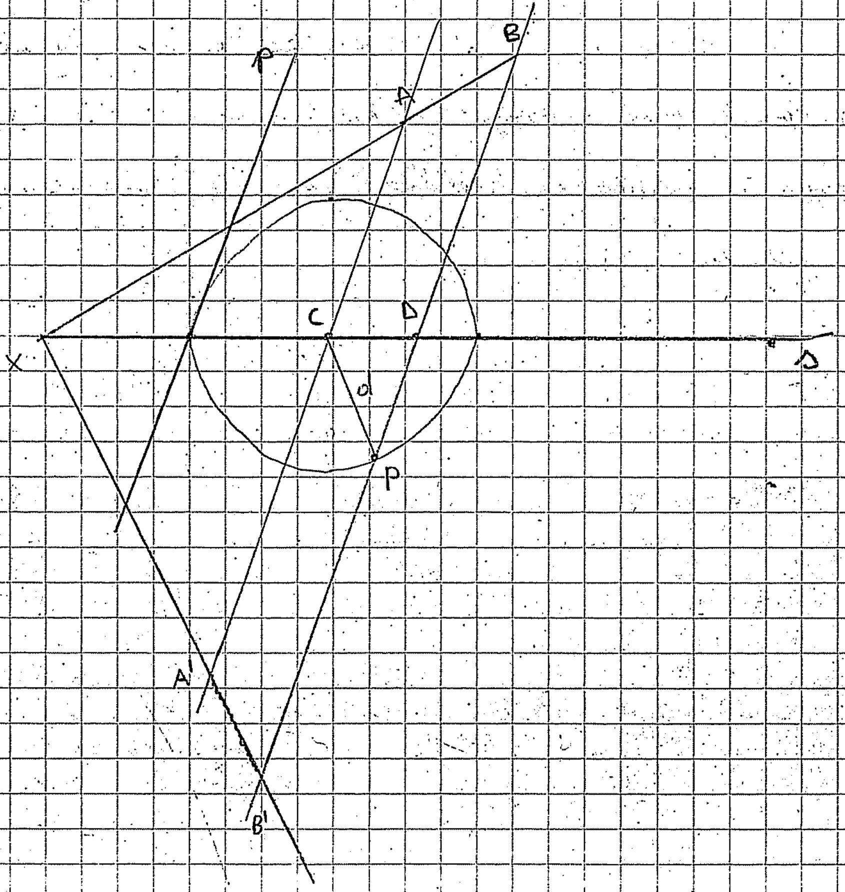
ШЕСТИ ДВОЧАС

3.22. Дата је дуж AB и праве p и s. Одредити перспективну афиност чија је оса s, зраци афиности су паралелни са p а слика дужи AB има дату дужину d.



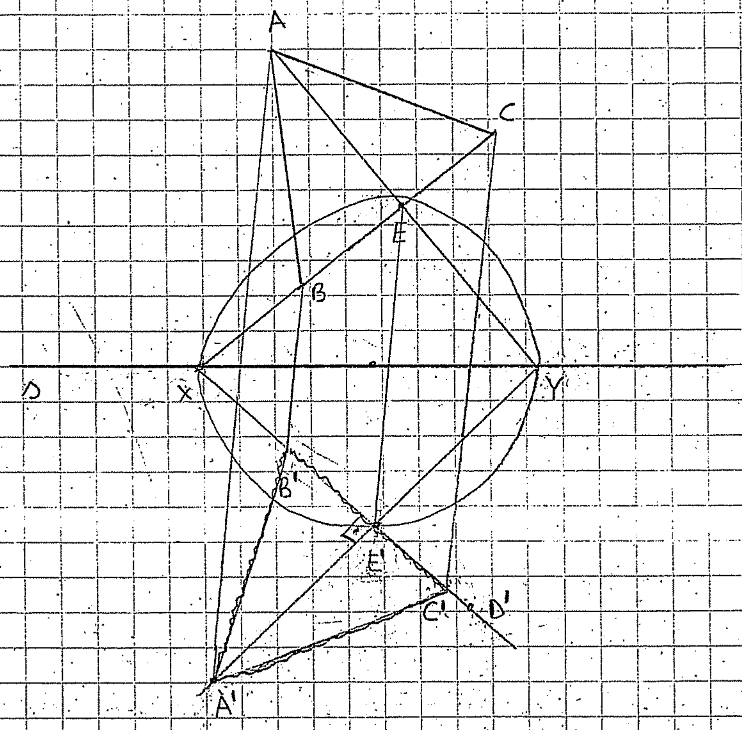
Нека је $X = AB \cap s$. По леми 1.51. знамо $X \in A'B'$ (јер су праве AB, $A'B'$ и s конкурентне), а знамо и $AA' \parallel BB' \parallel p$. За $C = AA' \cap s$ и $D = BB' \cap s$ можемо да нађемо тачку $P \in BB'$ такву да је $CP \parallel A'B'$ јер је тада $CPB'A'$ паралелограм (јер су му оба пара наспрамних страница паралелне праве), одакле је $CP \cong A'B' \cong d$.

Конструкција: Конструишемо праве паралелне са p кроз A и B и њихове пресечне тачке са s означимо са C и D. Конструишемо тачку P у пресеку праве BD и круга са центром у тачки C и полупречника d. Тачке A' и B' су пресеци праве кроз $X = AB \cap s$ паралелне правој CP са AC, односно BD.

