СЕДМИ ДВОЧАС

1.15. Колинеација реалне пројективне равни

Теорема 1.68 Колинеација реалне пројективне равни је индукована регуларном линеарном трансформацијом.

- Веза између старих координата X и нових координата X' је дата са $X = MX'$ где је M регуларна матрица.

Вектори представници X тачака са праве $p = [U]$ описане су једначином $U^T X = 0$. Из $X = MX' \Rightarrow 0 = U^T X = U^T M X'$ што је једначина нове праве $U'^T X' = 0 \Rightarrow \lambda U'^T = U^T M \quad /^T$

$$\lambda U' = M^T U$$

Теорема 1.69 Ако колинеација реалне пројективне равни пресликава тачке са $X' = PX$, онда она пресликава праве са $U' = (P^{-1})^T U$.

- Ако перспективна колинеација пресликава тачке везом $X' = PX$ за неку регуларну матрицу P, онда се праве сликају везом $U = P^T U'$. Противоса је права која се слика у бесконачну праву $[0:0:1]$ па противосу представља последња трећа врста матрице пресликавања P. Матрица афиног пресликавања зато мора имати нуле на прва два места у последњој врсти. (јер је противоса $u = u_\infty$ бесконачна права код афиног пресликавања

1.16. Фиксни елементи

Посматрамо пресликавање $\lambda \vec{x'} = A\vec{x}$ где је A реална квадратна матрица реда $n+1$ за $n \in \{1,2,3\}$. Фиксне тачке се јављају само за сингуларне матрице $A - \lambda Id$.

Полином $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$ је карактеристичан полином матрице A по променљивој λ, при чему је $A - \lambda Id$ сингуларна

Код је λ нула карактеристичног полинома тј. сопствена вредности матрице A. Тада је свако решење $\vec{x} \neq 0$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ. Проблем налажења фиксних тачака еквивалентан је проблему налажења свих сопствених вектора матрице A, а у питању су вектори представници фиксних тачака.

Сви сопствени вектори који одговарају некој сопственој вредности λ чине сопствени потпростор $\ker(A-\lambda Id)$.

<u>Лема 1.71.</u> Сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима су линеарно независни.

$$1 \leq \dim \ker(A-\lambda Id)$$ ← димензија може бити највише вишеструкости сопствене вредности λ

јер за сваку (реалну) сопствену вредност постоје сопствени вектори

→ Класификација пројективитета у $\mathbb{RP}^1$ и $\mathbb{RP}^2$ на стр. 68, 69, 70

(4.16) Нађи фиксне тачке пројективитета $\lambda x_1' = 2x_1 - x_2$, $\lambda x_2' = x_1 + 4x_2$. Одредити формуле овог пројективитета у неком координатном систему у којем је фиксна тачка бесконачна.

(*) $$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ јер $\lambda x_1' = 2x_1 - x_2$, $\lambda x_2' = x_1 + 4x_2$

Дакле, пројективитет је задат помоћу $\lambda \vec{x'} = A\vec{x}$ где је $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (као у задатку 4.10)

Карактеристични полином је

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 1\cdot(-1) = 8 - 6\lambda + \lambda^2 + 1 =$$

$= \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$ и има само једну (двоструку) нулу $\lambda = 3$. Сопствене векторе $\vec{x}$ тражимо из једначине

$$(A - 3Id)\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$\vec{x} = (t, -t) \text{ за } t \neq 0$$

њему одговара јединствена фиксна тачка $(1 : -1)$.

