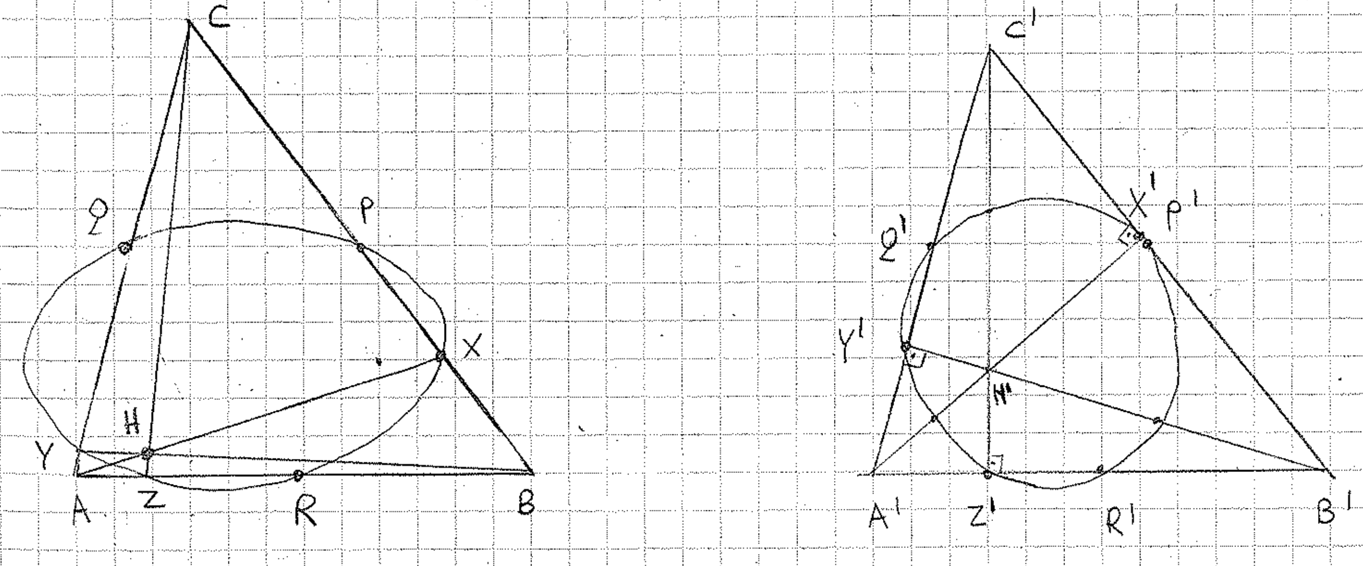
ТРИНАЕСТИ ДВОЧАС

(29.) Нека је П елипса која садржи средишта P, Q, R страница BC, CA, AB неког троугла ABC равни $\mathbb{E}^2$. Ако она праве BC, CA, AB, тим редом, сече у тачкама X, Y, Z доказати да се праве AX, BY, CZ секу у једној тачки, нпр. H и важи: $HS:ST=3:1$ (S - центар елипсе, T - тежиште троугла ABC).

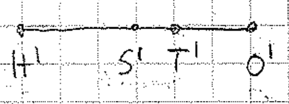
(*) Идеја је да уочимо неку афину трансформацију која ће елипсу да преслика у круг (на основу задатка (28) знамо да постоји дилатација која то ради). Како афина пресликавања чувају барицентре и однос дељења дужи, то се средишта дужи сликају у средишта дужи, тежиште троугла T се слика у тежиште T' новог троугла и центар елипсе S се слика у центар круга.



Зато се посматрана елипса слика у Ојлеров круг троугла A'B'C' јер тај круг садржи средишта P', Q' и R' страница B'C', C'A' и A'B'. Тај круг сече странице троугла A'B'C' у тачкама X', Y' и Z' које представљају подножја висина у троуглу A'B'C' из темена A', B' и C' (јер Ојлеров круг 9 тачака садржи средишта страница троугла, подножја висина и средишта дужи A'H', B'H' и C'H'). Дужи A'X', B'Y', C'Z' се секу у ортоцентру H' троугла

$A'B'C'$ и на основу познатог својства из Геометрије 2 важи $H'S' : S'T' = 3:1$ одакле закључујемо да $HS : ST = 3:1$.