Број решења зависи од броја пресека праве BD и круга са центром C и полупречником d. Нека је r растојање између паралелних правих AA' и BB'. Ако је $d<r$ нема решења, ако је $d=r$ имамо јединствено решење $A'=C$, $B'=D$. У општем случају је $d>r$ када имамо два решења. У случају $AB \parallel s$ задатак нема решења осим ако важи $AB \cong d$. (јер је $ABB'A'$ паралелограм у том случају због $AB \parallel s \parallel A'B'$ и $AA' \parallel BB'$)

3.23. Дата је права s и тачке A, B, C, D'. Перспективна афиност са осом s слика троугао ABC у једнакокраки троугао A'B'C' са основицом B'C', тако да D' лежи на правој B'C'. Конструисати троугао A'B'C' у општем случају.

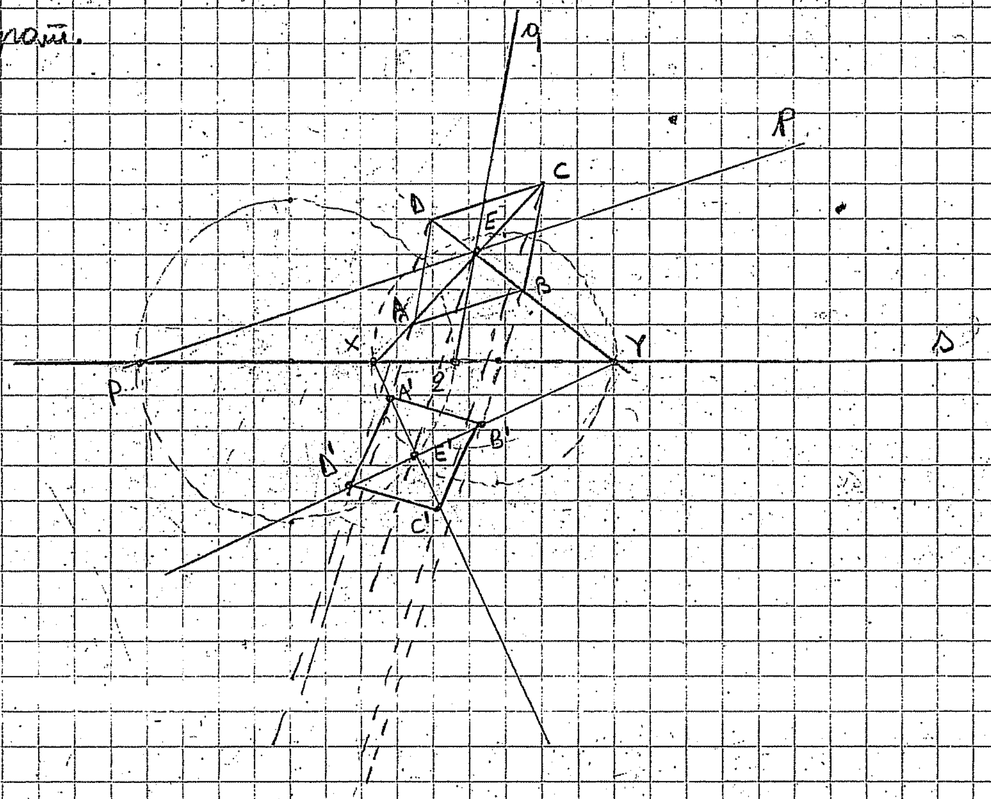
*



Ако је E средиште дужи BC, како афиност чува односе дељења дужи то се тачка E слика у средиште E' дужи B'C'. Како је $A'B' \cong A'C'$, то је E' подножје висине троугла A'B'C' из темена A'. У општем случају постоје пресеци $X = BC \cap s$ и $Y = AE \cap s$, за које важи $X \in B'C'$ и $Y \in A'E'$ по леми 1.51. Како је права на којој су тачке B', C', E' и X нормална на праву на којој су тачке права

