cos mx + i \sin mx) \cdot ((1 + i) \cos nx + (1 - i) \sin nx)$ није степена $m + n$, док су фактори тог производа редом степена $m$ и $n$. Заправо, једино када је $p = \mp qi$ и $r = \pm si$, при чему је $(p, q) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ и $(r, s) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$, степен производа (2.1.1) биће једнак $|m - n|$, док ће његови фактори бити редом степена $m$ и $n$. Одавде можемо закључити да је степен производа два комплексна тригонометријска полинома редом степена $m$ и $n$, под горенаведеним условима, мањи од $m + n$.

Надаље, није тешко закључити да скуп свих (реалних и комплексних) тригонометријских полинома образује прстен, штавише образује домен. Уз то, према основним тригонометријским идентитетима очигледно је да, за свако $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, функција $\cos nx$ представља полином по $\cos x$ степена $n$, док функција $\sin nx$ представља производ функције $\sin x$ и полинома по $\cos x$ степена $n - 1$. Ово илуструјемо следећим примером.

**Пример 59.** 1) За функцију $\cos nx$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, важи:
$\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1;$
$\cos 3x = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x;$
$\cos 4x = 8 \cdot \cos^4 x - 8 \cdot \cos^2 x + 1;$
$\cos 5x = 16 \cdot \cos^5 x - 20 \cdot \cos^3 x + 5 \cdot \cos x;$
$\vdots$
$\cos 10x = 512 \cdot \cos^{10} x - 1280 \cdot \cos^8 x + 1120 \cdot \cos^6 x - 400 \cdot \cos^4 x + 50 \cdot \cos^2 x - 1;$
$\vdots$
2) За функцију $\sin nx$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, важи:
$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x;$
$\sin 3x = \sin x \cdot (3 - 4 \sin^2 x);$
$\sin 4x = \sin x \cdot (4 \cdot \cos x - 8 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x);$
$\sin 5x = \sin x \cdot (5 - 20 \cdot \sin^2 x + 16 \cdot \sin^4 x);$
$\vdots$

$\sin 10x = \sin x \cdot (10 \cdot \cos x - 160 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x + 672 \cdot \sin^4 x \cdot \cos x - 1024 \cdot \sin^6 x \cdot \cos x + 512 \cdot \sin^8 x \cdot \cos x)$;

$\vdots$

Обрнуто, сваки производ $\cos^n x \cdot \sin^m x$ се може записати као $\sum_{k=0}^{q}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $q \in \mathbb{N}$, $a_k$, $b_k \in \mathbb{Q}$, што је доказано теоремом 147 (глава 4).

Из претходног разматрања може се закључити да је $T = \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ и $T^c = \mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, тј. $T$ и $T^c$ су прстени тригонометријских полинома редом над пољима $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

**Напомена 60.** Ако посматрамо тригонометријске полиноме са коефицијентима из поља $\mathbb{Q}$ и његовог алгебарског раширења $\mathbb{Q}(i)$, уместо из поља $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, и ако уведемо следеће ознаке:

$$S = \left\{ \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid n \in \mathbb{N},\ a_k, b_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

и

$$S^c = \left\{ \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid n \in \mathbb{N},\ a_k, b_k \in \mathbb{Q}(i) \right\},$$

закључујемо да је $S = \mathbb{Q}[\cos x, \sin x] \subseteq \mathbb{R}[\cos x, \sin x] = T$ и $S^c = \mathbb{Q}(i)[\cos x, \sin x] \subseteq \mathbb{C}[\cos x, \sin x] = T^c$.

У наставку рада, за елемент домена $T$, односно $T^c$, користићемо ознаку $z = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \in \mathbb{N}$, где су $a_k$ и $b_k$ реални, односно комплексни коефицијенти. Са $\overline{z}$ означаваћемо елемент $\sum_{k=0}^{n}(\overline{a}_k \cos kx + \overline{b}_k \sin kx)$, где је $\overline{a}$ конјугат елемента $a \in \mathbb{C}$. При томе, коефицијенти $a_k$ и $b_k$ једнозначно су одређени захваљујући теорији Фуријеових редова.

На крају овог поглавља истакнимо занимљиво запажање из рада [12], које се односи на чињеницу да се појам тригонометријског полинома не подудара са појмом такозваног „наивног” тригонометријског полинома. Наиме, поставља се питање зашто се појам тригонометријског полинома, поред функције облика

$$f(t) = \sum_{n=0}^{k} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{k} b_n \sin nt,\ \ k \in \mathbb{Z}^+,\ \ a_0, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{C},$$

не односи и на функцију облика

$$g(t) = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n \cos^n t + \sum_{n=1}^{k} \beta_n \sin^n t,\ \ k \in \mathbb{Z}^+,\ \ \alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{C},$$

која је, у раду [12], названа „наиван” тригонометријски полином.

Сваки од ових скупова тригонометријских полинома је заправо потпростор простора $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Међутим, на први поглед није очигледно зашто су ови потпростори различити. Јасно је да се сваки „наиван” тригонометријски полином може представити као стандардан тригонометријски полином (теорема 147). Дакле, важи следећа теорема.

**Теорема 61.** [12] *Сваки „наиван” тригонометријски полином може бити представљен као стандардан тригонометријски полином.*

Оно што је мање очигледно је да се не могу сви тригонометријски полиноми записати као „наивни” тригонометријски полиноми. Заправо, познато је да је $\cos nt = T_n(\cos t)$, где је $T_n$ $n$–ти Чебишевљев[9] полином прве врсте. Према томе, очигледно је да се $\cos nt$ може представити као „наиван” тригонометријски полином. Такође важи да је $\sin nt = \sin t \cdot U_{n-1}(\cos t)$, где је $U_{n-1}$ $(n-1)$–ви Чебишевљев полином друге врсте. Више о Чебишевљевим полиномима може се наћи у [58]. $T_n(x)$ и $U_n(x)$ су полиноми степена $n$ који су парне или непарне функције у зависности од парности броја $n$. Одавде се може закључити да се и $\sin(2k+1)t$ може представити као „наиван” тригонометријски полином. Тиме се проблем своди на показивање да се полиноми облика $\sin 2kt$ не могу изразити као „наивни” тригонометријски полиноми. Један од начина да се то покаже изложен је у раду [12], где је коришћена позната теорема алгебарске геометрије, Безуова[10] теорема. Притом, довољан је слабији облик ове теореме, који је директна последица стандардног облика Безуове теореме (видети [20, 32, 96]).

**Теорема 62.** (Безуова теорема – слабији облик) *Нека су $P(x,y)$ и $Q(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ комплексни полиноми редом степена $m$ и $n$, где је $NZD(P,Q)=1$. Број пресечних тачака двеју кривих $P(x,y)=0$ и $Q(x,y)=0$ у комплексној равни је највише $mn$.*

Докажимо да важи следећа теорема.

**Теорема 63.** [12] *Функција $\sin 2kt$ се не може изразити као „наиван” тригонометријски полином.*

[9]Пафнутий Львович Чебышёв (1821-1894), руски математичар

[10]Etienne Bezout (1730-1783), француски математичар

За доказ ове теореме користимо следећу помоћну лему.

**Лема 64.** [12] *Нека* $R(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. *Тада је* $R(\cos t, \sin t) = 0$ *за свако* $t \in \mathbb{R}$ *акко* $R(x,y) \in \langle x^2+y^2-1 \rangle$, *тј.* $R(x,y)$ *припада идеалу генерисаном полиномом* $x^2+y^2-1$.

*Доказ:* Ако $R(x,y) \in \langle x^2+y^2-1 \rangle$, тада је очигледно $R(\cos t, \sin t) = 0$. Обрнуто, претпоставимо да је $R(\cos t, \sin t) = 0$ и да $R(x,y) \notin \langle x^2+y^2-1 \rangle$. Како је $x^2+y^2-1$ нерастављив полином, према Безуовој теореми следи да је број тачака пресека кривих $R(x,y) = 0$ и $x^2+y^2-1 = 0$ највише $2 \cdot \deg(R)$. Сходно томе, следи да $\cos t$ и $\sin t$ имају коначно много вредности за $t \in \mathbb{R}$, што је контрадикција. □

Коначно, теорема 63 може бити доказана.

*Доказ теореме 63* [12]: Претпоставимо да постоје комплексни полиноми једне променљиве $P$ и $Q$ такви да је $\sin 2kt = P(\cos t) + Q(\sin t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Користећи идентитет $\sin 2kt = \sin t \cdot U_{2k-1}(\cos t)$ добијамо да је $\sin t \cdot U_{2k-1}(\cos t) = P(\cos t) + Q(\sin t)$. Према претходној леми, следи да $U_{2k-1}(x)y - P(x) - Q(y) \in \langle x^2+y^2-1 \rangle$. То значи да постоји полином $S(x,y)$ такав да је

$$U_{2k-1}(x)y - P(x) - Q(y) = S(x,y)(x^2+y^2-1).$$

Нека је $x^\alpha y^\beta$ произвољан моном полинома $S$. Ако је $\alpha > 0$, тада десна страна претходне једнакости има моном облика $x^\alpha y^{\beta+2}$, који се не подудара ни са једним мономом на левој страни ове једнакости. Према томе, сваки моном полинома $S$ има облик $y^\beta$. Међутим, ако је $\beta > 0$, тада десна страна поменуте једнакости има моном $x^2 y^\beta$, који се не подудара ни са једним мономом са леве стране ове једнакости, јер је $U_{2k-1}(x)$ полином непарног степена. Дакле, $S(x,y)$ је константа, што је очигледно немогуће. □

Сходно томе, може се закључити да је простор „наивних” тригонометријских полинома прави потпростор тригонометријских полинома.

## 2.2 Прстен $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$

Комплексно експоненцијалне форме синуса и косинуса, тј. везе $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, омогућавају да се произвољан елемент $z \in T^c =$

$\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ може написати у облику

$$z = e^{-inx} P(e^{ix}),\ n \in \mathbb{N},\ P(X) \in \mathbb{C}[X],\ \deg(P) = 2n. \tag{2.2.1}$$

Обрнуто, имајући у виду да је $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, следи да елемент облика $e^{-inx}P(e^{ix})$, за $n \in \mathbb{N}$ и $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, припада $T^c$. Према томе, може се закључити да постоји изоморфизам $f : \mathbb{C}[X]_S \longrightarrow T^c$ индукован пресликавањем $X \longrightarrow e^{ix}$. Дакле, прстен тригонометријских полинома са комплексним коефицијентима $T^c$ изоморфан је локализацији прстена $\mathbb{C}[X]$ у односу на мултипликативан скуп $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, у ознаци $\mathbb{C}[X]_S$. Уз то, можемо приметити да је сваки елемент $z$ из $\mathbb{C}[X]_S$ облика $X^k P(X)$, за $k \in \mathbb{Z}$, $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ и $P(0) \neq 0$.

Према дефиницији 20 и примеру 21 $\mathbb{C}[X]$ је Еуклидов домен. На основу [84, пропозиција 7], имамо да је и његова локализација у односу на мултипликативан скуп $S$, тј. $\mathbb{C}[X]_S$, такође Еуклидов домен. Уз то, функција $\varphi$, која дефинише Еуклидов домен $\mathbb{C}[X]_S$, дата је са $\varphi(z) = \deg(P)$.

Инвертибилни елементи домена $T^c$ су елементи скупа $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, затим степени елемената $z$ и $z^{-1}$, као и производи ненултих комплексних константи и степена елемената $z$ и $z^{-1}$, где је $z = \cos x + i \sin x$ и $z^{-1} = \cos x - i \sin x$.

Као последица претходних запажања важи следећа теорема.

**Теорема 65.** $T^c = \mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ *је Еуклидов домен са количничким пољем* $K^c = \mathbb{C}(\cos x)[\sin x]$. *Нерастављиви елементи у* $T^c$ *су, до на инвертибилне елементе, тригонометријски полиноми облика* $\cos x + i \sin x - a$, $a \in \mathbb{C}^*$.

Претходна разматрања изложена су у раду [71].

Користећи теореме 19 и 22, може се закључити да је $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ домен са једнозначном факторизацијом.

Међутим, да је $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ домен са једнозначном факторизацијом можемо показати и на други начин. Претходну чињеницу можемо доказати и на следећи начин:

**Теорема 66.** $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ *је домен са једнозначном факторизацијом.*

*Доказ:* Посматрајмо домен $A = \mathbb{C}[X,Y]/\langle X^2 + Y^2 - 1\rangle$. Са $a$ и $b$ означимо одговарајуће слике елемената $X$ и $Y$ при канонском хомоморфизму $\mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow A$, $a = X + \langle X^2 + Y^2 - 1\rangle$, $b = Y + \langle X^2 + Y^2 - 1\rangle$. Тада имамо да је

$A = \mathbb{C}[a, b]$ са дефинишућом релацијом $a^2 + b^2 = 1$. Ако трансформишемо ову релацију на следећи начин:

$$1 = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib) = uv, \;\; a = \frac{u + v}{2}, \; b = \frac{u - v}{2i},$$

добијамо да је $A = \mathbb{C}[u, v]$ са дефинишућом релацијом $uv = 1$. Приметимо да ако са $a$ и $b$ означимо редом $\cos x$ и $\sin x$, одакле следи да је $u = e^{ix}$ и $v = e^{-ix}$, добијамо да је заправо $A = \mathbb{C}[\cos x, \sin x] = \mathbb{C}[e^{ix}, e^{-ix}]$. Посматрајмо $\mathbb{C}[e^{ix}, e^{-ix}]$ као прстен Лоранових[11] полинома $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$. Даље, имамо да је

$$A = \mathbb{C}[u, u^{-1}] = \mathbb{C}[u][u^{-1}] = \mathbb{C}[u]_S,$$

где је $S = \{1, u, u^2, \ldots\}$. Другим речима, $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$ је локализација домена $\mathbb{C}[u]$ у односу на мултипликативан скуп $S$. Како је $\mathbb{C}[u]$ главноидеалски домен (видети [70, пример 51]), према теореми 19 следи да је уједно и домен са једнозначном факторизацијом. Према теореми 27 следи да је и $A = \mathbb{C}[u]_S$ домен са једнозначном факторизацијом, па је тиме и доказ готов. $\square$

Јасно је да је и $S^c = \mathbb{Q}(i)[\cos x, \sin x]$ Еуклидов домен, а тиме и домен са једнозначном факторизацијом, што се показује слично као за домен $T^c$.

Следећа последица је уопштење Ритове теореме о факторизацији (теорема 56).

**Последица 67.** [71] *Нека је* $z = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, a_k, b_k \in \mathbb{C}$, *тако да је* $(a_n, b_n) \neq (0, 0)$. *Нека је* $d$ *заједнички делитељ целих бројева* $k$ *таквих да је* $(a_k, b_k) \neq (0, 0)$. *Тада* $z$ *има једнозначну факторизацију*

$$z = \lambda(\cos nx - i \sin nx) \prod_{j=1}^{\frac{2n}{d}} (\cos dx + i \sin dx - \alpha_j), \tag{2.2.2}$$

*где* $\lambda, \alpha_j \in \mathbb{C}^*$.

*Доказ:* Увођењем смене $y = dx$ добијамо

$$z = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos k\tfrac{y}{d} + b_k \sin k\tfrac{y}{d}).$$

[11] Pierre Alphonse Laurent (1813-1854), француски математичар

Нека је даље $k' = \frac{k}{d}$, одакле је $k = k'd$, па добијамо

$$z = \sum_{k'=0}^{\frac{n}{d}} (a_{k'd} \cos k'y + b_{k'd} \sin k'y) = e^{-i\frac{n}{d}y} P(e^{iy}),$$

где је $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ и $\deg(P) = 2\frac{n}{d}$, на основу (2.2.1). Како је, према претходној теореми, $\mathbb{C}[\cos y, \sin y]$ домен са једнозначном факторизацијом са нерастављивим елементима облика $\cos y + i \sin y - a$, $a \in \mathbb{C}^*$, следи да постоји једнозначна факторизација облика (2.2.2). □

**Напомена 68.** Факторизација из претходне последице је могућа, јер је $\mathbb{C}$ алгебарски затворено поље. Поставља се питање да ли постоји слична факторизација за елементе из $S^c = \mathbb{Q}(i)[\cos x, \sin x]$. Одговор је негативан, јер $\mathbb{Q}(i)$ није алгебарски затворено поље. Према томе, за елементе из $S^c$ није могуће пронаћи растављање сличног типа.

## 2.3 Прстен $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$

Прстен реалних тригонометријских полинома $T$ има занимљиве карактеристике. Једна од њих је идентитет

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x), \tag{2.3.1}$$

који је пример неједнозначне факторизације у домену $T$. Међутим, ова једнакост није пример неједнозначне факторизације у домену комплексних тригонометријских полинома $T^c$, с обзиром на облик нерастављивих елемената у $T^c$, што је приказано теоремом 65. Детаљније о овоме може се видети у напомени 79.

Наравно, није довољно само рећи да су лева и десна страна једнакости (2.3.1) две потпуно различите факторизације. Наиме, потребно је детаљно описати особине факторизације у домену $T$, и показати да су фактори $\sin x$, $1 - \cos x$ и $1 + \cos x$ нерастављиви елементи, као и да се $\sin x$ не може записати као производ једног од преостала два фактора и инвертибилног елемента домена $T$. О свему томе биће речи у наставку овог поглавља.

Наредна теорема је, по ауторовом сазнању, оригиналан резултат.

Циљ је дакле показати да, за разлику од домена $T^c$, домен $T$ није домен са једнозначном факторизацијом. С тим у вези, докажимо најпре следеће тврђење.

**Тврђење 69.** *Прстен* $T = \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ *је изоморфан са* $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$.

*Доказ:* Посматрајмо хомоморфизам $\varphi : \mathbb{R}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, који је дефинисан са $\varphi(X) = \cos x$ и $\varphi(Y) = \sin x$. Језгро овог хомоморфизма се састоји из полинома $f(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$, са особином $\varphi(f(X,Y)) = 0$.
С једне стране, имамо да је

$$\varphi(X^2+Y^2-1) = \varphi(X^2) + \varphi(Y^2) - 1 = \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0,$$

одакле следи да $X^2+Y^2-1 \in \ker(\varphi)$, па $\langle X^2+Y^2-1\rangle \subseteq \ker(\varphi)$.
С друге стране, за полином $f$ из језгра докажимо да важи $(X^2+Y^2-1) \mid f$. Посматрајмо $f$ као полином по $X$ са коефицијентима из $\mathbb{R}[Y]$, тј. $f \in \mathbb{R}[Y][X]$. Запишимо $f$ као

$$f(X,Y) = (X^2+Y^2-1)\cdot g(X,Y) + r(X,Y),$$

$\deg_X r \leq 1$. Тада је $r = a + bX$, за $a, b \in \mathbb{R}[Y]$. Како је $f \in \ker(\varphi)$, имамо да је $\varphi(f(X,Y)) = 0$. Из ове једнакости следи да је

$$\varphi(f(X,Y)) = \varphi((X^2+Y^2-1)\cdot g(X,Y) + r(X,Y)) = 0.$$

Претходно смо видели да је $\varphi(X^2+Y^2-1) = 0$, па је, према томе, $\varphi(r(X,Y)) = 0$. Дакле, $\varphi(a(Y)+b(Y)X) = \varphi(a(Y)) + \varphi(b(Y))\varphi(X) = 0$. Убацивши горенаведену смену, добијамо $a(\sin x) + b(\sin x)\cos x = 0$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Одавде је $a^2(\sin x) = b^2(\sin x)\cos^2 x$, тј. $a^2(\sin x) = b^2(\sin x)(1-\sin^2 x)$, за свако $x \in \mathbb{R}$, из чега мора следити $a^2(Y) = b^2(Y)(1-Y^2)$, за свако $Y \in \mathbb{R}$. Последња једнакост важи једино када је $a = b = 0$. Стога, имамо да је $r = 0$, па $(X^2+Y^2-1) \mid f$. Према томе, доказали смо и да је $\ker(\varphi) \subseteq \langle X^2+Y^2-1\rangle$. Дакле, важи једнакост $\langle X^2+Y^2-1\rangle = \ker(\varphi)$.
На крају, према првој теореми о изоморфизмима за прстене [28], следи да је $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle \cong \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$. □

Коначно, можемо доказати и следећу теорему.

**Теорема 70.** $T = \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ *није домен са једнозначном факторизацијом.*

*Доказ:* Како је $\mathbb{R}[\cos x, \sin x] \cong \mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$, циљ нам је да покажемо да $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ није домен са једнозначном факторизацијом. Као што је речено у поглављу 1.2 ове дисертације, у домену са једнозначном факторизацијом сваки нерастављив елемент је уједно и прост. Према томе, настојимо да покажемо да у $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ постоји елемент који је нерастављив, али није прост.

Означимо редом са $\hat{x}$ и $\hat{y}$ слике елемената $X$ и $Y$ при канонском хомоморфизму $\mathbb{R}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$, тј. $\hat{x} = X + \langle X^2+Y^2-1\rangle$ и $\hat{y} = Y + \langle X^2+Y^2-1\rangle$. Тада имамо да је $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle = \mathbb{R}[\hat{x},\hat{y}]$ са дефинишућом релацијом $\hat{x}^2+\hat{y}^2=1$. Показаћемо да је $\hat{x}$ атом, али није прост.

У доказу претходног тврђења видели смо да се у $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ сваки елемент може једнозначно приказати као $a(Y)+b(Y)X$. Дефинишимо „норму”

$$N : \mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle \longrightarrow \mathbb{R}[Y] \text{ са } N(a(Y)+b(Y)X)=a^2(Y)+b^2(Y)(Y^2-1).$$

Приметимо да је $N$ мултипликативна функција, одакле можемо закључити да су инвертибилни елементи у $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ заправо ненулти елементи из $\mathbb{R}$.

Докажимо прво да је $\hat{x}$ нерастављив елемент. Претпоставимо да је $\hat{x} = z_1 z_2$. Одавде следи да је $N(\hat{x}) = N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$. С друге стране је $N(\hat{x}) = Y^2-1$. Дакле, $N(z_1)N(z_2) = Y^2-1$ и према томе разликујемо следеће случајеве:
1) $\deg N(z_1) = 0$, па је $z_1 \in \mathbb{R}^*$. Дакле, $\hat{x}$ је нерастављив елемент.
2) $\deg N(z_1) = 2$, па је $\deg N(z_2) = 0$, што значи да је $z_2 \in \mathbb{R}^*$. Дакле, $\hat{x}$ је нерастављив елемент.
3) $\deg N(z_1) = \deg N(z_2) = 1$, па претпоставимо да је нпр. $N(z_1) = Y-1$ тј.

$$a_1^2(Y) + b_1^2(Y)(Y^2-1) = Y-1. \tag{2.3.2}$$

Одавде следи да $(Y-1) \mid a_1(Y) \Longrightarrow \exists a_2 \in \mathbb{R}[Y]$ тако да је $a_1 = (Y-1)a_2$. Убацивши ово у једначину (2.3.2) добијамо $a_2^2(Y)(Y-1)+b_1^2(Y)(Y+1)=1$. Решавање последње једнакости своди се на решавање система једначина $a_2^2(Y)+b_1^2(Y)=0$ и $b_1^2(Y)-a_2^2(Y)=1$, одакле добијамо контрадикцију. Дакле, $\hat{x}$ је нерастављив елемент.

Докажимо сада да $\hat{x}$ није прост. Како у $\mathbb{R}[\hat{x}, \hat{y}]$ важи $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1$, тј. $\hat{x}^2 = (1-\hat{y})(1+\hat{y})$, следи да $\hat{x} \mid (1-\hat{y})(1+\hat{y})$. Међутим, $\hat{x} \nmid (1-\hat{y})$ и $\hat{x} \nmid (1+\hat{y})$. Претпоставимо супротно да $\hat{x} \mid (1-\hat{y})$. Тада имамо да $N(\hat{x}) \mid N(1-\hat{y})$. Одавде добијамо да $(Y^2-1) \mid (Y-1)^2$, тј. $(Y+1) \mid (Y-1)$, а то је контрадикција. Слично доказујемо да $\hat{x} \nmid (1+\hat{y})$, па $\hat{x}$ није прост, и тиме је доказ готов. $\square$

Знајући ово, циљ нам је сада да покажемо да у $T$, што се факторизације тиче, важи неки слабији услов од једнозначности. С тим у вези, покажимо да важи следећа теорема.

**Теорема 71.** [71] $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ *је Дедекиндов полу-факторијалан домен.*

*Доказ:* Према примеру 55 имамо да је група класа од $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ изоморфна са $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Како је $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle \cong \mathbb{R}[X][Y]/\langle Y^2-(1-X^2)\rangle$, где је $\mathbb{R}[X]$ факторијалан домен у коме је 2 инвертибилан елемент и $1-X^2$ неинвертибилан елемент ослобођен квадрата, следи да је $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ интегрално затворен домен, према [31, лема 11.1].

Такође, $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ је и Нетерин једнодимензионалан домен. Наиме, како $X^2+Y^2-1=0$ одређује хиперповрш у $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}[X,Y]$ је димензије 2, требало би да је $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ димензије 1. Заправо, како је прстен $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ домен, имамо да је $\langle 0\rangle$ прост идеал, према дефиницији 2. Једини минимални прости идеали над идеалом $\langle 0\rangle$ су облика $\langle X-a\rangle$ и $\langle Y-b\rangle$ (видети дефиницију 30). Изаберимо произвољан идеал $\langle X-\sqrt{2}\rangle$. Тада у

$$(\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle)/\langle X-\sqrt{2}\rangle \tag{2.3.3}$$

важи $Y^2 = 1-X^2 = 1-2 = -1$, па одавде видимо да је прстен (2.3.3) у ствари поље $\mathbb{R}[i]$. На основу дефиниције 3, $\langle X-\sqrt{2}\rangle$ је максималан идеал у $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$, па је $\langle 0\rangle \subsetneq \langle X-\sqrt{2}\rangle$ максималан ланац простих идеала. Стога, димензија домена $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ једнака је 1.

Дакле, према дефиницији 37 $T$ је Дедекиндов домен, па је према теореми 51 $T$ и Крулов домен са групом класа изоморфном са $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Коначно, према [104, теорема 1.4] $T$ је полу-факторијалан домен. $\square$

Јасно је да и $S = \mathbb{Q}[\cos x, \sin x]$ такође није домен са једнозначном факторизацијом. Аналогно доказу претходне теореме може се показати да је и $S$ Крулов домен. Како је Крулов домен и атомичан и домен са коначно нерастављивих делитеља, следи да је $\mathbb{Q}[\cos x, \sin x]$ домен са коначном факторизацијом (FFD), према [3, теорема 5.1].

**Напомена 72.** Чињеницу да је $T^c$ (односно $T$) домен можемо доказати и на следећи начин. Заправо, као што смо видели, прстен $T^c$ (односно $T$) изоморфан је са $\mathbb{C}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ (односно $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$). $\mathbb{C}[X,Y]$ је домен са једнозначном факторизацијом, према [75, теорема 2.3.2 и последица 2.3.3] (као и $\mathbb{R}[X,Y]$). Полином $X^2+Y^2-1$ је нерастављив у $\mathbb{C}[X,Y]$ (тиме и у $\mathbb{R}[X,Y]$). С обзиром да је у домену са једнозначном факторизацијом елемент прост акко је нерастављив, следи да је полином $X^2+Y^2-1$ прост. Према теореми 6 је и идеал $\langle X^2+Y^2-1\rangle$ прост, па је према дефиницији 2 $\mathbb{C}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$ домен, као и $\mathbb{R}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$. Према томе, следи да су $T^c$ и $T$ домени. Одавде се на сличан начин може закључити да су $S^c$ и $S$ такође домени.

**Напомена 73.** [71] После свега реченог о прстенима тригонометријских полинома, можемо направити кратак резиме њихових особина:
(i) $T$ је слободан $\mathbb{R}[\cos x]$-модул са базом $\{1, \sin x\}$ и $T^c$ је слободан $T$-модул са базом $\{1, i\}$.
(ii) $\mathbb{R}[\cos x]$ је Еуклидов домен, јер је $\mathbb{R}[\cos x] \cong \mathbb{R}[X]$, па одатле следи да се полу-факторијалан домен $T$ налази између два Еуклидова домена $\mathbb{R}[\cos x]$ и $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$.
(iii) Количничко поље од $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ је $K = \mathbb{R}(\cos x)[\sin x]$ и количничко поље од $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ је $K^c = \mathbb{C}(\cos x)[\sin x]$.
Аналогно све важи и за прстене $S$ и $S^c$.

**Теорема 74.** [71] $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ *је интегрално затворење од* $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ *у количничком пољу* $K^c$ *од* $T^c$.

*Доказ:* Најпре докажимо следеће: Нека је $R$ домен и $K = Frac(R)$. Нека је $L$ алгебарско раширење поља $K$ и $S$ интегрално затворење од $R$ у $L$. Тада важи $Frac(S) = L$.

С једне стране, како је $S$ интегрално затворење од $R$ у $L$, тј. $S$ је скуп свих елемената из $L$ који су цели над $R$, следи да поље $L$ садржи $S$. Поље $L$ садржи и његово поље разломака $Frac(S)$, јер је то најмање поље у које се домен $S$ може утопити. Дакле, $Frac(S) \subset L$.

С друге стране, нека је $B = R\backslash\{0\}$. Према [7, пропозиција 5.12], имамо да је $K = B^{-1}R \subset B^{-1}S \subset B^{-1}L = L$. Штавише, како је $S$ интегрално затворење од $R$ у $L$, према истој пропозицији следи да је $B^{-1}S$ интегрално затворење од $K$ у $L$. Даље, како је поље $L$ алгебарско раширење поља $K$, оно је и интегрално раширење [6], па је интегрално затворење од $K$ у $L$ управо $L$. Дакле, $L = B^{-1}S \subset Frac(S)$, јер је $B \subset S \setminus \{0\}$. Коначно, добијамо да је $L = Frac(S)$.

Вратимо се сада на оно што је требало доказати у овој теореми и уведимо ознаке према помоћном доказу. Нека је $R = \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ и $K = \mathbb{R}(\cos x)[\sin x]$ његово количничко поље. Како је $L = \mathbb{C}(\cos x)[\sin x]$ квадратно раширење $K[i]$ поља $K$, а уједно је и количничко поље од $S = \mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, користећи претходно доказану чињеницу имамо да је $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ интегрално затворење од $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ у $\mathbb{C}(\cos x)[\sin x]$. $\square$

### 2.3.1 Нерастављиви елементи

У наставку се бавимо нерастављивим елементима домена $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$.

**Дефиниција 75.** [71] Нека је $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k x + \left(\sum_{j=0}^{p} b_j \cos^j x\right) \sin x,\ a_k, b_j \in \mathbb{R}$. Степен тригонометријског полинома $P$ дефинише се као

$$\delta(P) = \begin{cases} \sup\{k, j+1 \mid a_k, b_j \neq 0\}, & \text{за } P \neq 0 \\ -\infty, & \text{за } P = 0. \end{cases}$$

Дефиниција има смисла, јер фамилија $\{\cos^k x, \sin x \cos^k x\}$ образује базу од $T$ над $\mathbb{R}$.

Одавде следи формула $\delta(PQ) = \delta(P) + \delta(Q)$, за свако $P, Q \in T$, што је доказано и лемом 57. Посебно, тригонометријски полиноми степена један су нерастављиви елементи у $T$. Такође, важи да је скуп свих инвертибилних елемената у $T$ скуп $\mathbb{R}^*$, што је већ речено у доказу теореме 70.

У наставку рада циљ нам је да одредимо облик нерастављивих елемената у $T$.

**Теорема 76.** [71] *Нерастављиви елементи у* $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ *су облика*

$$a\cos x + b\sin x + c,\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ (a, b) \neq (0, 0).$$

*Доказ:* С једне стране, према дефиницији степена реалног тригонометријског полинома видимо да је реалан тригонометријски полином степена 1 облика $a\cos x + b\sin x + c$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $(a,b)\neq(0,0)$, и он је нерастављив.

С друге стране, доказујемо да је нерастављив реалан тригонометријски полином степена 1. Нека је $z\in T$ такав да је $\delta(z)=k>0$. Дакле, $z$ није инвертибилан елемент (јер би било $\delta(z)=0$). Како $z\in T$, следи да $z\in T^c$. На основу (2.2.1) и последице 67, $z$ можемо записати као

$$z=\lambda e^{-ikx}\prod_{j=1}^{2k}(e^{ix}-a_j),\ \ \lambda, a_j\in\mathbb{C}^*.$$

Међутим, како $z\in T$, следи да је $z=\overline{z}$, па је

$$z^2=z\overline{z}=\lambda\overline{\lambda}\prod_{j=1}^{2k}(e^{ix}-a_j)\prod_{j=1}^{2k}(e^{-ix}-\overline{a}_j),\ \lambda\cdot\overline{\lambda}\in\mathbb{R}_+^*.$$

Штавише, за $a\in\mathbb{C}^*$ важи

$$(e^{ix}-a)(e^{-ix}-\overline{a})=1+a\overline{a}-2(\alpha\cos x+\beta\sin x),$$

где је $a=\alpha+i\beta,\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, јер је $a\neq 0$. Дакле, имамо да је

$$z^2=\lambda\overline{\lambda}\prod_{j=1}^{2k}(1+a_j\overline{a}_j-2(\alpha_j\cos x+\beta_j\sin x)), \tag{2.3.4}$$

где је $(-2\alpha_j,-2\beta_j,1+a_j\overline{a}_j)\in\mathbb{R}^3$ и $(-2\alpha_j,-2\beta_j)\neq(0,0)$. Према томе, добијамо $z^2=z_1\cdot\ldots\cdot z_{2k}$, где су $z_j$ нерастављиви елементи из $T$ степена 1. Посебно, ако је $z$ нерастављив елемент, добијамо да је $2\delta(z)=2\cdot 1$, јер је $T$ полу-факторијалан домен према теореми 71, па је $\delta(z)=1$. □

**Последица 77.**[71] *Нека је $z=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}, a_k,b_k\in\mathbb{R}$, где је $(a_n,b_n)\neq(0,0)$. Нека је $d$ заједнички делитељ целих бројева $k$ таквих да је $(a_k,b_k)\neq(0,0)$. Тада је $z$ производ $n/d$ елемената облика $a\cos dx+b\sin dx+c$ за $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $(a,b)\neq(0,0)$.*

*Доказ:* Како $z\in T$, следи да $z\in T^c$. Према томе, аналогно доказу последице 67 имамо да је $z=e^{-i\frac{n}{d}y}P(e^{iy})$, $P(X)\in\mathbb{C}[X]$, $\deg(P)=2\frac{n}{d}$. Ако искористимо израз (2.3.4) за облик полинома $z^2$ и вратимо смену $y=dx$, добијамо тражени облик полинома $z$. □

**Последица 78.** [71] *За било који ненулти и неинвертибилан елемент* $z \in \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ *постоји једнозначна факторизација, до на редослед атома у факторизацији и до на множење инвертибилним елементима, облика* $z^2 = uz_1 \cdot \ldots \cdot z_n$, *где* $u \in \mathbb{R}_+^*$ *и* $z_j$ *су нераставльиви елементи облика*

$$a_j \cos x + b_j \sin x + 1 + \frac{1}{4}\big(a_j^2 + b_j^2\big),\ (a_j, b_j) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

*и* $n = 2\delta(z)$.

*Доказ:* Постојање такве факторизације следи из доказа претходне теореме. Како је $z_j$ нераставльив елемент, имамо да је $\delta(z_j) = 1$, па добијамо да је $2\delta(z) = n$.

Докажимо сада јединственост ове факторизације. Претпоставимо да постоје две факторизације

$$z^2 = uz_1 \cdot \ldots \cdot z_n = u' z_1' \cdot \ldots \cdot z_n', \tag{2.3.5}$$

где $u, u' \in \mathbb{R}_+^*$, $z_j = a_j \cos x + b_j \sin x + 1 + \frac{1}{4}(a_j^2 + b_j^2)$, $z_j' = a_j' \cos x + b_j' \sin x + 1 + \frac{1}{4}(a_j'^2 + b_j'^2)$, $(a_j, b_j)$, $(a_j', b_j') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Означимо са $c_j = \frac{1}{2}(a_j + ib_j)$ и $c_j' = \frac{1}{2}(a_j' + ib_j')$.

Како $z \in T$, следи да $z \in T^c$, па према једнакости (2.3.5) у $T^c$ важи

$$u \prod_{j=1}^{n} (e^{ix} - c_j)(e^{-ix} - \overline{c}_j) = u' \prod_{j=1}^{n} (e^{ix} - c_j')(e^{-ix} - \overline{c}_j'),$$

што је еквивалентно са

$$u \prod_{j=1}^{n} (X - c_j)(1 - X\overline{c}_j) = u' \prod_{j=1}^{n} (X - c_j')(1 - X\overline{c}_j').$$

Како је $\mathbb{C}[X]$ факторијалан домен, према дефиницији 12 важи да за било које $j \in \{1, \ldots, n\}$ постоји $j' \in \{1, \ldots, n\}$ тако да је $c_j = c_{j'}'$ или $c_j = \frac{1}{\overline{c}_{j'}'}$.