подсетник: Ојлерова права



$S' = S(H'O')$, O' - центар описаног круга троугла $A'B'C'$.

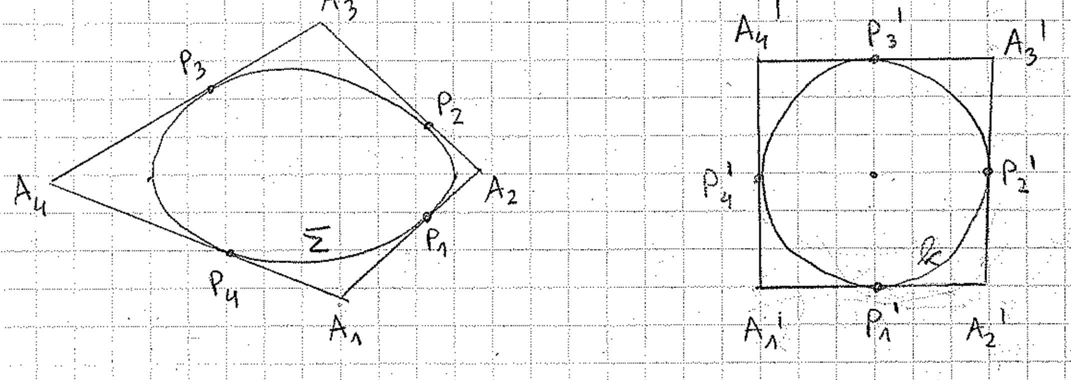
$H'T' : T'O' = 2:1$

$$\left.\begin{aligned} H'S' &= \tfrac{1}{2} H'O' \\ H'T' &= \tfrac{2}{3} H'O' \\ S'T' &= \tfrac{1}{6} H'O' \end{aligned}\right\} \Rightarrow H'S' : S'T' = \frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3:1$$

30. Ако је елипса Σ уписана у полигон $A_1, A_2, \dots, A_n$ доказати да за додирне тачке P_r страница $A_r A_{r+1}$ важи

$$\|\overrightarrow{A_1P_1}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2P_2}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{A_nP_n}\| = \|\overrightarrow{P_1A_2}\| \cdot \|\overrightarrow{P_2A_3}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{P_nA_1}\|$$

На слици је приказан случај $n=4$.



Уочимо неку афину трансформацију која пресликава елипсу Σ у круг k. Тачке $P_1, P_2, \dots, P_n$ се сликају у тачке $P_1', P_2', \dots, P_n'$ које представљају додирне тачке круга k и полигона $A_1'A_2' \dots A_n'$ па су као тангентне дужи једнаке дужи:

$$\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\| = \|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|$$
$$\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\| = \|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|$$
$$\|\overrightarrow{A_3'P_3'}\| = \|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|$$
$$\vdots$$
$$\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\| = \|\overrightarrow{P_{n-1}'A_n'}\|$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{A_1'P_1'}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2'P_2'}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{A_n'P_n'}\| = \|\overrightarrow{P_1'A_2'}\| \cdot \|\overrightarrow{P_2'A_3'}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|$$

$$\frac{\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|}{\|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|} \cdot \frac{\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\|}{\|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|} \cdot \ldots \cdot \frac{\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\|}{\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|} = 1$$

Како афине трансформације чувају однос дељења „колинеарних" дужи, имамо да је:

$$\frac{\|\overrightarrow{A_1P_1}\|}{\|\overrightarrow{P_1A_2}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|}{\|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{A_2P_2}\|}{\|\overrightarrow{P_2A_3}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\|}{\|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\|\overrightarrow{A_nP_n}\|}{\|\overrightarrow{P_nA_1}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\|}{\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|\overrightarrow{A_1P_1}\|}{\|\overrightarrow{P_1A_2}\|}\cdot\ldots\cdot\frac{\|\overrightarrow{A_nP_n}\|}{\|\overrightarrow{P_nA_1}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|}{\|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|}\cdot\ldots\cdot\frac{\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\|}{\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|} =$$

$$\Downarrow$$

$$\|\overrightarrow{A_1P_1}\|\cdot\|\overrightarrow{A_2P_2}\|\cdot\ldots\cdot\|\overrightarrow{A_nP_n}\| = \|\overrightarrow{P_1A_2}\|\cdot\|\overrightarrow{P_2A_3}\|\cdot\ldots\cdot\|\overrightarrow{P_nA_1}\|$$

што се и тражило.

