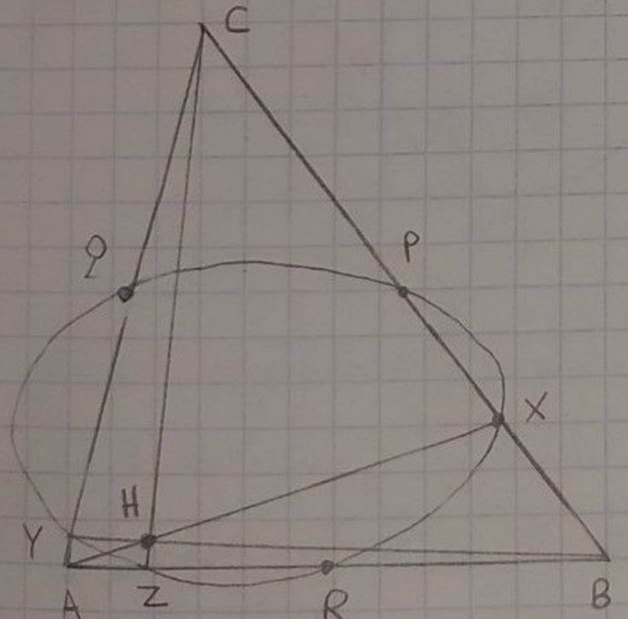
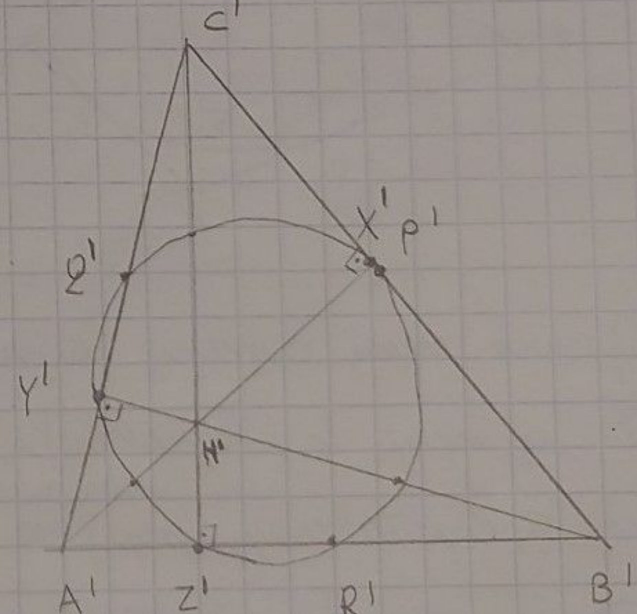
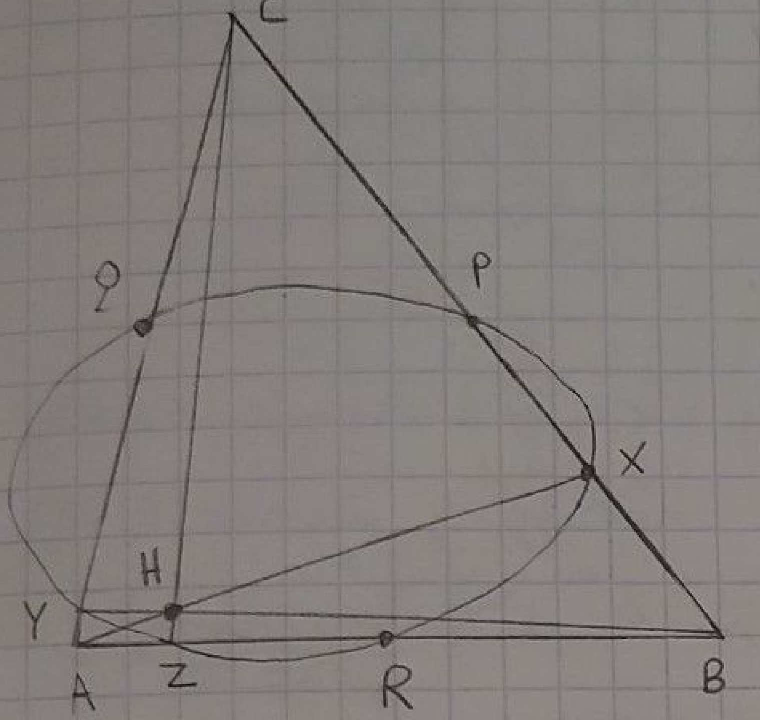
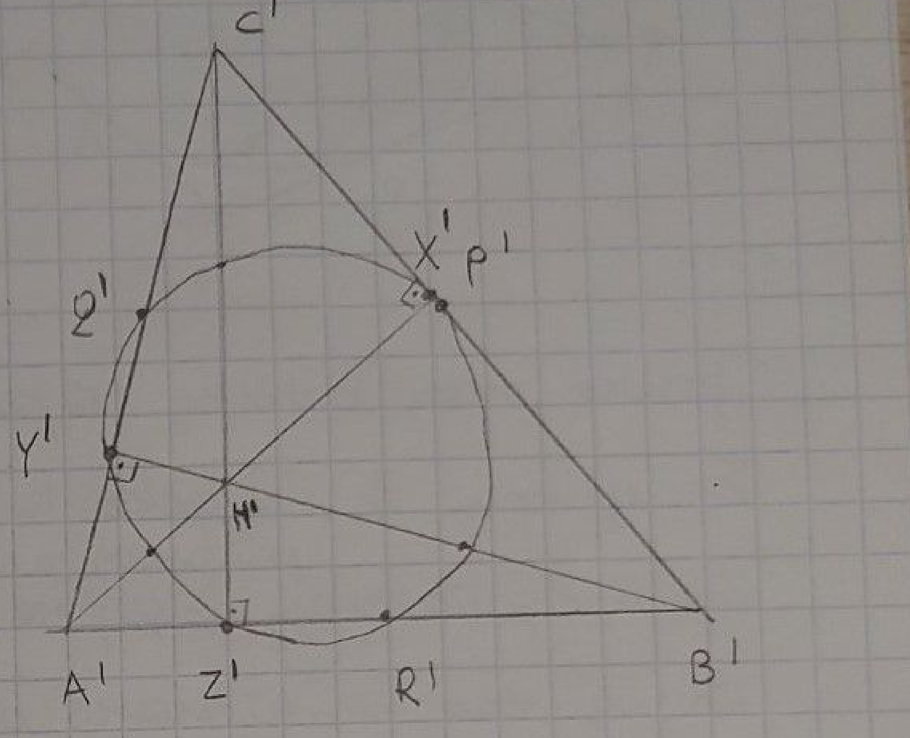
(29.) Нека је П елипса која садржи средишта P, Q, R страница BC, CA, AB неког троугла ABC равни $\mathbb{E}^2$. Ако она праве BC, CA, AB, тим редом, сече у тачкама X, Y, Z доказати да се праве AX, BY, CZ секу у једној тачки, нпр. H и важи: $HS : ST = 3 : 1$ (S - центар елипсе, T - тежиште троугла ABC).