- Ако је $c_j = c_{j'}'$, следи да је $z_j = z_{j'}'$.
- Ако је $c_j = \frac{1}{\overline{c}_{j'}'}$, следи да је $c_{j'}' = (\overline{c}_j)^{-1} = \frac{c_j}{c_j \overline{c}_j} = \frac{2(a_j + ib_j)}{(a_j^2 + b_j^2)}$. Према томе, добијамо да је $a_{j'}' = \frac{4a_j}{a_j^2 + b_j^2}$ и $b_{j'}' = \frac{4b_j}{a_j^2 + b_j^2}$. Одавде следи да је $z_{j'}' = \frac{4a_j}{a_j^2 + b_j^2} \cos x + \frac{4b_j}{a_j^2 + b_j^2} \sin x + \frac{4 + a_j^2 + b_j^2}{a_j^2 + b_j^2}$. Коначно, добијамо да је $z_{j'}' = \frac{4z_j}{a_j^2 + b_j^2}$, одакле следи да су $z_j$ и $z_{j'}'$ придружени. Тиме је доказана и јединственост. □

**Напомена 79.** Знајући и инвертибилне елементе и облик нерастављивих елемената домена $T$, јасно је да је једнакост $\sin^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$, где су $\sin x$, $1-\cos x$ и $1+\cos x$ нерастављиви елементи у $T$, пример неједнозначне факторизације у $T$. Ова једнакост, међутим, није такав пример у домену комплексних тригонометријских полинома $T^c$. Промена коефицијената мења природу факторизације у домену. Наиме, у домену $T^c$ више је инвертибилних елемената него у домену $T$, тј. поред свих ненултих комплексних константи, ту су и степени елемената $z$ и $z^{-1}$, као и производи ненултих комплексних константи и степена елемената $z$ и $z^{-1}$, где су $z$ и $z^{-1}$ елементи облика $z = \cos x + i\sin x$ и $z^{-1} = \cos x - i\sin x$. На следећем примеру показаћемо да у $T^c$ фактори $\sin x$, $1-\cos x$ и $1+\cos x$ престају да буду нерастављиви. Заправо, важи:

$$\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^{-1}(z-1)(z+1)}{2i},$$

$$1 - \cos x = \frac{-z + 2 - z^{-1}}{2} = \frac{-z^{-1}(z-1)^2}{2},$$

$$1 + \cos x = \frac{z^{-1}(z+1)^2}{2},$$

тако да обе стране једнакости $\sin^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$ постају

$$\frac{-z^{-2}(z-1)^2(z+1)^2}{4},$$

када их изразимо као производ нерастављивих фактора у $T^c$ (видети теорему 65 и последицу 67).

## 2.3.2 Максимални идеали

Према теореми 71 $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ је Дедекиндов домен са класним бројем 2, тј. ред групе класа идеала овог домена је 2. Одавде видимо да је сваки максималан идеал или главни идеал или идеал реда 2. Штавише, ако су $M$ и $M'$ реда 2, важи да су $M^2$ и $MM'$ главни идеали генерисани нерастављивим елементима [95, пропозиција 1 и њена последица]. Обрнуто, ако је $z \in T$ нерастављив елемент, могућа су три случаја: $\langle z \rangle$ је максималан идеал; $\langle z \rangle = M^2$, где је $M$ максималан идеал и $\langle z \rangle = MM'$, где су $M$ и $M'$ различити максимални идеали.

Нерастављиви елементи дати су теоремом 76. Надаље ћемо се бавити примарном декомпозицијом идеала $\langle z\rangle$, где је $z \in T$ нерастављив елемент, што је заправо растављање идеала на пресек коначно много примарних идеала, о чему је било речи у поглављу 1.3 ове дисертације.

Неки докази дати су детаљније него у изворном раду [71].

**Теорема 80.** [71] *Нека је* $z = a\cos x + b\sin x + c \in \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, *где је* $(a, b) \neq (0, 0)$. *Тада важи:*

(1) $\langle z\rangle$ *је максималан идеал ако и само ако је* $c^2 > a^2 + b^2$;

(2) $\langle z\rangle$ *је квадрат максималног идеала ако и само ако је* $c^2 = a^2 + b^2$;

(3) $\langle z\rangle$ *је производ два максимална идеала ако и само ако је* $c^2 < a^2 + b^2$.

*Доказ:* Како је $(a, b) \neq (0, 0)$, следи да је $a^2 + b^2 > 0$. Уведимо ознаке $a' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $k = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тада је

$$z' = a'\cos x + b'\sin x + k = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\cos x + b\sin x + c),$$

тј. $z' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}z$, па су $z$ и $z'$ придружени. Штавише, $a'^2 + b'^2 = 1$, па према томе постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $a' = \sin\alpha$ и $b' = \cos\alpha$, одакле добијамо да је $z' = \sin(x + \alpha) + k$. Надаље, главни идеал $\langle z\rangle$ посматрамо као главни идеал $\langle z'\rangle$ ($z$ и $z'$ су придружени), тј. као идеал генерисан елементом $\sin(x + \alpha) + k$.

Дефинишимо хомоморфизам $h : T \longrightarrow T$ са $h(\cos x) = \cos(x + \alpha)$ и $h(\sin x) = \sin(x + \alpha)$, који је заправо један изоморфизам.
Тада је $h(\langle \sin x + k\rangle) = \langle \sin(x + \alpha) + k\rangle$, одакле следи да су примарне декомпозиције идеала $\langle \sin(x + \alpha) + k\rangle$ и $\langle \sin x + k\rangle$ истог облика. Због тога, у наставку можемо посматрати идеал генерисан са $\sin x + k$.

Дефинишимо сада хомоморфизам $g' : \mathbb{R}[X] \longrightarrow T$ са $g'(X) = \cos x$. Нека је $t = \sin x + k$, $k \in \mathbb{R}$. Циљ нам је да пронађемо $g'^{-1}(\langle t\rangle)$.

Нека $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Тада имамо да $P(X) \in g'^{-1}(\langle t\rangle)$ акко постоје полиноми $Q(X)$ и $R(X) \in \mathbb{R}[X]$ такви да је

$$\begin{aligned} P(\cos x) =& \ (\sin x + k)[Q(\cos x) + \sin x R(\cos x)] \\ =& \ [kQ(\cos x) + (1 - \cos^2 x)R(\cos x)] + \sin x[Q(\cos x) + kR(\cos x)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} kQ(\cos x) + (1 - \cos^2 x)R(\cos x) & = P(\cos x) \\ Q(\cos x) + kR(\cos x) & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} kQ(X) + (1 - X^2)R(X) & = P(X) \\ Q(X) + kR(X) & = 0. \end{cases}$$

Из друге једнакости последњег система једначина добијамо да је $Q(X) = -kR(X)$. Заменом у прву једначину, добијамо $P(X) = (1 - k^2 - X^2)R(X)$. Штавише, $g'(1-k^2-X^2) = 1-k^2-\cos^2 x = \sin^2 x - k^2 = (\sin x - k)(\sin x + k) \in \langle t \rangle$. Коначно, добијамо да је $g'^{-1}(\langle t \rangle) = (1 - k^2 - X^2)\mathbb{R}[X]$. Према томе, имамо следећи комутативан дијаграм:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[X] \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ \mathbb{R}[X]/\langle 1 - k^2 - X^2 \rangle \arrow[r, "\overline{g}'"] & T/\langle t \rangle \end{tikzcd}$$

где је $\overline{g}'$ ињективно пресликавање. Међутим, пресликавање $\overline{g}'$ је и сурјективно, јер како је $\overline{\sin x} = -\overline{k}$ у $T/\langle t \rangle$, имамо да је $\overline{P(\cos x) + \sin x Q(\cos x)} = \overline{g}'\left[\overline{P(X) - kQ(X)}\right]$.

Коначно, следи да је $T/\langle t \rangle \cong \mathbb{R}[X]/\langle 1-k^2-X^2 \rangle$, што омогућава следећу дискусију по $\langle t \rangle$:

(1) $\langle t \rangle$ је максималан идеал $\iff 1 - k^2 - X^2$ је нерастављив елемент у $\mathbb{R}[X] \iff k^2 > 1 \iff c^2 > a^2 + b^2$.

(2) $\langle t \rangle$ је квадрат максималног идеала $\iff \langle 1 - k^2 - X^2 \rangle$ је квадрат максималног идеала $\iff 1 - k^2 - X^2$ је квадрат $\iff k^2 = 1 \iff c^2 = a^2 + b^2$.

(3) $\langle t \rangle$ је производ два различита максимална идеала $\iff k^2 < 1 \iff c^2 < a^2 + b^2$. □

Сада можемо да опишемо максималне идеале домена $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$ и њихове особине у зависности од њихових генератора.

**Последица 81.** [71] *Нека је $M$ максималан идеал у $T = \mathbb{R}[\cos x, \sin x]$.*

(*а*) *Ако је $M$ главни идеал, тада постоје реални бројеви $\alpha$ и $k$, $k > 1$, такви да је $M = \langle \sin(x + \alpha) + k \rangle$ и $T/M \cong \mathbb{C}$.*

(*б*) *Ако $M$ није главни идеал, тада постоји реалан број $\alpha$ такав да је $M = \langle \sin(x + \alpha) + 1, \cos(x + \alpha) \rangle$, $M^2 = \langle \sin(x + \alpha) + 1 \rangle$ и $T/M \cong \mathbb{R}$. Обрнуто, такви идеали су максимални у $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$.*

*Доказ:* (а) У делу (1) претходне теореме видели смо да је максималан идеал, који је и главни идеал, облика $\langle \sin(x+\alpha)+k \rangle$ акко је $k^2 > 1$. Ако је

$k < -1$, довољно је уместо $\alpha$ узети $\alpha+\pi$, па имамо да је $\sin(x+\alpha+\pi)+k = -\sin(x+\alpha)+k = -(\sin(x+\alpha)+(-k))$, за $-k > 1$. Означимо са $M$ идеал $\langle \sin(x+\alpha)+k \rangle$. Такође смо у том делу претходне теореме видели и да је $T/M \cong \mathbb{R}[X]/\langle 1-k^2-X^2 \rangle$. Како је $\mathbb{R}[X]/\langle 1-k^2-X^2 \rangle$ заправо исто што и $\mathbb{R}[X]/\langle a-X^2 \rangle$, где је $a = 1-k^2 < 0$, тј. исто што и $\mathbb{R}[X]/\langle b+X^2 \rangle$, где је $b = -a > 0$, аналогно доказу примера 85 из [70], показује се да је $T/M \cong \mathbb{C}$.
(б) Претпоставимо да $M$ није главни идеал. Већ смо видели раније да је група класа идеала домена $T$ изоморфна са $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Такође је речено да је, према томе, $M^2$ главни идеал генерисан нерастављивим елементом [95] и облика је $t = \sin(x+\alpha)+1$. Заиста је, према делу (2) претходне теореме, $M^2$ генерисан елементом облика $\sin(x+\alpha)+k$, $k \in \mathbb{R}$, где је $k^2 = 1$. Слично као у доказу (а), ако је $k = -1$, уместо $\alpha$ довољно је узети $\alpha+\pi$.
Како је $\sin(x+\alpha)+1 \in M$, следи да $\cos^2(x+\alpha) = [1-\sin(x+\alpha)][1+\sin(x+\alpha)] \in M$, па према томе и $\cos(x+\alpha) \in M$. Одатле је $I = \langle \sin(x+\alpha)+1, \cos(x+\alpha) \rangle \subset M$. У претходној теореми користили смо хомоморфизам $h : T \longrightarrow T$ дефинисан са $h(\cos x) = \cos(x+\alpha)$ и $h(\sin x) = \sin(x+\alpha)$, који је изоморфизам, и добили да је $T/I^2 = T/\langle \sin(x+\alpha)+1 \rangle \cong \mathbb{R}[X]/\langle X^2 \rangle$, а одатле добијамо да је $T/I \cong \mathbb{R}$, па је $I$ максималан идеал. Отуда следи да је $M = I = \langle \sin(x+\alpha)+1, \cos(x+\alpha) \rangle$. $\square$

Из дела (3) теореме 80 следи да је главни идеал генерисан елементом $a\cos x + b\sin x + c \in T$, где је $(a,b) \neq (0,0)$ и $c^2 < a^2+b^2$, заправо једнак производу два различита максимална идеала који нису главни. Намера нам је да одредимо те максималне идеале и обрнуто, да пронађемо генератор производа два различита максимална идеала који нису главни.

**Теорема 82.** [71] (*Производ два максимална идеала у $T$ који нису главни*)

(1) *Ако су $M = \langle \sin(x+\alpha)+1, \cos(x+\alpha) \rangle$ и $M' = \langle \sin(x+\beta)+1, \cos(x+\beta) \rangle$, $\alpha \neq \beta (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, два различита максимална идеала у $T$ који нису главни, тада је $MM'$ главни идеал генерисан нерастављивим елементом облика* $\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos x + \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin x + \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.

(2) *Обрнуто, нека је $z = a\cos x + b\sin x + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, нерастављив елемент у $T$, такав да је $c^2 < a^2+b^2$. Тада је $\langle z \rangle$ производ два различита максимална идеала који нису главни, $M = \langle \sin(x+\alpha)+1, \cos(x+\alpha) \rangle$ и $M' = \langle \sin(x+\beta)+1, \cos(x+\beta) \rangle$, тако да постоји $\theta \in \mathbb{R}$ за које важи:* $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos(\theta-\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *и* $\alpha = 2\theta - \beta$.

*Доказ:* (1) Нека су $M$ и $M'$ два различита максимална идеала у $T$, као што је наведено у претпоставци дела (1) ове теореме. Према делу (3) теореме 80 имамо да је $MM' = \langle z \rangle$, где је $z = a\cos x + b\sin x + c$, за $c^2 < a^2 + b^2$ и $M^2M'^2 = \langle z \rangle^2$. Према делу (б) последице 81 идеали $M^2$ и $M'^2$ су такође главни идеали генерисани редом нерастављивим елементима $\sin(x+\alpha)+1$ и $\sin(x+\beta)+1$. Одавде следи да је

$$\langle \sin(x+\alpha)+1 \rangle \langle \sin(x+\beta)+1 \rangle = \langle a\cos x + b\sin x + c \rangle^2,$$

одакле изједначавањем леве и десне стране добијамо, до на заједнички фактор елемената $a, b$ и $c \in \mathbb{R}^*$, следећи систем једначина:

$$(*) \begin{cases} b^2 - a^2 &= \cos(\alpha+\beta) \\ 2ab &= \sin(\alpha+\beta) \\ 2ac &= \sin\alpha + \sin\beta \\ 2bc &= \cos\alpha + \cos\beta \\ b^2 + c^2 &= 1 + \cos\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

Решавањем овог система једначина добијамо, до на знак, следеће изразе:

$$a = \sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}, \;\; b = \cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}, \;\; c = \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

(2) Обрнуто, нека је $z = a\cos x + b\sin x + c$, тако да је $c^2 < a^2 + b^2$. Како је $a^2 + b^2 > 0$, уведимо ознаке $a' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $c' = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тада је $z' = a'\cos x + b'\sin x + c' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}z$, па $z$ и $z'$ генеришу исти главни идеал $\langle z \rangle = \langle z' \rangle$, где је $c'^2 < a'^2 + b'^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$, тј. $|c'| < 1$. Одавде следи да постоји $\theta \in \mathbb{R}$ тако да је $a' = \sin\theta$, $b' = \cos\theta$ и $\beta \neq \theta \pmod{\pi}$ при чему је $c' = \cos(\theta - \beta)$. Означимо са $\alpha = 2\theta - \beta$, одакле следи да је $\alpha \neq \beta \pmod{2\pi}$. За овако уведене ознаке лако се проверава да је задовољен систем једначина $(*)$, одакле се може закључити, према делу (1), да важи једнакост:

$$\langle \sin(x+\alpha)+1 \rangle \langle \sin(x+\beta)+1 \rangle = \langle a'\cos x + b'\sin x + c' \rangle^2.$$

Штавише, из последње једнакости и дела (б) последице 81 добијамо да су $M = \langle \sin(x+\alpha)+1, \cos(x+\alpha) \rangle$ и $M' = \langle \sin(x+\beta)+1, \cos(x+\beta) \rangle$ два различита максимална идеала таква да је $MM' = \langle z' \rangle = \langle z \rangle$. $\square$

Сада ћемо размотрити везу између максималних идеала у доменима $T$ и $T^c$.

**Теорема 83.** [71] *Нека је $M$ максималан идеал у $T$.*

(1) *Ако је $M$ главни идеал, тада је $M$ облика $\langle p\cos x + q\sin x + r\rangle$, где је $4r = 4 + p^2 + q^2$, $r \neq 2$ и $T^cM$ је производ два различита максимална идеала $M'$ и $M''$ у $T^c$, где је $M' = \langle \cos x + i\sin x - a\rangle$, $M'' = \langle \cos x + i\sin x - \overline{a}^{\,-1}\rangle$ и $-2a = p + iq$.*

(2) *Ако $M$ није главни идеал, тада постоји $\alpha$ тако да је $M$ облика $\langle \sin(x+\alpha) + 1, \cos(x+\alpha)\rangle$ и $T^cM = \langle \cos x + i\sin x - a\rangle$ је максималан идеал у $T^c$, где је $a = -ie^{-i\alpha}$.*

*Нека је $M' = \langle \cos x + i\sin x - a\rangle$, $a \in \mathbb{C}^*$, максималан идеал у $T^c$. Тада је $M' \cap T$ главни идеал ако и само ако је $|a| \neq 1$. Када је $M' \cap T$ главни идеал, други максималан идеал $M''$, који је наткривање од $M' \cap T$, је облика $\langle \cos x + i\sin x - \overline{a}^{\,-1}\rangle$.*

*Доказ:* Нека је $M$ максималан идеал у $T$. Тада је $T^cM = \prod_{i=1}^n M_i'^{e_i}$, где су $M_i'$ максимални идеали у $T^c$ и $\sum_{i=1}^n e_i f_i = 2$ $(*)$. На основу теореме 74 и [106, последица, 287. стр.] је $f_i = [T^c/M_i' : T/M]$. За сваки максималан идеал $M'$ у $T^c$ важи $T^c/M' \cong \mathbb{C}$.

(1) Ако је $M$ главни идеал у $T$, тада је $M$ генерисан нераставључивим елементом $z$ облика $p\cos x + q\sin x + r$, где је $(p,q) \neq (0,0)$ и $r^2 > p^2 + q^2$, према делу (1) теореме 80. Како $z \in T$, следи да $z \in T^c$, па је $z = \lambda e^{-ix}(e^{ix} - \alpha)(e^{ix} - \beta)$, $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$, где је $\alpha \neq \beta$, јер је $p^2 + q^2 - r^2 \neq 0$. Одавде следи да $z$ припада двама различитим максималним идеалима домена $T^c$ и $n = 2$, одакле је $e_i = f_i = 1$, за $i = 1, 2$ у $(*)$.

(2) Ако $M$ није главни идеал, тада постоји $\alpha$ тако да је $M$ облика $M = \langle \sin(x+\alpha) + 1, \cos(x+\alpha)\rangle$.

У овом случају је $T/M \cong \mathbb{R}$, према делу (б) последице 81, па је према томе $[T^c/M_i' : T/M] = [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, за сваки максималан идеал $M_i'$ који је наткривање идеала $M$. Одавде следи да је $f_i = 2$, па заменом у $(*)$ добијамо да је $n = e_i = 1$.

Посматрајмо у $T^c$ максималан идеал $M' = \langle z\rangle$, где је $z = \cos x + i\sin x - a$, $a \in \mathbb{C}^*$ и нека је $M = M' \cap T$. Претпоставимо да $M$ није главни идеал. Тада је, према делу (б) последице 81, $M$ облика $\langle \sin(x+\alpha) + 1, \cos(x+\alpha)\rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Како је $M = M' \cap T$, следи да $\langle \sin(x+\alpha) + 1, \cos(x+\alpha)\rangle \in M'$, па и

$e^{i(x+\alpha)} + i \in M'$. С обзиром да је $M'$ облика $\langle \cos x + i \sin x - a \rangle$, $a \in \mathbb{C}^*$, из једнакости $\cos x + i \sin x - a = e^{i(x+\alpha)} + i$ добијамо да је $a = -ie^{-i\alpha}$, одакле следи да је $|a| = 1$.

Обрнуто, нека је $a \in \mathbb{C}$ тако да је $|a| = 1$. Тада постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $a = -ie^{-i\alpha}$. Одавде имамо да је $t = \frac{e^{i(\alpha-x)}}{2i} z^2 = \sin(x+\alpha) + 1$ нераставлјив елемент у $T$, који генерише квадрат максималног идеала $M = M' \cap T$ у $T$, према теореми 80 (2). Стога, следи да $M$ није главни идеал.

Нека је $M' = \langle \cos x + i \sin x - a \rangle$, $a \in \mathbb{C}^*$, максималан идеал у $T^c$ такав да је $|a| \neq 1$. Тада је $M = M' \cap T$ главни идеал (видели смо у претходном разматрању да $M$ није главни идеал акко је $|a| = 1$). Нека је $M''$ други максималан идеал у $T^c$, који је наткривање идеала $M$. Нека је $z = \cos x + i \sin x - a$. Тада

$$t = z\overline{z} = (\cos x + i \sin x - a)(\cos x - i \sin x - \overline{a}) = (-\overline{a} - a)\cos x + (-\overline{a} + a) i \sin x + 1 + a\overline{a}$$

генерише идеал $M$.

Међутим, $\overline{z} = \cos x - i \sin x - \overline{a} = -\overline{a} e^{-ix}(\cos x + i \sin x - \overline{a}^{\,-1}) \notin M'$, јер $\overline{a}^{\,-1} \neq a$. Одавде следи да $\cos x + i \sin x - \overline{a}^{\,-1}$ генерише $M''$. Штавише, у доказу теореме 76 видели смо да је $z\overline{z} = 1 + a\overline{a} - 2\alpha \cos x - 2\beta \sin x$, где је $a = \alpha + i\beta$. Уведимо смену $p = -2\alpha$, $q = -2\beta$ и $r = 1 + a\overline{a} = 1 + \frac{1}{4}(p^2 + q^2)$, па према томе $p \cos x + q \sin x + r$ генерише идеал $M$. Како је $M$ максималан идеал у $T$, добијамо да је $r^2 > p^2 + q^2$ (теорема 80 (1)). Дакле, $r^2 > 4r - 4$ и $r \neq 2$. $\square$

**Напомена 84.** [71] Постоје два случаја где су максимални идеали у $T^c$ наткривања максималног идеала $M$ у $T$:

$$M \text{ није главни идеал} \longrightarrow M' = \langle \cos x + i \sin x - a \rangle, \quad a \in \mathbb{C}^*, \ |a| = 1,$$

$$M \text{ јесте главни идеал} \begin{array}{l} \nearrow \ M' = \langle \cos x + i \sin x - a \rangle \\ \searrow \ M'' = \langle \cos x + i \sin x - \overline{a}^{-1} \rangle \end{array}, \ a \in \mathbb{C}^*, \ |a| \neq 1.$$

Наведимо сада неколико примера факторизације.

**Пример 85.** [71] Посматрајмо једнакост $\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$ $(*)$. Два нераставлјива елемента $1 - \sin x$ и $1 + \sin x$ генеришу редом идеале $\langle 1 - \sin x \rangle$ и $\langle 1 + \sin x \rangle$, који су квадрати максималних идеала према теореми 80. Према томе, имамо два максимална идеала $M_1 = \langle 1 - \sin x, \cos x \rangle$ и

$M_2 = \langle 1+\sin x, \cos x\rangle$. Дакле, три нерастављива елемента $\cos x$, $1-\sin x$ и $1+\sin x$, која се појављују у једнакости $(*)$, генеришу редом производе $M_1M_2$, $M_1^2$ и $M_2^2$, при чему су $M_1^2$ и $M_2^2$ главни идеали према последици 81. Такође је и $M_1M_2$ главни идеал према теореми 82.

**Пример 86.** [71] Посматрајмо следеће три факторизације елемента $\cos 2x$ на нерастављиве, непридружене факторе:

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= (\sqrt{2}\cos x - 1)(\sqrt{2}\cos x + 1)\\
&= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)\\
&= (1+\sqrt{2}\sin x)(1-\sqrt{2}\sin x).
\end{aligned}$$

Сви ови нерастављиви елементи генеришу производ два различита максимална идеала од следећа четири:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \langle 1+\sin(x+\tfrac{\pi}{4}), \cos(x+\tfrac{\pi}{4})\rangle\\
M_2 &= \langle 1+\sin(x-\tfrac{\pi}{4}), \cos(x-\tfrac{\pi}{4})\rangle\\
M_3 &= \langle 1+\sin(x+\tfrac{3\pi}{4}), \cos(x+\tfrac{3\pi}{4})\rangle\\
M_4 &= \langle 1+\sin(x-\tfrac{3\pi}{4}), \cos(x-\tfrac{3\pi}{4})\rangle
\end{aligned}$$

тако да је: $\langle\sqrt{2}\cos x - 1\rangle = M_2M_4$, $\langle\sqrt{2}\cos x + 1\rangle = M_1M_3$, $\langle\cos x - \sin x\rangle = M_1M_4$, $\langle\cos x + \sin x\rangle = M_2M_3$, $\langle 1+\sqrt{2}\sin x\rangle = M_1M_2$, $\langle 1-\sqrt{2}\sin x\rangle = M_3M_4$, одакле се добија да је $\langle\cos 2x\rangle = M_1M_2M_3M_4$.

**Пример 87.** [71] Нека је $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Циљ нам је да израчунамо број различитих факторизација елемента $\sin nx$ на нерастављиве, непридружене факторе. Кренимо најпре од једнозначне факторизације у $T^c$, и добијамо:

$$\begin{aligned}
\sin nx &= -\tfrac{ie^{-inx}}{2}(e^{2inx}-1)\\
&= -\tfrac{ie^{-inx}}{2}\prod_{k=1}^{2n}\left(e^{ix} - e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)\\
&= -\tfrac{ie^{-inx}}{2}(e^{ix}+1)(e^{ix}-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{2ix} - 2e^{ix}\cos\tfrac{2k\pi}{2n} + 1\right)\\
&= 2^{n-1}\sin x\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos x - \cos\tfrac{2k\pi}{2n}\right).
\end{aligned}$$

То значи да у $T$ имамо следећи производ идеала:

$$\langle\sin nx\rangle = \langle\sin x\rangle\prod_{k=1}^{n-1}\langle\cos x - \cos\tfrac{2k\pi}{2n}\rangle.$$

Даље, за $k = 1, \dots, n-1$ имамо да је

$$\begin{aligned}\langle \cos x - \cos \tfrac{2k\pi}{2n} \rangle &= \\ &= \langle 1 - \cos(x + \tfrac{k\pi}{n}), \sin(x + \tfrac{k\pi}{n}) \rangle \langle 1 - \cos(x - \tfrac{k\pi}{n}), \sin(x - \tfrac{k\pi}{n}) \rangle\end{aligned}$$

и $\langle \sin x \rangle = \langle 1 + \cos x, \sin x \rangle \langle 1 - \cos x, \sin x \rangle$, па је према томе $\langle \sin nx \rangle$ једнак производу $2n$ различитих максималних идеала који нису главни.

Према теореми 82 број различитих факторизација на нерастављиве, непридружене факторе једнак је броју различитих начина на које бирамо парове ових максималних идеала. Дакле, од $2n$ елемената бирамо парове на следећи начин: од $2n$ елемената бирамо један пар на $\binom{2n}{2}$ начина; даље, од преосталих $2n-2$ елемената бирамо 2, тј. пар на $\binom{2n-2}{2}$ начина; настављамо овако све док на крају не преостане 2 елемента, и од њих бирамо последњи пар на $\binom{2}{2} = 1$ начин. Дакле, укупан број парова једнак је производу $\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}$. Међутим, неке комбинације парова се понављају и треба их избацити. У једној комбинацији се од $2n$ елемената може направити $n$ парова. Свака замена места ових парова представља једну пермутацију парова, а оваквих пермутација има $n!$, јер има укупно $n$ парова. Према томе, у нашој формули се свака комбинација парова понавља $n!$ пута, па резултат треба поделити са $n!$. Коначно, $\sin nx$ има $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ различитих факторизација на нерастављиве, непридружене факторе.

## 2.4 Факторизација у потпрстенима прстена тригонометријских полинома

У овом поглављу приказани су резултати из радова [86, 87, 94], на основу којих су кориговане табеле дате у закључцима ових радова. Поменуте табеле налазе се на крају поглавља.

### 2.4.1 Потпрстени прстена $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$

У раду [94] конструисана су три полу-факторијална домена $T_2^c$, $T_3^c$ и $T_4^c$, која представљају потпрстене прстена комплексних тригонометријских полинома $T^c$.

Посматрајмо следећи скуп

$$T_2^c = \Big\{ \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + ib_k \sin kx), n \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{R}, a_n = \alpha + \beta, b_n = \beta - \alpha \Big\},$$

где је $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \in \mathbb{R}$ и $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Нека $z \in T_2^c$. Тада је

$$z = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx + ib_k \sin kx) + \{(\alpha+\beta)\cos nx + i(\beta-\alpha)\sin nx\}.$$

Како је $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, следи да је

$$z = e^{-inx}\Big[a_0 e^{inx} + \sum_{k=1}^{n-1}\Big\{\Big(\frac{a_k+b_k}{2}\Big)e^{i(n+k)x} + \Big(\frac{a_k-b_k}{2}\Big)e^{i(n-k)x}\Big\} + \beta e^{2inx} + \alpha\Big],$$

где $\frac{a_k+b_k}{2}, \frac{a_k-b_k}{2}$, $a_0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. Према томе, сваки елемент $z \in T_2^c$ је облика

$$e^{-inx}P(e^{ix}),\ \ n \in \mathbb{N},\ \ P(X) \in \mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X],\ \ \deg(P) = 2n.$$

Обрнуто, за $\alpha_0 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ и $1 \leq k \leq 2n$ важи

$$e^{-inx}P(e^{ix}) = \alpha_0 e^{-inx} + \alpha_{2n}e^{inx} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k e^{-i(n-k)x} + \alpha_{2n-k}e^{i(n-k)x}) + \alpha_n.$$

Како је $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, следи да је

$$\begin{aligned} e^{-inx}P(e^{ix}) = {} & (\alpha_0+\alpha_{2n})\cos nx + i(\alpha_{2n}-\alpha_0)\sin nx \\ & + \sum_{k=1}^{n-1}\{(\alpha_k+\alpha_{2n-k})\cos(n-k)x \\ & \qquad + i(\alpha_{2n-k}-\alpha_k)\sin(n-k)x\} + \alpha_n, \end{aligned}$$

где $\alpha_n, \alpha_0+\alpha_{2n}, \alpha_{2n}-\alpha_0, \alpha_k+\alpha_{2n-k}, \alpha_{2n-k}-\alpha_k \in \mathbb{R}$. Према томе, сваки елемент облика $e^{-inx}P(e^{ix})$, $n \in \mathbb{N}$, где је $P(X) \in \mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X]$ и $\deg(P) = 2n$, припада $T_2^c$.

На основу претходног разматрања следи да је

$$T_2^c = \{e^{-inx}P(e^{ix}),\ n \in \mathbb{N},\ P(X) \in \mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X],\ \deg(P) = 2n\}.$$

Према томе, постоји изоморфизам $f : (\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X])_S \longrightarrow T_2^c$ индукован пресликавањем $X \longrightarrow e^{ix}$, па следи да је $T_2^c \cong (\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X])_S$, тј. $T_2^c$ је изоморфан локализацији прстена $\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X]$ у односу на мултипликативан скуп $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, у ознаци $(\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X])_S$.

**Теорема 88.** *Интегрални домен* $T_2^c$ *је полу-факторијалан домен чији су нерастављиви елементи, до на инвертибилне елементе, тригонометријски полиноми облика* $\cos x + i \sin x - a$*, где* $a \in \mathbb{R}^*$.

*Доказ:* $(\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X])_S$ је локализација прстена $\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X]$ у односу на мултипликативан скуп $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, генерисан простим елементом $X$. Прстен $\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X]$ је полу-факторијалан домен према [3, пропозиција 3.1], па према [4, последица 2.5] добијамо да је и $(\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X])_S$ полу-факторијалан домен. На крају, искористимо изоморфизам $T_2^c \cong (\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X])_S$ и добијамо тражени резултат. $\square$

У раду [86] конструисани су потпрстени прстена $S^c = \mathbb{Q}(i)[\cos x, \sin x]$, у ознаци $S_1^c$ и $S_0^c$, такви да је $S_1^c \subseteq S_0^c \subseteq S^c$. За потпрстен

$$S_1^c = \Big\{ \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + i b_k \sin kx), n \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{Q} \Big\}$$

је, слично као за потпрстен $T_2^c$, доказано да је $S_1^c \cong \mathbb{Q}[X]_S$, тј. потпрстен $S_1^c$ је изоморфан локализацији прстена $\mathbb{Q}[X]$ у односу на мултипликативан скуп $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, у ознаци $\mathbb{Q}[X]_S$. Слично томе, у раду [87] конструисани су потпрстени $T_0^c$ и $T_1^c$ прстена $T^c$, такви да је $T_1^c \subseteq T_0^c \subseteq T^c$. За потпрстен

$$T_1^c = \Big\{ \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + i b_k \sin kx), n \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{R} \Big\}$$

је, аналогно као за потпрстен $T_2^c$, доказано да је $T_1^c \cong \mathbb{R}[X]_S$, тј. потпрстен $T_1^c$ је изоморфан локализацији прстена $\mathbb{R}[X]$ у односу на мултипликативан скуп $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, у ознаци $\mathbb{R}[X]_S$.
Према дефиницији 20 и примеру 21 $\mathbb{Q}[X]$ и $\mathbb{R}[X]$ су Еуклидови домени. На основу [84, пропозиција 7] имамо да су и њихове локализације, тј. $\mathbb{Q}[X]_S$ и $\mathbb{R}[X]_S$, такође Еуклидови домени. Дакле, $S_1^c$ и $T_1^c$ су Еуклидови домени са нерастављивим елементима облика $\cos x + i \sin x - a$, где је редом $a \in \mathbb{Q}^*$ и $a \in \mathbb{R}^*$.

Дефинишимо сада $T_3^c$ као скуп свих полинома облика $\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), n \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{C}$ и $a_n = \alpha + \gamma + i\beta$, $b_n = -\beta + i(\alpha - \gamma)$, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{Q}$. Нека је $z$ полином из $T_3^c$. Тада важи

$$z = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \{(\alpha + \gamma + i\beta) \cos nx + (-\beta + i(\alpha - \gamma)) \sin nx\}.$$

Како је $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, имамо да је

$$z = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left( \tfrac{a_k'+b_k''+i(a_k''-b_k')}{2} \right) e^{ikx} + \left( \tfrac{a_k'-b_k''+i(a_k''+b_k')}{2} \right) e^{-ikx} \right\} + (\alpha + i\beta) e^{inx}$$
$$+\gamma e^{-inx},$$

где је $a_k = a_k' + i a_k''$, $b_k = b_k' + i b_k''$ и $a_k', a_k'', b_k', b_k'' \in \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{C}$.
Уведимо ознаке:

$$\alpha_k' = \frac{a_k' + b_k'' + i(a_k'' - b_k')}{2}, \;\; \beta_k' = \frac{a_k' - b_k'' + i(a_k'' + b_k')}{2}.$$

Тада добијамо

$$z = e^{-inx} \Big[ a_0 e^{inx} + \sum_{k=1}^{n-1} \{ \alpha_k' e^{i(n+k)x} + \beta_k' e^{i(n-k)x} \} + (\alpha + i\beta) e^{2inx} + \gamma \Big],$$

где $\alpha_k', \beta_k', a_0 \in \mathbb{C}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{Q}$. Према томе, сваки елемент $z$ из скупа $T_3^c$ је облика

$$e^{-inx} P(e^{ix}), \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; P(X) \in \mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X], \;\; \deg(P) = 2n.$$

Обрнуто, за $\alpha_0 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ и $1 \le k \le 2n$ важи

$$\begin{aligned} e^{-inx} P(e^{ix}) &= e^{-inx} (\alpha_0 + \alpha_1 e^{ix} + \cdots + \alpha_{2n} e^{2inx}) \\ &= \alpha_0 e^{-inx} + \sum_{k=1}^{2n-1} \alpha_k e^{-i(n-k)x} + \alpha_{2n} e^{inx} \\ &= \alpha_0 e^{-inx} + \alpha_{2n} e^{inx} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k e^{-i(n-k)x} + \alpha_{2n-k} e^{i(n-k)x}) + \alpha_n. \end{aligned}$$

Како је $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, имамо да је

$$\begin{aligned} e^{-inx} P(e^{ix}) = &\ \alpha_0 (\cos nx - i \sin nx) + \alpha_{2n} (\cos nx + i \sin nx) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \big\{ \alpha_k \big( \cos(n-k)x - i \sin(n-k)x \big) \\ &\qquad + \alpha_{2n-k} \big( \cos(n-k)x + i \sin(n-k)x \big) \big\} + \alpha_n. \end{aligned}$$

Уведимо следеће ознаке: $\alpha_k = \alpha_k' + i \alpha_k''$, $\alpha_{2n-k} = \alpha_{2n-k}' + i \alpha_{2n-k}''$ и $\alpha_{2n} = \alpha_{2n}' + i \alpha_{2n}''$. Тада важи

$$\begin{aligned} e^{-inx} P(e^{ix}) = &\ (\alpha_0 + \alpha_{2n}' + i \alpha_{2n}'') \cos nx + \big( -\alpha_{2n}'' + i(\alpha_{2n}' - \alpha_0) \big) \sin nx \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \big\{ \big( \alpha_k' + \alpha_{2n-k}' + i(\alpha_k'' + \alpha_{2n-k}'') \big) \cos(n-k)x \\ &\qquad + \big( \alpha_k'' - \alpha_{2n-k}'' + i(\alpha_{2n-k}' - \alpha_k') \big) \sin(n-k)x \big\} + \alpha_n \\ = &\ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \sum_{k=1}^{n-1} \big\{ a_k \cos(n-k)x + b_k \sin(n-k)x \big\} + \alpha_n, \end{aligned}$$

где је $a_n = \alpha_0+\alpha'_{2n}+i\alpha''_{2n}$, $a_k = \alpha'_k+\alpha'_{2n-k}+i(\alpha''_k+\alpha''_{2n-k})$, $b_n = -\alpha''_{2n}+i(\alpha'_{2n}-\alpha_0)$ и $b_k = \alpha''_k-\alpha''_{2n-k}+i(\alpha'_{2n-k}-\alpha'_k)$. Према томе, сваки елемент облика $e^{-inx}P(e^{ix})$, $n \in \mathbb{N}$, где је $P(X) \in \mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X]$ и $\deg(P) = 2n$, припада $T_3^c$.