31. Нека је $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ хипербола и $P\in\mathcal{H}$ произвољна тачка. Доказати да постоји афино пресликавање којим се хипербола $\mathcal{H}$, слика на хиперболу $\mathcal{H}': x'y'=1$ при коме се тачка P слика у тачку $P'(1,1)$.

(*) $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\underbrace{\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}_{x_1'}\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}_{y_1'}=1$$

$$x_1'=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$$

$$y_1'=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x_1'y_1'=1$ и тај производ не смемо мењати

$$x'=cx_1'$$

$$y'=\frac{1}{c}y_1'$$

Константу $c\neq 0$ бирамо тако да се произвољна тачка $P(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$ слика у тачку $P'(1,1)$.

$$x'=c\cdot x_1' \Rightarrow 1 = c\cdot\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right) \Rightarrow c=\frac{1}{\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}}$$

Тада је и $1=\frac{1}{c}\cdot\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)$ (из $y'=\frac{1}{c}y_1'$) тј.

$c=\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=\frac{1}{\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}}$ где последња једнакост важи јер $P(x_0,y_0)\in\mathcal{H}$

па је $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$ тј. $\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)=1 \Rightarrow \frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=\frac{1}{\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}}$

Дакле, једно афино пресликавање које пресликава дату хиперболу X у X' и тачку $P(x_0,y_0)$ у тачку $P'(1,1)$ је:

$$x'=\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

$$y'=\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$$

32. У $\mathbb{R}^4$ одредити праву l такву да $M\in l$ где $M(0,1,2,3)$ и $l\perp p$ где је p: $\frac{x_1-1}{2}=\frac{x_2-2}{1}=\frac{x_3-3}{2}=\frac{x_4-4}{1}$ и $l\cap q\neq\emptyset$ где је права q: $\frac{x_1+1}{3}=\frac{x_2+1}{2}=\frac{x_3+3}{1}=\frac{x_4-7}{0}$ и $\measuredangle(l,r)=\arccos\frac{1}{6}$ где је права r: $x_1=x_2=x_3=x_4$.

Како $l\cap q\neq\emptyset$ то на правој l постоји тачка Q која је и на правој q: $\frac{x_1+1}{3}=\frac{x_2+1}{2}=\frac{x_3+3}{1}=\frac{x_4-7}{0}=s$ тј. $Q(-1+3s,-1+2s,-3+s,7)$

Права l има вектор правца $\overrightarrow{MQ}$ па због $l\perp p$ мора бити $\overrightarrow{MQ}\perp\vec{p}$

$\overrightarrow{MQ}(-1+3s,-2+2s,-5+s,4)$, $\vec{p}=(2,1,2,1)$ па s налазимо из $\overrightarrow{MQ}\cdot\vec{p}=0$ тј. $2(-1+3s)+1\cdot(-2+2s)+2(-5+s)+1\cdot4=0$

$$-2+6s-2+2s-10+2s+4=0$$

$$10s=10$$

$$s=1 \Rightarrow Q(2,1,-2,7)$$

$\overrightarrow{MQ}(2,0,-4,4)$ $\qquad r: x_1=x_2=x_3=x_4 \Rightarrow \vec{r}=(1,1,1,1)$

$$\cos\measuredangle(l,r)=\frac{\langle\overrightarrow{MQ},\vec{r}\rangle}{\|\overrightarrow{MQ}\|\,\|\vec{r}\|}=\frac{(2,0,-4,4)\cdot(1,1,1,1)}{\sqrt{2^2+16+16}\cdot\sqrt{4}}=\frac{2}{\sqrt{36}\cdot2}=\frac{1}{6}$$

па права l задовољава и услов $\measuredangle(l,r)=\arccos\frac{1}{6}$.