(*) Идеја је да уочимо неку афину трансформацију која ће елипсу да преслика у круг (на основу задатка (28) знамо да постоји дилатација која то ради). Како афина пресликавања чувају барицентре и однос дељења дужи, то се средишта дужи сликају у средишта дужи, тежиште троугла T се слика у тежиште T' новог троугла и центар елипсе S се слика у центар круга S'.





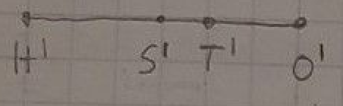




Зато се посматрана елипса слика у Ојлеров круг троугла $A'B'C'$ јер тај круг садржи средишта P', Q' и R' страница $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$. Тај круг сече странице троугла $A'B'C'$ у тачкама X', Y' и Z' које представљају подножја висина у троуглу $A'B'C'$ из темена A', B' и C' (јер Ојлеров круг 9 тачака садржи средишта страница троугла, подножја висина и средишта дужи $A'H'$, $B'H'$ и $C'H'$). Дужи $A'X'$, $B'Y'$, $C'Z'$ се секу у ортоцентру H' троугла

$A'B'C'$ и на основу познатог својства из Геометрије 2 важи
$H'S' : S'T' = 3:1$ одакле закључујемо да $HS : ST = 3:1$.

подсетник: Ојлерова права



$S' = S(H'O')$, O' - центар описаног круга троугла $A'B'C'$.

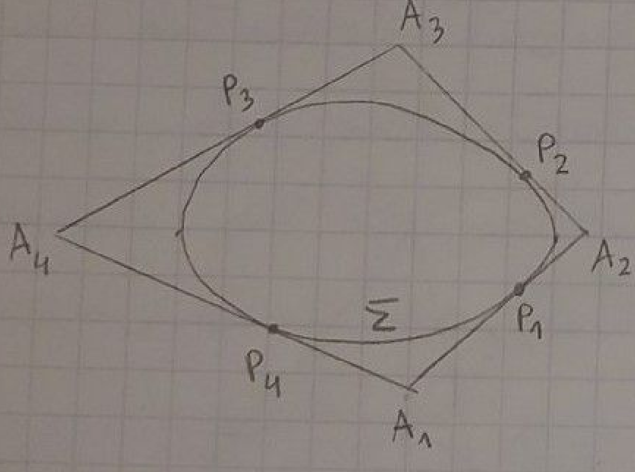
$H'T' : T'O' = 2:1$

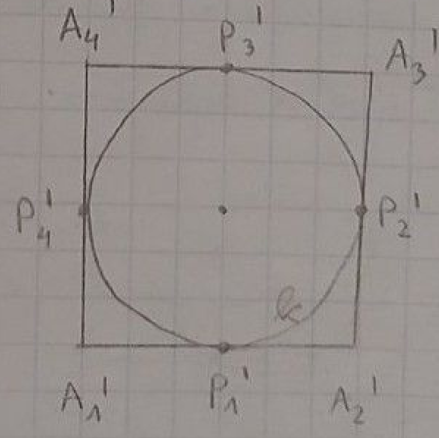
$$\left.\begin{array}{l} H'S' = \frac{1}{2} H'O' \\ H'T' = \frac{2}{3} H'O' \\ S'T' = \frac{1}{6} H'O' \end{array}\right\} \Rightarrow H'S' : S'T' = \frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3:1$$

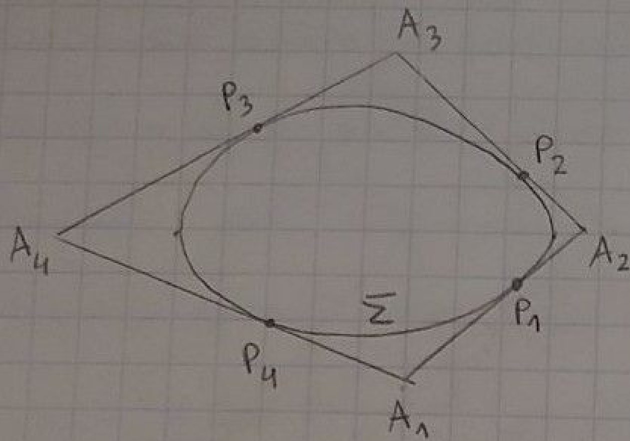
30. Ако је елипса Σ уписана у полигон $A_1, A_2, \ldots, A_n$ доказати да за додирне тачке P_r страница $A_r A_{r+1}$ важи

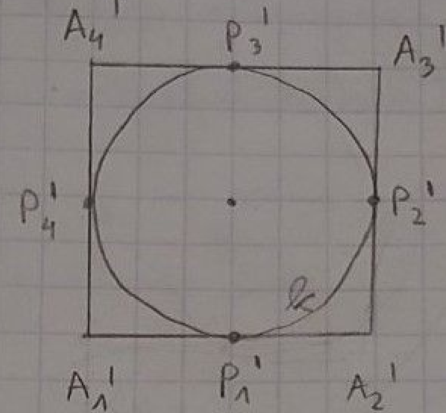
$$\|\overrightarrow{A_1P_1}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2P_2}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{A_nP_n}\| = \|\overrightarrow{P_1A_2}\| \cdot \|\overrightarrow{P_2A_3}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{P_nA_1}\|$$

На слици је приказан случај $n=4$.