На основу претходног разматрања следи да је

$$T_3^c = \{e^{-inx}P(e^{ix}),\ n \in \mathbb{N},\ P(X) \in \mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X],\ \deg(P) = 2n\}.$$

Према томе, постоји изоморфизам $f : (\mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X])_S \longrightarrow T_3^c$ индукован пресликавањем $X \longrightarrow e^{ix}$, па следи да је $T_3^c \cong (\mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X])_S$, тј. $T_3^c$ је изоморфан локализацији прстена $\mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X]$ у односу на мултипликативан скуп $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, у ознаци $(\mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X])_S$.

**Теорема 89.** *Интегрални домен $T_3^c$ је полу-факторијалан домен чији су нерастављиви елементи, до на инвертибилне елементе, тригонометријски полиноми облика $\cos x + i \sin x - a$, где $a \in \mathbb{C}^*$.*

*Доказ:* Аналогно доказу теореме 88. □

Слично као за потпрстен $T_3^c$, у радовима [86, 87] је показано да су редом потпрстени $S_0^c = \{\sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), n \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{Q}(i),\ a_n = \alpha + \gamma + i\beta,\ b_n = -\beta + i(\alpha - \gamma),\ (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0),\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}\}$ и $T_0^c = \{\sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), n \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{C},\ a_n = \alpha+\gamma+i\beta,\ b_n = -\beta+i(\alpha-\gamma)$, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ полу-факторијални домени, чији су нерастављиви елементи тригонометријски полиноми облика $\cos x + i \sin x - a$, при чему редом $a \in \mathbb{Q}(i)^*$ и $a \in \mathbb{C}^*$.

Означимо сада са $T_4^c$ скуп полинома облика $\sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \in \mathbb{N}, a_k, b_k \in \mathbb{C}$, тако да је $a_n = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta)$ и $b_n = (\delta - \beta) + i(\alpha - \gamma)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$, где $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0,0,0,0)$. Нека је $z$ полином из $T_4^c$. Тада можемо написати

$$\begin{aligned} z &= a_0+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k \cos kx+b_k \sin kx) \\ &+ \Big\{\big((\alpha+\gamma)+i(\beta+\delta)\big)\cos nx+\big((\delta-\beta)+i(\alpha-\gamma)\big)\sin nx\Big\}. \end{aligned}$$

Како је $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, имамо да је

$$\begin{aligned} z &= a_0+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{a'_k+b''_k+i(a''_k-b'_k)}{2}\right)e^{ikx}+\left(\frac{a'_k-b''_k+i(a''_k+b'_k)}{2}\right)e^{-ikx}\right\} \\ &+ (\alpha+i\beta)e^{inx}+(\gamma+i\delta)e^{-inx}, \end{aligned}$$

где је $a_k = a'_k + ia''_k$, $b_k = b'_k + ib''_k$ и $a'_k, a''_k, b'_k, b''_k \in \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{C}$.

Уведимо ознаке:

$$\alpha'_k = \frac{a'_k + b''_k + i(a''_k - b'_k)}{2}, \ \ \beta'_k = \frac{a'_k - b''_k + i(a''_k + b'_k)}{2}.$$

Тада добијамо

$$z = e^{-inx}\Big[a_0 e^{inx} + \sum_{k=1}^{n-1}\{\alpha'_k e^{i(n+k)x} + \beta'_k e^{i(n-k)x}\} + (\alpha + i\beta)e^{2inx} + (\gamma + i\delta)\Big],$$

где $\alpha'_k, \beta'_k, a_0 \in \mathbb{C}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma, \delta \in \mathbb{Q}$. Према томе, сваки елемент $z$ из скупа $T_4^c$ је облика

$$e^{-inx}P(e^{ix}),\ n \in \mathbb{N},\ P(X) \in \mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X],\ \deg(P) = 2n.$$

Обрнуто, за $\alpha_0 \in \mathbb{Q}(i)$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ и $1 \leq k \leq 2n$ важи

$$\begin{aligned} e^{-inx}P(e^{ix}) &= e^{-inx}(\alpha_0 + \alpha_1 e^{ix} + \cdots + \alpha_{2n}e^{2inx}) \\ &= \alpha_0 e^{-inx} + \sum_{k=1}^{2n-1}\alpha_k e^{-i(n-k)x} + \alpha_{2n}e^{inx} \\ &= \alpha_0 e^{-inx} + \alpha_{2n}e^{inx} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k e^{-i(n-k)x} + \alpha_{2n-k}e^{i(n-k)x}) + \alpha_n. \end{aligned}$$

Уведимо следеће ознаке: $\alpha_0 = \alpha'_0 + i\alpha''_0$, $\alpha_k = \alpha'_k + i\alpha''_k$, $\alpha_{2n-k} = \alpha'_{2n-k} + i\alpha''_{2n-k}$ и $\alpha_{2n} = \alpha'_{2n} + i\alpha''_{2n}$. Како је $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, следи да је

$$\begin{aligned} e^{-inx}P(e^{ix}) &= \big(\alpha_0 + \alpha'_{2n} + i(\alpha''_0 + \alpha''_{2n})\big)\cos nx + \big(\alpha''_0 - \alpha''_{2n} + i(\alpha'_{2n} - \alpha_0)\big)\sin nx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1}\Big\{\big(\alpha'_k + \alpha'_{2n-k} + i(\alpha''_k + \alpha''_{2n-k})\big)\cos(n-k)x \\ &\qquad + \big(\alpha''_k - \alpha''_{2n-k} + i(\alpha'_{2n-k} - \alpha'_k)\big)\sin(n-k)x\Big\} + \alpha_n \\ &= a_n\cos nx + b_n\sin nx + \sum_{k=1}^{n-1}\big\{a_k\cos(n-k)x + b_k\sin(n-k)x\big\} + \alpha_n, \end{aligned}$$

где је $a_n = \alpha_0 + \alpha'_{2n} + i(\alpha''_0 + \alpha''_{2n})$, $a_k = \alpha'_k + \alpha'_{2n-k} + i(\alpha''_k + \alpha''_{2n-k})$, $b_n = \alpha''_0 - \alpha''_{2n} + i(\alpha'_{2n} - \alpha_0)$ и $b_k = \alpha''_k - \alpha''_{2n-k} + i(\alpha'_{2n-k} - \alpha'_k)$. Према томе, сваки елемент облика $e^{-inx}P(e^{ix})$, $n \in \mathbb{N}$, где је $P(X) \in \mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X]$ и $\deg(P) = 2n$, припада $T_4^c$.

На основу претходног разматрања следи да је

$$T_4^c = \{e^{-inx}P(e^{ix}),\ n \in \mathbb{N},\ P(X) \in \mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X],\ \deg(P) = 2n\}.$$

Према томе, постоји изоморфизам $f : (\mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X])_S \longrightarrow T_4^c$ индукован пресликавањем $X \longrightarrow e^{ix}$, па следи да је $T_4^c \cong (\mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X])_S$, тј. $T_4^c$ је изоморфан локализацији прстена $\mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X]$ у односу на мултипликативан скуп $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, у ознаци $(\mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X])_S$.

**Теорема 90.** *Интегрални домен $T_4^c$ је полу-факторијалан домен чији су нерастављиви елементи, до на инвертибилне елементе, тригонометријски полиноми облика $\cos x + i \sin x - a$, где $a \in \mathbb{C}^*$.*

*Доказ:* Аналогно доказу теореме 88. □

**Напомена 91.** Факторизација у потпрстенима прстена $T^c$, тј. у $T_0^c$, $T_1^c$, $T_2^c$, $T_3^c$ и $T_4^c$, је аналогна као у последици 67.

Надаље, ознака $\cap$ представљаће инклузију $\subseteq$ у свим наредним дијаграмима.

**Напомена 92.** Посматрајмо следећи растући ланац подструктура прстена $\mathbb{C}[X]$

$$\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[X],$$

где су $\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X], \mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X]$ и $\mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X]$ полу-факторијални домени и $\mathbb{C}[X]$ Еуклидов домен. Локализација сва ова четири домена, у односу на мултипликативан скуп $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, чува њихова својства факторизације.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X] & \subseteq & \mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X] & \subseteq & \mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X] & \subseteq & \mathbb{C}[X] \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
(\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X])_S & \subseteq & (\mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X])_S & \subseteq & (\mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X])_S & \subseteq & \mathbb{C}[X]_S.
\end{array}$$

На основу претходних разматрања и теореме 65 важи

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Q} + X\mathbb{R}[X] & \subseteq & \mathbb{Q} + X\mathbb{C}[X] & \subseteq & \mathbb{Q}(i) + X\mathbb{C}[X] & \subseteq & \mathbb{C}[X] \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
T_2^c & \subseteq & T_3^c & \subseteq & T_4^c & \subseteq & T^c,
\end{array}$$

где су $T_2^c, T_3^c$ и $T_4^c$ полу-факторијални домени садржани у Еуклидовом домену $T^c$.

**Напомена 93.** У радовима [86, 87], слично закључку из претходне напомене, добијени су редом следећи дијаграми:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}[X] & \subseteq & \mathbb{Q}+X\mathbb{Q}(i)[X] & \subseteq & \mathbb{Q}(i)[X] \\ \cap & & \cap & & \cap \\ S_1^c & \subseteq & S_0^c & \subseteq & S^c, \end{array}$$

где је $S_0^c$ полу-факторијалан домен утиснут између два Еуклидова домена $S_1^c$ и $S^c$, и

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}[X] & \subseteq & \mathbb{R}+X\mathbb{C}[X] & \subseteq & \mathbb{C}[X] \\ \cap & & \cap & & \cap \\ T_1^c & \subseteq & T_0^c & \subseteq & T^c, \end{array}$$

где је $T_0^c$ полу-факторијалан домен утиснут између два Еуклидова домена $T_1^c$ и $T^c$.

### 2.4.2 Услови које задовољавају раширења прстена тригонометријских полинома

У овом делу биће анализирана два услова која важе међу раширењима прстена тригонометријских полинома. Услов 1 је дефинисан у раду [77, стр. 661], док је услов 2 изведен из услова 1 у раду [86].

*Услов 1.* Нека је $A \subseteq B$ раширење комутативног прстена са јединицом. За свако $x \in B$ постоје $x' \in B^*$ и $x'' \in A$ тако да је $x = x'x''$.

**Пример 94.** [77, пример 1.1] а) Ако раширење прстена $A \subseteq B$ задовољава услов 1, раширење прстена $A+XB[X] \subseteq B[X]$ такође задовољава услов 1.
б) Ако раширења прстена $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ задовољавају услов 1, онда тај услов задовољава и раширење прстена $A \subseteq C$.
в) Ако је $B$ количнички прстен прстена $A$, раширење прстена $A \subseteq B$ задовољава услов 1.
г) Ако је $B$ поље, раширење прстена $A \subseteq B$ задовољава услов 1.

*Услов 2.* Нека су $A$, $A_1$, $B$ и $B_1$ комутативни прстени са јединицом такви да је

$$\begin{array}{ccc} A & \subseteq & B \\ \cap & & \cap \\ A_1 & \subseteq & B_1 \end{array}.$$

Тада за свако $x \in B_1$ постоје $x' \in B^*$ и $x'' \in A_1$ тако да је $x = x'x''$.

**Лема 95.** *Нека је $A \subseteq B$ раширење комутативног прстена са јединицом које задовољава услов 1. Ако је $N$ мултипликативан подскуп скупа $A$, тада раширење прстена $N^{-1}A \subseteq N^{-1}B$ задовољава услов 2.*

*Доказ:* Како раширење прстена $A \subseteq B$ задовољава услов 1, следи да за свако $a \in B$ постоје $b \in B^*$ и $c \in A$ тако да је $a = bc$. Очигледно је $N^{-1}A \subseteq N^{-1}B$. Нека је $x = \frac{a}{s} \in N^{-1}B$. Тада је $x = \frac{a}{s}$, $a \in B$, $s \in N$. Одавде следи да је $x = \frac{bc}{s} = b\frac{c}{s}$, где $b \in B^*$ и $\frac{c}{s} \in N^{-1}A$. □

Обрнуто не важи у општем случају, што је показано следећом теоремом.

**Теорема 96.** *Нека је $A \subseteq B$ раширење комутативног прстена са јединицом. Нека раширење домена $A_1 \subseteq B_1$ задовољава услов 2 и раширење домена $A \subseteq A_1$ задовољава услов 1, где је $A \subseteq A_1$ и $B \subseteq B_1$. Нека је $B_1^* = B^*$ и $B_1^* \cap A_1 = A_1^*$. Тада раширење домена $A \subseteq B$ задовољава услов 1.*

*Доказ:* Како раширење домена $A_1 \subseteq B_1$ задовољава услов 2, за свако $x \in B \subseteq B_1$ постоје $x_1' \in B^*$ и $x_1'' \in A_1$ тако да је $x = x_1'x_1''$. Даље, ако $x_1'' \in A$, доказ је готов. Претпоставимо зато да $x_1'' \in A_1 \backslash A$. Како раширење домена $A \subseteq A_1$ задовољава услов 1, за $x_1'' \in A_1$ постоје $x_2' \in A_1^*$ и $x_2'' \in A$ тако да је $x_1'' = x_2'x_2''$. Одатле следи да је $x = x_1'x_2'x_2''$. Како је $B_1^* = B^*$ и $B_1^* \cap A_1 = A_1^*$, следи да $x_1'x_2' \in B^*$ и $x_2'' \in A$. Према томе, $A \subseteq B$ задовољава услов 1. □

**Теорема 97.** *Нека је $A \subseteq B \subseteq B_1$ раширење комутативног прстена са јединицом. Претпоставимо да раширење домена $A \subseteq B_1$ задовољава услов 2. Тада раширење домена $A \subseteq B$ задовољава услов 1.*

*Доказ:* Раширење домена $A \subseteq B_1$ задовољава услов 2, па стога за свако $x \in B \subseteq B_1$ постоје $x' \in B^*$ и $x'' \in A$ тако да је $x = x'x''$. Према томе, $A \subseteq B$ задовољава услов 1. □

**Пример 98.** Нека је $A \subseteq B$ раширење комутативног прстена са јединицом. Нека је $N = A^*$ мултипликативан подскуп скупа $A$. Претпоставимо да раширење домена $N^{-1}A \subseteq N^{-1}B$ задовољава услов 2. Тада раширење домена $A \subseteq B$ задовољава услов 1.

**Пример 99.** а) Ако раширења прстена $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ задовољавају услов 2, такође тај услов задовољава и раширење прстена $A \subseteq C$.
б) За $A = A_1$ и $B = B_1$ услов 1 и услов 2 се подударају.
в) Ако раширење прстена $A_1 \subseteq B_1$ задовољава услов 2, такође задовољава и услов 1.
г) Према леми 95, раширења прстена $T_3^c \subseteq T_4^c$ и $T_4^c \subseteq T^c$ задовољавају услов 2, па тај услов задовољава и раширење прстена $T_3^c \subseteq T^c$.

Посматрајмо сада комутативан дијаграм према напомени 92:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X] & \subseteq & \mathbb{Q}+X\mathbb{C}[X] & \subseteq & \mathbb{Q}(i)+X\mathbb{C}[X] & \subseteq & \mathbb{C}[X] \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
T_2^c & \subseteq & T_3^c & \subseteq & T_4^c & \subseteq & T^c.
\end{array}$$

Као закључак претходне дискусије дата је следећа табела, у којој је приказано важење услова 1 и 2 међу раширењима прстена тригонометријских полинома.

Табела 1.

| Раширење прстена | услов 1 | услов 2 |
|---|---|---|
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{Q}+X\mathbb{C}[X]$ | не | не |
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{Q}(i)+X\mathbb{C}[X]$ | да | да |
| $\mathbb{Q}(i)+X\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$ | да | не |
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X] \subseteq T_2^c$ | да | да |
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{C}[X] \subseteq T_3^c$ | да | да |
| $\mathbb{Q}(i)+X\mathbb{C}[X] \subseteq T_4^c$ | да | да |
| $\mathbb{C}[X] \subseteq T^c$ | да | да |
| $T_2^c \subseteq T_3^c$ | не | не |
| $T_3^c \subseteq T_4^c$ | да | да |
| $T_4^c \subseteq T^c$ | да | да |
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{R}[X] \subseteq T_3^c$ | не | не |
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{C}[X] \subseteq T_4^c$ | да | да |
| $\mathbb{Q}(i)+X\mathbb{C}[X] \subseteq T^c$ | да | да |
| $T_2^c \subseteq T_4^c$ | не | не |
| $T_2^c \subseteq T^c$ | не | не |
| $T_3^c \subseteq T^c$ | да | да |
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{C}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$ | да | не |

Приметимо да раширења $\mathbb{Q}+X\mathbb{C}[X]\subseteq T_4^c$, $\mathbb{Q}(i)+X\mathbb{C}[X]\subseteq T^c$ и $T_3^c\subseteq T^c$ задовољавају услов 2, на основу транзитивности.

Слично претходној табели, према напомени 93, добијамо наредне две табеле:

Табела 2.

| Раширење | ус. 1 | ус. 2 |
|---|---|---|
| $\mathbb{Q}[X]\subseteq\mathbb{Q}+X\mathbb{Q}(i)[X]$ | не | не |
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{Q}(i)[X]\subseteq\mathbb{Q}(i)[X]$ | да | не |
| $\mathbb{Q}[X]\subseteq S_1^c$ | да | да |
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{Q}(i)[X]\subseteq S_0^c$ | да | да |
| $\mathbb{Q}(i)[X]\subseteq S^c$ | да | да |
| $S_1^c\subseteq S_0^c$ | не | не |
| $S_0^c\subseteq S^c$ | да | да |
| $\mathbb{Q}[X]\subseteq S_0^c$ | не | не |
| $\mathbb{Q}+X\mathbb{Q}(i)[X]\subseteq S^c$ | да | да |
| $S_1^c\subseteq S^c$ | не | не |

Табела 3.

| Раширење | ус. 1 | ус. 2 |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}[X]\subseteq\mathbb{R}+X\mathbb{C}[X]$ | не | не |
| $\mathbb{R}+X\mathbb{C}[X]\subseteq\mathbb{C}[X]$ | да | не |
| $\mathbb{R}[X]\subseteq T_1^c$ | да | да |
| $\mathbb{R}+X\mathbb{C}[X]\subseteq T_0^c$ | да | да |
| $\mathbb{C}[X]\subseteq T^c$ | да | да |
| $T_1^c\subseteq T_0^c$ | не | не |
| $T_0^c\subseteq T^c$ | да | да |
| $\mathbb{R}[X]\subseteq T_0^c$ | не | не |
| $\mathbb{R}+X\mathbb{C}[X]\subseteq T^c$ | да | да |
| $T_1^c\subseteq T^c$ | не | не |

Раширења $\mathbb{Q}+X\mathbb{Q}(i)[X]\subseteq S^c$ и $\mathbb{R}+X\mathbb{C}[X]\subseteq T^c$ задовољавају услов 2 на основу транзитивности.

## 2.5 Алгоритми код тригонометријских полинома

Ово поглавље посвећено је алгоритмима за упрошћавање количника, дељење, факторисање и одређивање највећих заједничких делитеља два тригонометријска полинома, према раду [64]. Поред овог рада, није нам познато да постоји још радова у доступној литератури који се баве овом тематиком.

Означимо са $s$ и $c$ редом функције $\sin x$ и $\cos x$. У наставку ће бити описани поступци за упрошћавање количника два тригонометријска полинома, тачније елемента домена $S=\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$, у смислу одређивања једноставнијег облика овог количника. Поменути проблеми упрошћавања појављују се у бројним применама математике у инжењерству.

Такође се јављају и у разним израчунавањима која укључују тригонометријске полиноме над пољем, као на пример када се Гаусова[12] елиминација примени на матрицу тригонометријских полинома.

Један приступ решавању овог проблема је скраћивање највећег заједничког делитеља из бројиоца и имениоца. Оно што овај проблем чини нетривијалним је то што количнички прстен $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ није домен са једнозначном факторизацијом (видети поглавље 2.3), па према томе и највећи заједнички делитељ тригонометријских полинома у овом домену није јединствен у општем случају. Да бисмо дошли до највећег заједничког делитеља два тригонометријска полинома над пољем $\mathbb{Q}$ потребно је разумети факторизацију у домену $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ и начин на који се у овом домену врши дељење. Такође је потребно окарактерисати нерастављиве елементе домена $S$ и показати на који начин се одређују све различите факторизације елемента овог домена на нерастављиве факторе. Факторисање тригонометријских полинома може се применити на решавање тригонометријских једначина.

Као што је већ речено, један од начина за упрошћавање количника два тригонометријска полинома над пољем рационалних бројева је налажење највећег заједничког делитеља бројиоца и имениоца у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ и његово скраћивање. Ипак, то не води увек до најједноставнијег решења. У раду [64] дат је директнији приступ који није тежак за израчунавање и увек даје најједноставнији резултат.

У овом поглављу наведене су главне дефиниције, примери и теореме из рада [64] са свим детаљима доказа, што нам је посебно важно због могућности прилагођавања одговарајућих доказа потребама материје која је обрађена у наредној глави.

### 2.5.1 Дељење и факторизација у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$

Проучавање тригонометријских полинома над пољем $\mathbb{Q}$ своди се на испитивање особина домена $\mathbb{Q}[s,c]$ по модулу $s^2+c^2-1=0$.

**Дефиниција 100.** Дефинишимо релацију $\equiv$ са $p \equiv q \iff (s^2+c^2-1) \mid (p-q)$, у домену $\mathbb{Q}[s,c]$.

[12] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), немачки математичар

Јасно је да је $\equiv$ релација еквиваленције у домену $\mathbb{Q}[s,c]$ са класом еквиваленције $[p] = \{q \in \mathbb{Q}[s,c] : p \equiv q\}$. Дакле, када говоримо о тригонометријском полиному $q$ то се односи на представника класе еквиваленције $[q]$ из $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2 + c^2 - 1\rangle$.

**Дефиниција 101.** Дефинишимо $\phi : \mathbb{Q}[s,c] \longrightarrow \mathbb{Q}[s,c]$ са $\phi(p) = p \pmod{s^2+c^2-1}$, при чему $s^2$ мењамо са $1 - c^2$.

Према томе, $\phi(p)$ је елемент класе еквиваленције $[p]$ који је линеаран по $s$. У наредној леми показано је да је он јединствен.

**Лема 102.** *Нека је $p \in \mathbb{Q}[s,c]$. Тада је $\phi(p)$ јединствен елемент у $\mathbb{Q}[s,c]$ облика $A(c)s + B(c)$ еквивалентан са $p$.*

*Доказ:* Према дефиницији, елемент $\phi(p)$ је линеаран по $s$ и $\phi(p) \equiv p$. Претпоставимо да је $q = A(c)s + B(c)$, тако да је $q \equiv p$. Нека је $\phi(p) = a(c)s + b(c)$. Тада је $\phi(p) \equiv q$, па према томе $(s^2 + c^2 - 1) \mid ((A - a)s + (B - b))$. То је могуће у $\mathbb{Q}[s,c]$ једино у случају када је $A = a$ и $B = b$. $\square$

Пређимо сада на степен тригонометријског полинома у $\mathbb{Q}[s,c]$, који је дефинисан у зависности од функције $\phi(p)$.

**Дефиниција 103.** За $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2 + c^2 - 1\rangle$ дефинише се тригонометријски степен од $p$, у ознаци $\mathrm{TD}(p)$, као $\mathrm{TD}(p) = \deg_{s,c}(\phi(p))$, где је $\deg_{s,c}$ степен полинома $\phi(p(s,c))$.

На пример, полином $p = s^2 + c^2$ је степена 2 ако га посматрамо као обичан полином у $\mathbb{Q}[s,c]$. Међутим, ако га посматрамо као тригонометријски полином, његов тригонометријски степен је 0, с обзиром да је $\phi(p) = 1$.

**Лема 104.** *Нека $p, q \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2 + c^2 - 1\rangle$. Тада је $TD(pq) = TD(p) + TD(q)$.*

*Доказ:* Нека је $\phi(p) = A(c)s + B(c)$ и $\phi(q) = a(c)s + b(c)$. Уведимо следеће ознаке: $n_1 = \deg_c(A) + 1$, $m_1 = \deg_c(B)$, $n_2 = \deg_c(a) + 1$ и $m_2 = \deg_c(b)$. Тада важи

$$\phi(\phi(p)\phi(q)) = (Ab + aB)s + (Bb + Aa - Aac^2).$$

Желимо да докажемо да је

$$\deg(\phi(\phi(p)\phi(q))) = \deg(\phi(p)) + \deg(\phi(q)). \tag{2.5.1}$$

Ово тврђење се лако проверава, осим у случају када је $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$. С циљем да, у овом случају, одредимо $\deg(\phi(\phi(p)\phi(q)))$, посматрајмо следеће суме: $A(c) = \sum_{i=0}^{n_1-1} A_i c^i$, $B(c) = \sum_{i=0}^{m_1} B_i c^i$, $a(c) = \sum_{i=0}^{n_2-1} a_i c^i$ и $b(c) = \sum_{i=0}^{m_2} b_i c^i$. Водећи коефицијент полинома $Ab+aB$ је $A_{n_1-1}b_{m_2}+a_{n_2-1}B_{m_1}$, док је водећи коефицијент полинома $Bb+Aa-Aac^2$ једнак $B_{m_1}b_{m_2}-A_{n_1-1}a_{n_2-1}$. Ако претпоставимо супротно, да једнакост (2.5.1) не важи, тада оба ова коефицијента морају бити нула, па решавамо систем једначина

$$A_{n_1-1}b_{m_2} + a_{n_2-1}B_{m_1} = 0$$

$$B_{m_1}b_{m_2} - A_{n_1-1}a_{n_2-1} = 0,$$

и добијамо два решења са нултим коефицијентима

$$\{A_{n_1-1} = 0, B_{m_1} = 0\}, \{a_{n_2-1} = 0, b_{m_2} = 0\}$$

и два комплексна решења

$$\{a_{n_2-1} = \pm i b_{m_2}, A_{n_1-1} = \mp i B_{m_1}\}.$$

Прва два скупа решења су у контрадикцији редом са степенима полинома $p$ и $q$, док решења из последњег скупа не припадају $\mathbb{Q}$. Дакле, $\deg(\phi(\phi(p)\phi(q))) = n_1 + m_2$ и тврђење (2.5.1) је тачно у овом случају.

Даље, приметимо да из $p \equiv \phi(p)$, $q \equiv \phi(q)$ и $pq \equiv \phi(pq)$ следи да је $\phi(p)\phi(q) \equiv pq \equiv \phi(pq)$. Сходно томе, имамо да је

$$\begin{aligned}
\mathrm{TD}(pq) &= \deg(\phi(pq)) \\
&= \mathrm{TD}(\phi(p)\phi(q)) \\
&= \deg(\phi(\phi(p)\phi(q))) \\
&= \deg(\phi(p)) + \deg(\phi(q)) \\
&= \mathrm{TD}(p) + \mathrm{TD}(q).
\end{aligned}$$

□

Један од начина за упрошћавање количника два тригонометријска полинома и факторизацију у домену $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ је смена $\tan\frac{x}{2}$, што је описано у раду [64]. Као што знамо, $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ и $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$. У наставку, $\tan\frac{x}{2}$ означићемо са $t$. Овом сменом ($t$-смена), тригонометријски полином претвара се у количник полинома из $\mathbb{Q}[t]$ и степена полинома $1+t^2$.

**Дефиниција 105.** Дефинишимо

$$\psi_t : \mathbb{Q}[s,c] \longrightarrow \mathbb{Q}(t) \text{ са } \psi_t(p(s,c)) = p(\tfrac{2t}{1+t^2}, \tfrac{1-t^2}{1+t^2}).$$

Као што знамо, $\psi_t : \mathbb{Q}[s,c] \longrightarrow \mathbb{Q}(t)$ је хомоморфизам прстена чије је језгро главни идеал генерисан полиномом $s^2+c^2-1$. Према првој теореми о изоморфизму прстена, имамо да је $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle \cong \mathbb{Q}(t)$.

**Лема 106.** *Нека је $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ тако да је $TD(p) = d$. Тада је $\psi_t(p) = \frac{a(t)}{(1+t^2)^d}$, где $a(t) \in \mathbb{Q}[t]$, тако да је $\deg_t(a) \leq 2d$ и $1+t^2 \nmid a(t)$.*

Међутим, да бисмо искористили горенаведени изоморфизам прстена, потребно је и вратити горепоменуту $t$-смену, тј. изразити $t$ преко $s$ и $c$, и тиме претворити рационалну функцију по $t$ у тригонометријски полином. То постижемо сменом $t = \frac{1-c}{s}$. Заправо, овом сменом добијамо количник два тригонометријска полинома, па да бисмо добили тригонометријски полином треба извршити њихово дељење, што је посебан задатак. Тај поступак описан је у теореми која следи.

Најпре крећемо од помоћних лема.

**Лема 107.** *Нека је $a(t) = \sum_{i=0}^{2n} v_i t^i$ тако да је $v_{2n} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} v_{2(n-i)}$ и $v_{2n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} v_{2(n-i)-1}$. Тада $(1+t^2) \mid a(t)$.*

*Доказ:* Посматрајмо $b(t) = \sum_{i=0}^{2n-2} b_i t^i$, где је $b_i = \sum_{k=0}^{i/2} (-1)^k v_{i-2k}$ ако је $i$ паран и $b_i = \sum_{k=0}^{(i-1)/2} (-1)^k v_{i-2k}$ ако је $i$ непаран број. Тада добијамо да је $a(t) = (1+t^2)\cdot b(t)$. □

**Лема 108.** *Нека је $n \in \mathbb{N}$. За сваки полином $a(t)$ за који $1+t^2 \nmid a(t)$ и $\deg_t(a) \leq 2n$ важи*

$$res_t(a(t) - X(1+t^2)^n, st + (c-1)) = p(s,c)X + q(s,c),$$

*где $p(s,c)$, $q(s,c) \in \mathbb{Q}[s,c]$. Штавише, $\phi(p) = -2^n(1-c)^n$, $\phi(p) \mid \phi(q)$ у $\mathbb{Q}[s,c]$ и $TD(q(s,c)) = 2n$.*

*Доказ:* Нека је $a(t) = \sum_{i=0}^{2n} v_i t^i$, где наравно ако је $\deg_t(a) < 2n$ важи да је $v_i = 0$, за $i > \deg_t(a(t))$. Резултанта која се тражи једнака је детерминанти Силвестерове[13] матрице

[13]James Joseph Sylvester (1814-1897), енглески математичар

$$S = \begin{pmatrix} v_{2n}-\binom{n}{0}X & v_{2n-1} & v_{2n-2}-\binom{n}{1}X & \cdots & \cdots & \cdots & v_0 - X \\ s & c-1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & s & c-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s & c-1 \end{pmatrix}.$$

Рачунањем ове детерминанте добија се да је $\det(S) = p(s,c)X + q(s,c)$, при чему добијамо да је:

$$\phi(p(s,c)) = -2^n(1-c)^n,$$

$$\phi(q(s,c)) = (1-c)^n\big[\sum_{i=0}^{n} v_{2(n-i)}(1+c)^i(1-c)^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} v_{2(n-i)-1}s(1+c)^i(1-c)^{n-i-1}\big].$$

Остало је још да се покаже да је $\mathrm{TD}(q(s,c)) = 2n$, тј. $\deg_{s,c}(\phi(q(s,c))) = 2n$. Ако је $\deg_{s,c}(\phi(q(s,c))) < 2n$, тада у другом чиниоцу полинома $\phi(q(s,c))$ оба коефицијента уз $c^n$ и $sc^{n-1}$ морају бити нула. То значи да је $v_{2n} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}v_{2(n-i)}$ и $v_{2n-1} = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}v_{2(n-i)-1}$, па према претходној леми следи да $(1+t^2) \mid a(t)$. То је контрадикција, па је $\mathrm{TD}(q(s,c)) = 2n$. $\square$

**Теорема 109.** *Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека је $a(t)$ полином за који важи $1+t^2 \nmid a(t)$ и $\deg_t(a) \leq 2n$. Тада постоји јединствен тригонометријски полином $\hat{a}$, тригонометријског степена $n$, тако да је $\psi_t(\hat{a}) = \frac{a(t)}{(1+t^2)^n}$.*

*Доказ:* На основу претходне леме, имамо да је

$$res_t(a(t) - X(1+t^2)^n, st + (c-1)) = p(s,c)X + q(s,c),$$

где $\phi(p) \mid \phi(q)$ у $\mathbb{Q}[s,c]$, $\mathrm{TD}(p) = n$ и $\mathrm{TD}(q) = 2n$.
Решавањем једначине $p(s,c)X + q(s,c) = 0$ по $X \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$, добијамо да је

$$X = \frac{\phi(q)}{\phi(p)} \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle.$$

Дакле, $X \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ је тригонометријског степена $n$, и према дефиницији резултанте имамо да је

$$\psi_t(X) = \frac{a(t)}{(1+t^2)^n}.$$

Покажимо сада јединственост. Претпоставимо супротно, да постоје два различита тригонометријска полинома $\hat{a}$ и $\hat{b} \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$, тако да је $\psi_t(\hat{a}) = \psi_t(\hat{b}) = \frac{a(t)}{(1+t^2)^n}$. Како је $\psi_t$ хомоморфизам прстена, следи да је $\psi_t(\hat{a}-\hat{b})=0$. Одавде имамо да $\hat{a}-\hat{b} \in \ker(\psi_t) = \langle s^2+c^2-1\rangle$. Дакле, $\hat{a}=\hat{b}$. $\square$
Ова теорема говори нам да је свака рационална функција облика $\frac{a(t)}{(1+t^2)^n}$, где $a \in \mathbb{Q}[t]$, $1+t^2 \nmid a(t)$ и $\deg_t(a) \leq 2n$, заправо слика тригонометријског полинома степена $n$ при пресликавању $\psi_t$. Дакле, наш задатак је да одредимо $\psi_t^{-1}(\frac{a(t)}{(1+t^2)^n}) = X(s,c)$, при чему је $X(s,c)$ јединствен тригонометријски полином.

Наредна теорема показује нам када један тригонометријски полином дели други у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$, а у доказу је дат поступак израчунавања њиховог количника. Означимо са NU бројилац у разломку, нпр. $\mathrm{NU}(\frac{a(t)}{(1+t^2)^n}) = a(t)$.

**Теорема 110.** *За* $a$, $b \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ *важи:*

$$a \mid b \iff \begin{array}{ll} (i) & TD(a) \leq TD(b) \\ (ii) & NU(\psi_t(a)) \mid NU(\psi_t(b)) \ \text{ у } \ \mathbb{Q}[t] \\ (iii) & \deg(NU(\psi_t(b))) - \deg(NU(\psi_t(a))) \leq 2(TD(b)-TD(a)). \end{array}$$

*Доказ:* $(\Longrightarrow)$ : Нека $a \mid b$. Тада следи да постоји $q$ тако да је $b = qa \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$. Такође постоји и $r \in \mathbb{Q}[s,c]$ тако да је $b = qa + r(s^2+c^2-1)$ у $\mathbb{Q}[s,c]$. Према леми 104 имамо да је $\mathrm{TD}(b) = \mathrm{TD}(q) + \mathrm{TD}(a)$. Штавише,

$$\begin{aligned} \psi_t(b) &= \psi_t(qa + r(s^2+c^2-1)) \\ &= \psi_t(q)\psi_t(a) + \psi_t(r)\cdot 0 \\ &= \psi_t(q)\psi_t(a). \end{aligned}$$

Ширећи ову једнакост, добијамо:

$$\frac{\mathrm{NU}(\psi_t(b))}{(1+t^2)^{d_b}} = \frac{\mathrm{NU}(\psi_t(q))}{(1+t^2)^{d_q}} \cdot \frac{\mathrm{NU}(\psi_t(a))}{(1+t^2)^{d_a}},$$

где је $d_x = \mathrm{TD}(x)$, за $x = a, b, q$. Како је $d_b = d_q + d_a$, следи да је $\mathrm{NU}(\psi_t(b)) = \mathrm{NU}(\psi_t(q)) \cdot \mathrm{NU}(\psi_t(a))$. Штавише,

$$\begin{aligned} \deg(\mathrm{NU}(\psi_t(b))) - \deg(\mathrm{NU}(\psi_t(a))) &= \deg(\mathrm{NU}(\psi_t(q))) \\ &\leq 2\mathrm{TD}(q) \\ &= 2(\mathrm{TD}(b) - \mathrm{TD}(a)). \end{aligned}$$

Тиме је доказан смер ($\Longrightarrow$). За доказ смера ($\Longleftarrow$) претпоставимо да важе сва три услова (i), (ii) и (iii) наведена у исказу теореме. Из (ii) следи да је $\mathrm{NU}(\psi_t(b)) = q(t) \cdot \mathrm{NU}(\psi_t(a))$, за неки полином $q \in \mathbb{Q}[t]$. Према томе,

$$\frac{\mathrm{NU}(\psi_t(b))}{(1+t^2)^{d_b}} = \frac{q(t)}{(1+t^2)^{d_b-d_a}} \cdot \frac{\mathrm{NU}(\psi_t(a))}{(1+t^2)^{d_a}}.$$

Како је

$$\begin{aligned} \deg_t(q) &= \deg(\mathrm{NU}(\psi_t(b))) - \deg(\mathrm{NU}(\psi_t(a))) \\ &\leq 2(\mathrm{TD}(b) - \mathrm{TD}(a)) \quad \text{из (iii)} \\ &= 2(d_b - d_a), \end{aligned}$$

према претходној теореми важи

$$\hat{q} = \psi_t^{-1}(\frac{q(t)}{(1+t^2)^{d_b-d_a}}) \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle.$$

Одавде је $b = \hat{q}a \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$. □

**Последица 111.** *Нека је* $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ *тако да је* $TD(p) \geq 1$. *Ако је* $\deg(NU(\psi_t(p))) \leq 2TD(p) - 2$, *тада* $(c+1) \mid p$.

