4.11. Нека је f пројективитет реалне пројективне праве p на себе саму и $A_0 \in p$. Уколико важи $A_{n+1} = f(A_n)$ за $n \geq 0$ и $A_6 = A_0$ одредити дворазмеру $(A_1 A_2 A_4 A_5)$ уколико постоји.

⊛ Ако постоји дворазмера $(A_1 A_2 A_4 A_5)$ онда због инваријантности пројективитета постоје и дворазмере $(A_2 A_3 A_5 A_6)$, $(A_3 A_4 A_6 A_1)$, $(A_4 A_5 A_1 A_2)$, $(A_5 A_6 A_2 A_3)$, $(A_6 A_1 A_3 A_4)$, $(A_0 A_1 A_3 A_4)$ па су тачке A_0, A_1, A_2 и A_3 различите.

На правој p уводимо хомогене координате са $A_0 = (1:0)$, $A_1 = (0:1)$, $A_2 = (1:1)$, док је $A_3 = (a:1)$ за неко $a \notin \{0,1\}$.

Пројективитет је индукован регуларном линеарном трансформацијом одакле је $\lambda \overrightarrow{A_{n+1}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \overrightarrow{A_n}$.

За $n=0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad m_{11} = 0$$

За $n=1$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_2 &= m_{12} \\ \lambda_2 &= m_{22} \\ m_{22} &= m_{12} \end{aligned}$$

За $n=2$

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_3 a &= m_{12} \\ \lambda_3 &= m_{21} + m_{22} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a(m_{21} + m_{12}) = m_{12}$$

$$a \cdot (m_{21} + m_{12}) = m_{12}$$

$$a \cdot m_{21} = (1-a) m_{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{21} = (1-a)\lambda \\ m_{12} = a\lambda \end{cases}$$

Матрица пројективитета f је $M \sim \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$

$$a\cdot(m_{21}+m_{12})=m_{12}$$

$$a\cdot m_{21}=(1-a)m_{12}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m_{21}=(1-a)\lambda \\ m_{12}=a\lambda \end{cases}$$

Матрица пројективитета f је $M \sim \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$

$$\vec{A_4}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ a(2-a) \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix}$$

$$\vec{A_5}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1-a+a(2-a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A_6}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a-a^2 \\ 1+a-a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(1+a-a^2) \\ (1-a)(2a-a^2)+a(1+a-a^2) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a(1+a-a^2) \\ 2a-\cancel{a^2}-2a^2+\cancel{a^3}+a+\cancel{a^2}-\cancel{a^3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(1+a-a^2) \\ 3a-2a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(1+a-a^2) \\ a(3-2a) \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1+a-a^2 \\ 3-2a \end{pmatrix}$$

$$A_6=A_0=(1:0)\quad\Rightarrow\quad 3-2a=0\quad\Rightarrow\quad a=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\quad M\sim\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_3=(3:2)$ $\qquad \vec{A_3}=3\vec{A_0}+2\vec{A_1}$

$A_4=(2:1)$ $\qquad \vec{A_4}=2\vec{A_0}+\vec{A_1}$

$$(A_1A_2A_4A_5)\underset{\xleftarrow{f}}{=}(A_0A_1A_3A_4)=\frac{2}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{3}.$$

4.15. Ако је $(ABCD) = 2$, $(ABCE)=3$, $(ADEF) = -2$, а f пројективитет за који је $f(A) = D$, $f(B) = E$, $f(C) = F$, $f(D) = G$, израчунати $(ABCG)$.

(*) Како резултат не зависи од избора хомогеног система координата то можемо узети $A(1:0)$, $B(0:1)$, $C(1:1)$. Тачка X има координате $((ABCX) : 1)$ па је $D(2:1)$ и $E(3:1)$ јер је дато $(ABCD)=2$ и $(ABCE) = 3$.