Уочимо неку афину трансформацију која пресликова елипсу Σ у круг k. Тачке $P_1, P_2, \dots, P_n$ се сликају у тачке $P_1', P_2', \dots, P_n'$ које представљају додирне тачке круга k и полигона $A_1'A_2'\dots A_n'$ па су као тангентне дужи једнаке дужи:

$$\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\| = \|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|$$

$$\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\| = \|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|$$

$$\|\overrightarrow{A_3'P_3'}\| = \|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|$$

$$\vdots$$

$$\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\| = \|\overrightarrow{P_{n-1}'A_n'}\|.$$

$$\Rightarrow \quad \|\overrightarrow{A_1'P_1'}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2'P_2'}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{A_n'P_n'}\| = \|\overrightarrow{P_1'A_2'}\| \cdot \|\overrightarrow{P_2'A_3'}\| \cdot \ldots \cdot \|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|$$

$$\frac{\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|}{\|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|} \cdot \frac{\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\|}{\|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|} \cdot \ldots \cdot \frac{\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\|}{\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|} = 1$$

Како афине трансформације чувају однос дељења „колинеарних" дужи, имамо да је:

$$\frac{\|\overrightarrow{A_1P_1}\|}{\|\overrightarrow{P_1A_2}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|}{\|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{A_2P_2}\|}{\|\overrightarrow{P_2A_3}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_2'P_2'}\|}{\|\overrightarrow{P_2'A_3'}\|}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\|\overrightarrow{A_nP_n}\|}{\|\overrightarrow{P_nA_1}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\|}{\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|\overrightarrow{A_1P_1}\|}{\|\overrightarrow{P_1A_2}\|}\cdot\ldots\cdot\frac{\|\overrightarrow{A_nP_n}\|}{\|\overrightarrow{P_nA_1}\|} = \frac{\|\overrightarrow{A_1'P_1'}\|}{\|\overrightarrow{P_1'A_2'}\|}\cdot\ldots\cdot\frac{\|\overrightarrow{A_n'P_n'}\|}{\|\overrightarrow{P_n'A_1'}\|} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\|\overrightarrow{A_1P_1}\|\cdot\|\overrightarrow{A_2P_2}\|\cdot\ldots\cdot\|\overrightarrow{A_nP_n}\| = \|\overrightarrow{P_1A_2}\|\cdot\|\overrightarrow{P_2A_3}\|\cdot\ldots\cdot\|\overrightarrow{P_nA_1}\|$$

што се и тражило.

31. Нека је $\mathcal{X}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ хипербола и $P \in \mathcal{X}$ произвољна тачка. Доказати да постоји афино пресликавање којим се хипербола $\mathcal{X}$ слика на хиперболу $\mathcal{X}': x'y' = 1$ при коме се тачка P слика у тачку $P'(1,1)$.

✱ $\mathcal{X}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\underbrace{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)}_{x_1'}\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}_{y_1'} = 1$$

$$x_1' = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

$$y_1' = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x_1' y_1' = 1$ и тај производ не смемо мењати

$$x' = c x_1'$$

$$y' = \frac{1}{c} y_1'$$

Константу $c \neq 0$ биремо тако да се произвољна тачка $P(x_0, y_0) \in X$ слика у тачку $P'(1,1)$.

$$x' = c \cdot x_1' \Rightarrow 1 = c \cdot \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \Rightarrow c = \frac{1}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}$$

Тада је и $1 = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right)$ (из $y' = \frac{1}{c} y_1'$) тј.

$c = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = \frac{1}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}$ где последња једнакост важи јер $P(x_0, y_0) \in X$

па је $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ тј. $\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = \frac{1}{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}}$

Дакле, једно афино пресликавање које пресликава дату хиперболу $\mathcal{X}$ у $\mathcal{X}'$ и тачку $P(x_0, y_0)$ у тачку $P'(1,1)$ је:

$$x' = \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

$$y' = \left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

32. У $\mathbb{R}^4$ одредити праву l такву да $M \in l$ где $M(0,1,2,3)$ и $l \perp p$ где је p: $\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 - 2}{1} = \frac{x_3 - 3}{2} = \frac{x_4 - 4}{1}$ и $l \cap q \neq \emptyset$ где је права q: $\frac{x_1 + 1}{3} = \frac{x_2 + 1}{2} = \frac{x_3 + 3}{1} = \frac{x_4 - 7}{0}$ и $\measuredangle(l, r) = \arccos\frac{1}{6}$ где је права r: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

(*) Ако $l \cap q \neq \emptyset$ то на правој l постоји тачка Q која је и на правој q: $\frac{x_1+1}{3} = \frac{x_2+1}{2} = \frac{x_3+3}{1} = \frac{x_4-7}{0} = s$ тј. $Q(-1+3s, -1+2s, -3+s, 7)$

Права l има вектор правца $\overrightarrow{MQ}$ па због $l \perp p$ мора бити $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{p}$

$\overrightarrow{MQ}(-1+3s, -2+2s, -5+s, 4)$, $\vec{p} = (2,1,2,1)$ па s налазимо из $\overrightarrow{MQ} \cdot \vec{p} = 0$ тј.

$$2(-1+3s) + 1\cdot(-2+2s) + 2(-5+s) + 1\cdot 4 = 0$$

$$-2+6s-2+2s-10+2s+4=0$$

$$10s = 10$$

$$s = 1 \Rightarrow Q(2, 1, -2, 7)$$

$\overrightarrow{MQ}(2, 0, -4, 4)$ $\qquad r: x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \Rightarrow \vec{r} = (1,1,1,1)$

$$\cos\measuredangle(l,r) = \frac{\langle \overrightarrow{MQ}, \vec{r} \rangle}{\|\overrightarrow{MQ}\| \, \|\vec{r}\|} = \frac{(2,0,-4,4)\cdot(1,1,1,1)}{\sqrt{2^2+16+16}\cdot\sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{36}\cdot 2} = \frac{1}{6}$$

па права l задовољава и услов $\measuredangle(l,r) = \arccos\frac{1}{6}$.