*Доказ:* Како је $\psi_t(c+1) = \frac{2}{1+t^2}$, тада на основу претходне теореме следи

$$\begin{aligned} (c+1) \mid p \iff \quad &\text{(i)} \quad 1 \leq \mathrm{TD}(p) \\ &\text{(ii)} \quad 2 \mid \mathrm{NU}(\psi_t(p)) \\ &\text{(iii)} \quad \deg(\mathrm{NU}(\psi_t(p))) \leq 2(\mathrm{TD}(p) - 1). \end{aligned}$$

Како су услови (i), (ii) и (iii) задовољени, следи да $(c+1) \mid p$. □

У наставку одређујемо нерастављиве елементе у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$. Знамо да су инвертибилни елементи у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ рационални бројеви различити од нуле. Сходно томе, дефинишу се нерастављиви елементи у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ према дефиницији 4.

**Дефиниција 112.** Ненулти елемент $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ је нерастављив ако:

а) $p$ није инвертибилан елемент, тј. ако $p \notin \mathbb{Q}$,

б) ако је $p = ab$, следи да је један од $a$ или $b$ инвертибилан елемент.

**Теорема 113.** *Нека* $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ *и нека је* $p$ *неинвертибилан елемент (тј.* $TD\ (p) \geq 1$*). Тада важи:*
*(а) ако је* $TD(p) = 1$*, тада је* $p$ *нерастављив тригонометријски полином,*
*(б) ако је* $TD(p) > 1$*, тада је* $p$ *нерастављив тригонометријски полином акко*

(*i*) $\deg_t(NU(\psi_t(p))) \geq 2TD(p) - 1$,

(*ii*) $NU(\psi_t(p))$ *је нерастављив полином у* $\mathbb{Q}[t]$ *или је* $NU(\psi_t(p))$ *производ два нерастављива полинома у* $\mathbb{Q}[t]$*, при чему су оба непарног степена.*

*Доказ:* Ако је $\mathrm{TD}(p) = 1$, $p$ је нерастављив тригонометријски полином, према леми 104. Претпоставимо сада да је $\mathrm{TD}(p) \geq 2$.
($\Longrightarrow$) : Претпоставимо супротно, да (i) и (ii) не важе. Ако (i) не важи, тада $(c+1) \mid p$ према последици 111. Према томе, $p$ је растављив тригонометријски полином. Сада претпоставимо да (i) важи, а (ii) не важи. Тада мора бити да је $\mathrm{NU}(\psi_t(p))$ растављив полином у $\mathbb{Q}[t]$, али није једнак производу два нерастављива полинома у $\mathbb{Q}[t]$ непарног степена. Дакле, нека је

$$\mathrm{NU}(\psi_t(p)) = q_1(t) \cdot q_2(t),$$

за $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}[t]$, тако да је $\deg(q_1), \deg(q_2) \geq 1$ и $q_1$ је нерастављив полином. Ако је и $q_2$ нерастављив полином, тада $\deg(q_1)$ и $\deg(q_2)$ не могу бити непарни истовремено. Како (i) важи, тада разликујемо два случаја:
(1) $\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(p))) = 2d$ или
(2) $\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(p))) = 2d - 1$.
Случај (1) : Ако су степени полинома $q_1(t)$ и $q_2(t)$ парни истовремено, можемо $\psi_t(p)$ написати као

$$\psi_t(p) = \frac{q_1}{(1+t^2)^{d_1}} \cdot \frac{q_2}{(1+t^2)^{d_2}},$$

где је $d_i = (1/2)\deg_t(q_i)$ за $i = 1, 2$. Ако су оба степена непарна, тада полином $q_2$ мора бити растављив. Штавише, $q_2$ мора имати нерастављив фактор непарног степена, нпр. $q_3$. Нека је $q_2 = q_3 \cdot q_4$ ($q_4$ је парног степена). Сада можемо $\psi_t(p)$ написати као

$$\psi_t(p) = \frac{q_1 \cdot q_3}{(1+t^2)^{d_1}} \cdot \frac{q_4}{(1+t^2)^{d_2}},$$

где је $d_1 = (1/2)(\deg_t(q_1) + \deg_t(q_3))$ и $d_2 = (1/2)\deg_t(q_4)$.

Случај (2) : Тачно један од полинома $q_1$ и $q_2$ је непарног степена, нпр. $q_1$. Напишимо сада $\psi_t(p)$ као

$$\psi_t(p) = \frac{q_1}{(1+t^2)^{d_1}} \cdot \frac{q_2}{(1+t^2)^{d_2}},$$

где је $d_1 = (1/2)(\deg_t(q_1)+1)$ и $d_2 = (1/2)(\deg_t(q_2))$. У сваком случају можемо $\psi_t(p)$ написати као

$$\psi_t(p) = \frac{\hat{q}_1}{(1+t^2)^{d_1}} \cdot \frac{\hat{q}_2}{(1+t^2)^{d_2}},$$

где је $2d_i \geq \deg_t(\hat{q}_i)$ и $d_i \geq 1$, $i = 1, 2$. Према теореми 109 оба чиниоца рационалне функције $\psi_t(p)$ одговарају тригонометријским полиномима степена редом $d_1$ и $d_2$, $d_1, d_2 \geq 1$ у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$. Дакле, $p$ је раставлјив тригонометријски полином.

($\Longleftarrow$) : Нека важе услови (i) и (ii). Претпоставимо супротно, да је тригонометријски полином $p$ раставлјив. Дакле, $p = ab$, $a, b \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$, $\mathrm{TD}(a) \geq 1$ и $\mathrm{TD}(b) \geq 1$. Сада имамо да је

$$\begin{aligned}
\psi_t(p) &= \psi_t(a) \cdot \psi_t(b) \\
&= \frac{\mathrm{NU}(\psi_t(a))}{(1+t^2)^{d_a}} \cdot \frac{\mathrm{NU}(\psi_t(b))}{(1+t^2)^{d_b}},
\end{aligned}$$

где је $d_a = \mathrm{TD}(a)$ и $d_b = \mathrm{TD}(b)$. Према леми 104 следи да је $d_a + d_b = \mathrm{TD}(p)$. Ако је $\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(a))) = 0$, тада је

$$\begin{aligned}
\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(p))) &= \deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(b))) \\
&\leq 2d_b \\
&= 2(\mathrm{TD}(p) - d_a) \\
&= 2\mathrm{TD}(p) - 2d_a \\
&\leq 2\mathrm{TD}(p) - 2 \quad (d_a \geq 1) \\
&< 2\mathrm{TD}(p) - 1.
\end{aligned}$$

Ово је у контрадикцији са (i). Слично је и ако је $\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(b))) = 0$. Дакле, $\mathrm{NU}(\psi_t(a))$ и $\mathrm{NU}(\psi_t(b)) \notin \mathbb{Q}$. Према томе, $\mathrm{NU}(\psi_t(p))$ је раставлјив полином у $\mathbb{Q}[t]$. Како услов (ii) важи и $\mathrm{NU}(\psi_t(p))$ је раставлјив полином, следи да су оба полинома, $\mathrm{NU}(\psi_t(a))$ и $\mathrm{NU}(\psi_t(b))$, нераставлјиви и

$\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(a)))$ и $\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(b)))$ су непарни. Нека је $\overline{d}_a = \deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(a)))$ и $\overline{d}_b = \deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(b)))$. Како су $\overline{d}_a$ и $\overline{d}_b$ непарни бројеви и $\leq 2d_a$ и $2d_b$ редом, тада је $\overline{d}_a \leq 2d_a - 1$ и $\overline{d}_b \leq 2d_b - 1$.
Како важи услов (i), следи да је

$$\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(p))) = 2d \text{ или } 2d-1.$$

Ако је $\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(p))) = 2d$, тада је $2d = \overline{d}_a + \overline{d}_b < 2d_a + 2d_b = 2d$. Ако је $\deg_t(\mathrm{NU}(\psi_t(p))) = 2d-1$, тада је $2d-1 = \overline{d}_a + \overline{d}_b < 2d_a + 2d_b - 2 = 2d-2$, одакле следи да је $2d \leq 2d-1$. У оба случаја добијамо контрадикцију. Дакле, $p$ је нераставља тригонометријски полином. □
На основу ове теореме можемо закључити да нераставља тригонометријски полином не мора имати нераставиву слику при пресликавању $\psi_t$. Штавише, нераставива слика тригонометријског полинома при пресликавању $\psi_t$ не подразумева да је тригонометријски полином нераставља, као што је нпр. бројилац слике полинома $c+1$ степена 0 по $t$.

У наставку ће, кроз примере, бити скициран алгоритам за одређивање свих факторизација датог тригонометријског полинома. Наиме, у теореми 113 дата је карактеризација нерастављивих тригонометријских полинома над $\mathbb{Q}$ у зависности од њихове слике, при увођењу $t$-смене. Дакле, да би пронашли све факторизације тригонометријског полинома, морамо факторисати бројилац који се добија увођењем $t$-смене и посматрати комбинације парова његових фактора непарног степена. Такође, морамо узети у обзир и могућност појаве фактора $(1+c)$.

**Пример 114.** Нека је $p = sc$. Најпре тражимо слику тригонометријског полинома $p$ при пресликавању $\psi_t(p)$:

$$\psi_t(p) = \psi_t(sc) = \frac{2t(1+t)(1-t)}{(1+t^2)^2}.$$

Сваки фактор слике тригонометријског полинома $p$ при пресликавању $\psi_t$ мора имати именилац $1+t^2$ на неки степен. Стога, тригонометријски полином $p$ може имати највише два фактора, с обзиром да је степен полинома $1+t^2$ у имениоцу рационалне функције $\psi_t(p)$ једнак 2. Примењујући теорему 113, видимо да су могуће факторизације од $\psi_t(p)$:

$$2 \cdot \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{(1+t)(1-t)}{1+t^2}, \quad 2 \cdot \frac{1+t}{1+t^2} \cdot \frac{t(1-t)}{1+t^2} \quad \text{и} \quad 2 \cdot \frac{1-t}{1+t^2} \cdot \frac{t(1+t)}{1+t^2}.$$

Ове факторизације одговарају трима различитим факторизацијама тригонометријског полинома $p$, редом:

$$2(1/2s)\cdot c = sc,$$

$$2(1/2(c+s+1))\cdot(1/2(c+s-1)) = 1/2(c+s+1)(c+s-1)$$

и

$$2(1/2(c-s+1))\cdot(1/2(-c+s+1)) = 1/2(c-s+1)(s-c+1).$$

**Пример 115.** Нека је $p=(1+c)s+1-c^2$. Поново тражимо слику тригонометријског полинома $p$ при пресликавању $\psi_t(p)$:

$$\psi_t(p) = \frac{4t(1+t)}{(1+t^2)^2}.$$

Сваки фактор слике тригонометријског полинома $p$ при пресликавању $\psi_t$ мора имати именилац $1+t^2$ на неки степен. Стога, тригонометријски полином $p$ може имати највише два фактора. Могуће факторизације од $\psi_t(p)$ су:

$$4\cdot\frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{1+t}{1+t^2} \quad \text{и} \quad 4\cdot\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{t(1+t)}{1+t^2}.$$

Последња факторизација следи према последици 111. Јасно је да нема других факторизација од $\psi_t(p)$, у којима сваки фактор одговара тригонометријском полиному. Дакле, две различите факторизације тригонометријског полинома $p$ су редом:

$$4(1/2s)\cdot(1/2(c+s+1)) = s(c+s+1)$$

и

$$4(1/2(1+c))\cdot(1/2(s-c+1)) = (1+c)(s-c+1).$$

На крају овог дела, напоменимо да број различитих факторизација тригонометријског полинома $p\in\mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ расте експоненцијално са бројем различитих фактора полинома $a(t)=\mathrm{NU}(\psi_t(p))$ непарног степена. На пример, ако је $\mathrm{TD}(p)=d$ и ако се $a(t)$ факторише на $2d$ различитих линеарних фактора, тада постоји $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2d-1)$ различитих факторизација тригонометријског полинома $p$ и $\binom{2d}{2}=2d^2-d$ различитих нерастављивих делитеља тригонометријског полинома $p$. Уместо рачунања свих факторизација тригонометријског полинома $p$, можемо наћи скуп свих нерастављивих тригонометријских полинома који деле $p$. То се лако одређује, на основу факторизације полинома $a(t)$ и применом теореме 113.

### 2.5.2 Највећи заједнички делитељ два тригонометријска полинома

У овом делу дефинисан је највећи заједнички делитељ два тригонометријска полинома, према раду [64]. Дат је и алгоритам за његово рачунање.

Наведимо најпре класичну дефиницију највећег заједничког делитеља два елемента домена.

**Дефиниција 116.** Нека су $a, b \in A$, $a, b \neq 0$. Елемент $d \in A$ је највећи заједнички делитељ елемената $a$ и $b$, у ознаци $d = \mathrm{NZD}(a, b)$, ако важи:
(i) $d \mid a$, $d \mid b$
(ii) $d' \mid a$, $d' \mid b \Longrightarrow d' \mid d$.

Наредни пример нам показује да се може десити да НЗД два тригонометријска полинома, дефинисан као у претходној дефиницији, не постоји, чак иако постоје њихови заједнички делитељи. Сходно томе, биће узета у обзир друга дефиниција НЗД-а, која је у домену са једнозначном факторизацијом еквивалентна дефиницији 116.

**Дефиниција 117.** (Алтернативна дефиниција НЗД-а) Нека је $A$ домен и нека $a, b \in A$. Елемент $g \in A$ је највећи заједнички делитељ елемената $a$ и $b$ ако:
(1) $g \mid a$ и $g \mid b$ и
(2) ако $p \mid (a/g)$ и $p \mid (b/g)$, тада је $p$ инвертибилан елемент.

**Пример 118.** Нека је $a = s(1+c)$ и $b = -c^2 + cs + s + 1$. На исти начин као у претходна два примера, факторишемо тригонометријске полиноме $a$ и $b$:

$$a = s(c+1),$$

$$b = (c+s+1)s = (-c+s+1)(1+c).$$

Дакле, $s$ и $1+c$ деле и $a$ и $b$, па би према класичној дефиницији НЗД-а (дефиниција 116), НЗД тригонометријских полинома $a$ и $b$, уколико би постојао, био дељив и са $s$ и са $1+c$. Дакле, $s$ и $1+c$ деле НЗД и НЗД дели $a = s(1+c)$, па следи да је НЗД једнак $s(1+c)$ (до на множење инвертибилним елементом). Међутим, такав НЗД не дели $b$, па добијамо контрадикцију. Дакле, може се закључити да су и $s$ и $1+c$ највећи заједнички делитељи тригонометријских полинома $a$ и $b$, према алтернативној дефиницији (дефиниција 117).

Претходни пример нам показује да НЗД два тригонометријска полинома над пољем $\mathbb{Q}$ није једнозначан. Наредни пример показује да два таква НЗД-а не морају бити чак ни истог степена.

**Пример 119.** Нека је $a = -5c^3 + 5sc^2 - 5c^2 + 2cs + c + 9s + 9$ и $b = -c^5 + 17c^4 - 7sc^4 + 6c^3 - 16sc^3 + 2c^2 - 14sc^2 - 21c - 24cs - 3 - 3s$. Као у претходним примерима добијамо:

$$\psi_t(a) = 8 \cdot \frac{t(t+1)(t^3+2)(t+2)}{(1+t^2)^3},$$

$$\psi_t(b) = 32 \cdot \frac{t(t+1)(t^3+2)(t^5-2)}{(1+t^2)^5}.$$

Не можемо рећи да је $t(t+1)(t^3+2)$ слика НЗД-а тригонометријских полинома $a$ и $b$ при пресликавању $\psi_t$, јер не можемо распоредити три фактора $(1+t^2)$ у имениоцу рационалне функције $\psi_t(a)$ између $t(t+1)(t^3+2)$ и $(t+2)$, тако да оба ова фактора буду слике тригонометријских полинома. Оно што можемо је да слике тригонометријских полинома раздвојимо на следећи начин:

$$\psi_t(a) = 8 \cdot \frac{t(t+1)}{1+t^2} \cdot \frac{(t^3+2)(t+2)}{(1+t^2)^2}$$

и

$$\psi_t(b) = 32 \cdot \frac{t(t+1)}{1+t^2} \cdot \frac{(t^3+2)(t^5-2)}{(1+t^2)^4}.$$

Такође их можемо раздвојити и као:

$$\psi_t(a) = 8 \cdot \frac{t(t^3+2)}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{(t+1)(t+2)}{1+t^2}$$

и

$$\psi_t(b) = 32 \cdot \frac{t(t^3+2)}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{(t+1)(t^5-2)}{(1+t^2)^3}.$$

У првом случају је заједнички фактор $\frac{t(t+1)}{1+t^2}$, одакле видимо да је НЗД тригонометријских полинома $a$ и $b$ тригонометријски полином $s - c + 1$. У другом случају је заједнички фактор $\frac{t(t^3+2)}{(1+t^2)^2}$, па је одговарајући НЗД једнак $c^2 + 2cs - 2c + 2s + 1$.

Последњи пример показује да два различита НЗД-а тригонометријских полинома $a$ и $b$ могу имати различите тригонометријске степене. Логично је да, у том случају, посматрамо онај НЗД чији је тригонометријски степен већи. Одавде произилази следећа дефиниција НЗД-а два тригонометријска полинома, која је формулисана у раду [64].

**Дефиниција 120.** (Тригонометријски НЗД) Нека $a, b \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$. Елемент $g \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ назива се тригонометријски највећи заједнички делитељ (триг. НЗД) тригонометријских полинома $a$ и $b$ ако:
(i) $g \mid a$ и $g \mid b$,
(ii) ако $p \mid (a/g)$ и $p \mid (b/g)$, тада је $p$ инвертибилан елемент и
(iii) ако $h$ задовољава (i) и (ii), тада је $\mathrm{TD}(g) \geq \mathrm{TD}(h)$.

Пратећи метод који је описан у претходном примеру, дајемо алгоритам за рачунање тригонометријских највећих заједничких делитеља, према [64].

**Algorithm [trig GCD]**
**Input:** Два тригонометријска полинома $a$ и $b$

$(d_a, d_b) \longleftarrow (\mathrm{TD}(a), \mathrm{TD}(b))$

$(a_t, b_t) \longleftarrow (\psi_t(a) \cdot (1+t^2)^{d_a}, \psi_t(b) \cdot (1+t^2)^{d_b})$

$g_t \longleftarrow \gcd(a_t, b_t)$

$(\overline{a}_t, \overline{b}_t) \longleftarrow (a_t/g_t, b_t/g_t)$

$l \longleftarrow \min(d_a - [\deg_t(\overline{a}_t)/2], d_b - [\deg_t(\overline{b}_t)/2])$

if $\deg_t(g_t) > 2 \cdot l$ then

$f \longleftarrow$ фактор полинома $g_t$ најмањег непарног степена

$g_t \longleftarrow g_t/f$, $\overline{a}_t \longleftarrow \overline{a}_t \cdot f$, $\overline{b}_t \longleftarrow \overline{b}_t \cdot f$

$l \longleftarrow \min(d_a - [\deg_t(\overline{a}_t)/2], d_b - [\deg_t(\overline{b}_t)/2])$

$g \longleftarrow \psi_t^{-1}(\frac{g_t}{(1+t^2)^l})$

RETURN $(g)$ ♣

У алгоритму постоји додатно прилагођавање које је потребно уколико је степен полинома $g_t$ превелики. То је показано у претходном примеру.

Приметимо да и уз услов (iii) дефиниције 120, НЗД два тригонометријска полинома и даље није једнозначан, што је показано примером 118.

С обзиром да сада знамо како се рачуна тригонометријски НЗД, упрошћавање количника два тригонометријска полинома се тиме директно добија, рачунањем тригонометријског НЗД-а и дељењем бројиоца и имениоца тригонометријским НЗД-ом.

Међутим, може се догодити случај да се количник два тригонометријска полинома може упростити више на неки други начин него што би то учинили дељењем бројиоца и имениоца тригонометријским НЗД-ом. Сходно томе, размотримо следећи пример.

**Пример 121.** Нека је $a = 5c^3 + 21c^2 + 4cs + 23c + 15 + 12s$ и $b = 7c^3 - c^2s + 31c^2 + 2cs + 37c + 15s + 21$. Увођењем $t$-смене добијамо да је

$$\psi_t(a) = 8 \cdot \frac{(t^2+2)(t^3+2)(t+2)}{(1+t^2)^3},$$

и

$$\psi_t(b) = 8 \cdot \frac{(t^2+2)(t^3+2)(t+3)}{(1+t^2)^3}.$$

Даље, добијамо да је

$$\frac{\psi_t(a)}{\psi_t(b)} = \frac{t+2}{t+3} = \frac{\frac{t+2}{1+t^2}}{\frac{t+3}{1+t^2}}.$$

Преводећи бројилац и именилац назад у тригонометријске полиноме добијамо

$$\frac{a}{b} = \frac{2c+s+2}{3c+s+3}.$$

Дакле, $\frac{a}{b}$ се може упростити, при чему се добија количник два тригонометријска полинома степена 1. Одавде би могли закључити да је дошло до скраћивања тригонометријских полинома $a$ и $b$ тригонометријским полиномом степена 2. Међутим, једини тригонометријски НЗД од $a$ и $b$ је $c+3$, који је тригонометријског степена 1, и не постоји заједнички делитељ тригонометријских полинома $a$ и $b$ који је тригонометријског степена већег од 1. Стога, следи да $2c+s+2$ не дели $a$ и $3c+s+3$ не дели $b$.

У претходном примеру илустрована је чињеница да упрошћавање количника два тригонометријска полинома помоћу $t$-смене може као резултат дати количник тригонометријских полинома при чему су тригонометријски степени бројиоца и имениоца смањени више него што би се постигло скраћивањем бројиоца и имениоца тригонометријским НЗД-ом. Заправо, упрошћавање на овај начин сигурно није гори поступак од скраћивања бројиоца и имениоца тригонометријским НЗД-ом. Та чињеница доказана је теоремом из рада [64] која следи после наредног алгоритма. Такође, приметимо да на овај начин нисмо у обавези да факторишемо полином у $\mathbb{Q}[t]$, што би морали уколико би желели да извршимо скраћивање бројиоца и имениоца тригонометријским НЗД-ом.

У наставку ће бити приказан алгоритам за упрошћавање количника два тригонометријска полинома помоћу $t$-смене, према раду [64].

**Algorithm [trig simplify]**
**Input:** Количник два тригонометријска полинома $\frac{a}{b}$

$(d_a, d_b) \longleftarrow (\mathrm{TD}(a), \mathrm{TD}(b))$

$(a_t, b_t) \longleftarrow (\psi_t(a) \cdot (1+t^2)^{d_a}, \psi_t(b) \cdot (1+t^2)^{d_b})$

$g_t \longleftarrow \gcd(a_t, b_t)$

$(\overline{a}_t, \overline{b}_t) \longleftarrow (a_t/g_t, b_t/g_t)$

if $d_a \leq d_b$ then

$\quad \overline{a}_t \longleftarrow \overline{a}_t(1+t^2)^{d_b-d_a}$

else

$\quad \overline{b}_t \longleftarrow \overline{b}_t(1+t^2)^{d_a-d_b}$

$l \longleftarrow \max([\deg_t(\overline{a}_t)/2], [\deg_t(\overline{b}_t)/2])$

$\overline{a} \longleftarrow \psi_t^{-1}(\frac{\overline{a}_t}{(1+t^2)^l})$

$\overline{b} \longleftarrow \psi_t^{-1}(\frac{\overline{b}_t}{(1+t^2)^l})$

RETURN $(\overline{a}/\overline{b})$ ♣

**Теорема 122.** *Нека су $f, g \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle s^2+c^2-1\rangle$ ненулти тригонометријски полиноми. Нека је $\frac{p}{q}$ излазни податак алгоритма за упрошћавање количника два тригонометријска полинома. Тада не постоје тригонометријски полиноми $a$ и $b$ такви да је $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ и $TD(a) + TD(b) < TD(p) + TD(q)$.*

*Доказ:* Нека је $d_p = \mathrm{TD}(p)$, $d_q = \mathrm{TD}(q)$, $p_t = \psi_t(p)(1+t^2)^{d_p}$ и $q_t = \psi_t(q)(1+t^2)^{d_q}$. За излазни податак алгоритма за упрошћавање количника два тригонометријска полинома важи $\mathrm{NZD}(p_t, q_t) = 1$ и један од услова (i) $\deg p_t > 2d_p - 2$ или (ii) $\deg q_t > 2d_q - 2$, тј. нису истовремено $p$ и $q$ дељиви са $1 + c$. Наиме, нека је $d_a = \mathrm{TD}(a)$, $d_b = \mathrm{TD}(b)$ и нека је $a_t = \psi_t(a)(1 + t^2)^{d_a}$ и $b_t = \psi_t(b)(1 + t^2)^{d_b}$. Сада из $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ добијамо

$$b_t p_t (1 + t^2)^{d_q - d_p} = q_t a_t (1 + t^2)^{d_b - d_a}.$$

Како је $1 + t^2$ копрост са $a_t$, $b_t$, $p_t$ и $q_t$, тада је $d_q - d_p = d_b - d_a$, тј.

$$d_q + d_a = d_b + d_p. \tag{2.5.2}$$

Затим, како је $\mathrm{NZD}(p_t, q_t) = 1$ и $\mathrm{NZD}(p_t, 1 + t^2) = 1$, следи да $p_t \mid a_t$. У случају (i) имамо да је $\deg p_t > 2d_p - 2$. С обзиром да $p_t \mid a_t$, имамо да је $2d_a \geq \deg a_t \geq \deg p_t > 2d_p - 2$, па је према томе $d_a \geq d_p$, што је еквивалентно са $-d_a \leq -d_p$. Имајући у виду последњу неједнакост, из једнакости (2.5.2) добијамо да је $d_q \leq d_b$. Дакле, у случају (i) теорема важи. На сличан начин се доказује да теорема важи и у случају (ii). □

У последњој секцији рада [64] укратко је описано још неколико начина за упрошћавање количника, факторисање и налажење НЗД-а два тригонометријска полинома, према [51, 80], где су наведени и неки недостаци поменутих метода у поређењу са поступцима описаним у [64].

Премда у раду [64] нису дати детаљи алгоритама за дељење и факторисање тригонометријских полинома, аутори овог рада су све наведене операције уградили у програм Maple. Њихов Maple код доступан је на страници www.cecm.sfu.ca/CAG/products.html.

Дакле, теорија факторизације тригонометријских полинома у раду [64] описана је над пољем $\mathbb{Q}$. Ако пак, уместо поља $\mathbb{Q}$ посматрамо његово раширење $\mathbb{Q}(i)$, тада су $c + is$ и $c - is$ инвертибилни елементи, јер је $(c+is) \cdot (c-is) = 1$, па стога формула за тригонометријски степен, дата лемом 104, више не важи. Као што је речено у поглављу 2.2, $S^c = \mathbb{Q}(i)[s, c]/\langle s^2 + c^2 - 1\rangle$ је домен са једнозначном факторизацијом, па је према томе у овом домену НЗД два тригонометријска полинома јединствен до на множење инвертибилним елементима. Сходно томе, упрошћавање количника два тригонометријска полинома постиже се скраћивањем бројиоца и имениоца тригонометријским НЗД-ом.

**ГЛАВА 3**

# ПРСТЕНИ ХИПЕРБОЛИЧКО-ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ПОЛИНОМА

Хиперболичке функције први пут су уведене 1760. године, на два различита начина [14]. Рикати[14] је користио ознаке *Sc.* и *Cc.* ([*co*]*sinus circulare*), које се односе на циркуларне (тригонометријске) функције и ознаке *Sh.* и *Ch.* ([*co*]*sinus hyperbolico*), које се односе на хиперболичке функције. Ламберт[15] је усвојио назив, али је променио скраћенице ових функција у оне које се и данас користе.

Примене хиперболичких функција су бројне у математици, физици и инжењерству. У комплексној анализи хиперболички синус и косинус ($\sinh x$ и $\cosh x$) посматрају се као функције синус и косинус са аргументом који садржи имагинарну јединицу. Добро је позната веза између експоненцијалне функције и хиперболичког синуса и косинуса $e^x = \cosh x + \sinh x$. С обзиром да експоненцијална функција може бити дефинисана за било који комплексан аргумент, следи да и $\sinh x$ и $\cosh x$ могу имати комплексне аргументе. Дакле, хиперболичке функције могу се посматрати и као холоморфне функције, које представљају централне објекте истраживања комплексне анализе.

Хиперболичке функције јављају се и у решењима многих линеарних

[14] Vincenzo Riccati (1707-1775), венецијански математичар и физичар

[15] Johann Heinrich Lambert (1728-1777), швајцарски математичар, физичар, астроном и филозоф

диференцијалних једначина, неких кубних једначина, затим у прорачунима углова и растојања у хиперболичкој геометрији, као и у Лапласовој[16] једначини са Декартовим[17] координатама. Ова једначина значајна је у многим областима физике, укључујући електромагнетизам, динамику флуида, топлотну проводљивост, као и специјалну теорију релативности. Више о применама хиперболичких функција у електротехници може се наћи у раду [49].

Примена хиперболичких функција у горепоменутим областима актуелна је и данас. Радови попут [30, 72, 88, 92] су само неки од бројних радова објављених у последње време који потврђују ову чињеницу.

У наставку, хиперболичке функције биће разматране са алгебарског аспекта. Овакав приступ, колико нам је познато, није заступљен у литератури. Наиме, биће дефинисани хиперболичко-тригонометријски полиноми, аналогно тригонометријским полиномима, и такође биће описани прстени ових полинома, упоређујући их са прстенима тригонометријских полинома, описаним у претходној глави.

## 3.1 Појам хиперболичко-тригонометријског полинома

По угледу на тригонометријске полиноме, дефинишемо хиперболичко-тригонометријске полиноме као коначне линеарне комбинације функција $\sinh nx$ и $\cosh nx$, за $n \in \mathbb{N}$. У наставку, уместо назива хиперболичко-тригонометријски полином користићемо скраћени назив ХТ-полином.

Означимо редом са

$$H = \left\{ \sum_{k=0}^{n} (a_k \cosh kx + b_k \sinh kx) \mid n \in \mathbb{N},\ a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

и

$$H^c = \left\{ \sum_{k=0}^{n} (a_k \cosh kx + b_k \sinh kx) \mid n \in \mathbb{N},\ a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

скупове ХТ-полинома са реалним и комплексним коефицијентима. Приметимо да ако $\alpha_k$ из теореме 56 заменимо са $m \in \mathbb{Z}$ добијамо ХТ-полином.

[16] Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749-1827), француски математичар и астроном

[17] Rene Descartes (1596-1650), француски филозоф и математичар

Степен ненултог ХТ-полинома дефинишемо као највећу вредност $n$ за коју $a_n$ и $b_n$ нису истовремено једнаки нули. Наредна лема показује нам да је скуп свих (реалних и комплексних) ХТ-полинома прстен, као и да степени ХТ-полинома немају особине као степени обичних полинома.

**Лема 123.** *Производ два реална (комплексна) ХТ-полинома је реалан (комплексан) ХТ-полином, чији степен није увек једнак збиру степена његових фактора.*

*Доказ:* Посматрајмо производ два реална, односно комплексна ХТ-полинома, редом степена $m$ и $n$. Ако је $m$ или $n$ једнако нули, овај производ припадаће скупу $H$, односно $H^c$, јер је ХТ-полином степена 0 константна функција, док ће степен производа бити једнак степену неконстантног ХТ-полинома. Претпоставимо сада да је $m, n > 0$. Присетимо се следећих идентитета:

$$\sinh a \cdot \sinh b = [\cosh(a+b) - \cosh(a-b)]/2,$$

$$\cosh a \cdot \cosh b = [\cosh(a+b) + \cosh(a-b)]/2,$$

$$\sinh a \cdot \cosh b = [\sinh(a+b) + \sinh(a-b)]/2,$$

$$\cosh a \cdot \sinh b = [\sinh(a+b) - \sinh(a-b)]/2.$$

Применимо ове једнакости на производ

$$(p \cosh mx + q \sinh mx) \cdot (r \cosh nx + s \sinh nx), \tag{3.1.1}$$

$p$, $q$, $r$, $s \in \mathbb{R}$ (односно $\mathbb{C}$), и добијамо следећи резултат

$$A \cosh(m-n)x + B \sinh(m-n)x + C \cosh(m+n)x + D \sinh(m+n)x, \tag{3.1.2}$$

где је $A = (pr - qs)/2$, $B = (qr - ps)/2$, $C = (pr + qs)/2$ и $D = (ps + qr)/2$. Када је $m > n$, израз (3.1.2) припада скупу $H$, односно $H^c$. Ако је пак $n > m$, тада $\cosh(m-n)$ и $\sinh(m-n)$ заменимо редом са $\cosh(n-m)$ и $-\sinh(n-m)$ у изразу (3.1.2), па добијени израз такође припада скупу $H$, односно $H^c$. На крају, ако је $m = n$, заменимо $\sinh 0$ са 0 и $\cosh 0$ са 1, па израз (3.1.2) и у овом случају припада скупу $H$, односно $H^c$.

Питамо се даље да ли се може догодити да су у изразу (3.1.2) $C$ и $D$ истовремено једнаки нули, а да је притом у изразу (3.1.1) $(p, q) \neq (0, 0)$

и $(r, s) \neq (0, 0)$. То је једино могуће када је $p = \pm q$ и $r = \mp s$. Дакле, било који од ова два услова представља потребан и довољан услов да производ (3.1.1) не буде степена $m + n$, док су његови фактори редом степена $m$ и $n$.

Посматрајмо сада производ било која два реална (комплексна) ХТ-полинома, одговарајућих степена $m$ и $n$. Тај производ биће једнак суми производа облика (3.1.1), који су управо размотрени, па се може закључити да је тражени производ заправо реалан (комплексан) ХТ-полином.

Производ два израза највећег степена облика (3.1.1), под условима $p = \pm q$ и $r = \mp s$, даје ненулти израз степена $|m - n|$, облика (3.1.2). Дакле, ако оба ХТ-полинома редом степена $m$ и $n$ садрже при множењу изразе редом облика $(p \cosh mx + q \sinh mx)$ и $(r \cosh nx + s \sinh nx)$, који задовољавају један од два горепоменута услова, њихов производ биће степена мањег од $m + n$. $\square$

Стога, није тешко закључити да скуп свих (реалних и комплексних) ХТ-полинома образује прстен. Према познатим идентитетима који важе за хиперболичке функције, очигледно је да за свако $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ функција $\cosh nx$ представља полином по $\cosh x$ степена $n$, док функција $\sinh nx$ представља производ функције $\sinh x$ и полинома по $\cosh x$ степена $n - 1$. Ово илуструјемо следећим примером.

**Пример 124.** 1) За функцију $\cosh nx$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, важи:
$\cosh 2x = 2 \cdot \cosh^2 x - 1;$
$\cosh 3x = 4 \cdot \cosh^3 x - 3 \cdot \cosh x;$
$\cosh 4x = 8 \cdot \cosh^4 x - 8 \cdot \cosh^2 x + 1;$
$\cosh 5x = 16 \cdot \cosh^5 x - 20 \cdot \cosh^3 x + 5 \cdot \cosh x;$
$\vdots$
2) За функцију $\sinh nx$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, важи:
$\sinh 2x = 2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x;$
$\sinh 3x = \sinh x \cdot (4 \cdot \cosh^2 x - 1);$
$\sinh 4x = \sinh x \cdot (8 \cdot \cosh^3 x - 4 \cdot \cosh x);$
$\sinh 5x = \sinh x \cdot (16 \cdot \cosh^4 x - 12 \cosh^2 x + 1);$
$\vdots$

Обрнуто, сваки производ $\cosh^n x \cdot \sinh^m x$ можемо записати као $\sum_{k=0}^{q} (a_k \cosh kx + b_k \sinh kx)$, $q \in \mathbb{N}$, $a_k$, $b_k \in \mathbb{Q}$, што је доказано теоремом 162 (глава 5).