Промену координата представља матрица прелаѕка M са старе на нову базу при чему је веза између старих и нових координата дата са $\lambda \vec{x} = M\vec{x}_N$ (као у задатку 4.9)

Циљ је да фиксна тачка $(1:-1)$ постане бесконачна тачка $(1:0)$. Вектор $\underset{\vec{x}_N}{(1,0)}$ је први базни вектор, а његови коефицијенти у старој бази су редом $\underset{\vec{x}}{(1,-1)}$ те их уписујемо у прву колону матрице прелаза. Овако испуњавамо услове задатка, док матрицу M комплетирамо другом колоном, тако што упишемо било шта тако да $\det M \neq 0$. Нпр. нови координатни систем можемо задати матрицом прелаза $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Пројективитет $\lambda \vec{x'} = A\vec{x}$ прелази на нове координате постаје $\lambda M\vec{x}_N' = AM\vec{x}_N$ тј. $\lambda \vec{x}_N' = (M^{-1}AM)\vec{x}_N$ па су тражене формуле пројективитета $A_N = M^{-1}AM$

$= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

елементи по главној дијагонали заче не места, а по споредној им се промени знак, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

Приметимо да промена координата даје пројективитет $\lambda \vec{x}_\nu' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}_\nu$ који фиксира $(1:0)$ јер $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.17. Наћи фиксне тачке пројективитета $\lambda x_1' = 2x_1 + 3x_2$, $\lambda x_2' = 3x_1 + 2x_2$. Одредити нови координатни систем у ком је афиним координатама тај пројективитет хомотетија са центром у нули.

$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ па се дати пројективитет може записати као $\lambda \vec{x}' = A\vec{x}$ где је $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Карактеристични полином је

$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = (2-\lambda)^2 - 3^2 = (5-\lambda)(-1-\lambda) =$

$= (\lambda - 5)(\lambda + 1)$ и има две једноструке нуле $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 5$.

Сопствене векторе добијамо решавањем једначина $(A - \lambda_i Id)\vec{x} = 0$ $i \in \{1, 2\}$, али из једнострукости сопствених вредности знамо да су сопствени потпростори димензије 1.

$\lambda_1 = -1$; $\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$\vec{x} = (-t, t) \text{ за } t \neq 0$$

њему одговара јединствена фиксна тачка $(-1:1)$

$\ker(A - \lambda_1 Id) = \text{Span}\{(-1, 1)\}$

$\lambda_2 = 5$; $\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-3x_1 + 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\vec{x} = (t, t) \text{ за } t \neq 0$$

њему одговара јединствена фиксна тачка $(1:1)$

$\ker(A - \lambda_2 Id) = \text{Span}\{(1, 1)\}$

Добили смо две фиксне тачке $(-1:1)$ и $(1:1)$.

Пројективитет је хомотетија око фиксира бесконачну тачку и центар па фиксне тачке у новом координатном систему морају бити $(1:0)$ и $(0:1)$.

Пресликавамо тачке $(-1:1)$ и $(1:1)$ у $(1:0)$ и $(0:1)$, не нужно у том редоследу.

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ прва колона матрице } M \text{ је } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ друга колона матрице } M \text{ је } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

до на сразмерност

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

задатак има бесконачно много решења, а ово је једно од једноставнијих, друго је нпр. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Слично као у претходном задатку, пројективитет $\lambda \vec{X'} = A\vec{X}$ преласком на нове координате постаје $\lambda \vec{X_N'} = (M^{-1}AM)\vec{X_N}$ па је одговарајућа матрица пројективитета

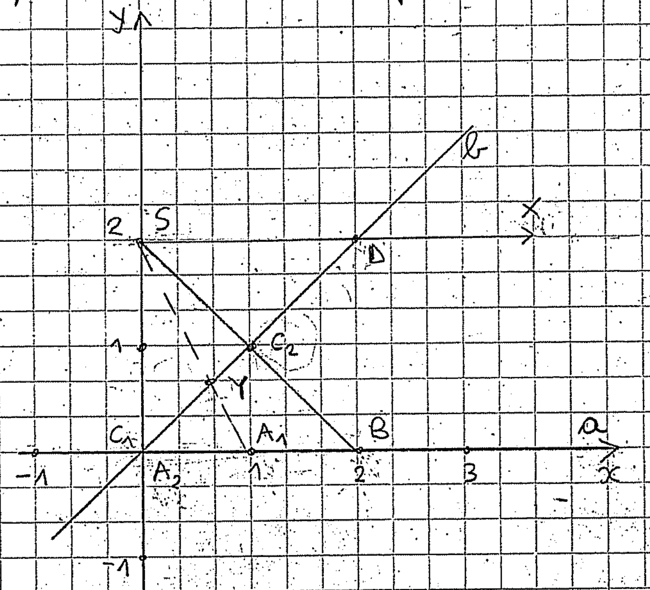
$$A_N = M^{-1}AM = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Наша промена координата даје пресликавање $\lambda \vec{X_N'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{X_N}$ које фиксира $(1:0)$ и $(0:1)$ због $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ па је хомотетија.