Дакле, тражена права која задовољава обе услове је:

$$l: \frac{x_1}{1} = \frac{x_2-1}{0} = \frac{x_3-2}{-2} = \frac{x_4-3}{2}.$$

ЕУКЛИДСКА ГЕОМЕТРИЈА

Изометрије равни $(n=2)$

$f: y = Ax + b$ је изометрија равни $\Leftrightarrow AA^T = E$

изометрија	скуп фиксних тачака	сопствене вредности
коинциденција транслација	$\mathbb{R}^2$ $\emptyset$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
осна рефлексија клизајућа рефлексија	права $\emptyset$ (фиксна је права, али не тачка по тачка)	$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$
ротација централна симетрија	тачка	нема $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

(33.) Нека је пресликавање f дато помоћу формуле

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Доказати да је пресликавање f изометрија, одредити основне компоненте те изометрије и скицирати пут једне тачке.

(*) $$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Како је $AA^T = E$ то пресликавање је изометрија.

Да бисмо одредили која је изометрија у питању налазимо сопствене вредности матрице A.

$\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{5}-\lambda & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5}-\lambda\right)^2+\frac{16}{25}>0$$

$\Rightarrow$ Матрица A нема сопствене вредности па је изометрија f ротација.

Центар те ротације налазимо као фиксну тачку изометрије f

$$\begin{aligned} x&=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+4 \quad /\cdot 5 \\ y&=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2 \quad /\cdot 5 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 5x&=3x-4y+20 \\ 5y&=4x+3y-10 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 2x+4y&=20 \\ 4x-2y&=10 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$x+2y=10 \Rightarrow x=10-2y$

$2x-y=5$

$2(10-2y)-y=5$

$20-4y-y=5$

Једина фиксна тачка је $S(4,3)$ и то је центар ротације.

$$\vec{f} = A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

матрица ротације за угао θ око центра ротације супротно од кретања казаљке на сату

$$5y = 15 \Rightarrow y = 3$$

$$x = 10 - 2y$$

$$x = 10 - 2 \cdot 3$$

$$x = 10 - 6$$

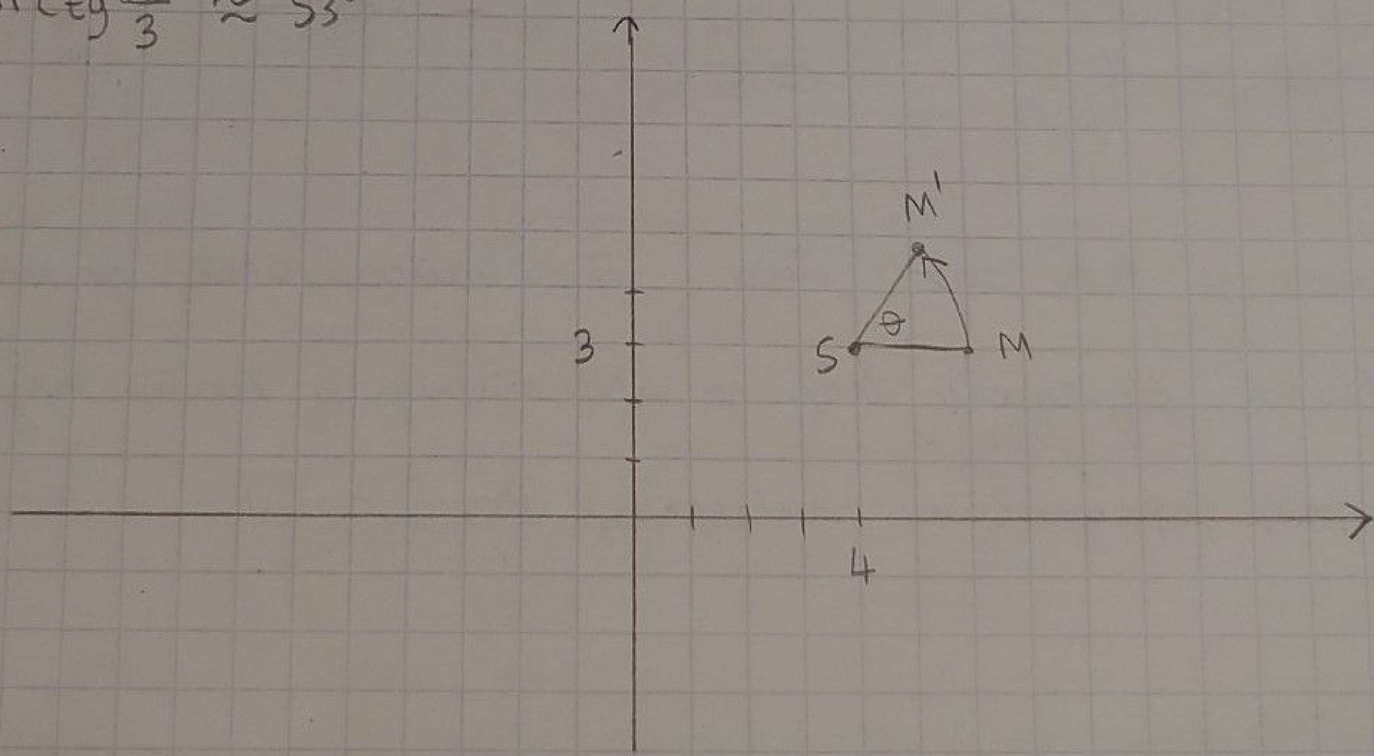
$$x = 4$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$tg\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\theta = arctg\,\frac{4}{3} \approx 53^\circ$$



34. Трансформација равни је дата формулама $x' = 1-y$ и $y' = 2-x$. Доказати да је ова трансформација изометрија, одредити њене компоненте и скицирати путању тачке.