Из претходног разматрања може се закључити да је $H=\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$ и $H^c = \mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$, тј. $H$ и $H^c$ су прстени ХТ-полинома редом над пољима $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

## 3.2 Прстени $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$ и $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$

На почетку ове секције истакнимо чињеницу да су прстени $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$ и $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$ изоморфни. Наиме, ако први прстен посматрамо као $\mathbb{C}[c, s]/\langle c^2 + s^2 - 1\rangle$, а други као $\mathbb{C}[C, S]/\langle C^2 - S^2 - 1\rangle$, тада постоји хомоморфизам из првог у други прстен, индукован пресликавањем које $c$ слика у $C$, а $s$ слика у $i \cdot S$. С друге стране, постоји хомоморфизам из другог у први прстен, индукован пресликавањем које $C$ слика у $c$, а $S$ у $-i \cdot s$. То се слаже са идеалима и индукује хомоморфизме количничких прстена, који су заправо инверз један другом. Одавде се може закључити да су поменути прстени изоморфни. С тим у вези, све закључке о прстену $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$ можемо извести у аналогији са особинама прстена $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, о којима је било речи напред, и зато их овде нећемо посебно наводити.

У наставку се бавимо прстеном $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$. Докажимо, најпре, следеће тврђење.

**Тврђење 125.** *$H = \mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$ је домен.*

*Доказ:* Посматрајмо количнички прстен $A = \mathbb{R}[X, Y]/\langle X^2 - Y^2 - 1\rangle$. Са $a$ и $b$ означимо одговарајуће слике елемената $X$ и $Y$ при канонском хомоморфизму $\mathbb{R}[X, Y] \longrightarrow A$, $a = X + \langle X^2 - Y^2 - 1\rangle$, $b = Y + \langle X^2 - Y^2 - 1\rangle$. Тада имамо да је $A = \mathbb{R}[a, b]$ са дефинишућом релацијом $a^2 - b^2 = 1$. Ако са $a$ и $b$ означимо редом $\cosh x$ и $\sinh x$, добијамо да је $A = \mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$.

У наставку, покажимо да је $\mathbb{R}[X, Y]/\langle X^2 - Y^2 - 1\rangle$ домен. Да би ово доказали, довољно је показати да је $X^2 - Y^2 - 1$ нерастављив елемент у $\mathbb{R}[X, Y]$. Ако то докажемо, следиће да је $X^2 - Y^2 - 1$ прост елемент, јер је $\mathbb{R}[X, Y]$ домен са једнозначном факторизацијом, према [75, теорема 2.3.2. и последица 2.3.3.] (у UFD-у елемент је прост акко је нерастављив, видети поглавље 1.2). Даље, идеал генерисан полиномом $X^2 - Y^2 - 1$ је прост према теореми 6, па следи да је $\mathbb{R}[X, Y]/\langle X^2 - Y^2 - 1\rangle$ домен према дефиницији 2.

Претпоставимо супротно, да је $X^2 - Y^2 - 1 = g \cdot h$, $\deg g = \deg h = 1$ (ако би један од полинома $g$ или $h$ био степена 0, полином $X^2 - Y^2 - 1$ био би нераставльив, јер су инвертибилни елементи у $\mathbb{R}[X, Y]$ константе). Нека $g, h \in \mathbb{R}[X, Y] = \mathbb{R}[X][Y]$. Тада важи:

$$g(X, Y) = a_0(X) + a_1(X)Y,$$

$$h(X, Y) = b_0(X) + b_1(X)Y.$$

Дакле, важи једнакост:

$$X^2 - Y^2 - 1 = (a_0(X) + a_1(X)Y) \cdot (b_0(X) + b_1(X)Y).$$

Даљим сређивањем претходне једнакости добијамо:

$$X^2 - Y^2 - 1 = a_0(X) \cdot b_0(X) + (a_0(X) \cdot b_1(X) + a_1(X) \cdot b_0(X))Y + a_1(X)b_1(X)Y^2.$$

Посматрајући леву и десну страну претходне једнакости као полиноме по $Y$ са коефицијентима из $\mathbb{R}[X]$, и изједначавањем одговарајућих коефицијената, добијамо следећи систем једначина:

$$a_1(X)b_1(X) = -1$$

$$a_0(X) \cdot b_1(X) + a_1(X) \cdot b_0(X) = 0$$

$$a_0(X) \cdot b_0(X) = X^2 - 1.$$

Из претходног система може се закључити да су $a_1(X)$ и $b_1(X)$ константе. Ако израз $a_1(X) = -\frac{1}{b_1(X)}$, који добијамо из прве једначине, убацимо у другу једначину, добијамо да је $b_0(X) = a_0(X)b_1^2(X)$. Коначно, убацивањем последњег израза у трећу једначину, добијамо да је $(b_1(X) \cdot a_0(X))^2 = X^2 - 1$, где је $b_1(X)$ константа. Претходна једнакост је контрадикција. Дакле, $X^2 - Y^2 - 1$ је нераставльив полином у $\mathbb{R}[X, Y]$, а тиме је и доказ готов. □

Штавише, важи следећа теорема.

**Теорема 126.** $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$ *је домен са једнозначном факторизацијом.*

*Доказ:* Посматрајмо $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$ као $A = \mathbb{R}[a, b]$ са дефинишућом релацијом $a^2 - b^2 = 1$. Ако трансформишемо ову релацију на следећи начин:

$$1 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = uv, \;\; a = \frac{u + v}{2}, \, b = \frac{u - v}{2},$$

добијамо да је $A = \mathbb{R}[u, v]$ са дефинишућом релацијом $uv = 1$. Дакле, са $a$ и $b$ су означени редом $\cosh x$ и $\sinh x$. Одавде следи да је $u = e^x$ и $v = e^{-x}$, па добијамо да је $A = \mathbb{R}[\cosh x, \sinh x] = \mathbb{R}[e^x, e^{-x}]$, што је заправо прстен Лоранових полинома $\mathbb{R}[u, u^{-1}]$. Тада је

$$A = \mathbb{R}[u, u^{-1}] = \mathbb{R}[u][u^{-1}] = \mathbb{R}[u]_S,$$

где је $S = \{1, u, u^2, \ldots\}$. Другим речима, $\mathbb{R}[u, u^{-1}]$ је локализација домена $\mathbb{R}[u]$ у односу на мултипликативан скуп $S$. Како је $\mathbb{R}[u]$ главноидеалски домен (видети [70, пример 51]), према теореми 19 следи да је уједно и домен са једнозначном факторизацијом. Према теореми 27 следи да је и $A = \mathbb{R}[u]_S$ домен са једнозначном факторизацијом, па је тиме и доказ готов. $\square$

Дакле, за разлику од домена $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, домен $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$ је домен са једнозначном факторизацијом.

С једне стране, добро познати идентитети $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ омогућавају да се произвољан елемент $z$ из $H$ може написати у облику

$$z = e^{-nx}P(e^x),\ n \in \mathbb{N},\ P(X) \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P) = 2n.$$

Обрнуто, како је $e^x = \cosh x + \sinh x$, следи да елемент облика $e^{-nx}P(e^x)$, за $n \in \mathbb{N}$ и $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, припада $H$. Према томе, испоставља се да постоји изоморфизам домена $H$ и локализације домена $\mathbb{R}[X]$ у односу на мултипликативан скуп $S = \{1, X, X^2, \ldots\}$, индукован пресликавањем $X \longrightarrow e^x$. Стога, особине домена $H$ можемо описати према особинама њему изоморфне алгебарске структуре $\mathbb{R}[X]_S$, што је једноставније за анализу.

Према томе, читава прича из поглавља 2.2, која се односи на домен $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, аналогно се може пренети како на домен $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$ тако и на домен $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$, имајући у виду разлику између ова два домена, која се односи на нерастављиве елементе.

Према дефиницији 20 и примеру 21, $\mathbb{R}[X]$ и $\mathbb{C}[X]$ су Еуклидови домени. На основу [84, пропозиција 7], имамо да су и $\mathbb{R}[X]_S$ и $\mathbb{C}[X]_S$ такође Еуклидови домени. Дакле, $H \cong \mathbb{R}[X]_S$ и $H^c \cong \mathbb{C}[X]_S$ су Еуклидови домени. Према теореми 22, може се закључити да су $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$ и $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$ главноидеалски домени.

Инвертибилни елементи домена $H$, односно $H^c$, су елементи скупа $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, односно $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, затим степени елемената $z$ и $z^{-1}$, као и умношци ненултих реалних (комплексних) константи и степена елемената $z$ и $z^{-1}$, где је $z = \cosh x + \sinh x$ и $z^{-1} = \cosh x - \sinh x$.

У домену $H^c$ нерастављиви елементи су, до на инвертибилне елементе, ХТ-полиноми облика $\cosh x + \sinh x - a$, $a \in \mathbb{C}^*$. Ово су једини нерастављиви елементи, јер је $\mathbb{C}$ алгебарски затворено поље. У домену $H$ нерастављиви елементи су, до на инвертибилне елементе, ХТ-полиноми облика $\cosh x + \sinh x - a$, $a \in \mathbb{R}^*$, као и ХТ-полиноми облика $a(\cosh 2x + \sinh 2x) + b(\cosh x + \sinh x) + c$, са особином $b^2 - 4ac < 0$, аналогно нерастављивим елементима домена $\mathbb{R}[X]$. Максимални идеали домена $H$ и $H^c$ су главни идеали генерисани нерастављивим елементима ових домена.

## 3.3 Алгоритми код ХТ-полинома

У последњем поглављу ове главе истакнимо чињенице које, по угледу на домен $\mathbb{Q}[\cos x, \sin x]$ описан у раду [64], важе у домену $\mathbb{Q}[\cosh x, \sinh x]$, а тичу се поступака за факторисање, дељење, налажење НЗД-а и упрошћавање количника два ХТ-полинома. Иначе, доказ саме чињенице да је $\mathbb{Q}[\cosh x, \sinh x]$ домен изводи се аналогно доказу тврђења 125.

Најпре, може се закључити да лема 123, која је доказана за реалне и комплексне ХТ-полиноме, важи и за ХТ-полиноме над пољем рационалних бројева. У доказу ове леме истакнути су потребни и довољни услови под којима степен производа два ХТ-полинома није једнак збиру степена његових чинилаца, што је прва битна разлика између домена $\mathbb{Q}[\cos x, \sin x]$ и $\mathbb{Q}[\cosh x, \sinh x]$. Друга битна разлика између ова два домена је та што је $\mathbb{Q}[\cosh x, \sinh x]$ домен са једнозначном факторизацијом, док $\mathbb{Q}[\cos x, \sin x]$ то није (видети поглавље 2.3). Доказ да је $\mathbb{Q}[\cosh x, \sinh x]$ домен са једнозначном факторизацијом изводи се аналогно доказу теореме 126.

Сада када знамо које су кључне разлике између ова два домена, можемо навести сва тврђења која важе за домен $\mathbb{Q}[\cosh x, \sinh x]$, по угледу на домен $\mathbb{Q}[\cos x, \sin x]$. Напоменимо да теореме 136 и 139, које ће у наставку бити наведене, важе за оне ХТ-полиноме над $\mathbb{Q}$ код којих је степен производа два ХТ-полинома једнак збиру степена његових чинилаца, тј. за оне ХТ-полиноме над $\mathbb{Q}$ за које не важе услови наведени у доказу леме 123. Сва тврђења која ћемо навести доказују се слично као за домен

$\mathbb{Q}[\cos x, \sin x]$ (видети поглавље 2.5), па ће докази из наведеног разлога бити изостављени.

Најпре, означимо са $s$ и $c$ редом $\sinh x$ и $\cosh x$. При томе, важиће једнакости

$$s = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{и} \quad c = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

за $t = \tanh \frac{x}{2}$.

Наведимо сада дефиниције и тврђења која важе за $\mathbb{Q}[\cosh x, \sinh x]$.

**Дефиниција 127.** Дефинишимо релацију $\equiv$ са $p \equiv q \Longleftrightarrow (c^2-s^2-1) \mid (p-q)$ у домену $\mathbb{Q}[s,c]$.

**Дефиниција 128.** Дефинишимо $\phi : \mathbb{Q}[s,c] \longrightarrow \mathbb{Q}[s,c]$ са $\phi(p) = p \pmod{c^2 - s^2 - 1}$, при чему $s^2$ мењамо са $c^2 - 1$.

**Лема 129.** *Нека је $p \in \mathbb{Q}[s,c]$. Тада је $\phi(p)$ јединствен елемент у $\mathbb{Q}[s,c]$, облика $A(c)s + B(c)$, еквивалентан са $p$.*

**Дефиниција 130.** За $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle$ дефинишимо ХТ-степен од $p$, у ознаци $\mathrm{HTD}(p)$, као $\mathrm{HTD}(p) = \deg_{s,c}(\phi(p))$, где је $\deg_{s,c}$ степен полинома $\phi(p(s,c))$.

На пример, полином $p = c^2 - s^2$ је степена 2, ако га посматрамо као обичан полином у $\mathbb{Q}[s,c]$. Међутим, ако га посматрамо као ХТ-полином, његов ХТ-степен је 0, јер је $\phi(p) = 1$.

**Дефиниција 131.** Дефинишимо

$$\psi_t : \mathbb{Q}[s,c] \longrightarrow \mathbb{Q}(t) \ \text{ са } \ \psi_t(p(s,c)) = p(\tfrac{2t}{1-t^2}, \tfrac{1+t^2}{1-t^2}).$$

Као што знамо, $\psi_t : \mathbb{Q}[s,c] \longrightarrow \mathbb{Q}(t)$ је хомоморфизам прстена чије је језгро главни идеал генерисан полиномом $c^2 - s^2 - 1$. Према првој теореми о изоморфизму прстена, имамо да је $\mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle \cong \mathbb{Q}(t)$.

**Лема 132.** *Нека је $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle$ тако да је $HTD(p) = d$. Тада је $\psi_t(p) = \frac{a(t)}{(1-t^2)^d}$, где $a(t) \in \mathbb{Q}[t]$, тако да је $\deg_t(a) \leq 2d$ и $1 - t^2 \nmid a(t)$.*

Да бисмо искористили горенаведени изоморфизам прстена, потребно је и вратити горепоменуту $t$-смену, тј. изразити $t$ преко $s$ и $c$, и тиме претворити рационалну функцију по $t$ у ХТ-полином. То постижемо сменом

$t = \frac{c-1}{s}$. Овом сменом добијамо количник два ХТ-полинома, а да бисмо добили ХТ-полином треба извршити њихово дељење, што је посебан задатак. Тај поступак описан је у теореми која следи.

Важе следеће помоћне леме.

**Лема 133.** *Нека је* $a(t) = -\sum_{i=0}^{2n} v_i t^i$ *тако да је* $v_{2n} = -\sum_{i=1}^{n} v_{2(n-i)}$ *и* $v_{2n-1} = -\sum_{i=1}^{n-1} v_{2(n-i)-1}$. *Тада* $(1-t^2) \mid a(t)$.

**Лема 134.** *Нека је* $n \in \mathbb{N}$. *За сваки полином* $a(t)$ *за који* $1 - t^2 \nmid a(t)$ *и* $\deg_t(a) \leq 2n$, *важи*

$$res_t(a(t) - X(1-t^2)^n, st + (1-c)) = p(s,c)X + q(s,c),$$

*где* $p(s,c)$, $q(s,c) \in \mathbb{Q}[s,c]$. *Штавише,* $\phi(p) = -2^n(c-1)^n$, $\phi(p) \,|\, \phi(q)$ *у* $\mathbb{Q}[s,c]$ *и* $HTD(q(s,c)) = 2n$.

Коначно, важи следећа теорема.

**Теорема 135.** *Нека је* $n \in \mathbb{N}$ *и нека је* $a(t)$ *полином за који важи* $1-t^2 \nmid a(t)$ *и* $\deg_t(a) \leq 2n$. *Тада постоји јединствен ХТ-полином* $\hat{a}$, *ХТ-степена* $n$, *тако да је* $\psi_t(\hat{a}) = \frac{a(t)}{(1-t^2)^n}$.

Наредна теорема показује нам када један ХТ-полином дели други у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle$. Означимо са NU бројилац у разломку, нпр. $\mathrm{NU}(\frac{a(t)}{(1-t^2)^n}) = a(t)$.

**Теорема 136.** *За* $a$, $b \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle$ *важи:*

$$\begin{aligned}
a \mid b \iff\ & (i) && HTD(a) \leq HTD(b)\\
& (ii) && NU(\psi_t(a)) \mid NU(\psi_t(b)) \ \text{у}\ \mathbb{Q}[t]\\
& (iii) && \deg(NU(\psi_t(b))) - \deg(NU(\psi_t(a))) \leq 2(HTD(b) - HTD(a)).
\end{aligned}$$

**Последица 137.** *Нека је* $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle$ *тако да је* $HTD(p) \geq 1$. *Ако је* $\deg(NU(\psi_t(p))) \leq 2HTD(p) - 2$, *тада* $(c+1) \mid p$.

У наставку се бавимо нерастављивим елементима у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle$. Знамо да су инвертибилни елементи у $\mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle$ рационални бројеви различити од нуле, затим степени елемената $z$ и $z^{-1}$, као и умношци ненултих рационалних константи и степена елемената $z$ и $z^{-1}$, где је $z = \cosh x + \sinh x$ и $z^{-1} = \cosh x - \sinh x$.

У поглављу 1.1 наведена је дефиниција нерастављивог елемента (дефиниција 4). Дакле, важи:

**Дефиниција 138.** Ненулти елемент $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle$ је нерастављив ако:
а) $p$ није инвертибилан елемент,
б) ако је $p = ab$, следи да је $a$ или $b$ инвертибилан елемент.

**Теорема 139.** *Нека $p \in \mathbb{Q}[s,c]/\langle c^2 - s^2 - 1\rangle$ и нека је $p$ неинвертибилан елемент. Тада важи:*
*(а) ако је $HTD(p) = 1$, тада је $p$ нерастављив ХТ-полином,*
*(б) ако је $HTD(p) > 1$, тада је $p$ нерастављив ХТ-полином акко*
  *(i) $\deg_t(NU(\psi_t(p))) \geq 2HTD(p) - 1$,*
  *(ii) $NU(\psi_t(p))$ је нерастављив полином у $\mathbb{Q}[t]$ или је $NU(\psi_t(p))$ производ два нерастављива полинома у $\mathbb{Q}[t]$, при чему су оба непарног степена.*

Наведимо сада и неки пример растављања ХТ-полинома на просте факторе.

**Пример 140.** Нека је $p = sc$. Најпре тражимо слику ХТ-полинома $p$ при пресликавању $\psi_t(p)$:

$$\psi_t(p) = \psi_t(sc) = 2 \cdot \frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2}.$$

Сваки фактор слике ХТ-полинома $p$ при пресликавању $\psi_t$ мора имати именилац $1 - t^2$ на неки степен. Према томе, ХТ-полином $p$ може имати највише два фактора, с обзиром да је степен полинома $1 - t^2$ у имениоцу рационалне функције $\psi_t(p)$ једнак 2. Примењујући теорему 139, видимо да је једина могућа факторизација од $\psi_t(p)$:

$$2 \cdot \frac{t}{1-t^2} \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Дакле, једина факторизација ХТ-полинома $p$ је $sc$.

**Пример 141.** Нека је $p = (1+c)s + 1 - c^2$. Поново тражимо слику ХТ-полинома $p$ при пресликавању $\psi_t(p)$:

$$\psi_t(p) = -4 \cdot \frac{t(t-1)}{(1-t^2)^2}.$$

Сваки фактор слике ХТ-полинома $p$ при пресликавању $\psi_t$ мора имати именилац $1 - t^2$ на неки степен. Као у претходном примеру, ХТ-полином $p$ може имати највише два фактора. Могуће факторизације од $\psi_t(p)$ су:

$$-4 \cdot \frac{t}{1-t^2} \cdot \frac{t-1}{1-t^2} \quad \text{и} \quad -4 \cdot \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{t(t-1)}{1-t^2}.$$

Јасно је да обе факторизације од $\psi_t(p)$ дају једну исту факторизацију ХТ-полинома $p$ и то $(1+c)(s-c+1)$.

Као што је већ речено, $\mathbb{Q}[\cosh x, \sinh x]$ је домен са једнозначном факторизацијом. Дакле, сваки елемент домена $\mathbb{Q}[\cosh x, \sinh x]$ има јединствену факторизацију, до на инвертибилне елементе и до на редослед атома у факторизацији, што је потврђено и овим примерима. Сходно томе, може се закључити да је НЗД два ХТ-полинома јединствен, до на множење инвертибилним елементима, и може се добити коришћењем $t$-смене као у претходна два примера. Према томе, упрошћавање количника два ХТ-полинома постиже се скраћивањем бројиоца и имениоца њиховим НЗД-ом.

**Пример 142.** Нека је $a = s(1+c)$ и $b = -c^2 + cs + s + 1$. У претходном примеру видели смо да се ХТ-полином $b$ факторише као $b = (c+1)(s-c+1)$. Дакле, $\mathrm{NZD}(a, b) = c + 1$.

На крају овог дела напоменимо да се у доказима теорема 136 и 139 користи формула да је степен производа два ХТ-полинома једнак збиру степена његових чинилаца. Због тога је на почетку овог поглавља речено да ће се наведене теореме односити на оне парове ХТ-полинома за које је овај услов испуњен. Јасно је да овакви парови ХТ-полинома чине неупоредиво већи део скупа свих ХТ-полинома од оног дела скупа који садржи парове ХТ-полинома за које поменута формула не важи.

С тим у вези, интересантно би било позабавити се и овом другом класом ХТ-полинома, која заправо представља специјалан случај и самим тим чини знатно мањи скуп од гореописаног скупа ХТ-полинома. Дакле, наставак истраживања на ову тему могао би ићи у правцу проналажења поступака за факторисање, дељење, одређивање НЗД-а и упрошћавање количника два ХТ-полинома, за које не важи формула која се односи на степен производа два ХТ-полинома. Овим би био обухваћен читав скуп ХТ-полинома са рационалним коефицијентима.

## ГЛАВА 4

# МЕТОД ДОКАЗИВАЊА КЛАСЕ НЕЈЕДНАКОСТИ КОЈА ОБУХВАТА МЕШОВИТЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ПОЛИНОМСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Предмет истраживања ове главе је метод доказивања неједнакости облика

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x > 0, \tag{4.0.1}$$

за $x \in (\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 \le 0 \le \delta_2$; где је $\alpha_i \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$ и $n \in \mathbb{N}$.

Неједнакости овог типа су у великој мери заступљене у литератури. Значајан број њих доказан је на различите начине, док су неке остале недоказане, и дате су као отворени проблеми. Отуда је настала идеја да се поступак доказивања оваквих неједнакости, у извесној мери, аутоматизује.

На основу разматрања из друге главе ове дисертације, може се закључити да елементи $f(x)$ из (4.0.1) припадају раширењу прстена реалних тригонометријских полинома $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$. Ово раширење означимо са $\mathbb{R}[x, \cos x, \sin x]$. Није тешко закључити, на основу анализа из друге главе, да је и $\mathbb{R}[x, \cos x, \sin x]$ прстен, штавише домен. Елементе овог домена назовимо *мешовитим тригонометријским полиномима* над пољем $\mathbb{R}$.

Неке закључке о овом домену можемо извести на основу резултата из главе 2. У овом раду нећемо се бавити дубљим проучавањем овог домена, мада би то могла бити занимљива тема неког каснијег истраживања.

Дакле, у овој глави биће приказан метод доказивања тригонометријских неједнакости облика (4.0.1), према раду [55]. Функција $f(x)$ је мешовита тригонометријска полиномска функција. По ауторовом сазнању, мешовите тригонометријске полиномске функције први пут су разматране у раду [25]. Ове функције јављају се у теорији аналитичких неједнакости [1, 2, 5, 8, 11, 21, 22, 46, 47, 50, 53, 76, 85, 97], [15]-[17], [38]-[42], [60]-[63], [66]-[68], [89]-[91], [99]-[102], [107]-[110].

У раду [61] приказан је природан приступ доказивању неких конкретних примера неједнакости облика (4.0.1). Овај метод базира се на директном поређењу функција синус и косинус са одговарајућим Маклореновим[18] полиномима. Међутим, поменут метод није применљив на функцију $\cos^2 x$ на целом интервалу $[0, \frac{\pi}{2}]$, као и на функцију $\sin^2 x$ на целом интервалу $[0, \pi]$. Према томе, нећемо поредити терм $\cos^{q_i} x \cdot \sin^{r_i} x$ са производом одговарајућих Маклоренових апроксимација функција косинус и синус степенованих редом на $q_i$ и $r_i$. Једна од могућности је трансформација терма $\cos^{q_i} x \cdot \sin^{r_i} x$ у суму синуса и косинуса вишеструких углова. У наставку овог дела биће описан метод доказивања неједнакости облика (4.0.1) трансформисањем функције $f(x)$ у еквивалентан облик, који садржи синусе и косинусе вишеструких углова.

## 4.1 Помоћна тврђења и припрема за опис метода

Нека је функција $\varphi(x)$ апроксимирана Тејлоровим[19] полиномом $T_k(x)$, степена $k$, у околини тачке $a$. Ако постоји $\eta > 0$, тако да за $x \in (a-\eta, a+\eta)$ важи

$$T_k(x) \geq \varphi(x),$$

тада уводимо ознаку $\overline{T}_k^{\varphi,a}(x) = T_k(x)$, и $\overline{T}_k^{\varphi,a}(x)$ називамо *горњом апроксимацијом* функције $\varphi(x)$ у околини тачке $a$. Аналогно, ако постоји $\eta > 0$,

[18]Colin Maclaurin (1698-1746), шкотски математичар
[19]Brook Taylor (1685-1731), енглески математичар

тако да за $x \in (a-\eta, a+\eta)$ важи

$$T_k(x) \leq \varphi(x),$$

тада уводимо ознаку $\underline{T}_k^{\varphi,a}(x) = T_k(x)$, и $\underline{T}_k^{\varphi,a}(x)$ називамо *доњом апроксимацијом* функције $\varphi(x)$ у околини тачке $a$. Надаље, посматрамо функцију $\varphi(x)$ као функцију из скупа $\{\sin x, \cos x\}$.

Посматрајући Маклоренове апроксимације функција синус и косинус, може се уочити да је $\overline{T}_1^{\sin,0}(x)$ изнад, а $\underline{T}_3^{\sin,0}(x)$ испод графика функције $\sin x$ за $x>0$, и $\underline{T}_1^{\sin,0}(x)$ је испод, а $\overline{T}_3^{\sin,0}(x)$ је изнад графика функције $\sin x$ за $x<0$, као и да је $\overline{T}_0^{\cos,0}(x)$ изнад, а $\underline{T}_2^{\cos,0}(x)$ испод графика функције $\cos x$. Наведене чињенице прецизиране су и уопштене следећим лемама.

**Лема 143.** (*i*) *За полином* $T_n(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}$, *где је* $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, *важи:*

$$\Big(\forall t \in \big[0, \sqrt{(n+3)(n+4)}\big]\Big) \quad \overline{T}_n(t) \geq \overline{T}_{n+4}(t) \geq \sin t, \tag{4.1.1}$$

$$\Big(\forall t \in \big[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0\big]\Big) \quad \underline{T}_n(t) \leq \underline{T}_{n+4}(t) \leq \sin t. \tag{4.1.2}$$

*За* $t=0$ *неједнакости у* (4.1.1) *и* (4.1.2) *прелазе у једнакости.*
*За* $t=\pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ *важе редом једнакости* $\overline{T}_n(t)=\overline{T}_{n+4}(t)$ *и* $\underline{T}_n(t)=\underline{T}_{n+4}(t)$.

(*ii*) *За полином* $T_n(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}$, *где је* $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}_0$, *важи:*

$$\Big(\forall t \in \big[0, \sqrt{(n+3)(n+4)}\big]\Big) \quad \underline{T}_n(t) \leq \underline{T}_{n+4}(t) \leq \sin t, \tag{4.1.3}$$

$$\Big(\forall t \in \big[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0\big]\Big) \quad \overline{T}_n(t) \geq \overline{T}_{n+4}(t) \geq \sin t. \tag{4.1.4}$$

*За* $t=0$ *неједнакости у* (4.1.3) *и* (4.1.4) *прелазе у једнакости.*
*За* $t=\pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ *важе редом једнакости* $\underline{T}_n(t)=\underline{T}_{n+4}(t)$ *и* $\overline{T}_n(t)=\overline{T}_{n+4}(t)$.

*Доказ:* (i) Нека је $0 < t \leq \sqrt{(n+3)(n+4)}$, тада важи:

$$\overline{T}_n(t) = \sum_{i=0}^{2k} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} > \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sin t$$

$$\iff \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{4(k+j)-1}}{\big(4(k+j)-1\big)!} \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{\big(4(k+j)\big)\big(4(k+j)+1\big)}\right)}_{(\geq 0)} > 0.$$

Даље,

$$\overline{T}_{n+4}(t) = \overline{T}_n(t) - \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{(n+3)(n+4)}\right)}_{(\geq 0)} \leq \overline{T}_n(t)$$

и

$$\overline{T}_{n+4}(t) = \sum_{i=0}^{2k+2} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} > \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sin t$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{4(k+j)+3}}{\big(4(k+j)+3\big)!}\underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{\big(4(k+j)+4\big)\big(4(k+j)+5\big)}\right)}_{(>0)} > 0.$$

Лако се проверава да одговарајуће једнакости у крајњим тачкама сегмента $\big[0, \sqrt{(n+3)(n+4)}\,\big]$ важе. Коначно, доказали смо (4.1.1).

За $t \in \big[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0\big)$ (4.1.2) важи на основу чињенице да је функција $\sin x$ непарна. Коначно, доказали смо (4.1.2).

(ii) Нека је $0 < t \leq \sqrt{(n+3)(n+4)}$, тада важи:

$$\underline{T}_n(t) = \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sin t$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} -\frac{t^{4(k+j)+1}}{\big(4(k+j)+1\big)!}\underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{\big(4(k+j)+2\big)\big(4(k+j)+3\big)}\right)}_{(\geq 0)} < 0.$$

Даље,

$$\underline{T}_{n+4}(t) = \underline{T}_n(t) + \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{(n+3)(n+4)}\right)}_{(\geq 0)} \geq \underline{T}_n(t)$$

и

$$\underline{T}_{n+4}(t) = \sum_{i=0}^{2k+3} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sin t$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-t^{4(k+j)+5}}{\big(4(k+j)+5\big)!}\underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{\big(4(k+j)+6\big)\big(4(k+j)+7\big)}\right)}_{(>0)} < 0.$$

Лако се проверава да одговарајуће једнакости у крајњим тачкама сегмента $\big[0, \sqrt{(n+3)(n+4)}\,\big]$ важе. Коначно, доказали смо (4.1.3).

За $t \in \left[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0\right)$ (4.1.4) важи на основу чињенице да је функција $\sin x$ непарна. Коначно, доказали смо (4.1.4). $\square$

**Лема 144.** *(i) За полином* $T_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}$, *где је* $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}_0$, *важи:*

$$\left(\forall t \in \left[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, \sqrt{(n+3)(n+4)}\,\right]\right)\ \overline{T}_n(t) \geq \overline{T}_{n+4}(t) \geq \cos t. \tag{4.1.5}$$

*За* $t = 0$ *неједнакости у* (4.1.5) *прелазе у једнакости. За* $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ *важи једнакост* $\overline{T}_n(t) = \overline{T}_{n+4}(t)$.

*(ii) За полином* $T_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}$, *где је* $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}_0$, *важи:*

$$\left(\forall t \in \left[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, \sqrt{(n+3)(n+4)}\,\right]\right)\ \underline{T}_n(t) \leq \underline{T}_{n+4}(t) \leq \cos t. \tag{4.1.6}$$

*За* $t = 0$ *неједнакости у* (4.1.6) *прелазе у једнакости. За* $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ *важи једнакост* $\underline{T}_n(t) = \underline{T}_{n+4}(t)$.

*Доказ:* (i) Нека је $0 < t \leq \sqrt{(n+3)(n+4)}$, тада важи:

$$\begin{aligned}
&\overline{T}_n(t) = \sum_{i=0}^{2k} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} > \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} = \cos t \\
&\iff \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{4(k+j)-2}}{\big(4(k+j)-2\big)!} \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{\big(4(k+j)-1\big)\big(4(k+j)\big)}\right)}_{(\geq 0)} > 0.
\end{aligned}$$

Даље,

$$\overline{T}_{n+4}(t) = \overline{T}_n(t) - \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{(n+3)(n+4)}\right)}_{(\geq 0)} \leq \overline{T}_n(t)$$

и

$$\begin{aligned}
&\overline{T}_{n+4}(t) = \sum_{i=0}^{2k+2} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} > \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} = \cos t \\
&\iff \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{4(k+j)+2}}{\big(4(k+j)+2\big)!} \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{\big(4(k+j)+3\big)\big(4(k+j)+4\big)}\right)}_{(>0)} > 0.
\end{aligned}$$

Лако се проверава да одговарајуће једнакости у крајњим тачкама сегмента $\left[0, \sqrt{(n+3)(n+4)}\,\right]$ важе. Према томе, за $t \in \left[0, \sqrt{(n+3)(n+4)}\,\right]$ неједнакости у (4.1.5) су доказане. За $t \in \left[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0\right)$ неједнакости у (4.1.5) важе на основу чињенице да је функција $\cos x$ парна. Коначно, доказали смо (4.1.5).

(ii) Нека је $0 < t \leq \sqrt{(n+3)(n+4)}$, тада важи:

$$\begin{aligned}
&\underline{T}_n(t) = \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} = \cos t \\
&\iff \sum_{j=1}^{\infty} -\frac{t^{4(k+j)}}{\big(4(k+j)\big)!} \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{\big(4(k+j)+1\big)\big(4(k+j)+2\big)}\right)}_{(\geq 0)} < 0.
\end{aligned}$$

Даље,

$$\underline{T}_{n+4}(t) = \underline{T}_n(t) + \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{(n+3)(n+4)}\right)}_{(\geq 0)} \geq \underline{T}_n(t)$$

и

$$\begin{aligned}
&\underline{T}_{n+4}(t) = \sum_{i=0}^{2k+3} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} = \cos t \\
&\iff \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-t^{4(k+j)+4}}{\big(4(k+j)+4\big)!} \underbrace{\left(1 - \frac{t^2}{\big(4(k+j)+5\big)\big(4(k+j)+6\big)}\right)}_{(>0)} < 0.
\end{aligned}$$

Лако се проверава да одговарајуће једнакости у крајњим тачкама сегмента $\left[0, \sqrt{(n+3)(n+4)}\,\right]$ важе. Према томе, за $t \in \left[0, \sqrt{(n+3)(n+4)}\,\right]$ неједнакости у (4.1.6) су доказане. За $t \in \left[-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0\right)$ неједнакости у (4.1.6) важе на основу чињенице да је функција $\cos x$ парна. Коначно, доказали смо (4.1.6). $\square$

У наставку рада, са $\mathfrak{i}$ ћемо означавати имагинарну јединицу.

Посматрајмо сада комплексан број $z = e^{\mathfrak{i}x}$, $x \in \mathbb{R}$. Тада важи:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{2\mathfrak{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Уведимо следеће функције:

$$R_k(z) = z^k + \frac{1}{z^k} \quad \text{и} \quad Q_k(z) = z^k - \frac{1}{z^k},$$

за $k = 1, 2, \ldots$ . Тада је:

$$R_k(z) = 2\cos(kx) \quad \text{и} \quad Q_k(z) = 2\mathrm{i}\sin(kx),$$

за $z = e^{\mathrm{i}x}$ и $k = 1, 2, \ldots$ . Стога, може се закључити да важи:

$$R_n(z) \cdot R_m(z) = R_{n+m}(z) + R_{|n-m|}(z)$$

и

$$R_n(z) \cdot Q_m(z) = Q_{n+m}(z) + \nu \cdot Q_{|n-m|}(z),$$

где је $\nu = \mathrm{sgn}\big(m - n\big)$. Специјално, $R_0(z) = 2$ и $Q_0(z) = 0$.

У наредној помоћној леми показано је да се $\sin^n x$ може приказати као сума синуса или косинуса вишеструких углова, у зависности од парности степена $n$.

**Лема 145.** *За $n \in \mathbb{N}$ следеће формуле су тачне:*
*$(i)$ ако је $n$ непаран број, тада је*

$$\sin^n x = \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}+k} \binom{n}{k} \sin\big((n-2k)x\big),$$

*$(ii)$ ако је $n$ паран број, тада је*

$$\sin^n x = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^{\frac{n}{2}+k} \binom{n}{k} \cos\big((n-2k)x\big).$$

*Доказ:* Видети [29, глава IX, вежбе 17, 18] и метод доказивања описан у [52]. $\square$

Аналогно претходној леми, за функцију $\cos^n x$ важи:

**Лема 146.** *За $n \in \mathbb{N}$ следеће формуле су тачне:*
*$(i)$ ако је $n$ непаран број, тада је*

$$\cos^n x = \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos\big((n-2k)x\big),$$

*$(ii)$ ако је $n$ паран број, тада је*

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \cos\big((n-2k)x\big).$$

*Доказ:* Видети [29, глава IX, вежбе 15, 16] и метод доказивања описан у [52]. □

Користећи претходне две леме може се доказати следећа теорема.