$\vec{E} = \vec{A} + \vec{D}$ и $(ADEF) = -2$ па је $-2=(ADEF) = \frac{1}{1} : \frac{\beta}{\alpha}$ где $\vec{F} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{D}$ и $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \vec{F} \sim 2\vec{A} - \vec{D}$ односно $F(0;1) = B$. Из $f(A)=D$, $f(B)=E$, $f(C)=F$ можемо добити матрицу пројективитета

$(ABCX) = \frac{1}{1} : \frac{1}{(ABCX)}$

$$\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$(1,0) \mapsto (2,1)$ јер $f(A)=D$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2\lambda_1 = m_{11} \\ \lambda_1 = m_{21} \end{matrix} \Rightarrow m_{11} = 2m_{21}$$

$(0,1) \mapsto (3,1)$ јер $f(B)=E$

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3\lambda_2 = m_{12} \\ \lambda_2 = m_{22} \end{matrix} \Rightarrow m_{12} = 3m_{22}$$

$(1,1) \mapsto (0,1)$ јер $f(C)=F$

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = m_{11} + m_{12} \\ \lambda_3 = m_{21} + m_{22} \end{matrix} \Rightarrow m_{12} = -m_{11}$$

све преко m_{21}

$m_{11} = 2m_{21}$

$m_{12} = -m_{11} = -2m_{21}$

$m_{22} = \frac{1}{3} m_{12} = -\frac{2}{3} m_{21}$

$$M \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{G} = M\vec{D} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

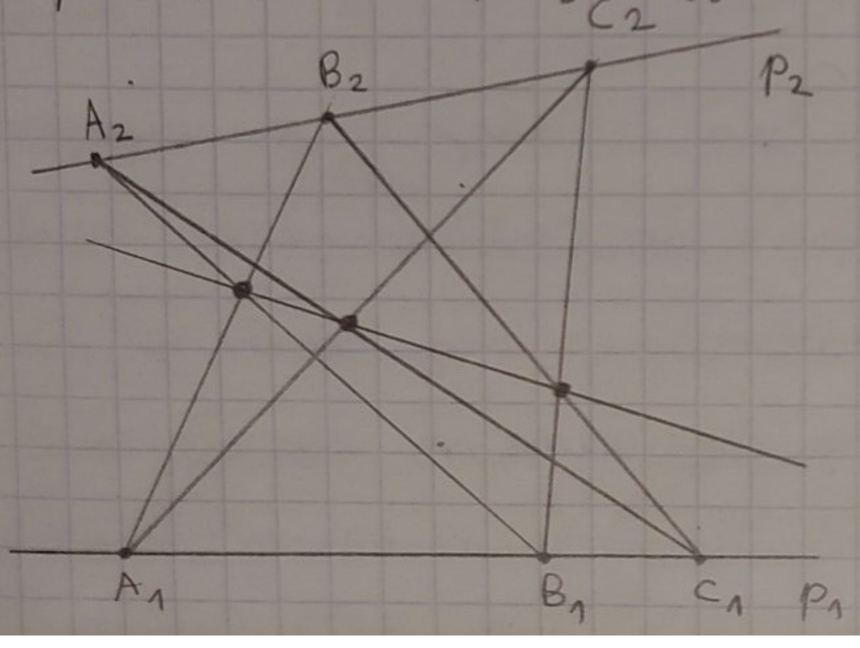
$\vec{G} = (6,4)$

$G = (\frac{3}{2} : 1)$ $\qquad \vec{G} = \frac{3}{2}\vec{A} + \vec{B}$

$$\Rightarrow (ABCG) = \frac{1}{1} : \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

1.11. Папосово тврђење

Папосово тврђење (Тврђење 1.34) Нека су p_1 и p_2 различите праве и нека су A_1, B_1, C_1 различите тачке инцидентне са p_1, а A_2, B_2, C_2 различите тачке инцидентне са p_2, тако да се све тачке разликују од $p_1 \wedge p_2$. Тада су сецишта $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке. Праву коју оне одређују називамо Папосова права.



Конфигурација Папосовог тврђења се састоји од 9 тачака и 9 правих

Деф **Папосова раван** је пројективна раван у којој важи Папосово тврђење.

Тврђење о перспективитету (Тврђење 1.37) Пројективитет између два низа тачака је перспективитет ако и само ако фиксира заједнички елемент (тј. сецишта тих низова тачака).

Основно тврђење пројективитета (Тврђење 1.39) Постоји јединствен пројективитет који различите колинеарне тачке A_1, B_1, C_1 пресликава редом у различите колинеарне тачке A_2, B_2, C_2.