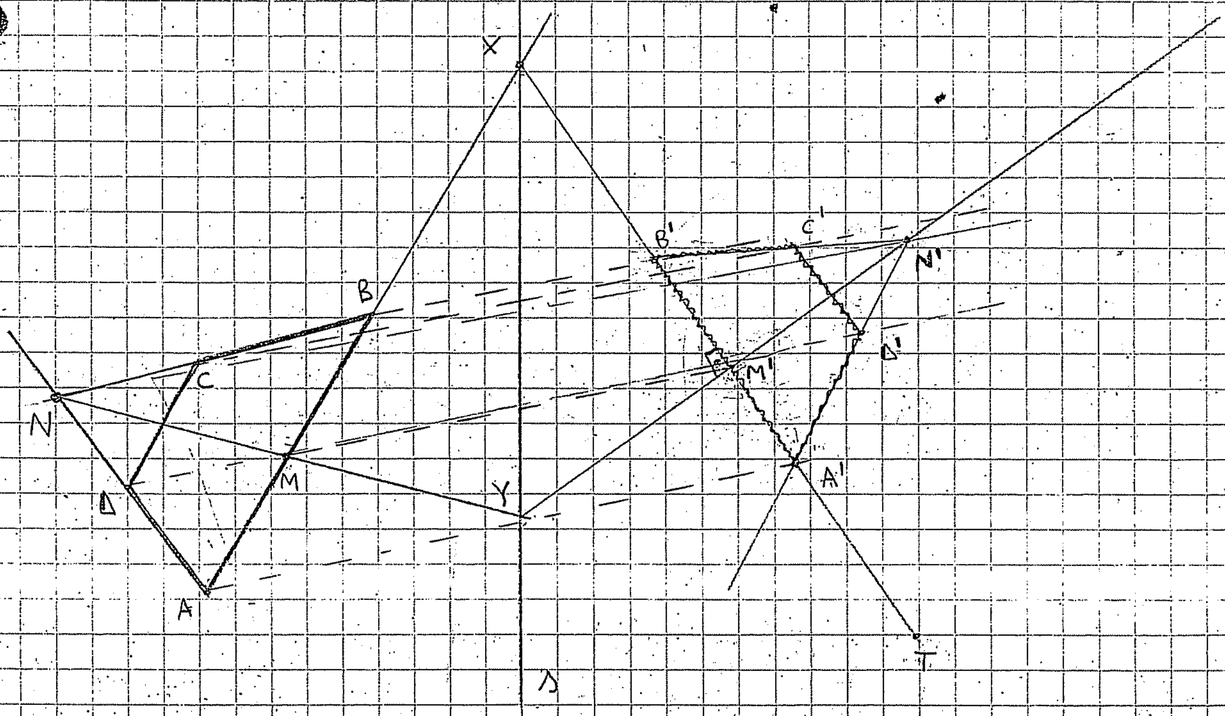
A', E' и Y и $E' \in B'C'D'X$ то је E' подножје висине из Y на $D'X$. Зато E' мора бити на кругу над пречником XY, те имамо једнозначно $X \neq E' \in k(XY) \cap D'X$. Перспективна афиност је одређена осом s и паром тачака E и E'. Тачке B' и C' добијамо у пресеку праве XD' са правом паралелној EE' кроз B, односно C, а тачку A' можемо добити у пресеку YE' и праве кроз A паралелне са EE'.

3.24. Дата је права s и четвороугао $ABCD$. Одредити перспективну афиност која има осу s, а дати четвороугао пресликава у квадрат.



Перспективна афиност чува паралелност, те уколико $ABCD$ није паралелограм задатак нема решења. Посматрајмо тачку $E = AC \cap BD$ која се слика у центар $E' = A'C' \cap B'D'$ квадрата $A'B'C'D'$. Нека су p и q праве за које важи $E \in p \parallel AB \parallel CD$ и $E \in q \parallel AD \parallel BC$. Сада ће $A'B'C'D'$ бити квадрат ако и само ако је $\angle p'E'q' = \frac{\pi}{2} = \angle A'E'B'$. Са једне стран[е] како је $A'C' \perp B'D'$ (јер је $A'B'C'D'$ квадрат) важи да $E' \in k(XY)$ где је $X = AC \cap s$ и $Y = BD \cap s$ слично као у већ урађеним задацима а са друге стране из $p' \perp q'$ важи $E' \in k(PQ)$ где је $P = p \cap s$, $Q = q \cap s$. Одавде закључујемо да E' морамо бирати из пресека два круга, $E' \in k(XY) \cap k(PQ)$, а након тога је перспективна афиност одређена осом s и паром тачака E и E'.

3.27. Дат је четвороугао $ABCD$, тачка T и права s. Одредити перспективну афиност која има осу s, а дати четвороугао пресликава у једнакокраки трапез на чијој основици лежи T.