**Теорема 147.** *За $n, m \in \mathbb{N}$ разликујемо следеће случајеве:*
*(i) ако су $n$ и $m$ непарни бројеви*

$$\cos^n x \cdot \sin^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}+k} \left( \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \sin\big((n+m-2k)x\big) \right), \tag{4.1.7}$$

*(ii) ако је $n$ паран, а $m$ непаран број*

$$\cos^n x \cdot \sin^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+k} \left( \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \sin\big((n+m-2k)x\big) \right), \tag{4.1.8}$$

*(iii) ако је $n$ непаран, а $m$ паран број*

$$\cos^n x \cdot \sin^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m-1}{2}} (-1)^{\frac{m}{2}+k} \left( \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \cos\big((n+m-2k)x\big) \right), \tag{4.1.9}$$

*(iv) ако су $n$ и $m$ парни бројеви*

$$\begin{aligned} \cos^n x \cdot \sin^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \Bigg( & \sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+k} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \cos\big((n+m-2k)x\big) \\ & + \frac{1}{2} (-1)^{\frac{2m+n}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{n+m}{2}} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{\frac{n+m}{2}-r} \Bigg). \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

*Доказ:* (i) Нека су $n$ и $m$ непарни бројеви, тада је:

$$\begin{aligned} & \cos^n x \cdot \sin^m x = \\ & = \left( \frac{2}{2^n} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i} \cos\big((n-2i)x\big) \right) \cdot \left( \frac{2}{2^m} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{m}{j} \sin\big((m-2j)x\big) \right) \\ & = \frac{1}{2^{n+m}\mathfrak{i}} \left( \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i} R_{n-2i}(z) \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{m}{j} Q_{m-2j}(z) \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+m}\mathrm{i}} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{n}{i} \binom{m}{j} R_{n-2i}(z) \cdot Q_{m-2j}(z) \\
&= \frac{1}{2^{n+m}\mathrm{i}} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{n}{i} \binom{m}{j} \Big( Q_{n+m-2(i+j)}(z) + \nu Q_{|n-m-2(i-j)|} \Big) \\
&= \frac{1}{2^{n+m}\mathrm{i}} \left( \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{n}{i} \binom{m}{j} Q_{n+m-2(i+j)}(z) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{n}{i} \binom{m}{j} \nu Q_{|n-m-2(i-j)|}(z) \right),
\end{aligned}
$$

где је $\nu = \operatorname{sgn}\big(m - n - 2(j-i)\big)$.

Посматрајмо сада биномне коефицијенте уз $Q_{|n-m-2(i-j)|}(z)$. Производи биномних коефицијената се могу записати у следећем облику:

$$
\binom{n}{i}\binom{m}{j} = \binom{n}{n-i}\binom{m}{j} = \binom{n}{i}\binom{m}{m-j} = \binom{n}{n-i}\binom{m}{m-j}. \tag{4.1.11}
$$

Приметимо да су суме доњих бројева у производима биномних коефицијената у (4.1.11) редом једнаке $i+j$, $n-i+j$, $i+m-j$ и $n-i+m-j$. Означимо индекс $|n-m-2(i-j)|$ са $d$. Наш циљ је да одредимо $k$ тако да је $n+m-2k = d$. Тада разликујемо две могућности:

1) када је $n-m-2(i-j) > 0$, имамо да је

$$
n+m-2k = n-m-2(i-j) \Longrightarrow k = m+i-j, \tag{4.1.12}
$$

2) када је $n-m-2(i-j) < 0$, имамо да је

$$
n+m-2k = -n+m-2(j-i) \Longrightarrow k = n-i+j. \tag{4.1.13}
$$

Стога, при рачунању $\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{n}{i}\binom{m}{j} \nu Q_{|n-m-2(i-j)|}(z)$, према импликацији (4.1.12) бирамо производ биномних коефицијената $\binom{n}{i}\binom{m}{m-j}$, док према импликацији (4.1.13) бирамо $\binom{n}{n-i}\binom{m}{j}$, тј. бирамо онај производ биномних коефицијената чија је сума доњих бројева једнака $k$.

Коначно, добијамо тражени резултат:

$$
\begin{aligned}
\cos^n x \cdot \sin^m x &= \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}+k} \left( \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} Q_{n+m-2k}(z) \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}+k} \left( \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \sin\big((n+m-2k)x\big) \right).
\end{aligned}
$$

(ii) Нека је $n$ паран, а $m$ непаран број, тада је:

$$
\begin{aligned}
&\cos^n x \cdot \sin^m x = \\
&= \left( \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{i} \cos\big((n-2i)x\big) \right) \\
&\quad \times \left( \frac{2}{2^m} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{m}{j} \sin\big((m-2j)x\big) \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+m-1}} \left( \binom{n}{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{m}{j} Q_{m-2j}(z) \right. \\
&\qquad \left. + \left( \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{i} R_{n-2i}(z) \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{m}{j} Q_{m-2j}(z) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+m-1}} \left( \binom{n}{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{m}{j} Q_{m-2j}(z) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{n}{i} \binom{m}{j} R_{n-2i}(z) \cdot Q_{m-2j}(z) \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+m-1}} \left( \binom{n}{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{m}{j} Q_{m-2j}(z) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}+j} \binom{n}{i} \binom{m}{j} \Big( Q_{n+m-2(i+j)}(z) + \nu Q_{|n-m-2(i-j)|}(z) \Big) \right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2^{n+m}i}\left(\binom{n}{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}+j}\binom{m}{j}Q_{m-2j}(z)\right.$$
$$+\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}+j}\binom{n}{i}\binom{m}{j}Q_{n+m-2(i+j)}(z)$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}+j}\binom{n}{i}\binom{m}{j}\nu Q_{|n-m-2(i-j)|}(z)\right),$$

где је $\nu = \operatorname{sgn}\big(m-n-2(j-i)\big)$. Посматрајући производ биномних коефицијената уз $Q_{|n-m-2(i-j)|}(z)$, аналогно једнакостима (4.1.11) и поступку са импликацијама (4.1.12) и (4.1.13), можемо закључити да важи:

$$\cos^n x\cdot\sin^m x = \frac{1}{2^{n+m}i}\sum_{k=0}^{\frac{n+m-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}+k}\left(\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}Q_{n+m-2k}(z)\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n+m-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n+m-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}+k}\left(\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}\sin\big((n+m-2k)x\big)\right).$$

(iii) Ако заменимо $x$ са $\frac{\pi}{2}-x$ у формули (4.1.8), добијамо формулу (4.1.9).
(iv) Ако су $n$ и $m$ парни бројеви, тада је:

$$\cos^n x\cdot\sin^m x =$$
$$=\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}}+\frac{2}{2^n}\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{i}\cos\big((n-2i)x\big)\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{2^m}\binom{m}{\frac{m}{2}}+\frac{2}{2^m}\sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1}(-1)^{\frac{m}{2}+j}\binom{m}{j}\cos\big((m-2j)x\big)\right)$$
$$=\frac{1}{2^{n+m}}\left(\binom{n}{\frac{n}{2}}\binom{m}{\frac{m}{2}}+\binom{n}{\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1}(-1)^{\frac{m}{2}+j}\binom{m}{j}R_{m-2j}(z)\right.$$
$$+\binom{m}{\frac{m}{2}}\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{i}R_{n-2i}(z)$$
$$\left.+\Big(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{i}R_{n-2i}(z)\Big)\cdot\Big(\sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1}(-1)^{\frac{m}{2}+j}\binom{m}{j}R_{m-2j}(z)\Big)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{n+m}} \Bigg( \binom{n}{\frac{n}{2}}\binom{m}{\frac{m}{2}} + \binom{n}{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+j} \binom{m}{j} R_{m-2j}(z) + \binom{m}{\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{i} R_{n-2i}(z) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+j} \binom{n}{i}\binom{m}{j} R_{n-2i}(z) \cdot R_{m-2j}(z) \Bigg) \\
&= \frac{1}{2^{n+m}} \Bigg( \binom{n}{\frac{n}{2}}\binom{m}{\frac{m}{2}} + \binom{n}{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+j} \binom{m}{j} R_{m-2j}(z) + \binom{m}{\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{i} R_{n-2i}(z) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+j} \binom{n}{i}\binom{m}{j} \Big( R_{n+m-2(i+j)}(z) + R_{|n-m-2(i-j)|}(z) \Big) \Bigg) \\
&= \frac{1}{2^{n+m}} \Bigg( \binom{n}{\frac{n}{2}}\binom{m}{\frac{m}{2}} + \binom{n}{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+j} \binom{m}{j} R_{m-2j}(z) + \binom{m}{\frac{m}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{i} R_{n-2i}(z) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+j} \binom{n}{i}\binom{m}{j} R_{n+m-2(i+j)}(z) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+j} \binom{n}{i}\binom{m}{j} R_{|n-m-2(i-j)|}(z) \Bigg).
\end{aligned}
$$

Посматрајући производе биномних коефицијената уз $R_{|n-m-2(i-j)|}(z)$, аналогно једнакостима (4.1.11) и поступку са импликацијама (4.1.12) и (4.1.13), можемо закључити да важи:

$$
\begin{aligned}
\cos^n x \cdot \sin^m x &= \frac{1}{2^{n+m}} \Bigg( \sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+k} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} R_{n+m-2k}(z) \\
&\quad + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{2m+n}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{n+m}{2}} (-1)^r \binom{n}{r}\binom{m}{\frac{n+m}{2}-r} R_0 \Bigg) \\
&= \frac{1}{2^{n+m-1}} \Bigg( \sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}+k} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} \cos\big((n+m-2k)x\big) \\
&\quad + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{2m+n}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{n+m}{2}} (-1)^r \binom{n}{r}\binom{m}{\frac{n+m}{2}-r} \Bigg),
\end{aligned}
$$

уз напомену да је производ $\binom{n}{i}\binom{m}{j} \cdot R_0$ $(R_0 = 2)$ записан као сума два производа биномних коефицијената једнаких $\binom{n}{i}\binom{m}{j}$, аналогно (4.1.11), чија је сума доњих бројева једнака $\frac{n+m}{2}$. $\square$

## 4.2 Опис метода

**I** Циљ је формирати метод доказивања неједнакости типа (4.0.1), за $x \in (0,\delta)$ и $\delta = \delta_2 > 0$. При томе, биће коришћене горње и доње Маклоренове апроксимације функција синус и косинус, одређене лемама 143 и 144.

Најпре, посматрајмо сабирак суме (4.0.1):

$$s_i(x) = \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x,$$

где је $\alpha_i \neq 0$ за $i = 1, \ldots, n$.

Уведимо затим ознаку

$$\mathfrak{m}_i = \begin{cases} \frac{q_i+r_i}{2} - 1, & \text{када су оба броја } q_i \text{ и } r_i \text{ парна или оба непарна,} \\ \frac{q_i+r_i-1}{2}, & \text{када су бројеви } q_i \text{ и } r_i \text{ различите парности.} \end{cases}$$

Према теореми 147 сабирци $s_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ се могу приказати на четири различита начина, у зависности од случаја, па су у опису метода дате следеће могућности:

**1.** Нека су $q_i$ и $r_i$ непарни бројеви, или нека је $q_i$ паран, а $r_i$ непаран број. У оба случаја важи:

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x \\ &= \frac{\alpha_i x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{\mathfrak{m}_i} (-1)^{\frac{r_i-1}{2}+k} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \sin\big((q_i+r_i-2k)x\big) \\ &= \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{\mathfrak{m}_i} \left( \sum_{r=0}^{k} \alpha_i (-1)^{\frac{r_i-1}{2}+k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \right) \sin\big((q_i+r_i-2k)x\big). \end{aligned}$$

Уведимо ознаку $\beta_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_i (-1)^{\frac{r_i-1}{2}+k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r}$. Тада су за сваки подсабирак $\beta_k \sin\big((q_i+r_i-2k)x\big)$, у зависности од знака $\beta_k$, могућа два случаја:

1) ако је $\beta_k > 0$:

$$\beta_k \sin\big((q_i + r_i - 2k)x\big) > \beta_k \underline{T}^{\sin,0}_{4l_k^{(i)}+3}\big((q_i + r_i - 2k)x\big),$$

2) ако је $\beta_k < 0$:

$$\beta_k \sin\big((q_i + r_i - 2k)x\big) > \beta_k \overline{T}^{\sin,0}_{4l_k^{(i)}+1}\big((q_i + r_i - 2k)x\big).$$

Запишимо сабирак $s_i(x)$ у облику:

$$s_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \beta_k \sin\big((q_i + r_i - 2k)x\big).$$

Тада важи:

$$s_i(x) > \mathcal{T}_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \beta_k T^{\sin,0}_{4l_k^{(i)}+u}\big((q_i + r_i - 2k)x\big), \tag{4.2.1}$$

где је $u = \begin{cases} 3, & \beta_k > 0, \\ 1, & \beta_k < 0 \end{cases}$, $l_k^{(i)} \in \mathbb{N}_0$ и $T \in \{\overline{T}, \underline{T}\}$.

**2.** Нека је $q_i$ непаран, а $r_i$ паран број, тада важи:

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x \\ &= \frac{\alpha_i x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} (-1)^{\frac{r_i}{2}+k} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \cos\big((q_i + r_i - 2k)x\big) \\ &= \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \left( \sum_{r=0}^{k} \alpha_i (-1)^{\frac{r_i}{2}+k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \right) \cos\big((q_i + r_i - 2k)x\big). \end{aligned}$$

Уведимо ознаку $\gamma_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_i (-1)^{\frac{r_i}{2}+k+r} \binom{q_i}{r}\binom{r_i}{k-r}$. Тада су за сваки подсабирак $\gamma_k \cos\big((q_i + r_i - 2k)x\big)$, у зависности од знака $\gamma_k$, могућа два случаја:

1) ако је $\gamma_k > 0$:

$$\gamma_k \cos\big((q_i + r_i - 2k)x\big) > \gamma_k \underline{T}^{\cos,0}_{4l_k^{(i)}+2}\big((q_i + r_i - 2k)x\big),$$

2) ако је $\gamma_k < 0$:

$$\gamma_k \cos\big((q_i + r_i - 2k)x\big) > \gamma_k \overline{T}^{\cos,0}_{4l_k^{(i)}+0}\big((q_i + r_i - 2k)x\big).$$

Запишимо сабирак $s_i(x)$ у облику:

$$s_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \gamma_k \cos\big((q_i + r_i - 2k)x\big).$$

Тада важи:

$$s_i(x) > \mathcal{T}_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \gamma_k T^{\cos,0}_{4l_k^{(i)}+v}\big((q_i + r_i - 2k)x\big), \tag{4.2.2}$$

где је $v = \begin{cases} 2, & \gamma_k > 0, \\ 0, & \gamma_k < 0 \end{cases}$, $l_k^{(i)} \in \mathbb{N}_0$ и $T \in \{\overline{T}, \underline{T}\}$.

**3.** Нека су $q_i$ и $r_i$ парни бројеви, тада, на основу претходног случаја (под **2.**), важи:

$$\begin{aligned}
s_i(x) = {} & \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \left( \sum_{k=0}^{m_i} \left( \sum_{r=0}^{k} \alpha_i (-1)^{\frac{r_i}{2}+k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \right) \cos\big((q_i+r_i-2k)x\big) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{2r_i+q_i}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{q_i+r_i}{2}} (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{\frac{q_i+r_i}{2}-r} \right) \\
& > \tau_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \left( \sum_{k=0}^{m_i} \gamma_k T^{\cos,0}_{4l_k^{(i)}+v}\big((q_i+r_i-2k)x\big) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{2r_i+q_i}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{q_i+r_i}{2}} (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{\frac{q_i+r_i}{2}-r} \right),
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

где је $v = \begin{cases} 2, & \gamma_k > 0, \\ 0, & \gamma_k < 0 \end{cases}$, $l_k^{(i)} \in \mathbb{N}_0$ и $T \in \{\overline{T}, \underline{T}\}$.

Упоређујући све сабирке $s_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ који се јављају у суми (4.0.1), према управо наведеним случајевима, добијамо полином

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \tau_i(x)$$

(доњу апроксимацију функције $f(x)$ из (4.0.1)); тј. важи:

$$f(x) > P(x).$$

На основу претходних разматрања може се закључити да важи следећа теорема.

**Теорема 148.** *Нека за полином* $P(x) = \sum_{i=1}^{n} \tau_i(x)$ *важе следећа својства:*

(*i*) *постоји најмање један позитиван реалан корен полинома* $P(x)$*;*

(*ii*) $P(x) > 0$ *за* $x \in (0, x^*)$*, где је* $x^*$ *најмањи позитиван реалан корен полинома* $P(x)$*.*

*Тада важи*

$$f(x) > 0$$

*за* $x \in (0, x^*) \subseteq (0, \delta)$*.*

**Напомена 149.** На овај начин добија се доказ неједнакости $f(x) > 0$ за $x \in (0, \delta_2)$, где је $\delta_2 = x^*$. Претходна теорема може се применити на интервалу $(\delta_1, 0)$, увођењем смене $t = -x$.

**Напомена 150.** Уколико не постоји најмање један позитиван реалан корен полинома $P(x)$ и $P(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$, тада важи $f(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$.

Претходном теоремом одређен је метод доказивања класе тригонометријских неједнакости, који је заснован на апроксимацијама функција синус и косинус Маклореновим полиномима.

**II** Размотримо сада комплетност приказаног метода за функцију $f(x)$, где је $f(x)$ мешовит тригонометријски полином. Приметимо да је такав полином један пример реалне аналитичке функције. Иначе, функција $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, где је $I \subset \mathbb{R}$ отворен скуп, је аналитичка ако за свако $x_0 \in I$ постоји околина $J$ тачке $x_0$ и степени ред $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, тако да је $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ за свако $x \in J$.

У наставку размотримо знак реалне неконстантне аналитичке функције на домену $(\delta_1, \delta_2)$.

**Лема 151.** *Нека је $f : (\delta_1, \delta_2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\delta_1 \leq 0 \leq \delta_2$ и $\delta_1 < \delta_2$, реална неконстантна аналитичка функција, над доменом $(\delta_1, \delta_2)$.*

*Ако је $f(0) \neq 0$, тада важи:*

***1.*** $f(0) > 0 \Longleftrightarrow \big(\exists\, x^+ \in (0, \delta_2]\big)\big(\forall\, x \in (0, x^+)\big)\ \ f(x) > 0,$

***2.*** $f(0) < 0 \Longleftrightarrow \big(\exists\, x^+ \in (0, \delta_2]\big)\big(\forall\, x \in (0, x^+)\big)\ \ f(x) < 0.$

*Ако је $f(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0 \ \wedge\ f^{(n)}(0) \neq 0$, за неко $n \in \mathbb{N}$, тада важи:*

***3.*** $f^{(n)}(0) > 0 \Longleftrightarrow \big(\exists\, x^+ \in (0, \delta_2]\big)\big(\forall\, x \in (0, x^+)\big)\ \ f(x) > 0,$

***4.*** $f^{(n)}(0) < 0 \Longleftrightarrow \big(\exists\, x^+ \in (0, \delta_2]\big)\big(\forall\, x \in (0, x^+)\big)\ \ f(x) < 0.$

*Доказ:* Нека је $f(x)$ неконстантна функција са Маклореновим развојем

$$f(h) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + \ldots, \qquad (h > 0). \tag{4.2.4}$$

У доказу користимо метод из [33, стр. 157 и 158], којим је показано да су нуле неконстантне аналитичке функције изоловане.

**1. (⇒)** Нека је $f(0) > 0$. Запишимо (4.2.4) у облику

$$f(h) = f(0)\big(1 + g(h)\big),$$

где је $g(h)$ реална аналитичка функција. Тада постоје $x^+>0$ и константа $M>0$, тако да је $|g(h)|<Mh$ и $Mh<1/2$, за свако $h\in(0,x^+)$. Стога, можемо закључити да је $f(h)=f(0)+f(0)\,g(h)>f(0)-f(0)Mh>f(0)/2>0$ за $h\in(0,x^+)$. **(⇐)** Претпоставимо да постоји $x^+\in(0,\delta_2]$, тако да за свако $x\in(0,x^+)$ важи $f(x)>0$. Отуда следи да је $f(x)$ позитивна функција у произвољно малој десној околини тачке $x=0$. Нека је $g(x)$ функција за коју важи претходан део доказа. Тада постоје $M>0$ и $x_1\in(0,x^+]$, тако да за свако $x\in(0,x_1)$ важи $|g(x)|<Mx<1/2$. Ако је $f(0)<0$, тада за $x\in(0,x_1)\subseteq(0,x^+)$ имамо контрадикцију $f(x)=f(0)\big(1+g(x)\big)<0$. Према томе, доказано је да је $f(0)>0$.

**2.** Довољно је посматрати функцију $-f(x)$, уместо функције $f(x)$, и применити **1.**

У случају када је $f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0\ \wedge\ f^{(n)}(0)\neq0$, за неко $n\in\mathbb{N}$, тачка $x=0$ је изолована нула реда $n$.

Запишимо даље (4.2.4) у облику

$$f(h)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}h^{n+1}+\ldots,\qquad(h>0).\tag{4.2.5}$$

**3.** **(⇒)** Нека је $f^{(n)}(0)>0$. Запишимо (4.2.5) у облику

$$f(h)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,h^n\big(1+g(h)\big),$$

где је $g(h)$ реална аналитичка функција. Тада постоје $x^+>0$ и константа $M>0$, тако да је $|g(h)|<Mh$ и $Mh<1/2$, за свако $h\in(0,x^+)$. Стога, можемо закључити да је $f(h)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,h^n+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,h^n g(h)>\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,h^n-\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,h^n Mh>\frac{1}{2}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,h^n>0$, за $h\in(0,x^+)$. **(⇐)** Претпоставимо да постоји $x^+\in(0,\delta_2]$, тако да за свако $x\in(0,x^+)$ важи $f(x)>0$. Отуда следи да је $f(x)$ позитивна функција у произвољно малој десној околини тачке $x=0$. Нека је $g(x)$ функција за коју важи претходан део доказа. Тада постоје $M>0$ и $x_1\in(0,x^+]$, тако да за свако $x\in(0,x_1)$ важи $|g(x)|<Mx<1/2$. Ако је $f^{(n)}(0)<0$, тада за $x\in(0,x_1)\subseteq(0,x^+)$ имамо контрадикцију $f(x)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\big(1+g(x)\big)<0$. Према томе, доказано је да је $f^{(n)}(0)>0$.

**4.** Довољно је посматрати функцију $-f(x)$, уместо функције $f(x)$, и применити **3.** □

На основу претходне леме следи:

**Теорема 152.** *Нека је* $f:(\delta_1,\delta_2)\longrightarrow\mathbb{R}$, $\delta_1\le 0\le\delta_2$, $\delta_1<\delta_2$, *реална неконстантна аналитичка функција, над доменом* $(\delta_1,\delta_2)$. *Тада су тачне следеће еквиваленције:*

$$\begin{gathered}\big(\exists\, x^+\!\in(0,\delta_2]\big)\big(\forall\, x\!\in(0,x^+)\big)\;\; f(x)>0\\ \Longleftrightarrow \\ f(0)>0\;\;\vee\;\;\Big(\big(\exists\, n\!\in\!\mathbb{N}\big)\;\; f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0\;\wedge\; f^{(n)}(0)>0\Big)\end{gathered}\tag{4.2.6}$$

*или*

$$\begin{gathered}\big(\exists\, x^+\!\in(0,\delta_2]\big)\big(\forall\, x\!\in(0,x^+)\big)\;\; f(x)<0\\ \Longleftrightarrow \\ f(0)<0\;\;\vee\;\;\Big(\big(\exists\, n\!\in\!\mathbb{N}\big)\;\; f(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0\;\wedge\; f^{(n)}(0)<0\Big).\end{gathered}\tag{4.2.7}$$

**Напомена 153.** У наставку посматрамо мешовит тригонометријски полином $f(x)$ као реалну аналитичку функцију над $\mathbb{R}$. Тада, питање да ли постоји интервал $(0,x^+)$ на коме је функција $f(x)$ константног знака представља одлучив проблем, на основу еквиваленција (4.2.6) и (4.2.7).

Анализираћемо сада комплетност датог метода за функцију $f(x)$, која је мешовит тригонометријски полином, под претпоставком

$$\big(\exists\, x^+\!\in(0,\delta)\big)\big(\forall x\!\in(0,x^+)\big)\;\; f(x)>0. \tag{4.2.8}$$

Биће показано да за функцију $f(x)$ на сваком подинтервалу $(a,b)\subset(0,x^+)$, где је $0<a<b<x^+$, постоји позитивна доња полиномска апроксимација $P(x)$. Нека сви индекси $l_k^{(i)}$ $\big(i\in\{1,\ldots,n\}$ и $k\in\{0,\ldots,\mathfrak{m}_i\}\big)$ имају исту вредност $l_k^{(i)}=K\in N_0$. Формирајмо полином $P^{[K]}(x)=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{T}_i^{[K]}(x)$ у функцији индекса $K$. Овако формиран полином $P^{[K]}(x)$ индекса $K$ је доња полиномска апроксимација функције $f(x)$, за коју важи

$$\lim_{K\longrightarrow+\infty} P^{[K]}(x)=f(x),$$

при чему је поменута конвергенција равномерна на $[\,0,x^+]$. Ово својство конвергенције следи на основу чињенице да је за свако $i=1,\ldots,n$ конвергенција

$$\lim_{K\longrightarrow+\infty} \mathcal{T}_i^{[K]}(x)=s_i(x),$$

равномерна на $[\,0,x^+]$. Како је $P^{[K]}(x)<f(x)$ и $P^{[K]}(x)\rightrightarrows f(x)$, за $x\in[\,0,x^+]$, добијамо следећу теорему о комплетности анализираног метода.

**Теорема 154.** *Нека за мешовит тригонометријски полином $f(x)$ важи услов* (4.2.8). *Тада на сваком интервалу $(a,b)\subset(0,x^{+})$, за $0<a<b<x^{+}$, постоји доња полиномска апроксимација $P^{[K]}(x)$, индекса $K$, таква да је*

$$\big(\forall x\in(a,b)\big)\ \ f(x) > P^{[K]}(x) > 0.$$

Под претпоставком важења претходне теореме за функцију $f(x)$ из (4.0.1) следи комплетност метода, у смислу да је могуће на сваком интервалу $(a,b)\subset(0,x^{+})$, за $0<a<b<x^{+}$, доказати неједнакост $f(x)>0$ користећи неку доњу апроксимацију $P^{[K]}(x)$.

### 4.2.1 Побољшање метода

Истакнимо да се описан метод може применити на функције облика $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i(x)\cos^{q_i}\!x\,\sin^{r_i}\!x$ за $x\in(0,\delta)$, где је $h_i(x)$ реалан полином, при чему постоје две могућности. Прва могућност је када је полином $h_i(x)$ константног знака на датом интервалу, и тада разликујемо случајеве $h_i(x)>0$ или $h_i(x)<0$. У овим случајевима све радимо аналогно гореописаном методу. Са друге стране, имамо могућност да полином $h_i(x)$ није константног знака. Тада терм $\alpha_i h_i(x)\cos^{q_i}\!x\,\sin^{r_i}\!x$ може бити записан као сума сабирака облика $s_i(x)$, и затим се може применити гореописан метод на сваки од тих сабирака.

### 4.2.2 Завршетак метода

Посматрајмо индексе $l_k^{(i)}$ $\big(i\in\{1,\ldots,n\}$ и $k\in\{0,\ldots,\mathfrak{m}_i\}\big)$, који се јављају у полиному $P(x)$: $l_0,l_1,\ldots,l_m$; при чему је $m{+}1$ укупан број подсабирака који се добијају из сваког сабирка $s_i(x)$. Индекси $l_0,l_1,\ldots,l_m$ су одређени у (4.2.1), (4.2.2) и (4.2.3). Приметимо да, у зависности од индекса $l_s$, важи:

$$f(x) > P(x,l_0,l_1,\ldots,l_s+1,\ldots,l_m) > P(x,l_0,l_1,\ldots,l_s,\ldots,l_m), \tag{4.2.9}$$

за сваки индекс $s\in\{0,1,2,\ldots,m\}$ и $l_s\in\mathbb{N}_0$. Напоменимо да интервал на коме важи строга неједнакост

$$P(x,l_0,l_1,\ldots,l_s+1,\ldots,l_m) > P(x,l_0,l_1,\ldots,l_s,\ldots,l_m)$$

може бити одређен према лемама 143 и 144. Повећањем сваког индекса $l_s$, интервали важења неједнакости (4.2.9) се шире према лемама 143 и 144, и на тај начин добијамо све боље доње апроксимације функције $f(x)$. Претходно описан метод се завршава када се одреди најмање једна $(m{+}1)$-торка индекса $(l_0, l_1, \ldots, l_m) = (\hat{l}_0, \hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_m)$ за коју важи:

$$P(x, \hat{l}_0, \hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_m) > 0,$$

за $x \in (0, \delta)$. Завршетком овог метода добијамо доказ полазне неједнакости (4.0.1).

**Напомена 155.** Овај метод представља уопштење метода који је коришћен за доказивање неједнакости у раду [61]. Заправо, он се своди на доказивање полиномских неједнакости облика $P(x) > 0$ за $x \in (0, \delta)$, што представља одлучив проблем према резултатима Тарског[20] [73].

Наш циљ је да, коришћењем овог метода, докажемо неке добро познате резултате који се тичу неједнакости облика (4.0.1), а разматране су у недавно објављеним радовима.

## 4.3 Примене метода

У овом делу бавимо се применама метода базираног на теореми 148 на неке конкретне неједнакости, које су недавно разматране у теорији аналитичких неједнакости.

### 4.3.1 Доказ неједнакости из рада [16]

Недавно је, у раду [16], доказана неједнакост (4.3.2) из наредне теореме.

**Теорема 156.** (*i*) *За* $0 < x < \pi/2$ *важи*

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} < 2 + \frac{2}{45}x^3 \tan x. \tag{4.3.1}$$

*Константа* $\frac{2}{45}$ *је најбоља могућа.*

[20] Alfred Tarski (1901-1983), пољски математичар и логичар

*(ii) За* $0 < x < \pi/2$ *важи*

$$\Big(\frac{x}{\sin x}\Big)^2 + \frac{x}{\tan x} < 2 + \frac{2}{45}x^4 + \frac{8}{945}x^5 \tan x. \tag{4.3.2}$$

*Константа* $\frac{8}{945}$ *је најбоља могућа.*

У раду [55] дат је доказ неједнакости (4.3.1), који ћемо сада навести.
*Доказ:* Тражена неједнакост еквивалентна је неједнакости $f(x) > 0$ за $x \in (0, \pi/2)$, где је

$$f(x) = 2\cos x \sin^2 x + \tfrac{2}{45}x^3 \sin^3 x - x\cos^2 x \sin x - x^2 \cos x$$

конкретан мешовит тригонометријски полином. Приметимо да је $x = 0$ корен реда осам функције $f(x)$. Према теореми 147, функција $f(x)$ се може записати на следећи начин:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\cos x - x^2 \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 3x - \underbrace{(\tfrac{1}{90}x^3 + \tfrac{1}{4}x)}_{(>0)}\sin 3x + \underbrace{(\tfrac{1}{30}x^3 - \tfrac{1}{4}x)}_{(<0)}\sin x.$$

Тада су, према лемама 143 и 144 и опису метода, неједнакости: $\cos y > \underline{T}_k^{\cos,0}(y)$ $(k = 6)$, $\cos y < \overline{T}_k^{\cos,0}(y)$ $(k = 12)$ и $\sin y < \overline{T}_k^{\sin,0}(y)$ $(k = 13)$ тачне, за $y \in \big(0, \sqrt{(k+3)(k+4)}\,\big)$.

За $x \in (0, \pi/2)$ важи:

$$\begin{aligned} f(x) \;&>\; \tfrac{1}{2}\underline{T}_6^{\cos,0}(x) - x^2\overline{T}_{12}^{\cos,0}(x) - \tfrac{1}{2}\overline{T}_{12}^{\cos,0}(3x) - \underbrace{(\tfrac{1}{90}x^3 + \tfrac{1}{4}x)}_{(>0)}\overline{T}_{13}^{\sin,0}(3x) \\ &+\; \underbrace{(\tfrac{1}{30}x^3 - \tfrac{1}{4}x)}_{(<0)}\overline{T}_{13}^{\sin,0}(x) = P_{16}(x), \end{aligned}$$

где је $P_{16}(x)$ полином

$$\begin{aligned} P_{16}(x) \;&=\; \frac{x^8}{186810624000}\big(-531440x^8 - 2746332x^6 - 8885955x^4 \\ &-\; 118584180x^2 + 1183782600\big) \\ &=\; \frac{x^8}{186810624000}P_8(x). \end{aligned}$$

Затим, одредимо знак полинома $P_8(x)$ за $x \in (0, \pi/2)$. Увођењем смене $z = x^2$, добијамо полином четвртог степена:

$$P_4(z) = -531440\,z^4 - 2746332\,z^3 - 8885955\,z^2 - 118584180\,z + 1183782600.$$

Реална факторизација полинома $P_4(z)$ одређена је помоћу програма Matlab, и гласи

$$P_4(z)=\alpha(z-z_1)(z-z_2)(z^2+pz+q),$$

где је $\alpha=-531440, z_1=4.503628..., z_2=-9.049..., p=0.621..., q=54.652...$; при чему је неједнакост $p^2-4q<0$ тачна. Полином $P_4(z)$ има тачно два проста реална корена $z_1$ и $z_2$. Како је $P_4(0)>0$, следи да је $P_4(z)>0$ за $z\in(0,z_1)\subset(z_2,z_1)$.

Коначно, можемо закључити да је

$$\begin{aligned} P_8(x)>0 \text{ за } x\in(0,\sqrt{z_1})=(0,2.122...) &\implies P_{16}(x)>0 \text{ за } x\in(0,2.122...)\\ &\implies f(x)>0 \text{ за } x\in(0,\frac{\pi}{2})\subset(0,2.122...). \end{aligned}$$

Приметимо да је најмањи позитиван реалан корен доње апроксимације функције $f(x)$, тј. полинома $P_{16}(x)$, $x^*=\sqrt{z_1}=2.122175...>\pi/2$. Једноставним рачуном добија се да је константа $\frac{2}{45}$ најбоља могућа. $\square$

### 4.3.2 Доказ неједнакости из рада [90]

У раду [90] постављен је отворен проблем, с циљем да се докаже следећа теорема.

**Теорема 157.** *Нека је $0<x<\pi/2$. Тада важи*

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi^4/3)x^3+(8\pi^4/15-16\pi^2/3)x^5}{(\pi^2-4x^2)^2} &< x\sec^2 x-\tan x\\ &< \frac{(2\pi^4/3)x^3+(256/\pi^2-8\pi^2/3)x^5}{(\pi^2-4x^2)^2}, \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

*при чему су $(8\pi^4/15-16\pi^2/3)$ и $(256/\pi^2-8\pi^2/3)$ најбоље константе у (4.3.3).*

У раду [55] дат је доказ претходне теореме, који ћемо сада навести.
*Доказ:* **I** Најпре докажимо неједнакост:

$$\frac{(2\pi^4/3)x^3+(8\pi^4/15-16\pi^2/3)x^5}{(\pi^2-4x^2)^2}<x\sec^2 x-\tan x,$$

за $x\in(0,\pi/2)$. Тражена неједнакост еквивалентна је неједнакости $f(x)>0$ за $x\in(0,\pi/2)$, где је

$$\begin{aligned} f(x)=x(\pi^2-4x^2)^2-(\pi^2-4x^2)^2\cos x\sin x-\Big((2\pi^4/3)x^3+\\ (8\pi^4/15-16\pi^2/3)x^5\Big)\cos^2 x \end{aligned}$$

конкретан мешовит тригонометријски полином. Приметимо да је $x=0$ корен реда седам, а $x=\pi/2$ корен реда два функције $f(x)$.

Разликујемо два случаја:

**1)** Ако $x\in(0,1.136)$:

Према теореми 147, функцију $f(x)$ можемо записати на следећи начин:

$$\begin{aligned}f(x)=&\,x(\pi^2-4x^2)^2-\frac{(\pi^2-4x^2)^2}{2}\sin 2x-\big((\pi^4/3)x^3+(4\pi^4/15-8\pi^2/3)x^5\big)\\&-\big(\underbrace{(\pi^4/3)x^3+(4\pi^4/15-8\pi^2/3)x^5}_{(>0)}\big)\cos 2x.\end{aligned}$$

Тада су, према лемама 143 и 144 и опису метода, неједнакости: $\sin y<\overline{T}_k^{\,\sin,0}(y)$ $(k=9)$ и $\cos y<\overline{T}_k^{\,\cos,0}(y)$ $(k=8)$ тачне, за $y\in\big(0,\sqrt{(k+3)(k+4)}\,\big)$.