Теорема 1.40 Папосово тврђење, Тврђење о перспективитету и Основно тврђење пројективитета су еквивалентна у пројективној равни.

Аксиома 1.4. (Папосова теорема) Важи Папосово тврђење.

Ако за аксиому узмемо Основно тврђење пројективитета, уз много мање муке можемо извести Папосово тврђење и поново имати целу теорију на располагању.

Теорема 1.36. (Хесенбергова теорема) Папосова раван је Дезаргова.

2.2. Координатизација Дезаргове равни

Теорема 2.4. Свака Дезаргова раван је аналитичка раван над неким телом.

Теорема 2.5. Свака Папосова раван је аналитичка раван над неким пољем.

Тело кватерниона $\mathbb{H}$ представља алгебарско проширење комплексних бројева. У питању је четвородимензиони векторски простор над реалним бројевима са базом $1, i, j, k$ где су i, j и k имагинарне јединице за које важи $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ $\mathbb{H}$ није поље, јер множење кватерниона није комутативно тј. $ij \neq ji$ јер $k \neq -k$. Аналитичка раван $\mathbb{H}P^2$ је Дезаргова, а није Папосова.

Теорема 2.6. Коначна пројективна раван је Папосова акко је Дезаргова.

→ Лако следи из Ведербернове теореме која каже да је свако коначно тело заправо поље.

1.12. Конике Папосове равни

Уводимо конике у Папосовој равни тј. подразумевамо да важе Аксиоме 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4.

Деф (Штајнерова дефиниција) Нека је $f: (P) \barwedge (Q)$ пројективитет успостављен између праменова правих у Папосовој равни.

Коника је скуп тачака које се налазе у пресеку одговарајућих правих при том пројективитету. Ако је $P \neq Q$ и f није перспективитет кажемо да је коника **Недегенерисана.**

→ X је тачка конике ако постоји права l инцидентна са P, тако да је X инцидентно и са l и са $f(l)$.

Уобичајено је $f(l) \neq l$ и тада су тачке конике сецишта $X = l \wedge f(l)$, али се може догодити да је $f(l) = l$ где је онда X свака од тачака инцидентна са l.

Ако је коника Γ одређена пројективитетом f то ћемо краће обележавати са $f : (P) \overset{\Gamma}{\wedge} (Q)$

Лема 1,44. Ако је $f : (P) \overset{\Gamma}{\wedge} (Q)$, тада важи $P, Q \in \Gamma$.

Размотримо сада дегенерисан случај конике када је Γ коника одређена перспективитетом $f: (P) \overset{D}{\doublebarwedge} (Q)$ за $P \neq Q$.

Како је по Теореми о перспективитету пројективитет перспективитет акко фиксира заједнички елемент онда је $f(P \vee Q) = Q \vee P$ па све тачке низа $(P \vee Q)$ припадају Γ.

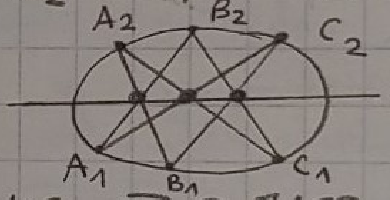
Произвољна права l прамена (P), њена слика $f(l)$ и оса D су конкурентне праве, тако да преостале тачке конике Γ припадају низу (D). Конику у овом случају представљају две праве (које се наравно секу), $\Gamma = (D) \cup (P \vee Q)$.

Лема 1.45 Недегенерисана коника и права могу имати највише две заједничке тачке.

Деф Тангента на конику Γ је права која са Γ има тачно једну заједничку тачку.

Теорема 1.48. (Паскалова теорема) Пресецишта наспрамних страница простог шестотеменика уписаног у недегерисану конику су колинеарне тачке.