→ стр. 67 хомотетија је хомологија $(S \notin s)$ за коју важи $s = u$

4.22. У афиној равни дате су праве $a: y=0$, $b: y=x$ и тачка $S(0,2)$. На правој a уведен је хомогени координатни систем $(x_1 : x_2)$ базним тачкама $A_1(1,0)$, $A_2(0,0)$, $B(2,0)$, док је на правој b уведен хомогени координатни систем $(x_1' : x_2')$ базним тачкама $C_1(0,0)$, $C_2(1,1)$, $D(2,2)$. У датим хомогеним координатама одредити формуле перспективитета $f = (a) \overset{S}{\overline{\wedge}} (b)$.



По основној теореми пројективитета постоји јединствени пројективитет који различите колинеарне тачке A_1, B_1, C_1 пресликава редом у различите колинеарне тачке A_2, B_2, C_2 у општем случају. Да бисмо одредили формуле за f потребно су нам три пара одговарајућих тачака. Желимо да се међу тих шест тачака нађе што више оних чије хомогене координате унапред знамо (јер су базне) па можемо радити са $f(A_2)=C_1$, $f(B)=C_2$, $f(X)=D$. У овом случају је једина непозната тачка X, а на основу слике закључујемо да је у питању бесконачна тачка праве $y=0$ односно тачка чије би афине координате описали са $X(\infty, 2)$. Афине координате нису оне у којима морамо записати f. Због тога је потребно наћи везу између природних координата $(a_1 : a_2)$ на правој a, које добијамо из афиних координата путем $(x,0)\mapsto(x:1)$ и начин хомогених координата $(x_1:x_2)$, што се може урадити матрицом M:

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

$A_1:\ \overset{a_1\ \ a_2}{(1:1)}\mapsto\overset{x_1\ \ x_2}{(1:0)}$ $\qquad \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \lambda_1=m_{11}+m_{12},\ \boxed{0=m_{21}+m_{22}}$

$A_2:\ (0:1)\mapsto(0:1)$ $\qquad \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{0=m_{12}},\ \lambda_2=m_{22}$

$B:\ (2:1)\mapsto(1:1)$

$$\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{aligned}2m_{11}+m_{12}&=\lambda_3\\2m_{21}+m_{22}&=\lambda_3\end{aligned}$$

$$\boxed{2m_{11}+m_{12}=2m_{21}+m_{22}}$$

$$M=\begin{pmatrix}1&0\\2&-2\end{pmatrix}$$

$2m_{11}=2m_{21}-m_{21}$

$2m_{11}=m_{21}$

$m_{22}=-m_{21}=-2m_{11}$

Ова веза нам служи да одредимо координате тачке X која има природне координате $\overset{a_1\ a_2}{(1:0)}$.

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}1&0\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow X\,(1:2)$

Сада одређујемо тражени перспективитет

$$\lambda\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_{11}&n_{12}\\n_{21}&n_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Из $A_2\,(0:1)\xrightarrow{f}C_1\,(1:0)$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_{11}&n_{12}\\n_{21}&n_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow n_{12}=\lambda_1,\ \boxed{n_{22}=0}$$

$B\,(1:1)\xrightarrow{f}C_2\,(0:1)$

$$\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_{11}&n_{12}\\n_{21}&n_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{0=n_{11}+n_{12}},\ \lambda_2=n_{21}+n_{22}$$

$X\,(1:2)\xrightarrow{f}D\,(1:1)$

$$\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n_{11}&n_{12}\\n_{21}&n_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{aligned}\lambda_3&=n_{11}+2n_{12}\\\lambda_3&=n_{21}+2n_{22}\end{aligned}$$

$$\boxed{n_{11}+2n_{12}=n_{21}+2n_{22}}$$

Решавањем овог система једначина се добија

$$n_{11} = -n_{12}$$
$$n_{21} = n_{12}$$
$$n_{22} = 0$$

па је

$$\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ што се и тражило.