За $x\in(0,1.136)$ важи:

$$\begin{aligned}f(x)>&\,x(\pi^2-4x^2)^2-\frac{(\pi^2-4x^2)^2}{2}\overline{T}_9^{\,\sin,0}(2x)-\big((\pi^4/3)x^3+(4\pi^4/15-8\pi^2/3)x^5\big)\\&-\big(\underbrace{(\pi^4/3)x^3+(4\pi^4/15-8\pi^2/3)x^5}_{(>0)}\big)\overline{T}_8^{\,\cos,0}(2x)=P_{13}(x),\end{aligned}$$

где је $P_{13}(x)$ полином

$$\begin{aligned}P_{13}(x)\;=&\;\frac{2x^7}{14175}\big((-12\pi^4+120\pi^2-80)x^6-(-153\pi^4+1640\pi^2-1440)x^4\\&-\;(1055\pi^4-11880\pi^2+15120)x^2+2295\pi^4-30240\pi^2+75600\big)\\=&\;\frac{2x^7}{14175}P_6(x).\end{aligned}$$

Одредимо затим знак полинома $P_6(x)$ за $x\in(0,1.136)$. Увођењем смене $z=x^2$, добијамо полином трећег степена:

$$\begin{aligned}P_3(z)\;=&\;(-12\pi^4+120\pi^2-80)z^3-(-153\pi^4+1640\pi^2-1440)z^2\\&-\;(1055\pi^4-11880\pi^2+15120)z+2295\pi^4-30240\pi^2+75600.\end{aligned}$$

Реална факторизација полинома $P_3(z)$ одређена је помоћу програма Matlab, и гласи

$$P_3(z)=\alpha(z-z_1)(z^2+pz+q),$$

где је $\alpha=-64.556...,z_1=1.290721...,p=-1.148...,q=8.365...$; при чему је неједнакост $p^2-4q<0$ тачна. Полином $P_3(z)$ има тачно један прост реалан корен $z_1$. Приметимо да је $\sqrt{z_1} = 1.136099... > 1.136$. Како је $P_3(0) > 0$, следи да је $P_3(z) > 0$ за $z \in (0, 1.136)$.

Коначно, можемо закључити да је

$$\begin{aligned} P_6(x) > 0 \text{ за } x \in (0, 1.136) &\Longrightarrow P_{13}(x) > 0 \text{ за } x \in (0, 1.136) \\ &\Longrightarrow f(x) > 0 \text{ за } x \in (0, 1.136). \end{aligned}$$

Приметимо да је најмањи позитиван реалан корен доње апроксимације функције $f(x)$, тј. полинома $P_{13}(x)$, $x^* = \sqrt{z_1} = 1.136099...$ .

**2)** Ако $x \in [1.136, \pi/2)$, дефинишимо функцију

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f\big(\pi/2 - x\big) = &-16x^5 + 40\pi x^4 - 32\pi^2 x^3 + 8\pi^3 x^2 \\ &- (16x^4 - 32\pi x^3 + 16\pi^2 x^2)\sin x \cos x \\ &- (\pi^2/60)(\pi - 2x)^3\big((4\pi^2 - 40)x^2 + (-4\pi^3 + 40\pi)x + \pi^4 - 5\pi^2\big)\sin^2 x. \end{aligned}$$

Докажимо сада да је $f(x) > 0$ за $x \in [1.136, \pi/2)$, што је еквивалентно са $\varphi(x) > 0$ за $x \in (\,0, c\,]$, где је $c = \pi/2 - 1.136 = \pi/2 - 142/125$ ( $c = 0.434\ldots$ ). Функција $\varphi(x)$ је такође један конкретан мешовит тригонометријски полином.

Према теореми 147, функција $\varphi(x)$ се може записати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = &-16x^5 + 40\pi x^4 - 32\pi^2 x^3 + 8\pi^3 x^2 - (\underbrace{8x^4 - 16\pi x^3 + 8\pi^2 x^2}_{(>0)})\sin 2x \\ &- (\pi^2/60)(\pi - 2x)^3\big((2\pi^2 - 20)x^2 + (-2\pi^3 + 20\pi)x + \pi^4/2 - 5\pi^2/2\big) \\ &+ (\pi^2/60)(\pi - 2x)^3\big(\underbrace{(2\pi^2 - 20)x^2 + (-2\pi^3 + 20\pi)x + \pi^4/2 - 5\pi^2/2}_{(>0)}\big)\cos 2x. \end{aligned}$$

Тада су, према лемама 143 и 144 и опису метода, неједнакости: $\sin y < \overline{T}_k^{\,\sin,0}(y)$ $(k = 5)$ и $\cos y > \underline{T}_k^{\,\cos,0}(y)$ $(k = 6)$ тачне, за $y \in \big(0, \sqrt{(k+3)(k+4)}\,\big)$.

За $x \in (0, c\,]$ важи:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \; > \; &-16x^5 + 40\pi x^4 - 32\pi^2 x^3 + 8\pi^3 x^2 - (\underbrace{8x^4 - 16\pi x^3 + 8\pi^2 x^2}_{(>0)})\overline{T}_5^{\,\sin,0}(2x) \\ &- (\pi^2/60)(\pi - 2x)^3\big((2\pi^2 - 20)x^2 + (-2\pi^3 + 20\pi)x + \pi^4/2 - 5\pi^2/2\big) \\ &+ (\pi^2/60)(\pi - 2x)^3\big(\underbrace{(2\pi^2 - 20)x^2 + (-2\pi^3 + 20\pi)x + \pi^4/2 - 5\pi^2/2}_{(>0)}\big)\underline{T}_6^{\,\cos,0}(2x) \\ = \; &Q_{11}(x), \end{aligned}$$

где је $Q_{11}(x)$ полином

$$\begin{aligned}
Q_{11}(x) \;=\; & \frac{x^2}{2700}\big((64\pi^4-640\pi^2)x^9+(-160\pi^5+1600\pi^3)x^8\\
&+\;(160\pi^6-2000\pi^4+4800\pi^2-5760)x^7\\
&+\;(-80\pi^7+1880\pi^5-12000\pi^3+11520\pi)x^6\\
&+\;(20\pi^8-1340\pi^6+12840\pi^4-20160\pi^2+28800)x^5\\
&+\;(-2\pi^9+610\pi^7-8700\pi^5+36000\pi^3-57600\pi)x^4\\
&+\;(-150\pi^8+4650\pi^6-34200\pi^4+28800\pi^2-86400)x^3\\
&+\;(15\pi^9-1875\pi^7+15300\pi^5+194400\pi)x^2\\
&+\;(450\pi^8-3150\pi^6-129600\pi^2)x-45\pi^9+225\pi^7+21600\pi^3\big)\\
=\;& \frac{x^2}{2700}Q_9(x).
\end{aligned}$$

Одредимо затим знак полинома $Q_9(x)$ за $x\in(0,c]$. Посматрајмо пети извод полинома $Q_9(x)$ као полином четвртог степена у следећем облику

$$\begin{aligned}
Q_9^{(5)}(x) =\; & (967680\pi^4-9676800\pi^2)x^4+(-1075200\pi^5+10752000\pi^3)x^3\\
&+(403200\pi^6-5040000\pi^4+12096000\pi^2-14515200)x^2\\
&+(-57600\pi^7+1353600\pi^5-8640000\pi^3+8294400\pi)x\\
&+2400\pi^8-160800\pi^6+1540800\pi^4-2419200\pi^2+3456000.
\end{aligned}$$

Реална факторизација полинома $Q_9^{(5)}(x)$ одређена је помоћу програма Matlab, и гласи

$$Q_9^{(5)}(x)=\beta(x-x_1)(x-x_2)(x^2+px+q),$$

где је $\beta=-1245358.656...,x_1=0.894...,x_2=3.702...,p=1.106...,q=0.521...$, при чему је неједнакост $p^2-4q<0$ тачна. Полином $Q_9^{(5)}(x)$ има тачно два проста реална корена $x_1$ и $x_2$. Према томе, полином $Q_9^{(5)}(x)$ нема реалних корена за $x\in(0,c]$. Како је $Q_9^{(5)}(0)<0$, следи да је $Q_9^{(5)}(x)<0$ за $x\in(0,c]$. Штавише, полином $Q_9^{(4)}(x)$ је монотоно опадајућа функција за $x\in(0,c]$, и како је $Q_9^{(4)}(c)>0$, следи да је $Q_9^{(4)}(x)>0$ за $x\in(0,c]$. Тада, с обзиром да је полином $Q_9'''(x)$ монотоно растућа функција за $x\in(0,c]$ и $Q_9'''(c)<0$, следи да је $Q_9'''(x)<0$ за $x\in(0,c]$. Одавде следи да је полином $Q_9''(x)$ монотоно опадајућа функција за $x\in(0,c]$, и како је $Q_9''(c)>0$, следи да је $Q_9''(x)>0$ за $x\in(0,c]$. Стога, полином $Q_9'(x)$ је монотоно растућа функција за $x\in(0,c]$, и како је $Q_9'(c)<0$, следи да је $Q_9'(x)<0$ за $x\in(0,c]$.

Коначно, како је полином $Q_9(x)$ монотоно опадајућа функција за $x \in (0, c\,]$ и $Q_9(c) > 0$, можемо закључити да је

$$\begin{aligned} Q_9(x)>0 \text{ за } x\in(0,c\,] &\implies Q_{11}(x) > 0 \text{ за } x\in(0,c\,] \\ &\implies \varphi(x)>0 \text{ за } x\in(0,c\,] \\ &\implies f(x)>0 \text{ за } x\in[1.136,\pi/2). \end{aligned}$$

Приметимо да је најмањи позитиван реалан корен доње апроксимације функције $\varphi(x)$, тј. полинома $Q_{11}(x)$, $x^* = 0.630862\ldots > c = 0.434\ldots$ . Једноставним рачуном добија се да је константа $(8\pi^4/15 - 16\pi^2/3)$ најбоља могућа. Тиме је доказ прве неједнакости готов.

**II** Докажимо неједнакост:

$$x\sec^2 x - \tan x < \frac{(2\pi^4/3)x^3 + (256/\pi^2 - 8\pi^2/3)x^5}{(\pi^2 - 4x^2)^2},$$

за $x\in(0,\pi/2)$. Тражена неједнакост еквивалентна је неједнакости $f(x)>0$ за $x\in(0,\pi/2)$, где је

$$f(x) = -x(\pi^2-4x^2)^2+(\pi^2-4x^2)^2\cos x\sin x+\Big((2\pi^4/3)x^3+ \\ (256/\pi^2-8\pi^2/3)x^5\Big)\cos^2 x$$

конкретан мешовит тригонометријски полином. Приметимо да је $x = 0$ корен петог реда и $x = \pi/2$ корен трећег реда функције $f(x)$.

Разликујемо два случаја:

**1)** Ако је $x \in (0, 0.858)$:

Према теореми 147, функција $f(x)$ се може записати на следећи начин:

$$\begin{aligned} f(x)=&-x(\pi^2-4x^2)^2+\frac{(\pi^2-4x^2)^2}{2}\sin 2x+(\pi^4/3)x^3+(128/\pi^2-4\pi^2/3)x^5 \\ &+\Big(\underbrace{(\pi^4/3)x^3+(128/\pi^2-4\pi^2/3)x^5}_{(>0)}\Big)\cos 2x. \end{aligned}$$

Тада су, према лемама 143 и 144 и опису метода, неједнакости: $\sin y > \underline{T}_k^{\sin,0}(y)$ $(k = 7)$ и $\cos y > \underline{T}_k^{\cos,0}(y)$ $(k = 6)$ тачне, за $y \in \Big(0, \sqrt{(k+3)(k+4)}\,\Big)$.

За $x \in (0, 0.858)$ важи:

$$\begin{aligned} f(x)>&-x(\pi^2-4x^2)^2+\frac{(\pi^2-4x^2)^2}{2}\underline{T}_7^{\sin,0}(2x)+(\pi^4/3)x^3+(128/\pi^2-4\pi^2/3)x^5 \\ &+\Big(\underbrace{(\pi^4/3)x^3+(128/\pi^2-4\pi^2/3)x^5}_{(>0)}\Big)\underline{T}_6^{\cos,0}(2x) = P_{11}(x), \end{aligned}$$

где је $P_{11}(x)$ полином

$$\begin{aligned}P_{11}(x) &= \frac{2x^5}{945\pi^2}\big((56\pi^4-96\pi^2-5376)x^6+(-14\pi^6-372\pi^4+1008\pi^2+40320)x^4\\ &\quad+(99\pi^6+756\pi^4-5040\pi^2-120960)x^2-252\pi^6+1260\pi^4+120960\big)\\ &= \frac{2x^5}{945\pi^2}P_6(x).\end{aligned}$$

Одредимо затим знак полинома $P_6(x)$ за $x\in(0,0.858)$. Увођењем смене $z=x^2$, добијамо полином трећег степена:

$$\begin{aligned}P_3(z) \ &= \ (56\pi^4-96\pi^2-5376)z^3+(-14\pi^6-372\pi^4+1008\pi^2+40320)z^2\\ &\quad+\ (99\pi^6+756\pi^4-5040\pi^2-120960)z-252\pi^6+1260\pi^4+120960.\end{aligned}$$

Реална факторизација полинома $P_3(z)$ одређена је помоћу програма Matlab, и гласи

$$P_3(z)=\alpha(z-z_1)(z^2+pz+q),$$

где је $\alpha=-868.572...,z_1=0.737147...,p=0.077...,q=2.226...$; при чему је неједнакост $p^2-4q<0$ тачна. Полином $P_3(z)$ има тачно један прост реалан корен $z_1$. Приметимо да је $\sqrt{z_1}=0.858573...>0.858$. Како је $P_3(0)>0$, следи да је $P_3(z)>0$ за $z\in(0,0.858)$.

Коначно, можемо закључити да је

$$\begin{aligned}P_6(x)>0 \text{ за } x\in(0,0.858) &\implies P_{11}(x)>0 \text{ за } x\in(0,0.858)\\ &\implies f(x)>0 \text{ за } x\in(0,0.858).\end{aligned}$$

Приметимо да је најмањи позитиван реалан корен доње апроксимације функције $f(x)$, тј. полинома $P_{11}(x)$, $x^*=\sqrt{z_1}=0.858573...$ .

**2)** Ако $x\in[0.858,\pi/2)$, дефинишимо функцију

$$\begin{aligned}\varphi(x) \ &= f\big(\pi/2-x\big)=16x^5-40\pi x^4+32\pi^2x^3-8\pi^3x^2\\ &\quad+\ (16x^4-32\pi x^3+16\pi^2x^2)\sin x\cos x\\ &\quad+\ (1/(3\pi^2))(\pi-2x)^3\big((96-\pi^4)x^2+(\pi^5-96\pi)x+24\pi^2\big)\sin^2 x.\end{aligned}$$

Докажимо сада да је $f(x)>0$ за $x\in[0.858,\pi/2)$, што је еквивалентно са $\varphi(x)>0$ за $x\in(0,c]$, где је $c=\pi/2-0.858=\pi/2-429/500$ ($c=0.712\ldots$).

Функција $\varphi(x)$ је такође један конкретан мешовит тригонометријски полином. Према теореми 147, функција $\varphi(x)$ се може записати на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) = {} & 16x^5 - 40\pi x^4 + 32\pi^2 x^3 - 8\pi^3 x^2 + (\underbrace{8x^4 - 16\pi x^3 + 8\pi^2 x^2}_{(>0)})\sin 2x \\
& + (1/(6\pi^2))(\pi - 2x)^3\big((96 - \pi^4)x^2 + (\pi^5 - 96\pi)x + 24\pi^2\big) \\
& - (1/(6\pi^2))(\pi - 2x)^3\big(\underbrace{(96-\pi^4)x^2+(\pi^5-96\pi)x+24\pi^2}_{(>0)}\big)\cos 2x.
\end{aligned}
$$

Тада су, према лемама 143 и 144 и опису метода, неједнакости: $\sin y > \underline{T}_k^{\sin,0}(y)$ $(k = 7)$ и $\cos y < \overline{T}_k^{\cos,0}(y)$ $(k = 8)$ тачне, за $y \in \big(0, \sqrt{(k+3)(k+4)}\,\big)$.

За $x \in (0, c\,]$ важи:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) > {} & 16x^5 - 40\pi x^4 + 32\pi^2 x^3 - 8\pi^3 x^2 + (\underbrace{8x^4 - 16\pi x^3 + 8\pi^2 x^2}_{(>0)})\underline{T}_7^{\sin,0}(2x) \\
& + (1/(6\pi^2))(\pi - 2x)^3\big((96 - \pi^4)x^2 + (\pi^5 - 96\pi)x + 24\pi^2\big) \\
& - (1/(6\pi^2))(\pi - 2x)^3\big(\underbrace{(96-\pi^4)x^2+(\pi^5-96\pi)x+24\pi^2}_{(>0)}\big)\overline{T}_8^{\cos,0}(2x) \\
= {} & Q_{13}(x),
\end{aligned}
$$

где је $Q_{13}(x)$ полином

$$
\begin{aligned}
Q_{13}(x) = {} & \frac{x^3}{945\pi^2}\big((-8\pi^4 + 768)x^{10} + (20\pi^5 - 1920\pi)x^9 \\
& + (-18\pi^6 + 112\pi^4 + 1728\pi^2 - 10752)x^8 \\
& + (7\pi^7 - 280\pi^5 - 576\pi^3 + 26880\pi)x^7 \\
& + (-\pi^8 + 252\pi^6 - 792\pi^4 - 24864\pi^2 + 80640)x^6 \\
& + (-98\pi^7 + 2076\pi^5 + 9408\pi^3 - 201600\pi)x^5 \\
& + (14\pi^8 - 1890\pi^6 + 1176\pi^4 + 191520\pi^2 - 241920)x^4 \\
& + (735\pi^7 - 5964\pi^5 - 80640\pi^3 + 604800\pi)x^3 \\
& + (-105\pi^8 + 5670\pi^6 + 15120\pi^4 - 574560\pi^2)x^2 \\
& + (-2205\pi^7 - 2520\pi^5 + 234360\pi^3)x + 315\pi^8 - 30240\pi^4\big) \\
= {} & \frac{x^3}{945\pi^2}Q_{10}(x).
\end{aligned}
$$

Одредимо затим знак полинома $Q_{10}(x)$ за $x \in (0, c\,]$. Посматрајмо шести извод полинома $Q_{10}(x)$ као полином четвртог степена у следећем облику

$$\begin{aligned} Q_{10}^{(6)}(x) \;=\;& (-1209600\pi^4+116121600)x^4+(1209600\pi^5-116121600\pi)x^3\\ +\;& (-362880\pi^6+2257920\pi^4+34836480\pi^2-216760320)x^2\\ +\;& (35280\pi^7-1411200\pi^5-2903040\pi^3+135475200\pi)x\\ -\;& 720\pi^8+181440\pi^6-570240\pi^4-17902080\pi^2+58060800. \end{aligned}$$

Реална факторизација полинома $Q_{10}^{(6)}(x)$ одређена је помоћу програма Matlab, и гласи

$$Q_{10}^{(6)}(x)=\beta(x-x_1)(x-x_2)(x^2+px+q),$$

где је $\beta = -1704436.514..., x_1 = 0.610..., x_2 = 3.262...,\ p = 0.731...,\ q = 1.935...$, при чему је неједнакост $p^2-4q<0$ тачна. Полином $Q_{10}^{(6)}(x)$ има тачно два проста реална корена $x_1$ и $x_2$. Како је $Q_{10}^{(6)}(0) < 0$, следи да је $Q_{10}^{(6)}(x) < 0$ за $x < x_1$, и како је $Q_{10}^{(6)}(c) > 0$, следи да је $Q_{10}^{(6)}(x) > 0$ за $x \in (x_1, x_2)$. Према томе, $Q_{10}^{(5)}(x)$ је монотоно опадајућа функција за $x < x_1$ и монотоно растућа за $x \in (x_1, x_2)$, па стога $Q_{10}^{(5)}(x)$ достиже минимум у тачки $x_1 = 0.610...$ на интервалу $(0, c\,]$. Тада, како је $Q_{10}^{(5)}(0) < 0$ и $Q_{10}^{(5)}(c) < 0$, следи да је $Q_{10}^{(5)}(x) < 0$ за $x \in (0, c\,]$. Штавише, како је полином $Q_{10}^{(4)}(x)$ монотоно опадајућа функција за $x \in (0, c\,]$ и $Q_{10}^{(4)}(c) > 0$, следи да је $Q_{10}^{(4)}(x) > 0$ за $x \in (0, c\,]$. Одавде следи да је полином $Q_{10}'''(x)$ монотоно растућа функција за $x \in (0, c\,]$ и $Q_{10}'''(c) < 0$, па следи да је $Q_{10}'''(x) < 0$ за $x \in (0, c\,]$. Према томе, полином $Q_{10}''(x)$ је монотоно опадајућа функција за $x \in (0, c\,]$, и како је $Q_{10}''(c) > 0$, следи да је $Q_{10}''(x) > 0$ за $x \in (0, c\,]$. Тада, с обзиром да је $Q_{10}'(x)$ монотоно растућа функција за $x \in (0, c\,]$ и $Q_{10}'(c) < 0$, следи да је $Q_{10}'(x) < 0$ за $x \in (0, c\,]$.

Коначно, пошто је полином $Q_{10}(x)$ монотоно опадајућа функција за $x \in (0, c\,]$ и $Q_{10}(c) > 0$, можемо закључити да је

$$\begin{aligned} Q_{10}(x)>0 \text{ за } x\in(0,c\,] \;&\Longrightarrow\; Q_{13}(x) > 0 \text{ за } x\in(0,c\,]\\ &\Longrightarrow\; \varphi(x)>0 \text{ за } x\in(0,c\,]\\ &\Longrightarrow\; f(x)>0 \text{ за } x\in[0.858,\pi/2). \end{aligned}$$

Приметимо да је најмањи позитиван реалан корен доње апроксимације функције $\varphi(x)$, тј. полинома $Q_{13}(x)$, $x^* = 0.910490\ldots > c = 0.712\ldots$ .

Једноставним рачуном добија се да је константа $(256/\pi^2 - 8\pi^2/3)$ најбоља могућа. Овим је доказ друге неједнакости готов. $\square$

У наредној глави, разматрано је проширење претходно описаног поступка на класу реалних аналитичких функција, која обухвата мешовите хиперболичко-тригонометријске полиноме.

ГЛАВА 5

# МЕТОД ДОКАЗИВАЊА КЛАСЕ НЕЈЕДНАКОСТИ КОЈА ОБУХВАТА МЕШОВИТЕ ХИПЕРБОЛИЧКО-ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ПОЛИНОМСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Циљ нам је сада да проширимо скуп неједнакости које бисмо могли доказати одговарајућим методом, као што је урађено у претходној глави. По угледу на описан метод, природно се поставља питање доказивања неједнакости које обухватају елементе раширења прстена реалних хиперболичко-тригонометријских полинома $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$, у ознаци $\mathbb{R}[x, \cosh x, \sinh x]$. Елементе овог раширења назовимо *мешовитим хиперболичко-тригонометријским полиномима.* С тим у вези, покушаћемо да прилагодимо постојећи метод новој класи неједнакости.

Дакле, у овој глави, бавимо се методом доказивања неједнакости облика:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \sinh^{q_i} x \cosh^{r_i} x > 0, \tag{5.0.1}$$

за $x \in (\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 \le 0 \le \delta_2$; где $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$ и $n \in \mathbb{N}$, према раду [56]. Најпре трансформишемо мешовит хиперболичко-тригонометријски полином $f(x)$ у еквивалентан облик, који садржи хиперболичке синусе и хиперболичке косинусе вишеструких углова. Овај метод је компатибилан са ефикасним методом описаним у раду [55], и заснован је на директном поређењу хиперболичког синуса и хиперболичког косинуса са одговарајућим Маклореновим полиномима.

## 5.1 Помоћна тврђења и припрема за опис метода

Нека је функција $\varphi(x)$ апроксимирана Тејлоровим полиномом $T_k(x)$, степена $k$, у околини тачке $a$. У поглављу 4.1 дефинисане су горња и доња апроксимација функције $\varphi(x)$ у околини тачке $a$, које су означене редом са $\overline{T}_k^{\varphi,a}(x)$ и $\underline{T}_k^{\varphi,a}(x)$. И у овој глави користићемо исте ознаке. Функцију $\varphi(x)$, у наставку рада, посматрамо као $\sinh x$ или $\cosh x$.

Посматрајући Маклоренове апроксимације функција $\sinh x$ и $\cosh x$, долазимо до следећих лема.

**Лема 158.** *За полином* $T_n(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}$, *где је* $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, *важи:*

$$(\forall t \geq 0) \quad T_n(t) \leq T_{n+2}(t) \leq \sinh t, \tag{5.1.1}$$

$$(\forall t \leq 0) \quad T_n(t) \geq T_{n+2}(t) \geq \sinh t. \tag{5.1.2}$$

*За* $t = 0$ *неједнакости у* (5.1.1) *и* (5.1.2) *прелазе у једнакости.*

**Лема 159.** *За полином* $T_n(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n/2} \frac{t^{2i}}{(2i)!}$, *где је* $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, *важи:*

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad T_n(t) \leq T_{n+2}(t) \leq \cosh t. \tag{5.1.3}$$

*За* $t = 0$ *неједнакости у* (5.1.3) *прелазе у једнакости.*

Нека је $a = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Тада важи:

$$\cosh x = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{1}{a}\Big) \quad \text{и} \quad \sinh x = \frac{1}{2}\Big(a - \frac{1}{a}\Big).$$

Уведимо следеће функције:

$$R_k(a) = a^k + \frac{1}{a^k} \quad \text{и} \quad Q_k(a) = a^k - \frac{1}{a^k}, \tag{5.1.4}$$

за $k=1,2,\ldots$ . Тада је

$$R_k(a) = 2\cosh(kx) \quad \text{и} \quad Q_k(a) = 2\sinh(kx), \tag{5.1.5}$$

за $a = e^x$ и $k=1,2,\ldots$ . Стога, лако се доказује да је:

$$R_n(a) \cdot R_m(a) = R_{n+m}(a) + R_{|n-m|}(a) \tag{5.1.6}$$

и

$$R_n(a) \cdot Q_m(a) = Q_{n+m}(a) + \nu \cdot Q_{|n-m|}(a), \tag{5.1.7}$$

где је $\nu = \operatorname{sgn}\big(m-n\big)$. Специјално, $R_0(a) = 2$ и $Q_0(a) = 0$.

У раду [34] приказани су степени хиперболичких функција у облику хиперболичких функција вишеструких углова, у зависности од парности степена $n$. Према томе, важе следеће помоћне леме.

**Лема 160.** *За $n \in \mathbb{N}$ следеће формуле су тачне:*
*(i) ако је $n$ непаран број*

$$\sinh^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \binom{n}{k} \sinh\big((n-2k)x\big),$$

*(ii) ако је $n$ паран број*

$$\sinh^n x = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \binom{n}{k} \cosh\big((n-2k)x\big).$$

**Лема 161.** *За $n \in \mathbb{N}$ следеће формуле су тачне:*
*(i) ако је $n$ непаран број*

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cosh\big((n-2k)x\big),$$

*(ii) ако је $n$ паран број*

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \cosh\big((n-2k)x\big).$$

На основу претходне две леме важи следећа теорема.

**Теорема 162.** *За $n, m \in \mathbb{N}$ разликујемо следеће случајеве:*
*(i) ако су $n$ и $m$ непарни бројеви*

$$\cosh^n x \cdot \sinh^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1} (-1)^k \left( \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \sinh\big((n+m-2k)x\big) \right),$$

*(ii) ако је $n$ паран, а $m$ непаран број*

$$\cosh^n x \cdot \sinh^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m-1}{2}} (-1)^k \left( \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \sinh\big((n+m-2k)x\big) \right),$$

*(iii) ако је $n$ непаран, а $m$ паран број*

$$\cosh^n x \cdot \sinh^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n+m-1}{2}} (-1)^k \left( \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \cosh\big((n+m-2k)x\big) \right),$$

*(iv) ако су $n$ и $m$ парни бројеви*

$$\cosh^n x \cdot \sinh^m x = \frac{1}{2^{n+m-1}} \left( \sum_{k=0}^{\frac{n+m}{2}-1} (-1)^k \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{k-r} \cosh\big((n+m-2k)x\big) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} (-1)^{\frac{m+n}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{n+m}{2}} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{m}{\frac{n+m}{2}-r} \right).$$

*Доказ:* Аналогно доказу теореме 147, при чему за функције $R_k$ и $Q_k$ користимо изразе (5.1.4), (5.1.5), (5.1.6) и (5.1.7). □

## 5.2 Опис метода

Наш циљ је да прикажемо метод за доказивање неједнакости облика (5.0.1), за $x \in (0, \delta)$ и $\delta = \delta_2 > 0$. Притом ћемо користити доње Маклоренове апроксимације функција $\sinh x$ и $\cosh x$, одређене лемама 158 и 159. Приметимо да за ове функције постоје само доње Маклоренове апроксимације, за разлику од функција $\sin x$ и $\cos x$ које имају обе, и доње и горње Маклоренове апроксимације (видети леме 143 и 144).

Међутим, у раду [98] доказана је следећа теорема.

**Теорема 163.** *Претпоставимо да је $f$ реална функција на $(a,b)$ и $n$ позитиван цео број такав да $f^{(k)}(a+)$ и $f^{(k)}(b-)$ $(k \in \{0,1,2,\dots,n\})$ постоје и да је $(-1)^n f^{(n)}(x)$ растућа функција на $(a,b)$. Тада за свако $x \in (a,b)$ важи следећа неједнакост:*

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b-)}{k!}(x-b)^k + \frac{1}{(a-b)^n}\Big(f(a+) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a-b)^k f^{(k)}(b-)}{k!}\Big)(x-b)^n \\ &< f(x) < \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b-)}{k!}(x-b)^k.\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

*Штавише, ако је $(-1)^n f^{(n)}(x)$ опадајућа функција на $(a,b)$, тада важи обрнута неједнакост од неједнакости (5.2.1).*

*Претпоставимо да је $f^{(n)}(x)$ растућа функција на $(a,b)$, тада за свако $x \in (a,b)$ важи следећа неједнакост:*

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a+)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(b-a)^n}\Big(f(b-) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k f^{(k)}(a+)}{k!}\Big)(x-a)^n \\ &> f(x) > \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a+)}{k!}(x-a)^k.\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

*Штавише, ако је $f^{(n)}(x)$ опадајућа функција на $(a,b)$, тада важи обрнута неједнакост од неједнакости (5.2.2).*

Овом теоремом доказано је постојање горњих апроксимација функција $\sinh x$ и $\cosh x$, на коначном интервалу $(a,b)$.

Посматрајмо сада сабирак суме (5.0.1), $s_i(x) = \alpha_i x^{p_i} \cosh^{q_i} x \sinh^{r_i} x$, где је $\alpha_i \neq 0$ за $i = 1, \dots, n$. Уведимо ознаку

$$\mathfrak{m}_i = \begin{cases} \frac{q_i+r_i}{2} - 1, & \text{када су оба броја } q_i \text{ и } r_i \text{ парна или оба непарна,} \\ \frac{q_i+r_i-1}{2}, & \text{када су } q_i \text{ и } r_i \text{ различите парности.} \end{cases}$$

Према теореми 162, сабирци $s_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ могу бити приказани на четири различита начина, у зависности од случаја, па су у опису метода дате следеће могућности:

**1.** Нека је $r_i$ непаран број, тада важи:

$$\begin{aligned}
s_i(x) &= \alpha_i x^{p_i} \cosh^{q_i} x \sinh^{r_i} x \\
&= \frac{\alpha_i x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} (-1)^k \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \sinh\big((q_i+r_i-2k)x\big) \\
&= \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \left( \sum_{r=0}^{k} \alpha_i (-1)^{k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \right) \sinh\big((q_i+r_i-2k)x\big).
\end{aligned}$$

Уведимо ознаку $\beta_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_i (-1)^{k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r}$. Тада су за сваки подсабирак $\beta_k \sinh\big((q_i + r_i - 2k)x\big)$, у зависности од знака $\beta_k$, могућа два случаја:

1) ако је $\beta_k > 0$:

$$\beta_k \sinh\big((q_i + r_i - 2k)x\big) > \beta_k \underline{T}^{\sinh,0}_{2l_k^{(i)}+1}\big((q_i + r_i - 2k)x\big), \;\; l_k^{(i)} \in \mathbb{N}_0,$$

2) ако је $\beta_k < 0$, постоји полином $p_n(x)$ на коначном интервалу, према теореми 163, који је горња апроксимација за $\sinh\big((q_i + r_i - 2k)x\big)$, па важи:

$$\beta_k \sinh\big((q_i + r_i - 2k)x\big) > \beta_k p_n(x).$$

**2.** Нека је $q_i$ непаран и $r_i$ паран број, тада важи:

$$\begin{aligned}
s_i(x) &= \alpha_i x^{p_i} \cosh^{q_i} x \sinh^{r_i} x \\
&= \frac{\alpha_i x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} (-1)^k \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \cosh\big((q_i+r_i-2k)x\big) \\
&= \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \left( \sum_{r=0}^{k} \alpha_i (-1)^{k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \right) \cosh\big((q_i+r_i-2k)x\big).
\end{aligned}$$

Тада су за сваки подсабирак $\beta_k \cosh\big((q_i + r_i - 2k)x\big)$, у зависности од знака $\beta_k$, могућа два случаја:

1) ако је $\beta_k > 0$:

$$\beta_k \cosh\big((q_i + r_i - 2k)x\big) > \beta_k \underline{T}^{\cosh,0}_{2l_k^{(i)}+0}\big((q_i + r_i - 2k)x\big), \;\; l_k^{(i)} \in \mathbb{N}_0, \tag{5.2.3}$$

2) ако је $\beta_k < 0$, постоји полином $p_n(x)$ на коначном интервалу, према теореми 163, који је горња апроксимација за $\cosh\big((q_i + r_i - 2k)x\big)$, па важи:

$$\beta_k \cosh\big((q_i + r_i - 2k)x\big) > \beta_k p_n(x). \tag{5.2.4}$$

**3.** Нека су $q_i$ и $r_i$ парни бројеви, тада важи:

$$\begin{aligned} s_i(x) = {} & \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \left( \sum_{k=0}^{m_i} \left( \sum_{r=0}^{k} \alpha_i (-1)^{k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \right) \cosh\big((q_i+r_i-2k)x\big) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{q_i+r_i}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{q_i+r_i}{2}} (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{\frac{q_i+r_i}{2}-r} \right). \end{aligned}$$

Даље, за сваки подсабирак $\beta_k \cosh\big((q_i + r_i - 2k)x\big)$, у зависности од знака $\beta_k$, имамо две могућности (5.2.3) или (5.2.4).

Према томе, за сваки сабирак $s_i(x)$ можемо наћи полином $\tau_i(x)$, који представља његову доњу апроксимацију. Упоређујући све сабирке $s_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, који се јављају у суми (5.0.1), према горенаведеним случајевима, добијамо полином

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \tau_i(x),$$

који је доња апроксимација функције $f(x)$ из (5.0.1); тј. важи:

$$f(x) > P(x).$$

На основу претходног разматрања важи следећа теорема.

**Теорема 164.** *Нека полином* $P(x) = \sum_{i=1}^{n} \tau_i(x)$ *има следећа својства:*

(*i*) *постоји најмање један позитиван реалан корен полинома* $P(x)$ *;*

(*ii*) $P(x) > 0$ *за* $x \in (0, x^*)$*, где је* $x^*$ *најмањи позитиван реалан корен полинома* $P(x)$*.*

*Тада важи*

$$f(x) > 0,$$

*за* $x \in (0, x^*) \subseteq (0, \delta)$*.*

**Напомена 165.** Приметимо да је овим добијен доказ неједнакости $f(x) > 0$ за $x \in (0, \delta_2)$, где је $\delta_2 = x^*$. Претходна теорема може се применити и на $x \in (\delta_1, 0)$, увођењем смене $t = -x$.

**Напомена 166.** Ако не постоји позитиван реалан корен полинома $P(x)$ и ако је $P(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$, тада је $f(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$.

Главна разлика у поређењу са методом који је описан у раду [55] је чињеница да горње апроксимације функција $\sinh x$ и $\cosh x$ постоје једино на коначним интервалима. Стога, овај метод може бити коришћен или за доказивање неједнакости облика (5.0.1) на коначном интервалу, или за доказивање неједнакости истог облика на интервалу $(0, \infty)$, при чему коефицијенти уз $\sinh x$ и $\cosh x$ морају бити позитивни, тј. једино када су нам потребне само доње апроксимације ових функција.

Комплетност приказаног метода за функцију $f(x)$ облика (5.0.1) испуњена је аналогно као за функцију $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x$, што је показано у раду [55] (секција 2., део II).

**Напомена 167.** Истакнимо да се описан метод може применити и на функције облика $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i(x) \cosh^{q_i} x \sinh^{r_i} x$ за $x \in (0, \delta)$, где је $h_i(x)$ реалан полином. Прва могућност је када је полином $h_i(x)$ константног знака на датом интервалу ($h_i(x) > 0$ или $h_i(x) < 0$), и тада радимо аналогно претходно описаном поступку. С друге стране, могуће је да полином $h_i(x)$ није константног знака. Тада терм $\alpha_i h_i(x) \cosh^{q_i} x \sinh^{r_i} x$ може бити записан као сума сабирака облика $s_i(x)$, а затим можемо применити претходно описан поступак на сваки од тих сабирака.

Посматрајмо индексе $l_k^{(i)}$ $\big(i \in \{1, \ldots, n\},\ k \in \{0, \ldots, \mathfrak{m}_i\}\big)$ који се јављају у полиному $P(x)$: $l_0, l_1, \ldots, l_m$; при чему је $m+1$ укупан број подсабирака који се добијају из свих сабирака $s_i(x)$. Приметимо да, у зависности од индекса $l_s$, важи:

$$f(x) > P(x, l_0, l_1, \ldots, l_s + 1, \ldots, l_m) > P(x, l_0, l_1, \ldots, l_s, \ldots, l_m),$$

за сваки индекс $s \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ и $l_s \in \mathbb{N}_0$. Повећањем сваког индекса $l_s$ добијамо све боље доње апроксимације функције $f(x)$.