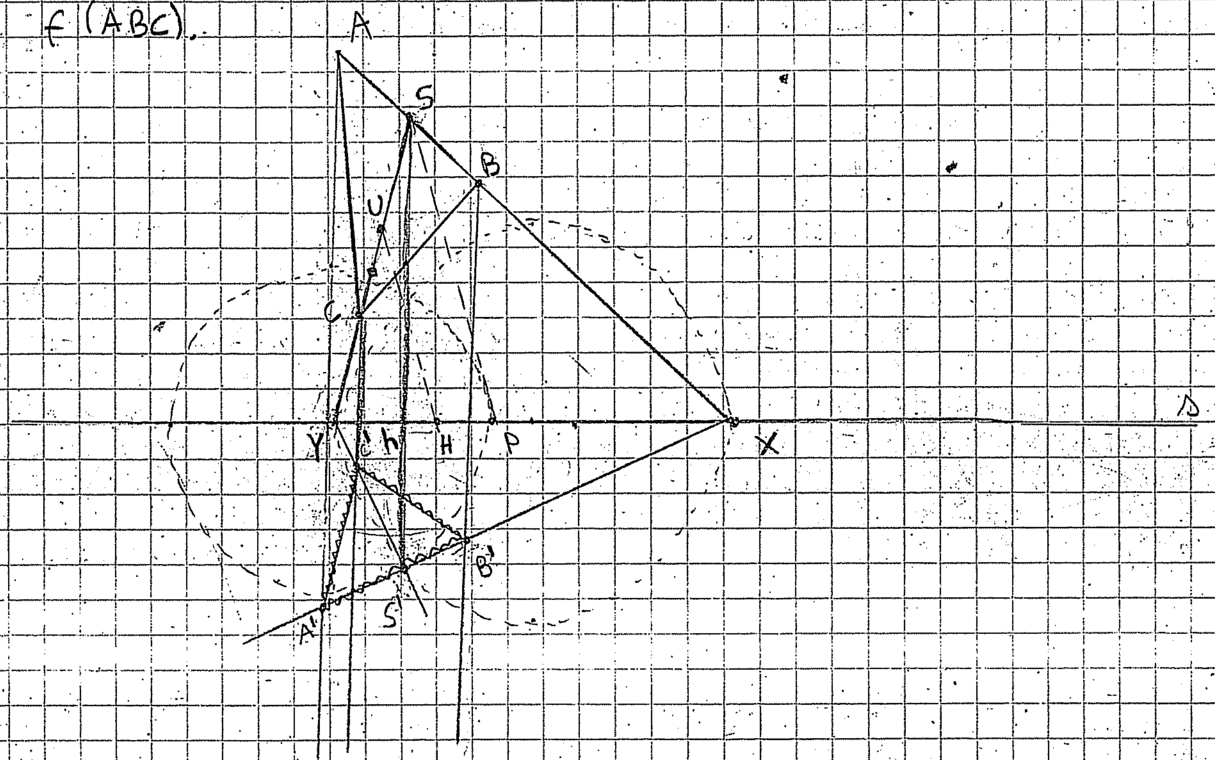


Без умањења општости нека су основице једнакокраког трапеза $A'B'C'D'$ странице $C'D'$ и $A'B' \ni T$. Пошто перспективна афиност чува паралелност и $A'B' \parallel C'D'$ то мора бити $AB \parallel CD$, па четвороугао $ABCD$ који је дат мора бити трапез. Ако је M средиште дужи AB и $N = AD \cap BC$ и перспективна афиност чува средишта дужи то је M' средиште дужи $A'B'$. По услову задатка трапез $A'B'C'D'$ је једнакокраки тј. $A'D' \cong B'C'$, а како је $A'B' \parallel C[']$ то применом Талесове теореме имамо $1 = \frac{A'D'}{B'C'} = \frac{N'A'}{N'B'}$ тј. $\Delta A'B'N$

је једнакокраки што повлачи да $A'M' \perp M'N'$. За $X = AB \wedge s$ и $Y = MN \wedge s$ имамо $A'B'TXM' \perp N'YM'$ праве, па тачка M' представља подножје нормале из тачке Y на праву TX. Перспективна афиност је одређена осом s и паром одговарајућих тачака M и M' (центар је бесконачна тачка која одговара правој MM', па можемо применити задатак 3.13.).

3.28. Дат је троугао ABC, права s и дуж h. Перспективна афиност f има осу s, а слика дат троугао у једнакокраки троугао чија је висина која одговара основици подударна са h. Одредити слику $f(ABC)$.

(*)



Нека је AB страница датог троугла ABC која се слика у основицу $A'B'$ једнакокраког троугла $A'B'C'$, и уочимо тачку S која је њено средиште. Тада је $A'B' \perp S'C'$ што слично као у већ виђеним задацима значи да $S' \in k(XY)$ тј. S' припада кругу над пречником XY где је $X = AB \wedge s$ и $Y = CS \wedge s$. Хајмо да искористимо услов

$C'S' \cong h$. Перспективна афиност значи да је $CC' \parallel SS'$ па примено Талесове теореме добијамо $YS : CS = \underline{\underline{YS'}} : C'S'$ одакле можемо конструисати дужину YS'. Један од начина да то елегантно урадимо је да уочимо тачку U која је симетрична тачки C у односу на средиште дужи YS одакле је $YU = CS$. На прави s уочимо тачку H такву да је $YH \cong h$, а затим уочимо и тачку P у којој права кроз S паралелна са UH сече YH да бисмо применом Талесове теореме добили $YS' : C'S' \underset{CC' \parallel SS'}{=} YS : CS = YS : YU =$

$$\underset{UH \parallel SP}{=} YP : YH \quad \text{тј.} \quad YS' : C'S' = YP : YH$$