- Алтернативно смо могли посматрати тачку $Y\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ тако да је $f(A_1) = Y$ и $(A_1, A_2, B) \xrightarrow{f} (Y, C_1, C_2)$. Базне тачке $C_1(1:0)$, $C_2(0:1)$, $D(1:1)$ са праве b имају природне координате редом $(0:1)$, $(1:1)$, $(2:1)$ што даје везу

$$\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

$$Y: \quad \underbrace{(2:3)}_{\text{природне координате}} \mapsto \underbrace{(-1:1)}_{\text{хомогене координате}}$$

одакле се формуле могу извести као раније.

(4.27) Наћи фиксне тачке и фиксне праве колинеације

$$\lambda x_1' = 4x_1 - x_2, \quad \lambda x_2' = 6x_1 - 3x_2, \quad \lambda x_3' = x_1 - x_2 - x_3.$$

(*) Колинеација је задата системом једначина $\lambda X' = AX$ где је матрица колинеације $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ јер је

$$\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Карактеристични полином је

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)\left((4-\lambda)(-3-\lambda)+6\right) = (-\lambda-1)(-12-\lambda+\lambda^2+6) =$$

$$= (-\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-6) = -(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda+2)$$

Како имамо три различите реалне сопствене вредности свака ће дати по једну фиксну тачку. Тражимо сопствене векторе матрице A, односно векторе X за које важи $(A-\lambda Id)X = 0$

где $\lambda \in \{-1,-2,3\}$,

• $\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 4-(-1) & -1 & 0 \\ 6 & -3+1 & 0 \\ 1 & -1 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

тј. фиксна тачка је $(0:0:1)$

• $\lambda = -2$ $\begin{pmatrix} 4-(-2) & -1 & 0 \\ 6 & -3-(-2) & 0 \\ 1 & -1 & -1-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 6x_1 \\ x_3 &= x_2 - x_1 = 5x_1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

тј. фиксна тачка је $(1:6:5)$

• $\lambda = 3$ $\begin{pmatrix} 4-3 & -1 & 0 \\ 6 & -3-3 & 0 \\ 1 & -1 & -1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 6x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ 4x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

тј. фиксна тачка је $(1:1:0)$.

Колинеација има тачно три фиксне тачке: $T_1(0:0:1)$, $T_2(1:6:5)$, $T_3(1:1:0)$.

I начин

Фиксне праве ће одговарати сопственим векторима транспонаване матрице A^T која ће имати исти карактеристични полином јер транспоноване матрице имају исту детерминанту.

Нпр за $\lambda = -1$ је $\begin{pmatrix} 4-(-1) & 6 & 1 \\ -1 & -3+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} 5u_1 + 6u_2 + u_3 &= 0 \\ -u_1 - 2u_2 - u_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \Big\rangle \oplus \quad \begin{aligned} 4u_1 + 4u_2 &= 0 \\ u_1 &= -u_2 \\ u_3 &= -u_2 \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ па је фиксна права $[1:-1:1]$.

За $\lambda = -2$ $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{aligned} 6u_1 + 6u_2 + u_3 &= 0 \\ -u_1 - u_2 - u_3 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \Big\rangle \oplus \quad \begin{aligned} 5u_1 + 5u_2 &= 0 \\ u_1 &= -u_2 \end{aligned}$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ то је фиксна права $[1:-1:0]$

За $\lambda = 3$ $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$ $\quad \begin{array}{r} u_1 + 6u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 - 6u_2 - u_3 = 0 \\ -4u_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u_3 = 0 \\ u_1 + 6u_2 = 0 \\ u_1 = -6u_2 \end{array}$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ па је фиксна права $[-6:1:0]$.