Претходно описан метод се завршава одређивањем бар једне $(m+1)$-торке индекса $(l_0, l_1, \ldots, l_m) = (\hat{l}_0, \hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_m)$, за коју важи:

$$P(x, \hat{l}_0, \hat{l}_1, \ldots, \hat{l}_m) > 0,$$

за $x \in (0, \delta)$. На крају метода добија се доказ полазне неједнакости (5.0.1).

**Напомена 168.** Овај метод своди се на доказивање полиномских неједнакости облика $P(x) > 0$, за $x \in (0, \delta)$, што представља одлучив проблем према резултатима Тарског [73].

Наш циљ је да, овим методом, докажемо неке добро познате неједнакости које су разматране у недавно објављеним радовима, као и да добијемо неке нове резултате који се односе на неједнакости облика (5.0.1).

## 5.3 Примене метода

У овом поглављу бавимо се применама метода базираног на теореми 164, на неке конкретне неједнакости.

### 5.3.1 Доказ неједнакости из рада [50]

У раду [50] доказана је следећа теорема.

**Теорема 169.** *За* $x \in (0,1)$

$$\left(\frac{1}{\cosh x}\right)^{1/2} < \frac{x}{\sinh x} < \left(\frac{1}{\cosh x}\right)^{1/4}. \tag{5.3.1}$$

У раду [56] дат је доказ неједнакости (5.3.1), који ћемо сада навести.
*Доказ:* **I** Докажимо прво неједнакост:

$$\left(\frac{1}{\cosh x}\right)^{1/2} < \frac{x}{\sinh x},$$

за $x \in (0,1)$. Тражена неједнакост еквивалентна је неједнакости $f(x) > 0$ за $x \in (0,1)$, где је

$$f(x) = x^2 \cosh x - \sinh^2 x$$

конкретан мешовит хиперболичко-тригонометријски полином. Према теореми 162, функција $f(x)$ се може записати на следећи начин:

$$f(x) = x^2 \cosh x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cosh 2x.$$

Тада је, према леми 159 и опису метода, неједнакост $\cosh y > \underline{T}_k^{\cosh,0}(y)$ $(k = 4)$ тачна за свако $y \in \mathbb{R}$ и, према теореми 163, важи: $\cosh 2y < 1 + 2y^2 + (2\cosh^2 1 - 4)y^4$ за $y \in (0,1)$.

За $x \in (0,1)$ важи:

$$f(x) > x^2 \underline{T}_4^{\cosh,0}(x) - x^2 - (\cosh^2 1 - 2)x^4 = P_6(x),$$

где је $P_6(x)$ полином

$$P_6(x) = \frac{x^4}{24}\big(x^2 + 60 - 24\cosh^2 1\big) = \frac{x^4}{24}\big(x^2 + c\big),$$

за $c = 2.853\dots$. Како је $P_6(x) > 0$, може се закључити да је $f(x) > 0$ за $x \in (0,1)$.

**II** Сада доказујемо неједнакост:

$$\frac{x}{\sinh x} < \Big(\frac{1}{\cosh x}\Big)^{1/4},$$

за $x \in (0,1)$. Тражена неједнакост еквивалентна је неједнакости $f(x) > 0$ за $x \in (0,1)$, где је

$$f(x) = \sinh^4 x - x^4 \cosh x$$

конкретан мешовит хиперболичко-тригонометријски полином. Према теореми 162, функција $f(x)$ се може записати на следећи начин:

$$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cosh 4x - \frac{1}{2}\cosh 2x - x^4 \cosh x.$$

Тада је, према леми 159 и опису метода, неједнакост $\cosh y > \underline{T}_k^{\cosh,0}(y)$ $(k = 6)$ тачна за свако $y \in \mathbb{R}$ и, према теореми 163, важи: $\cosh y < 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \frac{1}{24}(24\cosh 1 - 37)y^6$ и $\cosh 2y < 1 + 2y^2 + \frac{2y^4}{3} + \frac{1}{24}(48\cosh^2 1 - 112)y^6$ за $y \in (0,1)$.

За $x \in (0,1)$ важи:

$$\begin{aligned} f(x) >\ & \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8}\underline{T}_6^{\cosh,0}(4x) + \tfrac{1}{2}\Big(-1 - 2x^2 - \tfrac{2x^4}{3} - \tfrac{1}{24}\big(48\cosh^2 1 - 112\big)x^6\Big) \\ & +\ x^4\Big(-1 - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{24} - \tfrac{1}{24}\big(24\cosh 1 - 37\big)x^6\Big) = P_{10}(x), \end{aligned}$$

при чему је $P_{10}(x)$ полином

$$\begin{aligned} P_{10}(x) &= \frac{x^6}{360}\big((555 - 360\cosh 1)x^4 - 15x^2 + 916 - 360\cosh^2 1\big) \\ &= \frac{x^6}{360}P_4(x). \end{aligned}$$

Реална факторизација полинома $P_4(x)$ одређена је помоћу програма Matlab, и гласи

$$P_4(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)(x^2 + px + q),$$

где је $\alpha = -0.509\ldots, x_1 = 1.871\ldots, x_2 = -x_1, p = 0, q = 32.971\ldots$; при чему важи $p^2 - 4q < 0$. Полином $P_4(x)$ има тачно два проста реална корена $x_1$ и $x_2$. Како је $P_4(x) > 0$ за $x \in (0,1) \subset (x_2, x_1)$, коначно се може закључити да је

$$P_{10}(x) > 0 \text{ за } x \in (0,1) \implies f(x) > 0 \text{ за } x \in (0,1).$$

Стога, доказ неједнакости (5.3.1) је готов. □

## 5.3.2 Доказ неједнакости из рада [10]

У раду [10] доказана је наредна теорема.

**Теорема 170.** *Нека је $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тада важи неједнакост:*

$$\frac{\sinh x}{x} > \frac{1}{\cosh \frac{x}{3}}. \tag{5.3.2}$$

У раду [56] дат је доказ неједнакости (5.3.2), који ћемо сада навести. *Доказ:* Најпре докажимо (5.3.2) за $x \in (0, \infty)$. Тражена неједнакост еквивалентна је неједнакости $F(x) = \frac{\sinh x}{x} - \frac{1}{\cosh \frac{x}{3}} > 0$, што је еквивалентно са $f(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$, где је

$$f(x) = \sinh x \cosh \tfrac{x}{3} - x$$

конкретан мешовит хиперболичко-тригонометријски полином.

Дефинишимо функцију

$$\varphi(x) = f(3x) = \sinh 3x \cosh x - 3x.$$

Сада имамо да је $f(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$ еквивалентно са $\varphi(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$. Функција $\varphi(x)$ се може записати на следећи начин:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sinh 4x + \frac{1}{2} \sinh 2x - 3x.$$

Тада је, према леми 158 и опису метода, неједнакост $\sinh y > \underline{T}_k^{\sinh,0}(y)$ ($k = 3, k = 5$) тачна за $y \in (0, \infty)$.

За $x \in (0, \infty)$ важи:

$$\varphi(x) > \frac{1}{2} \underline{T}_3^{\sinh,0}(4x) + \frac{1}{2} \underline{T}_5^{\sinh,0}(2x) - 3x = P_5(x),$$

где је $P_5(x)$ полином
$$P_5(x) = \frac{2x^3}{15}\big(x^2+45\big).$$
Како је $P_5(x) > 0$ за $x \in (0,\infty)$, може се закључити да је $\varphi(x) > 0$ за $x \in (0,\infty)$, одакле следи да је $f(x) > 0$ за $x \in (0,\infty)$.

За $x \in (-\infty, 0)$ неједнакост (5.3.2) је тачна, јер је $F(x)$ парна функција. Према томе, неједнакост (5.3.2) је доказана за $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

## 5.3.3 Доказ нове двоструке неједнакости

Као што је речено у поглављу 5.2, ако користимо горње апроксимације функција $\sinh x$ и $\cosh x$ према теореми 163, тада неједнакости типа (5.0.1) могу бити доказане једино на коначном интервалу $(a,b)$.

Знајући ово, докажимо следећу двоструку неједнакост која је, према нашем сазнању, први пут доказана у раду [56].

**Теорема 171.** *За* $x \in (0,1)$ *важи:*
$$\left(\cosh\frac{x}{4}\right)^5 < \frac{\sinh x}{x} < \frac{3\cosh x + 2}{5}. \tag{5.3.3}$$
*Доказ:* **I** Најпре докажимо неједнакост:
$$\left(\cosh\frac{x}{4}\right)^5 < \frac{\sinh x}{x},$$
за $x \in (0,1)$. Тражена неједнакост еквивалентна је неједнакости $F(x) = \frac{\sinh x}{x} - \left(\cosh\frac{x}{4}\right)^5 > 0$, што је еквивалентно са $f(x) > 0$ за $x \in (0,1)$, где је
$$f(x) = \sinh x - x\left(\cosh\frac{x}{4}\right)^5$$
конкретан мешовит хиперболичко-тригонометријски полином.

Дефинишимо функцију
$$\varphi(x) = f(4x) = \sinh 4x - 4x\cosh^5 x.$$
Сада имамо да је $f(x) > 0$ за $x \in (0,1)$ еквивалентно са $\varphi(x) > 0$ за $x \in (0, \frac{1}{4})$.

Према теореми 162, функција $\varphi(x)$ се може записати на следећи начин:
$$\varphi(x) = \sinh 4x - \frac{x}{4}\cosh 5x - \frac{5x}{4}\cosh 3x - \frac{5x}{2}\cosh x.$$

Тада је, према леми 158 и опису метода, неједнакост $\sinh y > \underline{T}_k^{\sinh,0}(y)$ $(k=5)$ тачна за $y \in (0,\infty)$ и, према теореми 163, за $y \in (0,\frac{1}{4})$ важи:
$\cosh 5y < 1 + \frac{25}{2}y^2 + \frac{625}{24}y^4 + \frac{1}{24}(1572864\cosh^5\frac{1}{4} - 1966080\cosh^3\frac{1}{4} + 491520\cosh\frac{1}{4} - 185104)y^6$,
$\cosh 3y < 1 + \frac{9}{2}y^2 + \frac{27}{8}y^4 + \frac{1}{24}(393216\cosh^3\frac{1}{4} - 294912\cosh\frac{1}{4} - 127248)y^6$ и
$\cosh y < 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \frac{1}{24}(98304\cosh\frac{1}{4} - 101392)y^6$.

За $x \in (0,\frac{1}{4})$ важи:

$$\begin{aligned}\varphi(x) > {} & \underline{T}_5^{\sinh,0}(4x) - \tfrac{x}{4}\big(1 + \tfrac{25}{2}x^2 + \tfrac{625}{24}x^4 + \tfrac{1}{24}(1572864\cosh^5\tfrac{1}{4} \\ & - 1966080\cosh^3\tfrac{1}{4} + 491520\cosh\tfrac{1}{4} - 185104)x^6\big) - \tfrac{5x}{4}\big(1 + \tfrac{9}{2}x^2 + \tfrac{27}{8}x^4 \\ & + \tfrac{1}{24}(393216\cosh^3\tfrac{1}{4} - 294912\cosh\tfrac{1}{4} - 127248)x^6\big) - \tfrac{5x}{2}\big(1 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{24} \\ & + \tfrac{1}{24}(98304\cosh\tfrac{1}{4} - 101392)x^6\big) \\ = {} & P_7(x),\end{aligned}$$

где је $P_7(x)$ полином

$$\begin{aligned}P_7(x) &= \frac{x^3}{30}\big((573520 - 491520\cosh^5\tfrac{1}{4})x^4 - 69x^2 + 20\big) \\ &= \frac{x^3}{30}P_4(x).\end{aligned}$$

Реална факторизација полинома $P_4(x)$ одређена је помоћу програма Matlab, и гласи

$$P_4(x) = \alpha(x-x_1)(x-x_2)(x^2+px+q),$$

где је $\alpha = -205.838\ldots, x_1 = 0.431\ldots, x_2 = -x_1, p = 0, q = 0.521\ldots$; при чему је неједнакост $p^2 - 4q < 0$ тачна. Полином $P_4(x)$ има тачно два проста реална корена $x_1$ и $x_2$. Како је $P_4(x) > 0$ за $x \in (0,\frac{1}{4}) \subset (x_2, x_1)$, следи да је $P_7(x) > 0$ за $x \in (0,\frac{1}{4})$.

Стога, можемо закључити да је $\varphi(x) > 0$ за $x \in (0,\frac{1}{4}) \Longrightarrow f(x) > 0$ за $x \in (0,1)$.

**II** Докажимо сада неједнакост:

$$\frac{\sinh x}{x} < \frac{3\cosh x + 2}{5},$$

за $x \in (0,1)$. Тражена неједнакост еквивалентна је неједнакости $f(x) > 0$ за $x \in (0,1)$, где је

$$f(x) = 3x\cosh x + 2x - 5\sinh x$$

конкретан мешовит хиперболичко-тригонометријски полином.

Према леми 159 и опису метода, неједнакост $\cosh y > \underline{T}_k^{\cosh,0}(y)$ $(k=4)$ је тачна за свако $y \in \mathbb{R}$ и, према теореми 163, неједнакост $\sinh y < y + \frac{y^3}{6} + \frac{1}{6}(6\sinh 1 - 7)y^5$ је тачна за $y \in (0,1)$.

За $x \in (0,1)$ важи:

$$f(x) > \; 3x\underline{T}_4^{\cosh,0}(x) + 2x - 5\big(x + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{1}{6}(6\sinh 1 - 7)x^5\big) = P_5(x),$$

где је $P_5(x)$ полином

$$P_5(x) = -\frac{x^3}{24}\big((120\sinh 1 - 143)x^2 - 16\big) = 0.082 \cdot x^3(x^2 + 8.097).$$

Како је $P_5(x) > 0$ за $x \in (0,1)$, можемо закључити да је $f(x) > 0$ за $x \in (0,1)$. Стога, доказ неједнакости (5.3.3) је готов. $\square$

ГЛАВА 6

# ЗАКЉУЧЦИ И ДАЉИ РАД

У овој глави сумираћемо закључке и навести неке смернице за будући рад.

У другој глави бавили смо се тригонометријским полиномима који образују прстен, штавише домен.

Анализирајући својства факторизације у домену комплексних тригонометријских полинома, $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$, наведено је да је то домен са једнозначном факторизацијом (UFD). Приказан је облик нерастављивих елемената овог домена, као и факторизација елемената овог домена на атоме.

За домен реалних тригонометријских полинома, $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, приказано је да није домен са једнозначном факторизацијом. Испоставља се да је то Дедекиндов полу-факторијалан домен (HFD). Описани су нерастављиви елементи овог домена, као и факторизација елемената овог домена на атоме. Такође, приказани су и максимални идеали овог домена, као и њихова веза са максималним идеалима домена $\mathbb{C}[\cos x, \sin x]$.

Иначе, сама факторизација у овим доменима отвара могућност бројних примена како у математици, посебно нумеричкој, тако и у инжењерству.

На крају ове главе приказани су алгоритми за дељење, факторисање, налажење највећег заједничког делитеља, као и за упрошћавање количника два тригонометријска полинома, над пољем рационалних бројева. У даљем раду интересантно би било, уместо поља $\mathbb{Q}$, посматрати његово раширење $\mathbb{Q}(i)$, и пробати да у домену $\mathbb{Q}(i)[\cos x, \sin x]$ одредимо нерастављиве елементе, као и да, ако је могуће, модификујемо теорију за домен $\mathbb{Q}[\cos x, \sin x]$ и прилагодимо је домену $\mathbb{Q}(i)[\cos x, \sin x]$. При томе, морамо имати у виду чињеницу да формула за тригонометријски степен, дата лемом 104, у домену $\mathbb{Q}(i)[\cos x, \sin x]$ не важи. Како је домен $\mathbb{Q}(i)[\cos x, \sin x]$ UFD, НЗД два тригонометријска полинома у њему је јединствен, до на множење инвертибилним елементима.

Природно се наметнула идеја да се, по угледу на тригонометријске полиноме, дефинишу хиперболичко-тригонометријски полиноми, скраћено ХТ-полиноми, и да се испита алгебарска структура коју чини скуп таквих полинома. То је урађено у трећој глави овог рада. Реални, односно комплексни ХТ-полиноми образују домен $\mathbb{R}[\cosh x, \sinh x]$, односно $\mathbb{C}[\cosh x, \sinh x]$. Испоставља се да су то домени са једнозначном факторизацијом (UFD). Одређени су нерастављиви елементи, као и облик максималних идеала оба ова домена.

У последњем одељку треће главе, разматрани су алгоритми код ХТ-полинома над пољем рационалних бројева, по угледу на алгоритме из друге главе. Слични резултати добијени су и за ХТ-полиноме, али за оне парове ХТ-полинома код којих је степен производа два ХТ-полинома једнак збиру степена његових чинилаца. Занимљиво би било, у даљем истраживању, позабавити се и оним паровима ХТ-полинома за које не важи ова формула. Овим би обухватили читав скуп ХТ-полинома над $\mathbb{Q}$.

У четвртој глави приказан је метод доказивања неједнакости облика $f(x) > 0$, који коришћењем коначних Маклоренових развоја генерише полиномске апроксимације, када је функција $f(x)$ мешовит тригонометријски полином једне променљиве. Овим методом могу се добити нови резултати, али и побољшати постојећи из радова [1, 2, 11, 21, 22, 46, 47, 50, 76, 85, 97], [15]-[17], [38]-[42], [61]-[63], [66]-[68], [89]-[91], [99]-[102], [107]-[110] и књига [5, 60]. Конкретни резултати приказаног метода за доказивање неједнакости дати су, у овој глави, кроз примере. Метод је илустрован на већем броју познатих и отворених проблема из теорије аналитичких неједнакости, као на пример у радовима [8, 53, 54, 65].

На крају овог дела посматрајмо алгебарску структуру $\mathbb{R}[x, \cos x, \sin x]$, која представља раширење прстена реалних тригонометријских полинома разматраних у глави 2, а чији су елементи управо мешовити тригонометријски полиноми. У даљем истраживању интересантно би било позабавити се овом структуром, у чему нам у извесној мери могу помоћи разматрања и закључци из главе 2 ове дисертације. Јасно је да су једини инвертибилни елементи домена $\mathbb{R}[x, \cos x, \sin x]$, као и код домена $\mathbb{R}[\cos x, \sin x]$, ненулте реалне константе. Међутим, оно што се на први поглед не чини једноставним је одређивање облика свих нерастављивих елемената овог домена. Дубља анализа особина факторизације у домену $\mathbb{R}[x, \cos x, \sin x]$ могла би бити један од праваца будућег истраживања.

У петој глави разматрано је проширење поступка описаног у претходној глави на класу реалних аналитичких функција, која обухвата мешовите хиперболичко-тригонометријске полиноме једне променљиве. Конкретни резултати овог метода приказани су кроз примере доказивања актуелних неједнакости. Неједнакости из радова: [9, последице 2.1 и 2.2], [10, теорема 10, последица 14], [43, напомена 1 из секције 2] и [50, лема 3.3] су неке од неједнакости које се могу доказати овим методом. Такође, комбинујући овај метод са методом из рада [55], можемо доказати неједнакости у којима се функције $\sin x$ и $\cos x$ појављују заједно са функцијама $\sinh x$ и $\cosh x$, као на пример у раду [10, теорема 1, последица 2].

Истакнимо на крају да би, у неком даљем раду, занимљиво било позабавити се и алгебарском структуром $\mathbb{R}[x, \cosh x, \sinh x]$, чији су елементи управо мешовити хиперболичко-тригонометријски полиноми, у чему нам могу помоћи разматрања и закључци из главе 3.

У главама 4 и 5 дата је теоријска основа за конкретне реализације метода разматраних у њима. У даљем раду могло би се размотрити ширење описаних метода на случајеве мешовитих тригонометријских и мешовитих хиперболичко-тригонометријских полинома више променљивих.

# Литература


[1] D. Aharonov, U. Elias, *Improved inequalities for trigonometric functions via Dirichlet and zeta functions*, Mathematical Inequalities and Applications, 16 (2013), 851–859.

[2] G. Alirezaei, *A Sharp Double Inequality for the Inverse Tangent Function*, arXiv:1307.4983 (2013), 6 pages.

[3] D. D. Anderson, D. F. Anderson, M. Zafrullah, *Factorization in integral domains*, Journal of Pure and Applied Algebra, 69 (1990), 1–19.

[4] D. D. Anderson, D. F. Anderson, M. Zafrullah, *Factorization in Integral Domains II*, Journal of Algebra, 152 (1992), 78–93.

[5] G. D. Anderson, M. Vuorinen, X. Zhang, *Topics in Special Functions III. Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions*, G. Milovanović, M. Rassias (editors), Springer, New York, 2014, 297–345.

[6] R. B. Ash, *A Course In Commutative Algebra*, Department of Mathematics University of Illinois, Urbana, http://www.math.uiuc.edu/∼r-ash/ComAlg.html.

[7] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[8] B. Banjac, M. Makragić, B. Malešević, *Some Notes on a Method for Proving Inequalities by Computer*, Results in Mathematics, 69 (2016), 161–176.

[9] C. Barbu, L. Piscoran, *On Panaitopol and Jordan type inequalities*, http://ijgeometry.com/wp-content/uploads/2012/04/Untitled1.pdf

[10] C. Barbu, L. Piscoran, *Jordan type inequalities using monotony of functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 8 (2014), 83–89.

[11] B. A. Bhayo, J. Sándor, *On Carlson's and Shafer's inequalities*, Problemy Analiza–Issues of Analysis, 3 (2014), 3–15.

[12] J. E. Borzellino, M. Sherman, *When Is a Trigonometric Polynomial Not a Trigonometric Polynomial?*, The American Mathematical Monthly, 119 (2012), 422–425.

[13] N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

[14] R. E. Bradley, L. A. D'Antonio, C. E. Sandifer, *Euler at 300: An Appreciation*, The Mathematical Association of America, 2007.

[15] C.–P. Chen, *Sharp Wilker- and Huygens-type inequalities for inverse trigonometric and inverse hyperbolic functions*, Integral Transforms and Special Functions, 23 (2012), 865–873.

[16] C.–P. Chen, W.–S. Cheung, *Sharpness of Wilker and Huygens type inequalities*, Journal of Inequalities and Applications, 2012:72 (2012), 11 pages.

[17] C.–P. Chen, J. Sándor, *Sharp inequalities for trigonometric and hyperbolic functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 9 (2015), 203–217.

[18] G. Cohen, C. Cuny, *On random almost periodic trigonometric polynomials and applications to ergodic theory*, The Annals of Probability, 34 (2006), 39–79.

[19] P. M. Cohn, *Unique Factorization Domains*, The American Mathematical Monthly, 80 (1973), 1–18.

[20] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, Second Edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.

[21] J. D'Aurizio, *Refinements of the Shafer-Fink inequality of arbitrary uniform precision*, Mathematical Inequalities and Applications, 17 (2014), 1487–1498.

[22] L. Debnath, C. Mortici, L. Zhu, *Refinements of Jordan-Stečkin and Becker-Stark Inequalities*, Results in Mathematics, 67 (2015), 207–215.

[23] D. K. Dimitrov, *Extremal Positive Trigonometric Polynomials*, Approximation Theory, A volume dedicated to Blagovest Sendov (2002), 1–24.

[24] D. K. Dimitrov, C. A. Merlo, *Nonnegative Trigonometric Polynomials*, Constructive Approximation, 18 (2001), 117–143.

[25] B. Dong, B. Yu, Y. Yu, *A symmetric homotopy and hybrid polynomial system solving method for mixed trigonometric polynomial systems*, Mathematics of Computation, 83 (2014), 1847–1868.

[26] B. A. Dumitrescu, *Trigonometric Polynomials Positive on Frequency Domains and Applications to 2-D FIR Filter Design*, IEEE Transactions on Signal Processing, 54 (2006), 4282–4292.

[27] B. A. Dumitrescu, *Positive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications*, Springer-Verlag, Dordrecht, 2007.

[28] D. S. Dummit, R. M. Foote, *Abstract Algebra*, Third Edition, John Wiley & Sons, Hoboken, 2004.

[29] C. V. Durell, A. Robson, *Advanced Trigonometry*, G. Bell & Sons, London, 1930.

[30] E. Fan, *Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations*, Physics Letters A, 277 (2000), 212–218.

[31] R. M. Fossum, *The Divisor Class group of a Krull Domain*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[32] W. Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, Addison-Wesley Advanced Book Program, Redwood City, California, 1989.

[33] R. Godement, *Analysis I: Convergence, Elementary functions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.

[34] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Seventh Edition, Academic Press, 2007.

[35] A. Grams, *Atomic rings and the ascending chain condition for principal ideals*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 75 (1974), 321-329.

[36] A. Grams, H. Warner, *Irreducible divisors in domains of finite character*, Duke Mathematical Journal, 42 (1975), 271–284.

[37] P. A. Grillet, *Abstract Algebra*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2007.

[38] B.–N. Guo, Q.–M. Luo, F. Qi, *Monotonicity results and inequalities for the inverse hyperbolic sine function*, Journal of Inequalities and Applications, 2013:536 (2013), 6 pages.

[39] B.–N. Guo, Q.–M. Luo, F. Qi, *Sharpening and generalizations of Shafer-Fink's double inequality for the arc sine function*, Filomat, 27 (2013), 261–265.

[40] B.–N. Guo, F. Qi, *Alternative proofs for inequalities of some trigonometric functions*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39 (2008), 384–389.

[41] B.–N. Guo, B.–M. Qiao, F. Qi, W. Li, *On new proofs of Wilker's inequalities involving trigonometric functions*, Mathematical Inequalities and Applications, 6 (2003), 19–22.

[42] Y. Hu, C. Mortici, *A Lower Bound on the Sinc Function and Its Application*, The Scientific World Journal, 2014 (2014), 4 pages.

[43] Y. Hua, F. Qi, *Sharp inequalities between the hyperbolic cosine function and the sine and cosine functions*, Pakistan Journal of Statistics, 29 (2013), 315–321.

[44] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[45] H. C. Hutchins, *Examples of Commutative Rings*, Polygonal Publishing House, New York, 1981.

[46] W.–D. Jiang, Q.–M. Luo, F. Qi, *Refinements and Sharpening of some Huygens and Wilker Type Inequalities*, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2 (2014), 134–139.

[47] W.–D. Jiang, F. Qi, *Some sharp inequalities involving Seiffert and other means and their concise proofs*, Mathematical Inequalities and Applications, 15 (2012), 1007–1017.

[48] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, The University of Chicago Press, Chicago-London, 1974.

[49] A. E. Kennelly, *The Application of Hyperbolic Functions to Electrical Engineering Problems*, McGraw-Hill Book Company, 1916.

[50] R. Klén, M. Visuri, M. Vuorinen, *On Jordan Type Inequalities for Hyperbolic Functions*, Journal of Inequalities and Applications, 2010:362548 (2010), 14 pages.

[51] W. Koepf, A. Bernig, H. Melenk, *TRIGSIMP: A REDUCE Package for the Simplification and Factorization of Trigonometric and Hyperbolic Expressions*, REDUCE 7 documentation, (1999).

[52] V. A. Krechmar, *A Problem Book in Algebra*, Mir Publishers, Moscow, 1978.

[53] B. Malešević, B. Banjac, I. Jovović, *A proof of two conjectures of Chao-Ping Chen for inverse trigonometric functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 11 (2017), 151-162.

[54] B. Malesević, T. Lutovac, B. Banjac, *A proof of an open problem of Yusuke Nishizawa for a power-exponential function*, Accepted in Journal of Mathematical Inequalities, (2018).

[55] B. Malešević., M. Makragić, *A method for proving some inequalities on mixed trigonometric polynomial functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 10 (2016), 849–876.

[56] M. Makragić, *A method for proving some inequalities on mixed hyperbolic-trigonometric polynomial functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 11 (2017), 817–829.

[57] D. A. Marcus, *Number Fields*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[58] J. C. Mason, D. C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2003.

[59] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1989.

[60] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, 1970.

[61] C. Mortici, *The natural approach of Wilker-Cusa-Huygens inequalities*, Mathematical Inequalities and Applications, 14 (2011), 535–541.

[62] C. Mortici, *A subtly analysis of Wilker inequality*, Applied Mathematics and Computations, 231 (2014), 516–520.

[63] C. Mortici, H. M. Srivastava, *Estimates for the arctangent function related to Shafer's inequality*, Colloquium Mathematicae, 136 (2014), 263–270.

[64] J. Mulholland, M. Monagan, *Algorithms for Trigonometric Polynomials*, Proceedings of ISSAC 2001, ACM Press, (2001), 245–252.

[65] M. Nenezić, B. Malesević, C. Mortici, *New approximations of some expressions involving trigonometric functions*, Applied Mathematics and Computation, 283 (2016), 299–315.

[66] E. Neuman, J. Sándor, *On some inequalities involving trigonometric and hyperbolic functions with emphasis on the Cusa-Huygens, Wilker and Huygens inequalities*, Mathematical Inequalities and Applications, 13 (2010), 715–723.

[67] E. Neuman, J. Sándor, *Optimal inequalities for hyperbolic and trigonometric functions*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 3 (2011), 177–181.

[68] A. Y. Özban, *A new refined form of Jordan's inequality and its applications*, Applied Mathematics Letters, 19 (2006), 155–160.

[69] P. Pau, J. Schicho, *Quantifier Elimination for Trigonometric Polynomials by Cylindrical Trigonometric Decomposition*, Journal of Symbolic Computation, 29 (2000), 971–983.

[70] Z. Petrović, *Algebra 2 – predavanja za školsku 2012/13. godinu*, Katedra za algebru i matematičku logiku, Matematički fakultet Beograd, http://poincare.matf.bg.ac.rs/∼zoranp/2012-13/Algebra_2–predavanja.pdf.

[71] G. Picavet, M. Picavet-L'Hermitte, *Trigonometric Polynomial Rings. Commutative Ring Theory and Applications*, M. Fontana, S.-E. Kabbaj, S. Wiegand (editors), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, 231 (2003), 419–433.

[72] J. Pitman, M. Yor, *Infinitely divisible laws associated with hyperbolic functions*, Journal of Combinatorial Theory A, 98 (2002), 175–191.

[73] B. Poonen, *Undecidable problems: a sampler. Interpreting Gödel: Critical Essays*, J. Kennedy (editor), Cambridge University Press, 2014, 211–241, http://www-math.mit.edu/∼poonen/papers/sampler.pdf .

[74] M. J. D. Powell, *Approximation Theory and Methods*, Cambridge University Press, 1981.

[75] Z. Pucanović, *Prsteni sa jednoznačnom faktorizacijom*, Magistarski rad, Beograd, 2002.

[76] F. Qi, Q.–M. Luo, B.–N. Guo, *A simple proof of Oppenheim's double inequality relating to the cosine and sine functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 6 (2012), 645–654.

[77] N. Radu, Sinan O. Ibrahim Al-Salihi, T. Shah, *Ascend and descend of factorization properties*, Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees (Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics), 45 (2000), 659-669.

[78] P. Ribenboim, *Classical Theory of Algebraic Numbers*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[79] J. F. Ritt, *A factorization theory for functions* $\sum_{i=1}^{n} a_i e^{\alpha_i x}$, Transactions of the American Mathematical Society, 29 (1927), 584–596.

[80] K. Roach, *Trigonometric Factorization and Integration*, Unpublished manuscript, Presented at the Maple Retreat, (1992).

[81] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third edition, McGraw-Hill, 1987.

[82] P. Samuel, *Lectures On Unique Factorization Domains*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.

[83] P. Samuel, *Unique Factorization*, The American Mathematical Monthly, 75 (1968), 945–952.

[84] P. Samuel, *About Euclidean Rings*, Journal of Algebra, 19 (1971), 282–301.

[85] J. Sándor, *On new refinements of Kober's and Jordan's trigonometric inequalities*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 19 (2013), 73–83.

[86] T. Shah, E. Ullah, *Factorization properties of subrings in trigonometric polynomial rings*, Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, 86 (2009), 123-131.

[87] T. Shah, E. Ullah, *Subrings in trigonometric polynomial rings*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 26 (2010), 35-43.

[88] A. Stakhov, B. Rozin, *On a new class of hyperbolic functions*, Chaos, Solitons & Fractals, 23 (2005), 379–389.

[89] Z.–J. Sun, L. Zhu, *On New Wilker-Type Inequalities*, ISRN Mathematical Analysis, 2011 (2011), 7 pages.

[90] Z.–J. Sun, L. Zhu, *Some Refinements of Inequalities for Circular Functions*, Journal of Applied Mathematics, 2011 (2011), 9 pages.

[91] Z.–J. Sun, L. Zhu, *Simple proofs of the Cusa-Huygens-type and Becker-Stark-type inequalities*, Journal of Mathematical Inequalities, 7 (2013), 563-567.

[92] K.-A. Toh, W. Y. Yau, *Combination of hyperbolic functions for multimodal biometrics data fusion*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 34 (2004), 1196–1209.

[93] H. F. Trotter, *An Overlooked Example of Nonunique Factorization*, The American Mathematical Monthly, 95 (1988), 339–342.

[94] E. Ullah, T. Shah, *Half-Factoriality in Subrings of Trigonometric Polynomial Rings*, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 14 (2013), 173–186.

[95] R. J. Valenza, *Elasticity of factorization in number fields*, Journal of Number Theory, 36 (1990), 212–218.

[96] R. J. Walker, *Algebraic Curves*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[97] S. Wu, *On Extension and Refinement of Wilker's Inequality*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 39 (2009), 683–687.

[98] S. Wu, L. Debnath, *A generalization of L'Hôspital-type rules for monotonicity and its application*, Applied Mathematics Letters, 22 (2009), 284–290.

[99] Z.–H. Yang, *Refinements of a two-sided inequality for trigonometric functions*, Journal of Mathematical Inequalities, 7 (2013), 601–615.

[100] Z.–H. Yang, *New sharp Jordan type inequalities and their applications*, Gulf Journal of Mathematics, 2 (2014), 1–10.

[101] Z.–H. Yang, *The sharp inequalities related to Wilker type*, Mathematical Inequalities and Applications, 17 (2014), 1015–1026.

[102] Z.–H. Yang, Y.–M. Chu, *A Note on Jordan, Adamović-Mitrinović, and Cusa Inequalities*, Abstract and Applied Analysis, 2014 (2014), 12 pages.

[103] A. Zaks, *Half factorial domains*, Bulletin of the American Mathematical Society, 82 (1976), 721–723.

[104] A. Zaks, *Half-factorial-domains*, Israel Journal of Mathematics, 37 (1980), 281–302.

[105] A. Zaks, *Atomic rings without a.c.c. on principal ideals*, Journal of Algebra, 74 (1982), 223–231.

[106] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra I*, Van Nostrand, Toronto, 1963.

[107] L. Zhang, L. Zhu, *A new elementary proof of Wilker's inequalities*, Mathematical Inequalities and Applications, 11 (2007), 149–151.

[108] L. Zhu, *A new simple proof of Wilker's inequality*, Mathematical Inequalities and Applications, 8 (2005), 749–750.

[109] L. Zhu, *Sharpening Jordan's inequality and the Yang Le inequality*, Applied Mathematics Letters, 19 (2006), 240–243.

[110] L. Zhu, *Sharpening Jordan's inequality and Yang Le inequality II*, Applied Mathematics Letters, 19 (2006), 990–994.

# Биографија аутора

Милица Макрагић рођена је 25.11.1986. године у Крушевцу. Основну школу „Нада Поповић” завршила је 2001. године и Гимназију, природно-математички смер, 2005. године у Крушевцу, оба пута као носилац Вукове дипломе.

Математички факултет Универзитета у Београду уписала је 2005. године, смер Професор математике и рачунарства. Дипломирала је 2009. године са просечном оценом 9.18. Новембра 2010. године уписала је докторске академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Алгебра. Све испите предвиђене планом и програмом докторских студија положила је са просечном оценом 9.88.

Добитник је стипендије Фонда за младе таленте Републике Србије за хиљаду најбољих студената завршних година (за школску 2008/2009. годину). По две године заредом добијала је стипендије Републике Србије и Фонда за младе таленте града Крушевца.

Од новембра 2010. године запослена је као асистент на Катедри за примењену математику Електротехничког факултета Универзитета у Београду. Током досадашњег рада на Електротехничком факултету држала је вежбе из четири предмета.

Објавила је три рада у међународним часописима са SCI листе: један у категорији M21 и два у категорији M22. Од два рада у категорији M22 један је самосталан ауторски рад. Учествовала је на четири конференције, једној међународној и три домаће. Од 2012. године до данас ангажована је на пројекту „Анализа и алгебра са применама”, Министарства просвете, науке и технолошког развоја.

Удата је, мајка једног детета.

Прилог 1.

# Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Милица Макрагић

Број индекса 2009/2010

**Изјављујем**

да је докторска дисертација под насловом

О прстену тригонометријских полинома са применама у теорији аналитичких неједнакости

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

**Потпис аутора**

У Београду, 19.04.2018.

Милица Макрагић

**Прилог 2.**

# Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милица Макрагић

Број индекса 2009/2010

Студијски програм Математика

Наслов рада О прстену тригонометријских полинома са применама у теорији аналитичких неједнакости

Ментор проф. др Бранко Малешевић

Потписани/а Милица Макрагић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, 19.04.2018.

Милица Макрагић

Прилог 3.

# Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

О прстену тригонометријских полинома са применама у теорији аналитичких неједнакости

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

**Потпис аутора**

У Београду, 19.04.2018.

Лишиуја Машрашић

1. **Ауторство**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.