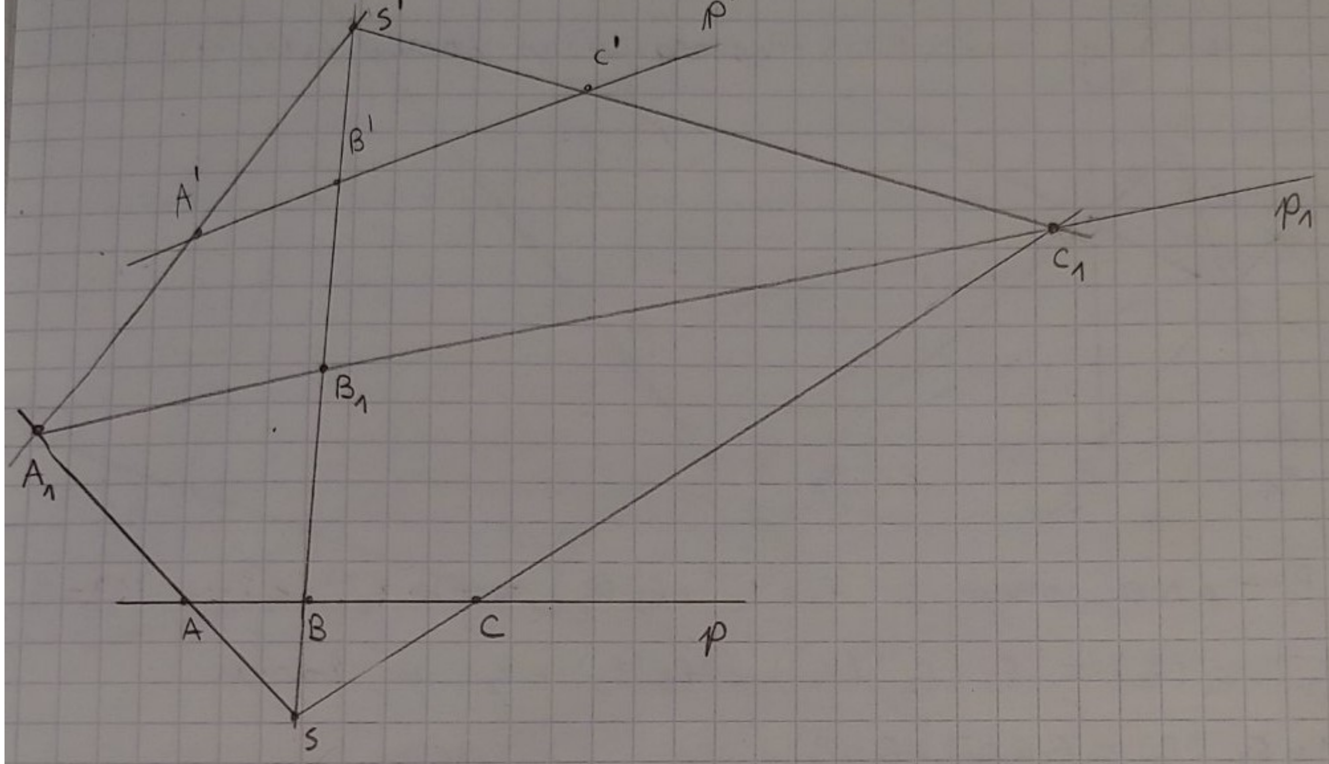
Ако је $\underline{A_1 B_2} C_1 \underline{A_2 B_1} C_2$ прост шестотеменик чија темена припадају недегенерисаној коници, тада су сецишта наспрамних страница $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке.



Праву која садржи те колинеарне тачке називамо Паскалова права. Паскалова теорема важи и у граничним случајевима када се две суседне тачке простог шестотеменика поклопе нпр. ако је у простом шестотеменику $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ $A_1 = B_2$ добијамо гранични петотеменик у којем страницу $A_1 \vee B_2$ третирамо као тангенту на конику у тој тачки. Слично можемо посматрати и гранични четворотеменик и тротеменик.

3.6. Дате су различите тачке A, B, C праве p и различите тачке A', B', C' праве p'. Одредити слику произвољне тачке $D \in p$ при пројективитету који пресликава A, B, C редом у A', B', C'. Дискутовати и случај $p = p'$.