(*)

$$x' = -y+1$$
$$y' = -x+2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$\Rightarrow$ Дата трансформација јесте изометрија равни.

$$\det(A-\lambda E)=0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \Rightarrow$ у питању је осна или клизајућа рефлексија што ћемо утврдити на основу фиксних тачака

$x = 1 - y \qquad \Rightarrow \qquad x + y = 1$

$y = 2 - x \qquad\qquad\quad x + y = 2$ ↯ $\Rightarrow$ нема фиксних тачака

па је у питању клизајућа

рефлексија

Вектор правца осе рефлексије p и вектор транслације су паралелни сопственом вектору за $\lambda = 1$.

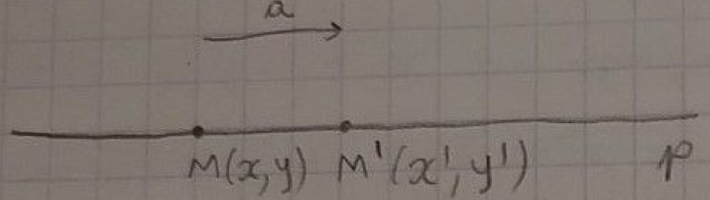
$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$-v = u$$

$$-u = v$$

$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ је сопствени вектор



$$a = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Једначину праве p добијамо из услова $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{f_1}$

$$MM'(1-y-x,\ 2-x-y) \parallel (1,-1)$$

$$\frac{1-x-y}{1} = \frac{2-x-y}{-1}$$

$$x+y-1 = 2-x-y$$

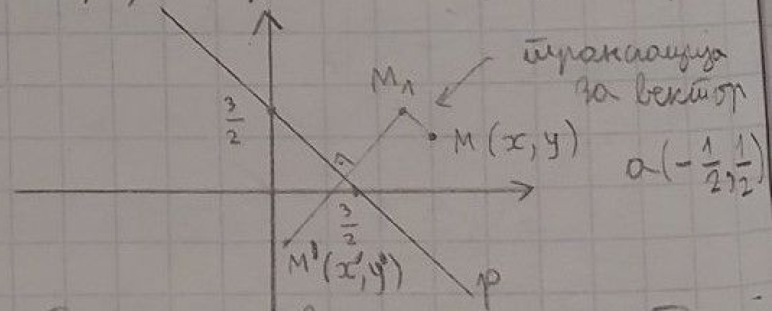
$$p:\ 2x+2y-3=0$$

x	0	$\frac{3}{2}$
y	$\frac{3}{2}$	0

Да бисмо добили како изгледа вектор транслацијe довољно је да пресликамо једну тачку са праве p, нпр. $P(0, \frac{3}{2}) \in p$

$$P'(-\tfrac{1}{2}, 2)$$

$$a = \overrightarrow{PP'} = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$



Напомена: Да је скуп фиксних тачака била права, изометрија би била осна рефлексија и то у односу на ту праву.

35. Одредити у координатама формуле клизајуће рефлексије ако је оса права $y = x$ а вектор $\vec{a} = (3,3)$.

(*) T – транслација за вектор $\vec{a} = (3,3)$ $\quad (\vec{a} \parallel (1,1))$

$$T: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

S_p – осна рефлексија у односу на праву $p: y = x$

$$S_p: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G}_{p,\vec{a}}: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= y + 3 \\ y'' &= x + 3 \end{aligned}\right\} \leftarrow$$ тражене формуле клизајуће рефлексије

Изометрије простора ($n=3$)

$f: y = Ax + b$

Пресликавање f је изометрија простора $\iff AA^T = E$

изометрија	фиксне тачке	сопствене вредности
коинциденција транслација	$\mathbb{R}^3$ $\emptyset$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
раванска рефлексија клизајућа рефлексија	раван $\emptyset$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = -1$
осна ротација завојно кретање	права $\emptyset$	$\lambda = 1$ само једна сопствена вредност
централна симетрија ротациона рефлексија	тачка	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ $\lambda = -1$

36. Доказати да је пресликавање задато помоћу $x' = 1-z$, $y' = -x$ и $z' = y-2$ изометрија и одредити њене компоненте

(*)

$x' = 1-z$

$y' = -x$

$z' = y-2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$\Rightarrow$ Зато пресликавање јесте изометрија.

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$$= -\lambda \cdot \lambda^2 + 1 = 1 - \lambda^3 = (1-\lambda)(1 + \lambda + \lambda^2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$(\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

Како је $\lambda = 1$ једина сопствена вредност, дата изометрија је или осна ротација или завојно кретање, што одређујемо на основу скупа фиксних тачака.

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - z \\ y &= -x \\ z &= y - 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = -x = z - 1$$

$$z = z - 1 - 2$$

$$0 = -3 \quad ↯$$

$\Rightarrow$ Скуп фиксних тачака је $\emptyset$.

$\Rightarrow$ Дата изометрија је завојно кретање.

Његове компоненте су оса ротације, угао ротације и вектор транслације.

