52. Нека је (x_0,y_0) произвољна тачка са параболе $y^2=2px$ и нека је (u,v), $v\neq 0$, произвољан вектор тако да су све тетиве паралелне том вектору. Тада је друга тачка (x_1,y_1) тетиве чија је прва тачка (x_0,y_0) и која је паралелна вектору (u,v) одређена са:

$$(x_1,y_1)=(x_0,y_0)+\lambda(u,v)=(x_0+\lambda u,y_0+\lambda v),\ \text{за неко } \lambda\in\mathbb{R}$$

$$y_1^2=2px_1$$

$$(y_0+\lambda v)^2=2p(x_0+\lambda u)$$

$$\cancel{y_0^2}+2y_0v\lambda+\lambda^2v^2=\cancel{2px_0}+2pu\lambda \qquad (y_0^2=2px_0,\ \text{јер } (x_0,y_0) \text{ припада параболи})$$

$$\lambda(2y_0v+\lambda v^2-2pu)=0$$

$$\lambda=0 \text{ или } \lambda=\frac{2(pu-y_0v)}{v^2}$$

$\uparrow$
ово је тачка (x_0,y_0)

Средиште тетиве је $\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}\right)=\left(\frac{x_0+x_0+\lambda u}{2},\frac{y_0+y_0+\lambda v}{2}\right)=\left(x_0+\frac{\lambda}{2}u,y_0+\frac{\lambda}{2}v\right)$

$$x_0+\frac{\lambda}{2}u=x_0+\frac{pu-y_0v}{v^2}u$$

$$y_0+\frac{\lambda}{2}v=y_0+\frac{pu-y_0v}{v^2}\cancel{v}=y_0+\frac{pu}{v}-y_0=\frac{pu}{v}$$

Дакле, за сва средишта тетива важи $y=\frac{pu}{v}$, што значи да сва припадају правој $y=\frac{pu}{v}$, која је паралелна оси $y=0$ параболе.

5.5. Нека је $M(x_0,y_0)$ тачка из које се парабола $y^2=2px$ види под правим углом. Ако је $(u,v)\neq(0,0)$ вектор правца тангенте из тачке M, онда је $(-v,u)$ вектор правца друге тангенте из тачке M (да би био испуњен услов да се парабола види под правим углом, тангенте из тачке морају бити међусобно нормалне)

$$t_1: \frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=t \qquad t_2: \frac{x-x_0}{-v}=\frac{y-y_0}{u}=s$$

$x=x_0+ut$

$y=y_0+vt$

Потребно је да t_1 и парабола имају једну пресечну тачку!

$y^2=2px$

$(y_0+vt)^2=2p(x_0+ut)$

$y_0^2+2y_0vt+v^2t^2=2px_0+2put$

$v^2t^2+2(y_0v-pu)t+y_0^2-2px_0=0$

Ово мора бити квадратна једначина (дакле, $v\neq0$) и мора имати јединствено решење.

$\Rightarrow \cancel{4}(y_0v-pu)^2-\cancel{4}v^2(y_0^2-2px_0)=0$

$x=x_0-vs$

$y=y_0+us$

Потребно је да t_2 и парабола имају једну пресечну тачку!

$y^2=2px$

$(y_0+us)^2=2p(x_0-vs)$

$y_0^2+2y_0us+u^2s^2=2px_0-2pvs$

$u^2s^2+2(y_0u+pv)s+y_0^2-2px_0=0$

Ово мора бити квадратна једначина (дакле, $u\neq0$) и мора имати јединствено решење

$\Rightarrow \cancel{4}(y_0u+pv)^2-\cancel{4}u^2(y_0^2-2px_0)=0$

$\cancel{y_0^2v^2}-2puvy_0+p^2u^2-\cancel{v^2y_0^2}+2pv^2x_0=0 \qquad \cancel{y_0^2u^2}+2puvy_0+p^2v^2-\cancel{u^2y_0^2}+2pu^2x_0$

Сабирањем добијених једначина добијамо

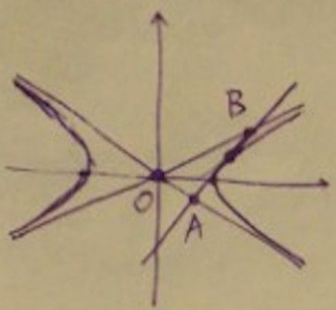
$$p^2u^2+p^2v^2+2pv^2x_0+2pu^2x_0=0$$

$$2\cancel{p}x_0(u^2+v^2)=-p^{\cancel{2}}(u^2+v^2) \quad /:(u^2+v^2)\neq0$$

$$x_0=-\frac{p}{2}$$

Дакле, све тачке M из којих се парабола $y^2=2px$ види под правим углом припадају директриси $x=-\frac{p}{2}$ ове параболе.

5.7. Нека је $M(x_0,y_0)$ произвољна тачка хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Тада је $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ једначина тангенте, док су $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ и $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ једначине асимптота



$A(x_A,y_A)$ је пресечна тачка тангенте и асимптоте $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$

$$\frac{x_A}{a}+\frac{y_A}{b}=0$$

$$y_A=-\frac{b}{a}x_A$$

$$\frac{x_A x_0}{a^2}-\frac{y_0}{b^2}\cdot\left(-\frac{b}{a}x_A\right)=1$$

$$x_A\left(\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{ab}\right)=1$$

$$x_A=\frac{1}{\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{ab}} \qquad y_A=-\frac{b}{a}x_A=-\frac{b}{a}\frac{1}{\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{ab}}$$

$B(x_B,y_B)$ је пресечна тачка тангенте и асимптоте $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

$$\frac{x_B}{a}-\frac{y_B}{b}=0$$

$$y_B=\frac{b}{a}x_A$$

$$\frac{x_B x_0}{a^2}-\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{b}{a}x_B=1$$

$$x_B\left(\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}\right)=1$$

$$x_B=\frac{1}{\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}} \qquad y_B=\frac{b}{a}\frac{1}{\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}}$$

Површина троугла ΔOAB:

$$P_{OAB}=\frac{1}{2}\|\vec{OA}\times\vec{OB}\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_A & y_A & 0\\ x_B & y_B & 0\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\|(0,0,x_Ay_B-x_By_A)\|=$$

$$=\frac{1}{2}|x_Ay_B-x_By_A|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{ab}}\cdot\frac{b}{a}\frac{1}{\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}}-\frac{1}{\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{ab}}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\frac{1}{\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{ab}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left|\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4}-\frac{y_0^2}{a^2b^2}}+\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4}-\frac{y_0^2}{a^2b^2}}\right|=\frac{1}{2}\frac{b}{a}\cdot\frac{2}{\frac{1}{a^2}\underbrace{\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)}_{=1,\text{ јер } M(x_0,y_0) \text{ припада хиперболи}}}=ab$$

Дакле, површина троугла ΔOAB не зависи од избора тачке M, тј. од избора тангенте.