II начин Једноставније је приметити да су фиксне праве заправо спојнице фиксних тачака.

$$\overrightarrow{T_2 \vee T_3} = \vec{T_2} \times \vec{T_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$= (-5, 5, -5)$ Хомогене координате су $T_2 \vee T_3 = [1:-1:1]$.

$$\overrightarrow{T_1 \vee T_3} = \vec{T_1} \times \vec{T_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$= (-1, 1, 0)$ Хомогене координате су $T_1 \vee T_3 = [1:-1:0]$

$$\overrightarrow{T_1 \vee T_2} = \vec{T_1} \times \vec{T_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \right) =$$

$= (-6, 1, 0)$ Хомогене координате су $T_1 \vee T_2 = [-6:1:0]$

4.28. Колинеација је дата формулама $\lambda x_1' = x_2 + x_3$, $\lambda x_2' = x_1 + x_3$, $\lambda x_3' = x_1 + x_2$. Доказати да је она хомологија и одредити центар и осу. Изабрати координатни систем у чијим је афиним координатама та колинеација хомотетија са центром у $(0:0:1)$.

(*) $\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ па је колинеација дата системом једначина $\lambda X' = AX$ где је матрица колинеације $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Карактеристични полином је

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda - 1) + (1 + \lambda) = -\lambda^3 + \lambda + \lambda + 1 + 1 + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 =$$

$$= (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$

$p(2) = -2^3 + 3 \cdot 2 + 2$

$p(2) = 0 \Rightarrow$

$\lambda - 2 \mid -\lambda^3 + 3\lambda + 2$

$$\begin{array}{l} -\lambda^3 + 3\lambda + 2 : (\lambda - 2) = -\lambda^2 - 2\lambda - 1 \\ -(-\lambda^3 + 2\lambda^2) \\ \quad -2\lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ \quad -(-2\lambda^2 + 4\lambda) \\ \qquad -\lambda + 2 \\ \qquad -(-\lambda + 2) \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

За $\lambda = -1$ је $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ $\quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$

односно оса је $[1:1:1]$

За $\lambda = 2$ је $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \quad /\cdot(-1) \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{x_1} + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ \boxed{-3x_2} + 3x_3 &= 0 \quad /\cdot 1 \\ 3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{x_1} + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ \boxed{-3x_2} + 3x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$x_3 \in \mathbb{R} \qquad x_2 = x_3, \quad x_1 = x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

односно центар је $(1:1:1)$.

Како важи $(1:1:1) \notin [1:1:1]$ то је у питању хомотетија. Хомотетија осим центра фиксира и све бесконачне тачке. Променом координатног система желимо да обезбедимо да оса буде бесконачна права, а да центар постане тачка $(0:0:1)$. Прва и друга колона матрице прелаза одговарају бесконачним тачкама $(1:0:0)$ и $(0:1:0)$ па је ту неопходно уписати неке векторе представнике за две тачке са осе, нпр. $(1,0,-1)$ и $(1,-1,0)$.

$(1,0,-1) \in [1:1:1]$ јер $1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0$ $\qquad$ $(1,-1,0) \in [1:1:1]$ јер $1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0$

Трећа колона одговара тачки $(0:0:1)$ па ту уписујемо вектор представник центра. Односе између наведених вектора представника можемо варирати тако да решење није једнозначно. Једно решење је матрица прелаза $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1\cdot(-1) = -3$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\cdot \operatorname{adj} M = \frac{1}{\det M}\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{n2} \\ M_{1n} & M_{2n} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix}$$

где је M_{ij} кофактор елемента m_{ij} тј. $M_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ где је D_{ij} детерминанта реда $n-1$ добијена из $\det M$ изостављањем i-те врсте и j-те колоне.

Одговарајући кофактори су

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Слично као у претходним задацима матрица колинеације у новом систему је

$$A_N = M^{-1}AM = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и она испуњава услове задатка.