Вектор правца осе ротације и вектор транслације су паралелни са сопственим вектором који одговара сопственој вредности $\lambda = 1$.

$$A\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

$-w = u \qquad u = -w$

$-u = v \qquad v = -u = w$

$v = w$

нпр. $\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

Осу ротације добијамо из услова $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{f_1}$, $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$

$\overrightarrow{MM'}(1-x-z,\ -x-y,\ y-z-2) \parallel (-1,1,1)$

$$\frac{1-x-z}{-1} = \frac{-x-y}{1} = \frac{y-z-2}{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1-x-z = x+y \\ y-z-2 = -x-y \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 2x+y+z-1=0 \\ x+2y-z-2=0 \end{array}\right\} \leftarrow$$ једначина праве у тродимензионом простору

Вектор транслације добијамо тако што пресликамо једну тачку са осе праве нпр. $P(0,1,0)$

$P'(1-0,-0,1-2)$

$P'(1,0,-1)$

$a=\overrightarrow{PP'}=(1,-1,-1)$ и то је вектор транслације

Остало је још да одредимо угао ротације.

Променићемо базу тако да $\vec{f_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$ буде један од базних вектора

$\vec{f_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ ← бирамо било који ортогоналан на $\vec{f_1}$

$$\vec{f_3}=\vec{f_1}\times\vec{f_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-2)$$

У бази $(\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3})$ матрица A има облик $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=B$

Матрица преласка са базе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ на базу $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ је:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

слика првог базног вектора $\vec{e}_1$ је $\vec{f}_1$ и у прву колону запишемо његово представљање у бази $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$f = e \cdot P, \qquad X = P \cdot Y$

$A = PBP^{-1}$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

морамо добити овакав облик матрице и одавде добијамо угао ротације θ

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

Угао осне ротације је $\frac{4\pi}{3}$ чиме је задатак у потпуности решен.

Трансформације сличности

$f: x' = Ax + b$ је трансформација сличности ако је $AA^T = k^2 E$

f је тада сличност са коефицијентом $k > 0$

Ако сличност није изометрија онда има тачно једну фиксну тачку.

Ако узмемо $k > 0$ такво да је $AA^T = k^2 E$ онда је јединствена декомпозиција сличности на хомотетију $\mathcal{H}_{S,k}$ и изометрију $\tilde{f}$ где је S јединствена фиксна тачка сличности f.

37. Дата је трансформација f помоћу $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Доказати да је то сличност, наћи њене компоненте и скицирати путању тачке.

(*) $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$

$$AA^T = \begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13 & 0\\ 0 & 13\end{pmatrix} = 13E$$

$k^2 = 13 \Rightarrow k = \sqrt{13}$ јер узимамо $k > 0$

$\Rightarrow$ Дата трансформација је сличности.

Центар хомотетије $\mathcal{H}_{S,k}$ која учествује у разлагању ове сличности тражимо као фиксну тачку сличности f.

$x = 2x - 3y + 1 \qquad x - 3y + 1 = 0$

$y = 3x + 2y - 2 \qquad 3x + y - 2 = 0 \quad / \cdot 3 \qquad 9x + 3y - 6 = 0$

$\oplus$

$10x - 5 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{3}(x+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 1\right)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Центар хомотетије је тачка $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Остало је да нађемо изометрију $\tilde{f}$ за коју знамо да има бар једну фиксну тачку

$$[f] = kE[\tilde{f}] \quad \text{јер} \quad f = \chi_{S,k} \circ \tilde{f}$$

$$[\tilde{f}] = \frac{1}{k}\overset{=A}{[f]} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det[\tilde{f}] = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{13} \cdot (4+9) = 1 > 0$$

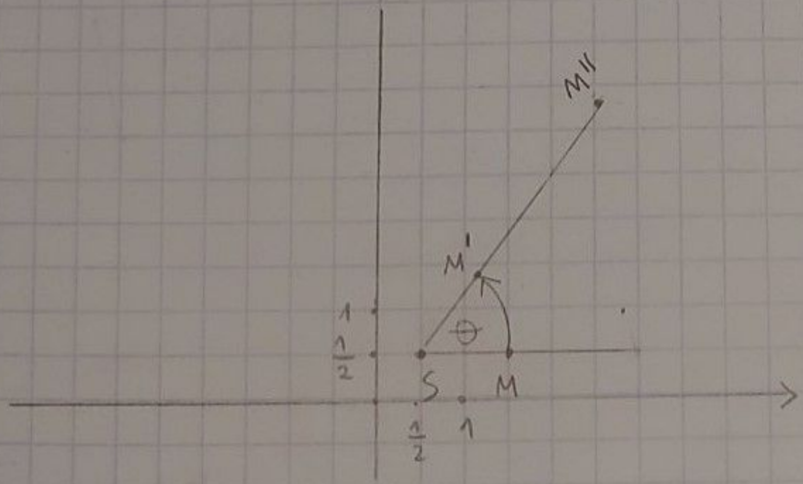
$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ је директна изометрија равни која има бар једну фиксну тачку

$$[\tilde{f}] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Ово је матрица ротације за неки угао θ па је $\tilde{f}$ ротација око тачке S за угао θ

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\Rightarrow$ $tg\,\theta = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta = arctg\,\frac{3}{2}$

$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\quad \theta$ је између $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$



4.98. Пројективна колинеација Папосове равни има тачно a фиксних тачака. Колики је број тачака у тој равни уколико је а) $a=6$; б) $a=7$; в) $a=8$?

Решење: а) Приметимо да посматрана пројективна колинеација Папосове равни не може бити идентитет јер би тада број фиксних тачака морао бити облика r^2+r+1, а $a=6$ није тог облика.

То значи да не постоји четворотеменик чија су сва темена фиксна јер у Папосовој равни важи Основна теорема колинеације по којој уколико пројективна колинеација има фиксна темена четворотеменика, она мора бити идентитет.