$$C'S' \cong h \cong YH$$

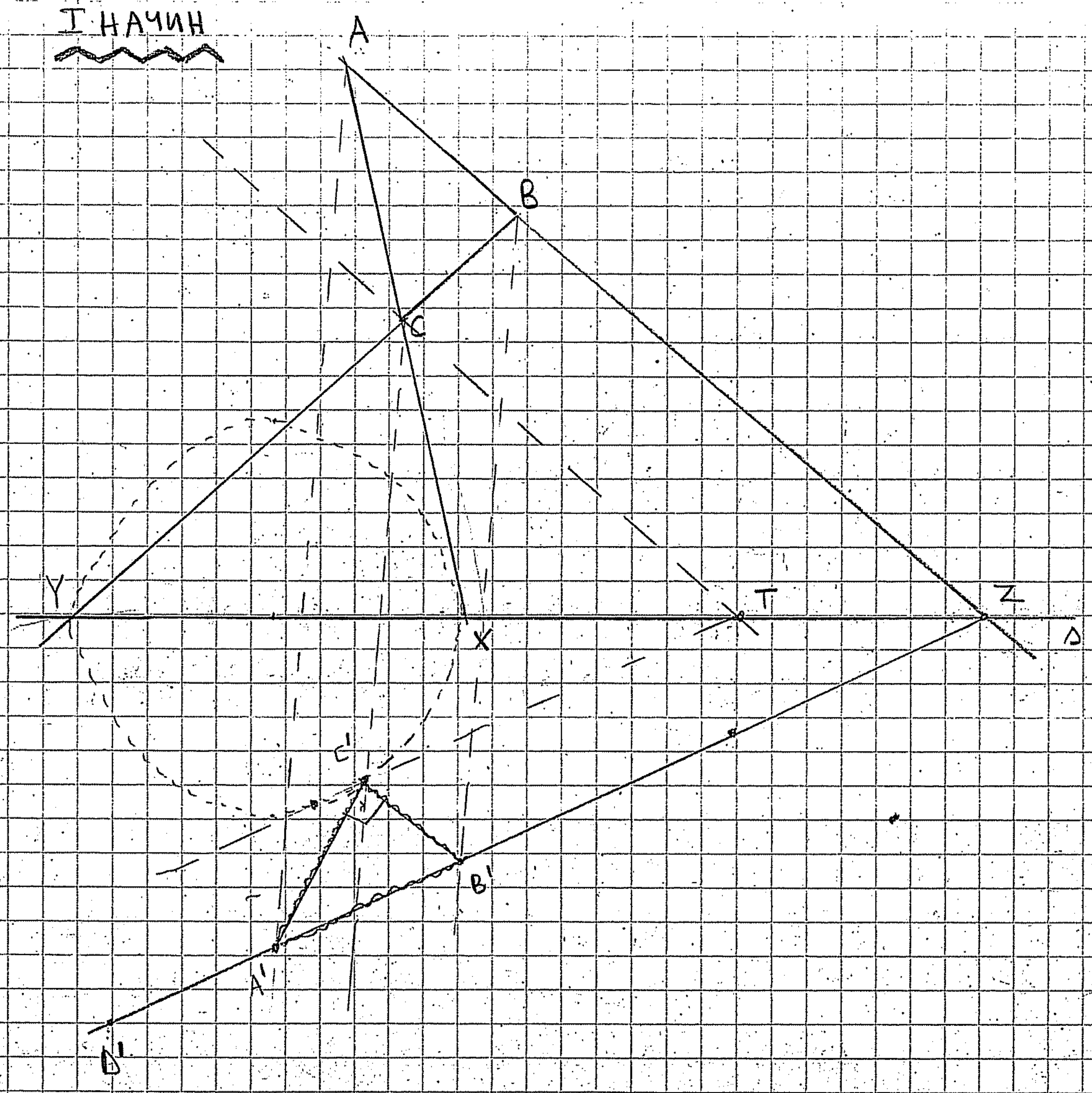
$$YS' \cong YP$$

$\Rightarrow$ Тачка S' припада кругу са центром Y који садржи тачку P односно кругу $k(Y, YP)$. Након избора тачке $S' \in k(XY) \cap k(Y, YP)$ (у општем случају постоје два решења) имамо једнозначно одређену перспективну афиност јер нам је позната оса s и пар одговарајућих тачака S и S' (центар је онда бесконачна тачка која одговара правој SS'). Остало је још да одредимо слику $f(ABC)$. Темена A' и B' добијамо у пресеку $S'X$ и правих паралелних са SS' кроз тачке A и B редом, док тачку C' добијамо као сечиште праве YS' и праве кроз тачку C паралелне са SS' и тако добијамо слику $f(ABC)$.

3.29. Дата је права s и тачке A, B, C, D'. Одредити перспективну афиност са осом s која слика троугао ABC у троугао $A'B'C'$ са правим углом код темена C', док права $A'B'$ пролази кроз D'.