Дакле, тражена права која задовољава дате услове је:

$$l: \frac{x_1}{1}=\frac{x_2-1}{0}=\frac{x_3-2}{-2}=\frac{x_4-3}{2}.$$

ЕУКЛИДСКА ГЕОМЕТРИЈА

Изометрије равни $(n=2)$

$f: \; y = Ax + b$ је изометрија равни $\Leftrightarrow AA^T = E$

изометрија	скуп фиксних тачака	сопствене вредности
коинциденција	$\mathbb{R}^2$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
транслација	$\emptyset$	
осна рефлексија	права	$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$
клизајућа рефлексија	$\emptyset$ (фиксна је права, али не тачка по тачка)	
ротација	тачка	нема
централна симетрија		$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

33. Нека је пресликавање f дато помоћу формуле

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Доказати да је пресликавање f изометрија, одредити основне компоненте те изометрије и скицирати пут једне тачке.

$$f: \; \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Како је $AA^T = E$ то пресликавање је изометрија.

Да бисмо одредили која је изометрија у питању налазимо сопствене вредности матрице A.

$\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{5}-\lambda & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5}-\lambda\right)^2+\frac{16}{25} > 0$$

$\Rightarrow$ Матрица A нема сопствене вредности па је изометрија f ротација.

Центар те ротације налазимо као фиксну тачку изометрије f.

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+4 \quad /\cdot 5 \\ y &= \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2 \quad /\cdot 5 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 5x &= 3x-4y+20 \\ 5y &= 4x+3y-10 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 2x+4y &= 20 \\ 4x-2y &= 10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x+2y &= 10 \Rightarrow x = 10-2y \\ 2x-y &= 5 \end{aligned}$$

$2(10-2y)-y=5$

$20-4y-y=5$

$5y=15 \Rightarrow y=3$

$x=10-2y$

$x=10-2\cdot 3$

$x=10-6$

$x=4$

Једина фиксна тачка је $S(4,3)$ и то је центар ротације.

$$\vec{f}=A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

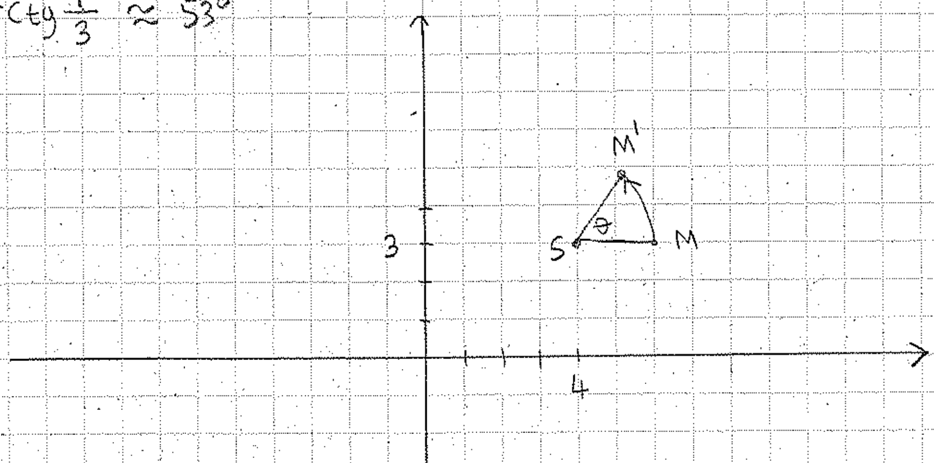
матрица ротације за угао θ око центра ротације супротно од кретања казаљке на сату

$\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{5}$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

$\theta=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\approx 53^\circ$



(34.) Трансформација равни је дата формулама $x' = 1-y$ и $y' = 2-$
Доказати да је ова трансформација изометрија, одредити њене компоненте и скицирати путању тачке.

(*)
$$x' = -y+1$$
$$y' = -x+2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$\Rightarrow$ Дата трансформација јесте изометрија равни.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1 \Rightarrow$ у питању је осна или клизајућа рефлексија што ћемо утврдити на основу фиксних тачака

$$\begin{matrix} x = 1-y \\ y = 2-x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y = 1 \\ x+y = 2 \end{matrix} \ \lightning$$

$\Rightarrow$ нема фиксних тачака па је у питању клизајућа рефлексија

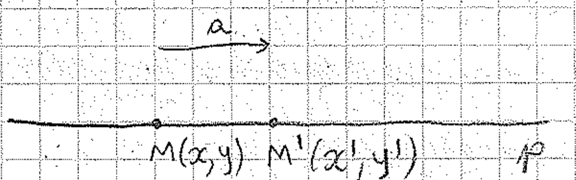
Вектор правца осе рефлексије p и вектор транслације су паралелни сопственом вектору за $\lambda = 1$.