Како имамо $a=6\geq 4$ фиксних тачака, то постоје три колинеарне фиксне тачке.
Рестрикција посматране пројективне колинеације на ту праву на којој су три фиксне тачке мора бити пројективитет по дефиницији пројективне колинеације. Тај пројективитет мора бити идентитет на основу Основне теореме пројективитета јер има три фиксне тачке.
Како посматрана колинеација има тачка-по-тачка фиксну праву, то је оса, а та колинеација је перспективна и има и центар.
Перспективна колинеација може бити хомологија која има центар ван осе и број њених фиксних тачака је $a=(r+1)+1=r+2$, где је r ред одговарајуће пројективне равни, јер на оси имамо $r+1$ фиксних тачака, а ван осе још само једну, центар. Како је $r=a-2=6-2=4$, то је пројективна раван коју посматрамо таква да има $r^2+r+1=4^2+4+1=16+5=21$ тачака. Постоји пројективна раван реда 4 јер је 4 степен простог броја.

Перспективна колинеација може бити елација која има центар на оси и број њених фиксних тачака је $a=r+1$, где је r ред одговарајуће пројективне равни, јер на оси имамо $r+1$ фиксних тачака, а ван осе нема фиксних тачака. Како је $r=a-1=6-1=5$, посматрана пројективна раван има $r^2+r+1=5^2+5+1=25+6=31$. Постоји пројективна раван реда 5 јер је 5 прост број.

Број тачака у тој равни може бити 21 или 31.

б) Приметимо да посматрана пројективна колинеација може бити идентитет јер је број фиксних тачака $a=7$ облика r^2+r+1 за $r=2$. Тада посматрана пројективна раван има укупно $r^2+r+1=2^2+2+1=4+3=7$ тачака.
Ако посматрана пројективна колинеација није идентитет онда не сме постојати четворотеменик чија су сва темена фиксна јер би по Основној теореми колинеације таква пројективна колинеација морала бити идентитет. Тада међу $a=7\geq 4$ фиксних тачака морају постојати три колинеарне фиксне тачке.
Рестрикција посматране пројективне колинеације на праву где су те три фиксне тачке је пројективитет по дефиницији пројективне колинеације, а како тај пројективитет има три фиксне тачке, то он мора бити идентитет на основу Основне теореме пројективитета. Тада посматрана пројективна колинеација има тачка-по-тачка фиксну праву, односно осу, те је та пројективна колинеација перспективна, те има и центар.
Ако је та перспективна колинеација хомологија, код које центар не припада оси, онда она има $a=(r+1)+1=r+2$ фиксних тачака (r је ред пројективне равни) јер имамо $r+1$ фиксних тачака на оси, а ван осе је само центар фиксна тачка. Тада је $r=a-2=7-2=5$, те та пројективна раван има укупно $r^2+r+1=5^2+5+1=25+6=31$ тачака. Постоји пројективна раван реда 5 јер је 5 прост број.
Ако је та перспективна колинеација елација, код које центар припада оси, онда она има $a=r+1$ фиксних тачака (r је ред пројективне равни) јер имамо $r+1$ фиксних тачака на оси, а ван ње немамо фиксних тачака. Тада би $r=a-1=7-1=6$, али то на основу Брук-Рајзерове теореме не може бити ред пројективне равни јер се не може записати као збир квадрата два цела броја ($6=6+0=5+1=4+2=3+3$).

Дакле, укупан број тачака у посматраној равни може бити 7 или 31.

в) Посматрана пројективна колинеација Папосове равни не може бити идентитет јер би тада укупан број фиксних тачака морао бити облика r^2+r+1, а $a=8$ није тог облика.

То значи да не постоји четворотеменик чија су сва темена фиксна јер у Папосовој равни важи Основна теорема колинеације по којој уколико пројективна колинеација има фиксна темена четворотеменика, она мора бити идентитет.

Како имамо $a=8 \geq 4$ фиксних тачака, то постоје три колинеарне фиксне тачке.

Рестрикција посматране пројективне колинеације на ту праву на којој су три фиксне тачке мора бити пројективитет по дефиницији пројективне колинеације. Тај пројективитет мора бити идентитет на основу Основне теореме пројективитета јер има три фиксне тачке.

Како посматрана колинеација има тачка-по-тачка фиксну праву, то је оса, а та колинеација је перспективна и има центар.

Ако је та перспективна колинеација хомологија, која има центар ван осе, онда је број њених фиксних тачака $a=(r+1)+1=r+2$, где је r ред пројективне равни, јер имамо $r+1$ фиксних тачака на оси, а ван осе је само центар фиксна тачка. Како је $r=a-2=8-2=6$, то на основу Брук-Рајзерове теореме долазимо до контрадикције јер 6 не може бити ред пројективне равни зато што 6 није могуће записати као збир квадрата два цела броја $(6=6+0=5+1=4+2=3+3)$.

Ако је та перспективна колинеација елација, која има центар на оси, онда је број њених фиксних тачака $a=r+1$, где је r ред пројективне равни, јер имамо $r+1$ фиксних тачака на оси, а ван ње нема фиксних тачака. Како је $r=a-1=8-1=7$ што је прост број, то постоји пројективна раван реда 7 и она има укупно $r^2+r+1=7^2+7+1=49+8=57$ тачака.

Дакле, посматрана Папосова раван има укупно 57 тачака.

4.99. Израчунати број перспективних колинеација Дезаргове равни реда r.

Решење: Сетимо се теореме (Бер): Ако су A, A', S колинеарне тачке Дезаргове равни и s права са $A, A' \notin (s)$, тада постоји јединствена перспективна колинеација са осом s и центром S која пресликава A у A'.

Оса s може бити било која од укупно r^2+r+1 правих у посматраној Дезарговој равни реда r, те је можемо изабрати на r^2+r+1 начина.

Ако је перспективна колинеација елација, онда центар S припада оси s и можемо га изабрати на $r+1$ начина јер на правој s има $r+1$ тачака.