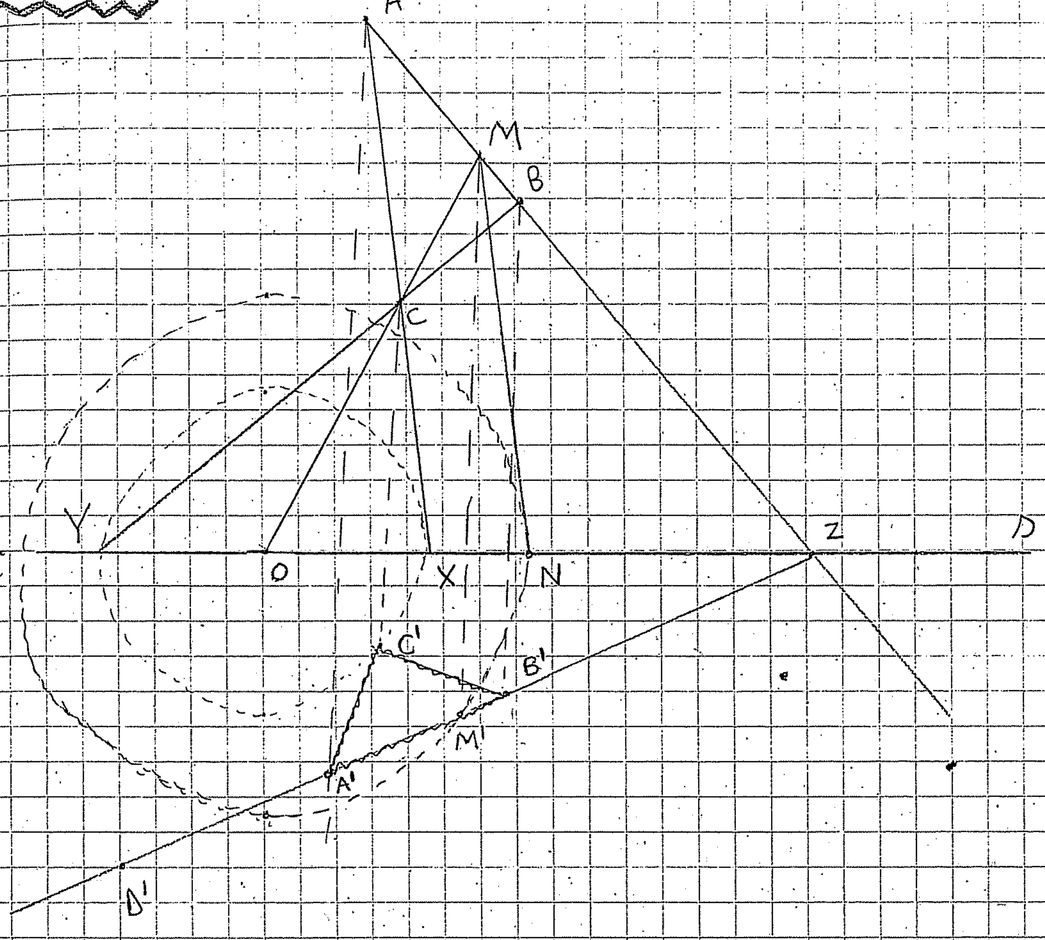
→

I НАЧИН



Нека је $X = AC \wedge s$, $Y = BC \wedge s$, $Z = AB \wedge s$. Како је $A'C' \perp B'$ јер је по услову задатка угао код темена C' прав у троуглу $A'B'C'$ то као у ранијим задацима имамо $C' \in k(XY)$, а важи и $A', B' \in D'Z$. Уочимо праву кроз тачку C паралелн са AB која сече s у тачки T. Како перспективна афиност чува паралелност и $CT \parallel AB$ то $C'T \parallel A'B'$ тј. $C'T \parallel D'Z$. Зато тачку C' можемо наћи у пресеку праве кроз T паралелне са $D'Z$ и круга $k(XY)$. Даље је перспективна афиност једнозначно одређена осом s и паром тачака C и C'.

II НАЧИН

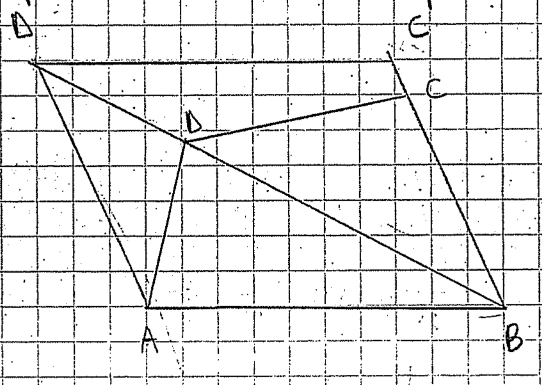


Аналогно као у првом начину закључујемо да $C' \in k(XY)$ где је $X = AC \wedge \Delta$ и $Y = BC \wedge \Delta$, и да $A', B' \in D'Z$. Желимо да обједињимо ове информације у односу на једну тачку, а најпогоднија је $M = AB \wedge CO$, где је O средиште дужи XY. Тачка M се слика у тачку $M' = D'Z \wedge C'O$ а како перспективна афиност чува однос дељења дужи то је $OM : OC = OM' : OC'$. Кључно је да нам је позната дужина дужи OC' која је једнака полупречнику круга $k(XY)$ односно половини дужине дужи XY, а имамо и конкретне дужине дужи OM и OC па можемо одредити дужину дужи OM'. Нпр. можемо уочити тачку N у пресеку праве Δ и праве кроз M паралелне са AC, одакле применом Талесове теореме добијамо $\underline{OM' : OC'} = OM : OC \underset{MN \parallel AC}{=} \underline{ON : OX}$ и $OX \cong OC'$ (обе дужи су дужине полупречника $k(XY)$)

односно $ON \cong OM'$. Зато је тачка M' на кругу са центром O који садржи тачку N тј. $k(O, ON)$, а и на правој $D'Z$ те је можемо добити у њиховом пресеку. Даље је перспективна афиност једнозначно одређена осом s и паром тачака M и M'.

3.18. Дат је четвороугао $ABCD$ који није трапез. Одредити све перспективне колинеације којима су A и B фиксне тачке, док четвороугао $ABCD$ преводе у паралелограм.

(*) Све фиксне тачке чине $s \cup \{S\}$, где је S центар, а s оса.