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$-v = u$$
$$-u = v$$

$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ је сопствени вектор



$a = \lambda \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Једначину праве p добијамо из услова $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{f_1}$

$$MM'(1-y-x,\ 2-x-y) \parallel (1,-1)$$

$$\frac{1-x-y}{1} = \frac{2-x-y}{-1}$$

$$x+y-1 = 2-x-y$$

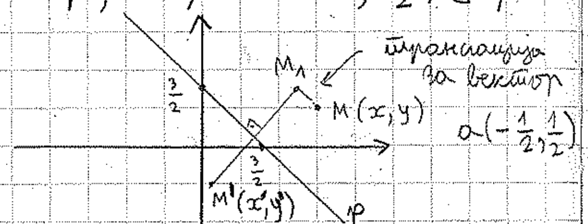
$$p:\ 2x+2y-3=0$$

x	0	$\frac{3}{2}$
y	$\frac{3}{2}$	0

Да бисмо добили како изгледа вектор транслације, довољно је да пресликамо једну тачку са праве p, нпр. $P(0,\frac{3}{2}) \in p$

$P'(-\frac{1}{2}, 2)$

$a = \overrightarrow{PP'} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



<u>Напомена:</u> Да је скуп фиксних тачака била права, изометрија би била осна рефлексија и то у односу на ту праву.

(35.) Одредити у координатама формуле клизајуће рефлексије ако је оса права $y=x$ а вектор $\vec{a}=(3,3)$.

✱ T – транслација за вектор $\vec{a}=(3,3)$ $\quad (\vec{a} \parallel (1,1))$

$$T:\ \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

S_p – осна рефлексија у односу на праву $p: y=x$

$$S_p:\ \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$G_{p,\vec{a}}:\ \begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= y+3 \\ y'' &= x+3 \end{aligned}\right\} \leftarrow$$ тражене формуле клизајуће рефлексије.

Изометрије простора $(n=3)$ $f:\ y = Ax + b$

Пресликавање f је изометрија простора $\Longleftrightarrow AA^T = E$

изометрија	фиксне тачке	сопствене вредности
коинциденција	$\mathbb{R}^3$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
транслација	$\emptyset$	
раванска рефлексија	раван	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
клизајућа рефлексија	$\emptyset$	$\lambda_3 = -1$
осна ротација	права	$\lambda = 1$ само једна сопствена вредност
завојно кретање	$\emptyset$	
централна симетрија	тачка	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$
ротациона рефлексија	$\emptyset$	$\lambda = -1$

35. Доказати да је пресликавање задато помоћу $x' = 1-z$, $y' = -x$ и $z' = y-2$ изометрија и одредити њене компоненте

$$x' = 1-z \qquad y' = -x \qquad z' = y-2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$\Rightarrow$ Дато пресликавање јесте изометрија.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

$$= -\lambda\cdot\lambda^2 + 1 = 1 - \lambda^3 = (1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1$$

$$(\lambda + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} > 0$$

Како је $\lambda = 1$ једина сопствена вредности, дата изометрија је или осна ротација или завојно кретање, што одређујемо на основу скупа фиксних тачака.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = -x = z - 1$$

$$z = y - 2 \qquad\qquad z = z - 1 - 2$$

$$0 = -3 \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ Скуп фиксних тачака је $\emptyset$.

$\Rightarrow$ Дата изометрија је завојно кретање.

Његове компоненте су оса ротације, угао ротације и вектор транслације.

Вектор правца осе ротације и вектор транслације су паралелни са сопственим вектором који одговара сопственој вредности $\lambda = 1$.