(*) По Теореми 1.22. у Дезарговој равни сваки пројективитет два различита низа тачака се може раставити на композицију два перспективитета за $p \neq p'$, а на композицију три перспективитета за $p = p'$. Симулирамо доказ Теореме 1.18., али се не бавимо ограничењима везаним за број тачака на правој већ подразумевамо да важе све претпоставке задатка. Највише два од слова A, B, C, A', B', C' може бити укључено у $p \wedge p'$ па без умањења општости можемо узети да су тачке B и B' различите од $p \wedge p'$, иначе можемо испермутовати слова. На правој BB' изаберимо произвољне тачке S и S' различите од B и B'. Означимо даље $A_1 = SA \wedge S'A'$, $C_1 = SC \wedge S'C'$ и $B_1 = SS' \wedge A_1C_1$, као и праву A_1C_1 са p_1.



За перспективитете $f_1 : (p) \overset{S}{\overline{\overline{\wedge}}} (p_1)$ и $f_2 : (p_1) \overset{S'}{\overline{\overline{\wedge}}} (p')$

имамо да $(A, B, C) \xmapsto{f_1} (A_1, B_1, C_1) \xmapsto{f_2} (A', B', C')$

По Основној теореми пројективитета постоји јединствени пројективитет који различите колинеарне тачке A, B, C пресликава редом у различите колинеарне тачке A', B', C', па је наш пројективитет $f_2 \circ f_1 : (p) \overline{\wedge} (p')$, а тражена слика произвољне тачке $D \in p$ је $D' = f_2(f_1(D))$ тј. прво конструишемо $D_1 = f_1(D) = SD \wedge p_1$, а затим $D' = f_2(D_1) = S'D_1 \wedge p'$

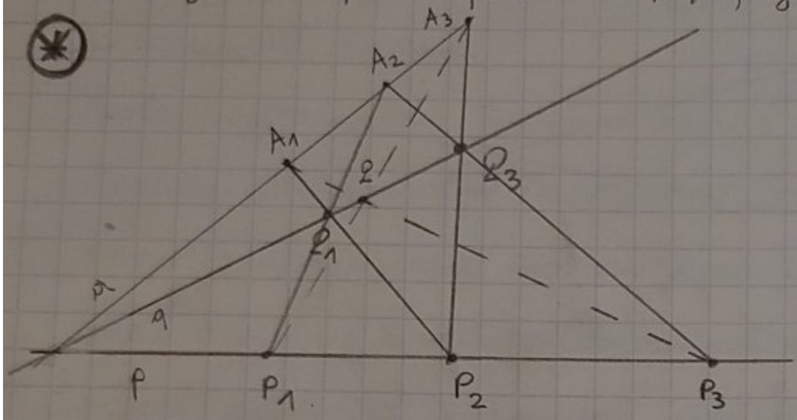
За случај $p = p'$ довољно је изабрати произвољну тачку $T \notin p$ и праву $p_2 \neq p$ ван T и уочимо перспективитет $f : (p) \overset{T}{\overline{\overline{\wedge}}} (p_2)$

Тада $(A, B, C) \xmapsto{f} (f(A), f(B), f(C))$ при чему $f(A) \, I \, p_2$, $f(B) \, I \, p_2$, $f(C) \, I \, p_2$ и $p_2 \neq p$ па на већ описан начин помоћу два перспективитета можемо пресликати тројку тачака $(f(A), f(B), f(C))$ у тројку (A', B', C') па закључујемо да се наш пројективитет може представити као композиција наведена три перспективитета. $f_2 \circ f_1 \circ f : (p) \overline{\wedge} (p)$

$\Delta_1 = f(\Delta) = \Delta T \wedge p_2$, $\Delta_2 = f_1(\Delta_1) = \Delta_1 S \wedge p_1$ и $\Delta' = f_2(\Delta_2) = S' \Delta_2 \wedge p$.

