5.9. Нека је $A(x_0,y_0)$ произвољна тачка елипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Тада је $\overrightarrow{OA}=(x_0,y_0)$ правац полудијаметра OA, чији је конјуговани правац $\left(-\frac{y_0}{b^2},\frac{x_0}{a^2}\right)$. Тражимо тачку $B(x_1,y_1)$ дијаметра, чији је ово правац, и елипсе је: $\overrightarrow{OB}=\lambda\cdot\left(-\frac{y_0}{b^2},\frac{x_0}{a^2}\right)$

$$(x_1,y_1)=\left(-\frac{\lambda y_0}{b^2},\frac{\lambda x_0}{a^2}\right)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\frac{\lambda^2y_0^2}{b^4}}{a^2}+\frac{\frac{\lambda^2x_0^2}{a^4}}{b^2}=1$$

$$\frac{\lambda^2}{a^2b^2}\cdot\Big(\overbrace{\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}}^{=1 \text{ јер } A \text{ припада елипси}}\Big)=1$$

$$\lambda^2=a^2b^2\Rightarrow\lambda=\pm ab$$

Одаберимо нпр. $\lambda=ab$, тј. $B\left(-\frac{ab\,y_0}{b^2},\frac{ab\,x_0}{a^2}\right)$

$$B\left(-\frac{a}{b}y_0,\frac{b}{a}x_0\right).$$

Површина паралелограма разапетог конјугованим полудијаметрима $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ је

$$P=\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\|=\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_0&y_0&0\\-\frac{a}{b}y_0&\frac{b}{a}x_0&0\end{vmatrix}\right\|=\left\|\left(0,0,\frac{b}{a}x_0^2+\frac{a}{b}y_0^2\right)\right\|=ab\cdot\Big|\overbrace{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}^{=1}\Big|=ab,$$

што не зависи од избора полудијаметра.

5.12. $d: x-2y-5=0$

$o: 2x+y-1=0$

Жижа $F(x_0,y_0)$ припада оси параболе $\Rightarrow 2x_0+y_0-1=0\rightarrow y_0=1-2x_0$

Тачка $A(2,1)$ припада параболи $\Rightarrow\frac{d(A,F)}{d(A,d)}=1$

$$d(A,F)=\|\overrightarrow{AF}\|=\|(x_0-2,y_0-1)\|=\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-1)^2}$$

$$d(A,d)=\frac{|2-2\cdot1-5|}{\sqrt5}=\frac{5}{\sqrt5}=\sqrt5$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-1)^2}}{\sqrt5}=1$$

$$(x_0-2)^2+(y_0-1)^2=5$$

$$x_0^2-4x_0+4+(-2x_0)^2=5$$

$$5x_0^2-4x_0-1=0$$

$$(5x_0+1)(x_0-1)=0$$

$x_0=-\frac{1}{5}$ или $x_0=1$. Дакле, постоје две параболе.

5.12. наставак

$1^\circ \; x_0 = -\frac{1}{5}$

$y_0 = 1 - 2x_0 = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$

$F\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

$P_1: \dfrac{d(M,F)}{d(M,d)} = 1$ (М произвољна тачка) $M(x,y)$

$d(M,F) = \|\overrightarrow{FM}\| = \left\|\left(x - \left(-\frac{1}{5}\right), y - \frac{7}{5}\right)\right\| =$

$= \sqrt{\left(x+\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2}$

$d(M,d) = \dfrac{|x - 2y - 5|}{\sqrt{5}}$

$$\frac{\sqrt{\left(x+\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{5}\right)^2}}{\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{5}}} = 1 \; \Big/^2$$

$$P_1: \left(x+\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 = \frac{(x-2y-5)^2}{5}$$

$2^\circ \; x_0 = 1$

$y_0 = 1 - 2x_0 = 1 - 2 = -1$

$F(1,-1)$

$P_2: \dfrac{d(M,F)}{d(M,d)} = 1$

$d(M,F) = \|\overrightarrow{FM}\| = \|(x-1, y-(-1))\|$

$= \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}}{\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{5}}} = 1 \; \Big/^2$$

$$P_2: (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{(x-2y-5)^2}{5}$$

5.15. $K: xy + x + y = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

дијагонализација матрице B

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ и $\lambda = -\frac{1}{2}$ сопствене вредности

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}v \\ \frac{1}{2}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}v \\ \frac{1}{2}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u \\ -\frac{1}{2}v \end{pmatrix}$$

$u = v$ $\qquad$ $u = -v$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ v \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Јединични сопствени вектори: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Трансформација: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

проширено: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$

$$R^T A R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нова једначина криве: $\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}x' = 0 \quad / \cdot 2$

$$x'^2 - y'^2 + 2\sqrt{2}x' = 0$$

$$(x'+\sqrt{2})^2 - 2 - y'^2 = 0$$

$$(x'+\sqrt{2})^2 - y'^2 = 2$$

$$\frac{(x'+\sqrt{2})^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

трансформација: $x'' = x' + \sqrt{2}$

$y'' = y'$

нова једначина: $\frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{2} = 1 \leftarrow$ хипербола, $a = b = \sqrt{2}$, $c^2 = a^2 + b^2 = 2+2=4$

$c = 2$

формуле трансформације: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' - \sqrt{2} \\ y'' \end{pmatrix}$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y''$$

центар у (x'', y'') је $(0,0)$ $\Rightarrow$ центар у (x,y) је $(-1, 0)$

жиже у (x'', y'') су $(-2, 0)$ и $(2, 0)$ $\Rightarrow$ жиже у (x,y) су $(-\sqrt{2}-1, -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}-1, \sqrt{2})$

осе у (x'', y'') су $y''=0$ и $x''=0$

$y''=0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - 1$, $\quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x''$ $\quad \Rightarrow x = y-1$

$x''=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1$, $\quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}y''$ $\quad \Rightarrow x = -y-1$

Осе у (x,y) су $y = x+1$ и $y = -x-1$

асимптоте у (x'', y'') су $\frac{x''}{\sqrt{2}} - \frac{y''}{\sqrt{2}} = 0$ и $\frac{x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} = 0$, тј. $y''=x''$ и $y''=-x''$.

$y''=x'' \Rightarrow x = -1$, $\quad y = \frac{2}{\sqrt{2}}x'' = \sqrt{2}x''$

$y''=-x'' \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}}x'' - 1 = \sqrt{2}x'' - 1$, $\quad y = 0$

Асимптоте у (x,y) су $x=-1$ и $y=0$.

ексцентрицитет је $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.