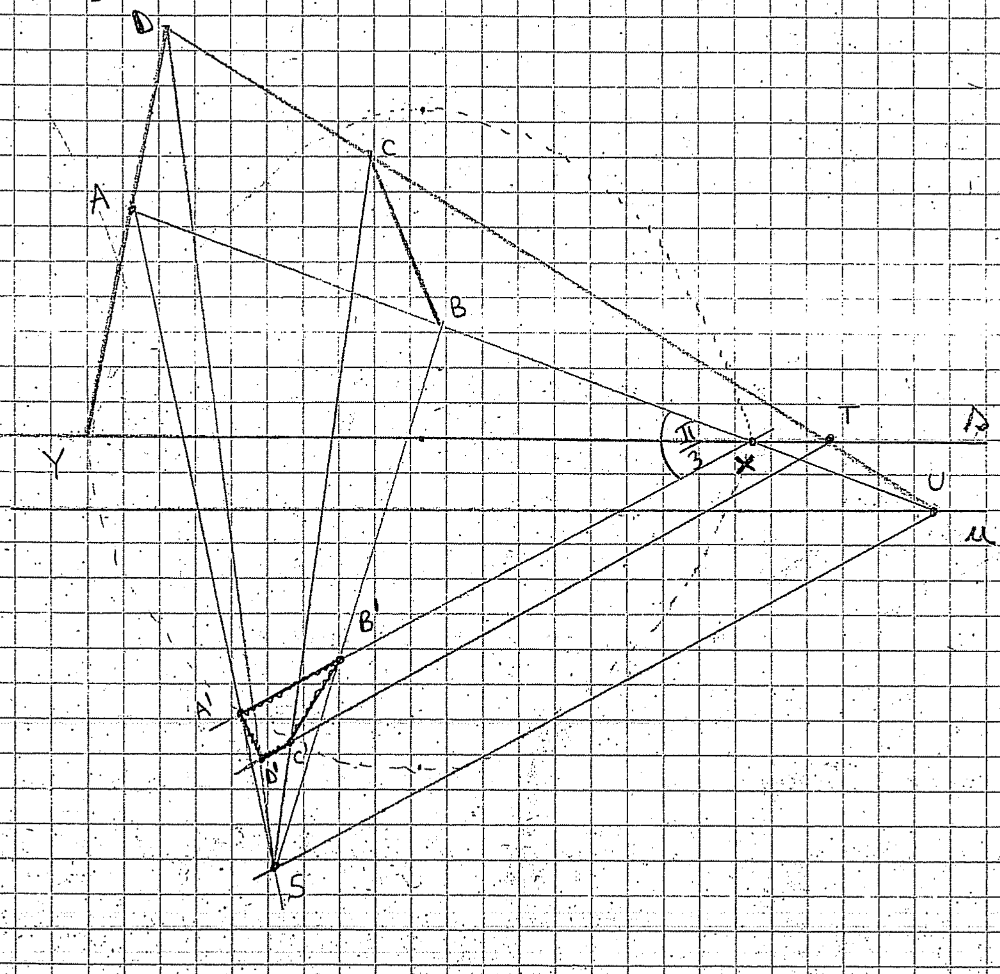
За $A \neq S \neq B$ имали бисмо $s = AB$ јер су A и B фиксне тачке па су праве CD, $C'D'$ и $s = AB$ конкурентне. Како је $ABC'D'$ паралелограм то је $AB \parallel C'D'$ и онда се CD, $C'D'$ и AB секу у бесконачној тачки односно паралелне су па је $AB \parallel CD$ што је у контрадикцији са претпоставком у задатку да $ABCD$ није трапез. Зато центар S мора бити једна од тачака A или B. Размотрићемо случај $S = B$ (случај $S = A$ се спровод[и] аналогно симетријом по A и B). Када је центар $S = B$ на основу Леме 1.51 имамо да $C' \in BC$ и $D' \in BD$, а како је

$ABC'D'$ паралелограм имамо $BC' \parallel AD'$ па је тачка D' сециште праве BD и праве кроз тачку A паралелне са $\underbrace{BC' = BC}_{\text{праве}}$ (јер $C' \in BC$

док је тачка C' сециште праве BC и праве кроз D' паралелне AB. Сада имамо центар $S = B$, пар одговарајућих тачака нпр. C и C' и оса је права која садржи тачку A (која је фикс… и тачку $CD \cap C'D'$ (јер су по Леми 1.51 праве CD, $C'D'$ и оса s конкурентне праве) па је тражена перспективна колинеација једнозначно одређена.

Д.3.

3.19. Дат је четвороугао $ABCD$ који није трапез и права s. Одредити перспективну колинеацију са осом s која четвороугао $ABCD$ преводи у правоугли трапез $A'B'C'D'$ са основицом $C'D'$ и правим углом код темена A', тако да је угао између AB и $A'B'$ једнак $\frac{\pi}{3}$.