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$-w = u \qquad u = -w$$

$$-u = v \qquad v = -u = w$$

$$v = w$$

нпр. $\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Осу ротације добијамо из услова $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{f_1}$, $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$

$$\overrightarrow{MM'}\,(1 - x - z,\ -x - y,\ y - z - 2) \parallel (-1, 1, 1)$$

$$\frac{1 - x - z}{-1} = \frac{-x - y}{1} = \frac{y - z - 2}{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - x - z = x + y \\ y - z - 2 = -x - y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{array}\right\} \leftarrow \text{једначина праве у тродимензионом простору}$$

Вектор транслације добијамо тако што пресликамо једну тачку са ове праве нпр. $P(0,1,0)$

$P'(1-0,-0,1-2)$

$P'(1,0,-1)$

$a=\overrightarrow{PP'}=(1,-1,-1)$ и то је вектор транслације

Остало је још да одредимо угао ротације.

Променићемо базу тако да $\vec{f_1}=\frac{1}{\sqrt3}(-1,1,1)$ буде један од базних вектора

$\vec{f_2}=\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)$ ← бирамо било који ортогоналан на $\vec{f_1}$

$$\vec{f_3}=\vec{f_1}\times\vec{f_2}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt6}(-1,1,-2)$$

У бази $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ матрица A има облик $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=$

Матрица преласка са базе $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ на базу $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ је

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & \frac{-2}{\sqrt6}\end{pmatrix} \qquad P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\sqrt3 & 2\sqrt3 & 2\sqrt3\\ 3\sqrt2 & 3\sqrt2 & 0\\ -\sqrt6 & \sqrt6 & -2\sqrt6\end{pmatrix}$$

слика првог базног вектора $\vec{e_1}$ је $\vec{f_1}$ и у прву колону запишемо његово представљање у бази $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$

$f=e\cdot P,\quad X=P\cdot Y$

$A=PBP^{-1}$

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

морамо добити овакав облик матрице и одавде добијамо угао ротације θ

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\0&-\frac{\sqrt3}{2}&-\frac12\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}\cos\theta=-\frac12\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt3}{2}\end{matrix}\ \Rightarrow\ \theta=\frac{4\pi}{3}$$

Угао осне ротације је $\frac{4\pi}{3}$ чиме је задатак у потпуности решен.

Трансформације сличности

f: $x' = Ax + b$ је трансформација сличности ако је $AA^T = k^2 E$

f је тада сличност са коефицијентом $k > 0$

Ако сличност није изометрија онда има тачно једну фиксну тачку.

Ако узмемо $k > 0$ такво да је $AA^T = k^2 E$ онда је јединствена декомпозиција сличности на хомотетију $\mathcal{X}_{S,k}$ и изометрију $\tilde{f}$ где је S јединствена фиксна тачка сличности f.

37. Дата је трансформација f помоћу $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Доказати да је то сличност, наћи њене компоненте и скицирати путању тачке.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} = 13E$$

$k^2 = 13 \Rightarrow k = \sqrt{13}$ јер узимамо $k > 0$

$\Rightarrow$ Дата трансформација је сличности.

Центар хомотетије $\mathcal{X}_{S,k}$ која учествује у разлагању ове сличности тражимо као фиксну тачку сличности f.

$$x = 2x - 3y + 1 \qquad x - 3y + 1 = 0$$
$$y = 3x + 2y - 2 \qquad 3x + y - 2 = 0 \quad / \cdot 3 \qquad 9x + 3y - 6 = 0$$

$\oplus$

$10x - 5 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{3}(x+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Центар хомотетије је тачка $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Остало је да нађемо изометрију $\tilde{f}$ за коју знамо да има бар једну фиксну тачку

$[f] = kE[\tilde{f}]$ јер $f = \chi_{S,k} \circ \tilde{f}$

$$[\tilde{f}] = \frac{1}{k}[\overset{A}{f}] = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det[\tilde{f}] = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{13} \cdot (4+9) = 1 > 0$$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ је директна изометрија равни која има бар једну фиксну тачку

$$[\tilde{f}] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Ово је матрица ротације за неки угао θ па је $\tilde{f}$ ротација око тачке S за угао θ

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\Rightarrow$ $tg\,\theta = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta = arctg\,\frac{3}{2}$

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\quad$ θ је између $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$