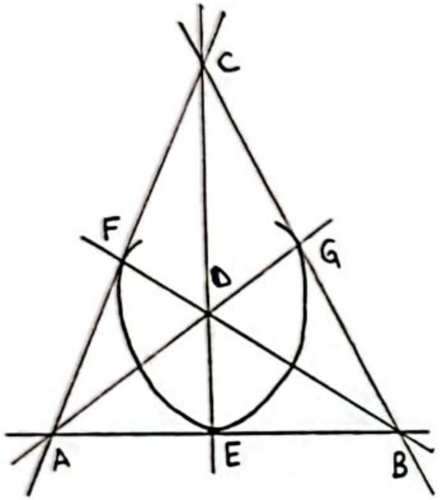
Ако је перспективна колинеација хомологија, онда центар S не припада оси s и можемо га изабрати на $r^2+r+1-(r+1) = r^2+r+1-r-1 = r^2$ начина јер има укупно r^2+r+1 тачака у посматраној Дезарговој равни реда r, а $r+1$ се налази на оси s.

Фиксирајмо сада произвољну тачку $A \notin (s) \cup \{S\}$ која се слика у тачку A' са праве $A \vee S$ (због особине перспективне колинеације да су тачке A, A' и S колинеарне), али не може бити $A' = S$ нити $A' = (A \vee S) \wedge s$ јер би онда, редом, било $A = S$, тј. $A = (A \vee S) \wedge s$ јер су центар S и све тачке са осе s фиксне. Не може бити ни $A' = A$ јер су $(s) \cup \{S\}$ једине фиксне тачке перспективне колинеације. Дакле, тачка A' се у случају елације може изабрати на $r+1-1-1 = r-1$ начина (од укупно $r+1$ тачака на правој $A \vee S$ одбацујемо A и $(A \vee S) \wedge s = S$), а у случају хомологије на $r+1-1-1-1 = r+1-3 = r-2$ начина (од укупно $r+1$ тачака на правој $A \vee S$ одбацујемо A, S и $(A \vee S) \wedge s$).

Зато је укупан број елација $(r^2+r+1)(r+1)\cdot(r-1) = (r^2+r+1)(r^2-1)$, а укупан број хомологија је $(r^2+r+1)\cdot r^2 \cdot (r-2) = (r^2+r+1)(r^3-2r^2)$, те је тражени број перспективних колинеација Дезаргове равни реда r једнак $(r^2+r+1)(r^2-1) + (r^2+r+1)(r^3-2r^2) = (r^2+r+1)\cdot(r^2-1+r^3-2r^2) = (r^2+r+1)\cdot(r^3-r^2-1)$.

4.100. Израчунати број (потпуних) тротеменика, четворотеменика и петотеменика, као и број хомологија, елација и недегенерисаних коника Фаноове равни.

Решење:



Фаноова раван $\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$ има ред 2, укупно $2^2+2+1=4+3=7$ тачака и 7 правих.

Број начина да изаберемо 3 од 7 тачака из Фаноове равни при чему нам није битан редослед те три тачке је биномни коефицијент $\binom{7}{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=7\cdot5=35$. Како у Фаноовој равни имамо тачно 7 тројки колинеарних тачака, то је укупан број тротеменика $35-7=28$.

Број начина да изаберемо 4 од укупно 7 тачака из Фаноове равни је $\binom{7}{4}=\binom{7}{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=7\cdot5=35$.

Четири тачке	ABCD	ABCE	ABCF	ABCG	ABDE	ABDF	ABDG	ABEF	ABEG	ABFG	ACDE	ACDF	ACDG	ACEF	ACEG	ACFG
Уочена тројка колинеарних тачака	Нема	A,E,B	A,F,C	B,G,C	A,E,B	B,D,F	A,D,G	A,E,B	A,E,B	Нема	C,D,E	A,F,C	A,D,G	A,F,C	Нема	A,F,C

ADEF	ADEG	ADFG	AEFG	BCDE	BCDF	BCDG	BCEF	BCEG	BCFG	BDEF	BDEG	BDFG	BEFG	CDEF	CDEG	CDFG	CEFG	DEFG
Нема	A,D,G	A,D,G	F,E,G	C,D,E	B,D,F	B,G,C	Нема	B,G,C	B,G,C	B,D,F	Нема	B,D,F	F,E,G	C,D,E	C,D,E	Нема	F,E,G	F,E,G

Има 7 четворотеменика Фаноове равни и то су ABCD, ABFG, ACEG, ADEF, BCEF, BDEG, CDFG.

Број начина да изаберемо 5 од 7 тачака је $\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=7\cdot 3=21$.

Пет тачака	ABCDE	ABCDF	ABCDG	ABCEF	ABCEG	ABCFG	ABDEF	ABDEG	ABDFG	ABEFG	ACDEF	ACDEG	ACDFG	ACEFG	ADEFG	BCDEF	BCDEG	BCDFG	BCEFG	BDEFG	CDEFG
Уочена тројка колинеарних тачака	C,D,E	A,F,C	A,D,G	A,F,C	A,E,B	A,F,C	A,E,B	A,E,B	B,D,F	A,E,B	A,F,C	C,D,E	A,F,C	A,F,C	E,F,G	C,D,E	B,G,C	B,G,C	E,F,G	E,F,G	E,F,G

Дакле, нема петотеменика у Фаноовој равни.

Како је ред Фаноове равни $r=2$, то је на основу задатка 4.99 број елација фаноове равни једнак $(r-1)(r+1)(r^2+r+1)=(2-1)\cdot(2+1)\cdot(2^2+2+1)=1\cdot 3\cdot(4+3)=3\cdot 7=21$, а број хомологија Фаноове равни је $(r^2+r+1)\cdot r^2\cdot(r-2)=$
$=(2^2+2+1)\cdot 2^2\cdot(2-2)=0$.

Недегенерисана коника Фаноове равни састоји се од три сецишта одговарајућих правих, односно у питању је тротеменик, те је тражени број 28.