3.9. Дате су конкурентне праве a, p, q и тачке $A_1, A_2, A_3 \in a$. Ако је $f_i : (p) \overset{A_i}{\overline{\overline{\wedge}}} (q)$ за $i = 1,2,3$, доказати да важи $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$

✱

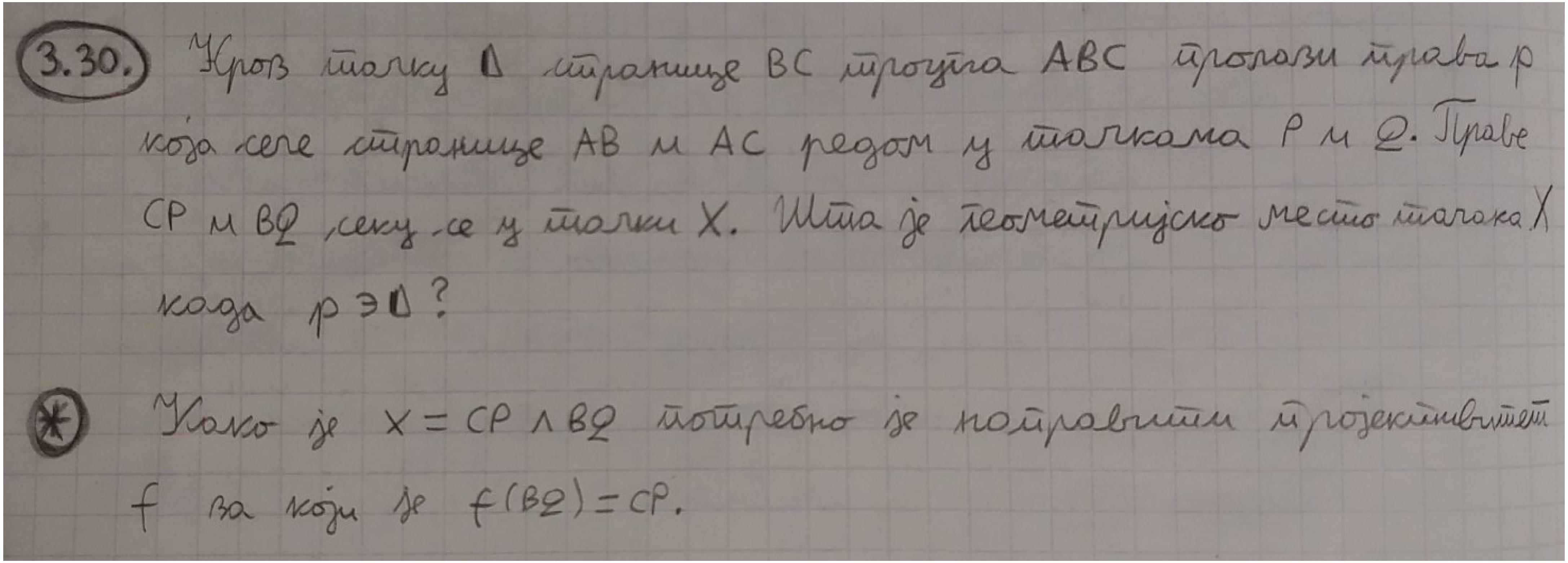


Ако је $P_2 = p \wedge a$ онда је $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 (P_2) = f_1 \circ f_2^{-1} (P_2) = f_1(P_2) = P_2$ и $f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1 (P_2) = f_3(f_2^{-1}(P_2)) = f_3(P_2) = P_2$, па важи $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 (P_2) = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1 (P_2)$.

За произвољну тачку $P_2 \in p$ различиту од $p \wedge a$ нека је $Q_1 = f_1(P_2)$ и $Q_3 = f_3(P_2)$, тј. $Q_1 = A_1P_2 \wedge q$ и $Q_3 = A_3P_2 \wedge q$