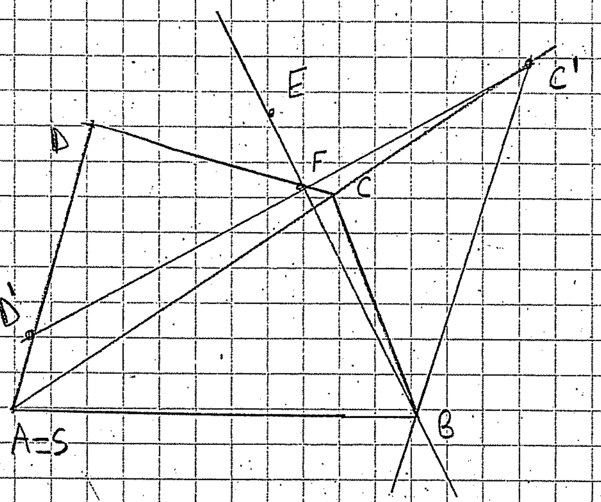
Како је $A'B'C'D'$ трапез по услову задатка то је $A'B' \parallel C'D'$ тј. $A'B'$ и $C'D'$ се секу у бесконачној тачки па је тачка $U = AB \wedge CD$ тачка противосе (јер се слика у бесконачну тачку). Зато се по Леми 1.70. противоса може добити као права u која садржи тачку U и паралелна је оси s. Прав угао код темена A' реализујемо као $A' \in k(XY)$ где је $X = AB \wedge s$ и $Y = AD \wedge s$ као у ранијим задацима, а услов $\measuredangle(AB, A'B') = \frac{\pi}{3}$ заправо значи да је $\measuredangle AXA' = \frac{\pi}{3}$ па тачку A' добијамо у пресеку круга над пречником XY и праве кроз X која са AX заклапа угао $\frac{\pi}{3}$. Тачка U се слика у бесконачну тачку праве XA' (јер је $U = AB \wedge CD$ и слика се у бесконачну тачку која одговара паралелним правама $A'B'$ и $D'C'$ тј. правој XA') тако да центар S колинеације мора бити сечиште AA' (јер су по Леми 1.51 тачке A, S и A' колинеарне, и праве кроз U паралелне XA' (јер су по Леми 1.51 тачке U, S и бесконачна тачка која одговара правој XA' колинеарне). Тражена перспективна колинеација је она одређена центром S, осом s и паром тачака A и A'.

Д.3.

3.20. Дате су тачке A, B, C, D, E међу којима нема три колинеарне, нити било која два пара чине паралелне странице. Ако су A, B, E фиксне тачке хомологије f која четвороугао $ABCD$ пресликава у трапез са основицом $f(BC)$, одредити слику тог четвороугла $f(ABCD)$ у свим могућим случајевима.

Хомологија f има центар S и осу s $(S \notin s)$ и све фиксне тачке од f припадају скупу $s \cup \{S\}$. Разликујемо два случаја у зависности од тога да ли је тачка E центар или није.

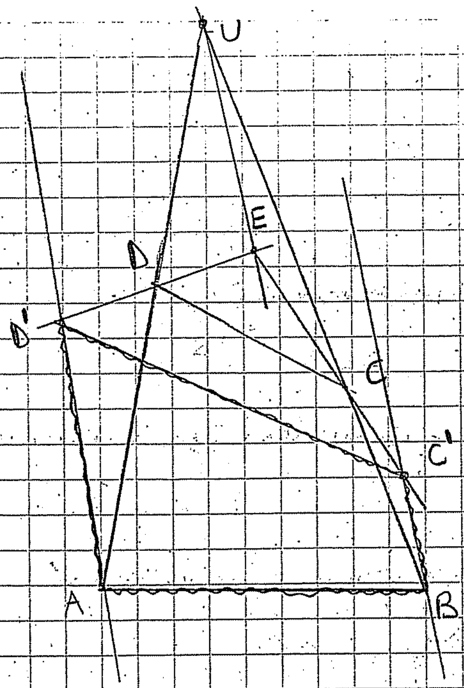
• Ако тачка E није центар онда имамо две опције, прва је да је $S=A$ и $\Delta=BE$, а друга је да $S=B$ и $\Delta=AE$ (јер су по услову задатка тачке A, B и E фиксне и нису колинеарне). Размотримо прву опцију (друга се решава аналогно пермутовањем слова A и B) тј. $S=A$ и $\Delta=BE$. По леми 1.51 имамо $C'\in AC$ и $D'\in AD$. Како је $ABC'D'$ трапез са основицом BC' то је $AD'\parallel BC'$ тј. $AD\parallel BC'$ јер $D'\in AD$. Зато је C' сечиште праве AC и праве кроз B паралелне са AD.



Тачка $F=BE\wedge CD=\Delta\wedge CD$ је на оси па $F\in C'D'$ јер су по леми 1.51 праве CD, $C'D'$ и оса Δ конкурентне, а одавде је $D'=AD\wedge C'F$ (јер $D'\in AD$ и $D'\in C'F$ због $F\in C'D'$), чиме смо одредили слику $f(ABCD)$.

• Ако је тачка E центар, онда је оса $\Delta=AB$. Означимо $U=AD\wedge BC$. Како је у трапезу $ABC'D'$: $AD'\parallel BC'$ то је $f(U)=U'=AD'\wedge BC'$ бесконачна тачка и зато тачка U припада противоси u. Циљ нам је да добијемо слике C' и D' тачака C и D да бисмо одредили слику четвороугла $ABCD$ при хомологији f.

→



По Леми 1.51 $C' \in EC$, $D' \in ED$ и $U' \in EU$ то је U' бесконачна тачка праве EU. Зато је $EU \parallel AD' \parallel BC'$ тј. C' је сециште праве EC и праве кроз B паралелне EU, док је D' сециште праве ED и праве кроз A паралелне EU, што је и требало да нађемо.