4.29. Колинеација је дата формулама $\lambda x_1' = 10x_1 + 6x_2 - 6x_3$, $\lambda x_2' = -3x_1 + x_2 + 3x_3$, $\lambda x_3' = 3x_1 + 3x_2 + x_3$. Одредити фиксне тачке и фиксне праве колинеације. Изабрати координатни систем у којем је колинеација афина тако да је тачка $(0:0:1)$ бесконачна. Написати формуле колинеације у новим координатама.

$$\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ па је матрица колинеације

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Карактеристични полином је $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) =$

$$= \begin{vmatrix} 10-\lambda & 6 & -6 \\ -3 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (10-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)^2 - 3^2\right) - 6\left(-3+3\lambda-9\right) - 6\left(-9-3(1-\lambda)\right) =$$

$$= (10-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) + 72 - 18\lambda + 72 - 18\lambda =$$

$$= 10\lambda^2 - 20\lambda - 80 - \lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda + 144 - 36\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 = -(\lambda-4)^3$$ те је једина сопствена

вредности 4 (то је трострука нула).

$(A-4Id)X=0$

$$\begin{pmatrix}6 & 6 & -6\\ -3 & -3 & 3\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{matrix}6x_1+6x_2-6x_3=0\\ -3x_1-3x_2+3x_3=0\\ 3x_1+3x_2-3x_3=0\end{matrix} \Rightarrow x_1+x_2-x_3=0$$

Фиксне тачке су $\{(a:b:a+b) \mid a^2+b^2\neq 0\}$

не могу и a и b бити нула

$(A^T-4Id)\,U=0$

$$\begin{pmatrix}6 & -3 & 3\\ 6 & -3 & 3\\ -6 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=0 \qquad \begin{matrix}6u_1-3u_2+3u_3=0\\ 6u_1-3u_2+3u_3=0\\ -6u_1+3u_2-3u_3=0\end{matrix} \qquad 2u_1-u_2+u_3=0$$

$u_1=a$
$u_2=b$
$u_3=b-2a$

Фиксне праве су $\{[a:b:b-2a] \mid a^2+b^2\neq 0\}$

за $a=2, b=-1$ тј. $a=1, b=-1$

у питању је елација са центром $(2:-1:1)$ и осом $[1:1:-1]$

$(2,-1,1)\in[1:1:-1]$

$2\cdot 1-1\cdot 1-1\cdot 1=0$

Афина колинеација има бесконачну праву за фиксну праву, а како знамо да тачка $(0:0:1)$ бесконачна, то она мора бити на оригиналној фиксној правој. Из скупа решења фиксних правих узимамо ону која садржи нашу тачку а то је права $[1;2;0]$

$$\left.\begin{matrix}0\cdot a+0\cdot b+b-2a=0\\ b=2a\end{matrix}\right\} \leftarrow (0:0:1)\in[a:b:b-2a]$$

У прве две колоне матрице прелаза M уписаћемо две тачке са те праве нпр. $\underset{[1:2:0]}{\underset{\in}{(2:-1:0)}}$ и $\underset{[1:2:0]}{\underset{\in}{(0:0:1)}}$, а у трећу било шта тако да важи $\det M\neq 0$ нпр. $(1:0:0)$.

$M_{11}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0 \qquad M_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ [illegible]

$M_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 \qquad M_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}$ [illegible]

$M_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad M_{32}=-\begin{vmatrix}2 & \\ -1 & \end{vmatrix}$ [illegible]

$M_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1 \qquad M_{33}=\begin{vmatrix}2 & \\ -1 & \end{vmatrix}$ [illegible]

$M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$$M=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \det M = 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$M^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Матрица колинеације у новом систему је

$$M^{-1}AM=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 6 & -6\\ -3 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -3\\ 3 & 3 & 1\\ 4 & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -3 & 3\\ 3 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

! У последњој врсти матрице афине колинеације морамо имати две нуле на прва два мес