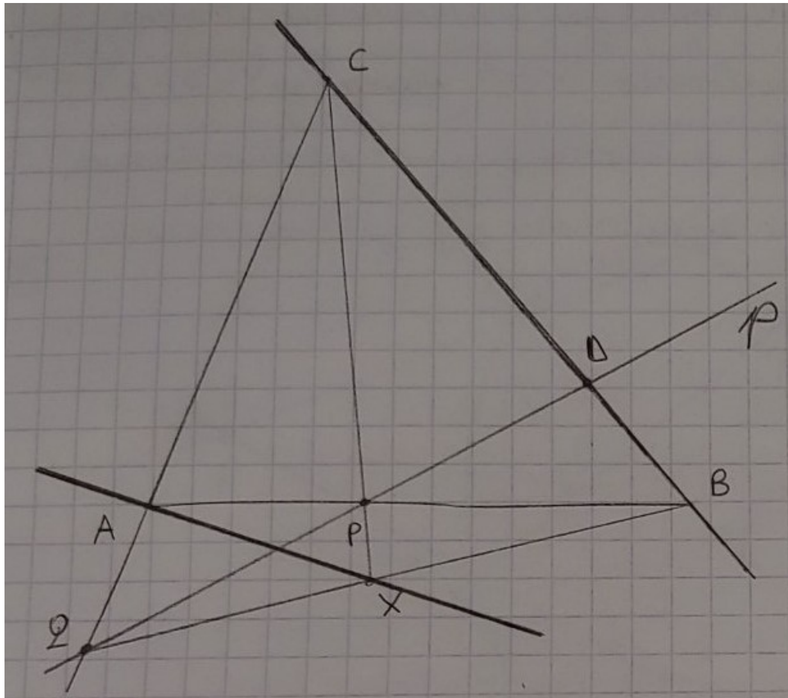
Сада посматрамо $P_1 = f_2^{-1}(Q_1) = A_2Q_1 \wedge p$ и $P_3 = f_2^{-1}(Q_3) = A_2Q_3 \wedge p$

Применом Папосове теореме на тројке колинеарних тачака $A_1, A_2, A_3 \in a$ и $P_1, P_2, P_3 \in p$ добијамо да су колинеарне тачке $A_1P_2 \wedge A_2P_1 = Q_1$, $A_2P_3 \wedge A_3P_2 = Q_3$ и $A_1P_3 \wedge A_3P_1 = Q$ одакле $Q \in Q_1Q_3 = q$. Даље је $f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1 (P_2) = f_3 \circ f_2^{-1}(Q_1) =$ $= f_3(P_1) = A_3P_1 \wedge q = Q$ и $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 (P_2) = f_1(f_2^{-1}(Q_3)) =$ $= f_1(P_3) = A_1P_3 \wedge q = Q$ одакле следи да је $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.



3.30. Кроз тачку D странице BC троугла ABC пролази права p која сече странице AB и AC редом у тачкама P и Q. Праве CP и BQ секу се у тачки X. Шта је геометријско место тачака X када $p \ni D$?

⊛ Како је $X = CP \wedge BQ$ потребно је направити пројективитет f за који је $f(BQ) = CP$.



Уочимо $f_1 : (B) \overset{AC}{\overset{=}{\wedge}} (D)$ и $f_2 ; (D) \overset{AB}{\overset{=}{\wedge}} (C)$ и онда имамо

$$BQ \xmapsto{f_1} (BQ \wedge AC) \vee D = Q \vee D = p \xmapsto{f_2} (p \wedge AB) \vee C = P \vee C = CP.$$

Тако добијамо пројективитет $f = f_2 \circ f_1 : (B) \overline{\wedge} (C)$ такав да је $f(BQ) = CP$ и по Штајнеровој дефиницији тражено геометријско место тачака X је коника. Како је по услову задатка ABC троугао то сматрамо да је $B \neq C$ па да бисмо испитали дегенерисаност конике тражимо слику заједничког елемента $B \vee C$, $f(BC) = f_2(f_1(BC)) =$

$= f_2((BC \wedge AC) \vee D) = f_2(C \vee D) = f_2(CD) = (CD \wedge AB) \vee C = B \vee C = BC$

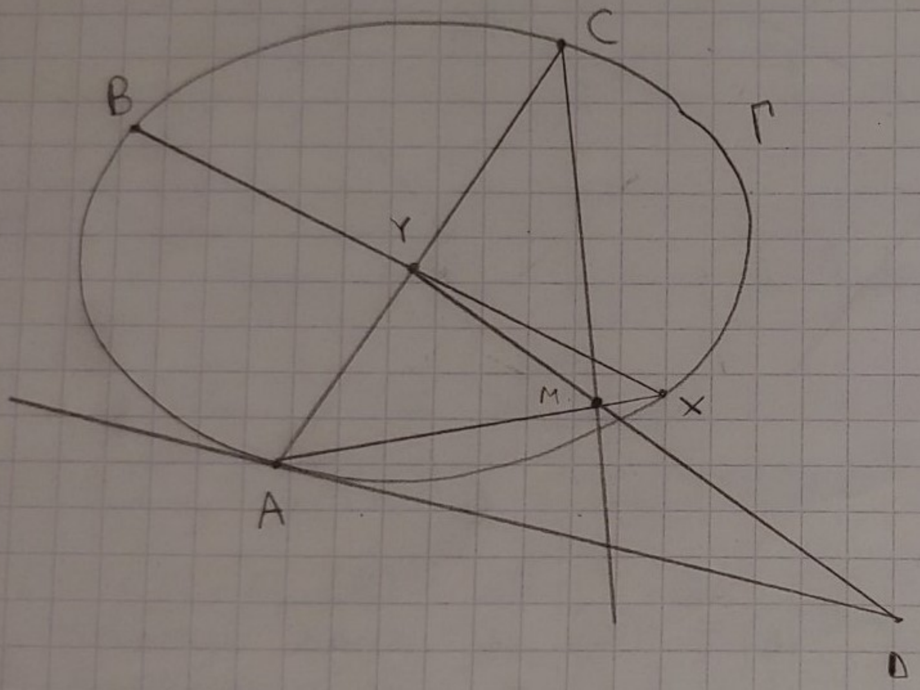
па На основу Теореме о перспективитету важи да је f перспективитет па је коника дегенерисана и важи $\Gamma = BC \cup s$ где је s оса перспективитета $f : (B) \overset{s}{\barwedge} (C)$

Како је $f(AB) = f_2(f_1(AB)) = f_2((AB \wedge AC) \vee \Delta) = f_2(A \vee \Delta) =$
$= f_2(A\Delta) = (A\Delta \wedge AB) \vee C = A \vee C = AC$ па $AB \wedge AC = A \in \Gamma$, одакле је $\Gamma = BC \cup AX$ где је X нека тачка конике.

Дакле, тражено геометријско место тачака X када $p \ni \Delta$ је $\Gamma = BC \cup AX$ где је X једна од тачака које задовољавају услов задатка.

3.31. Дата је недегенерисана коника Γ и различите тачке $A, B, C \in \Gamma$ и $D \notin \Gamma$. За произвољно $X \in \Gamma$ нека је $Y = BX \wedge AC$, те $M = AX \wedge DY$. Доказати да је геометријско место тачака M када $X \in \Gamma$ једна коника и испитати јој дегенерисаност.

*****



Како је $M = AX \wedge DY$, потребно је направити пројективитет f за који је $f(AX) = DY$. Ако поставимо $f_1 : (A) \overset{\Gamma}{\barwedge} (B)$ и $f_2 : (B) \overset{AC}{\doublebarwedge} (D)$ имамо $AX \xmapsto{f_1} BX \xmapsto{f_2} (BX \wedge AC) \vee D = Y \vee D = DY$ те добијамо $f = f_2 \circ f_1 : (A) \barwedge (D)$ тј. $f(AX) = DY$ и геометријско место тачака је коника Γ_1. Како тј. $f(AX) = \Delta Y$ и геометријско место тачака је коника Γ_1. Како $A \in \Gamma$ и $\Delta \notin \Gamma$ то $A \neq \Delta$ па дегенерисаност даје услов перспективитета $f(A\Delta) = \Delta A$ што се своди на $f_2 \circ f_1(A\Delta) = \Delta A$ тј. $f_1(A\Delta) = f_2^{-1}(\Delta A) = (\Delta A \wedge AC) \vee B = A \vee B = AB$ тј. $f_1(A\Delta) = BA$ што се дешава само уколико је $A\Delta$ тангента на Γ у тачки A. Дакле, Γ_1 је дегенерисана коника акко је $A\Delta$ тангента на Γ у тачки A.

Приметимо да $AC \xmapsto{f_1} BC \xmapsto{f_2} (BC \wedge AC) \vee \Delta = \Delta C$ па $AC \wedge \Delta C = C \in \Gamma_1$, док $A \in \Gamma_1$ и $\Delta \in \Gamma_1$ имамо на основу Леме 1.44. У случају дегенерисане конике имамо $\Gamma_1 = A\Delta \cup MC$ где је M нека тачка конике коју смо већ одредили.