

Дакле, важи $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$.

Праве $S_b S_c$ и $P_b \bar{P}_c$ се секу у тачки A и из $S_b P_b \perp BC$ и $S_c \bar{P}_c \perp BC$ закључујемо да је $S_b P_b \parallel S_c \bar{P}_c$. Пошто важи $\mathcal{B}(S_b, A, S_c)$, из Талесове теореме следи да важи $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$ и $\frac{S_c \bar{P}_c}{S_b P_b} = \frac{AS_c}{AS_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$. Међутим, важи $S_b P_b = \rho_b$, па је $\frac{S_c \bar{P}_c}{\rho_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$, одакле закључујемо да је $S_c \bar{P}_c = \rho_c$, тј. $P'_c = \bar{P}_c$. Дакле, важи $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$.

Као што смо имали Ставово о подударности троуглова, постоје и Ставови о сличности троуглова. Што се тиче њихових формулација, имаћемо странице и углове, и то баш као код ставова о подударности (нпр. неке две и њима захваћен угао), с тим што имамо у виду да сличност чува *подударности углова и односе страница*.

Став 2. Нека су даћи троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Ако важи нешто од следећег:

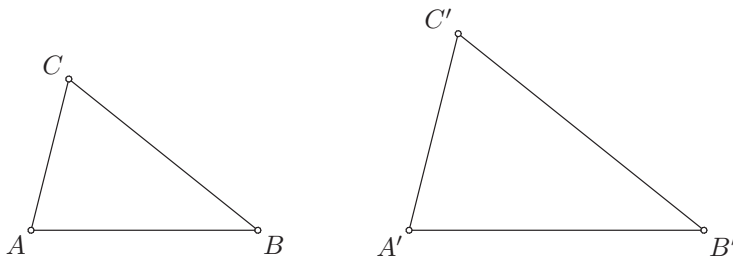
$$1^\circ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \angle BAC = \angle B'A'C';$$

$$2^\circ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'};$$

$$3^\circ \angle BAC = \angle B'A'C', \angle ABC = \angle A'B'C';$$

4^o $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$, а углови $\angle ABC$ и $\angle A'B'C'$ су оба оштра, оба права или оба тупа;

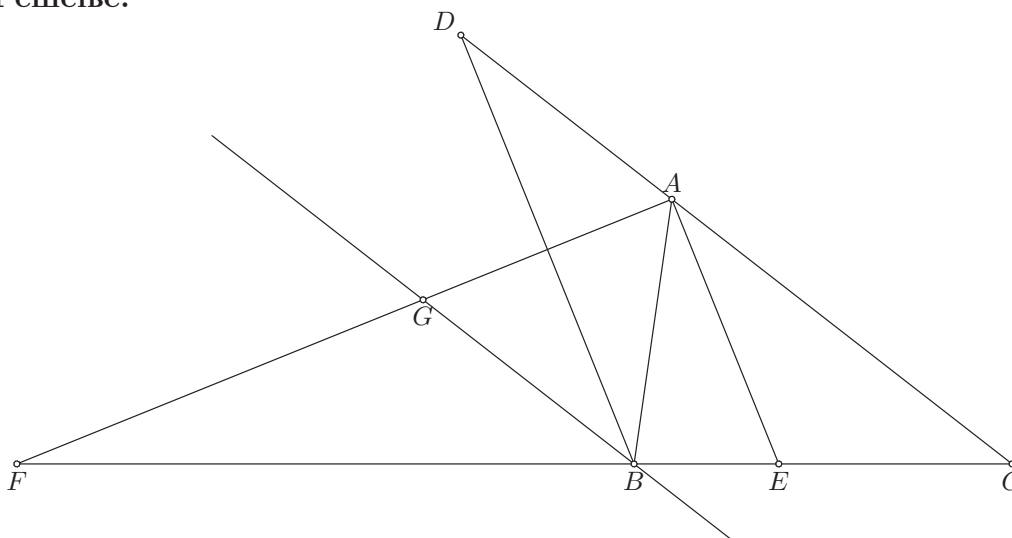
онда је $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Сада прелазимо на задатке из сличности. Први задатак је Теорема о симетрали угла. Ова теорема је веома важна и треба је знати, јер ће се користити и у даљим задацима (нпр. као што се средња линија користи у многим другим задацима).

1. (Теорема о симетрали угла) Ако су E и F тачке у којима бисектрисе унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ ($AB < AC$) секу праву BC доказати $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.

Решење:



Идеја је да применимо Талесову теорему. Да бисмо пронашли колики је однос $BE : CE$, довољно је да нађемо колики је однос $CE : EB$, па потражимо на полуправој CA тачку D такву да важи $\sphericalangle(C, A, D)$ и $AD = AB$. Уколико докажемо да је $DB \parallel AE$, према Талесовој теореди ће бити $CE : EB = CA : AD$, па ће одатле следити $BE : CE = AD : AC$. Како је $AD = AB$, добићемо да је $BE : CE = AB : AC$, а то и треба доказати.

Уколико докажемо да је $\sphericalangle BDA = \sphericalangle EAC = \frac{\alpha}{2}$, следиће да су то углови с паралелним крацима, па ће бити $DB \parallel AE$. Како је $AD = AB$, следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па је $\sphericalangle BDA = \sphericalangle DBA$. Означимо те углове са φ . Угао $\sphericalangle BAC = \alpha$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\sphericalangle BDA = \varphi$ и $\sphericalangle DBA = \varphi$. Дакле, $\alpha = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па је $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, доказали смо да је $\sphericalangle BDA = \frac{\alpha}{2}$, па је $DB \parallel AE$, а одатле следи да је $BE : CE = AB : AC$.

Сада желимо да нађемо однос $BF : CF = FB : FC$, па учимо праву која садржи B и паралелна је са правом AC . Означимо са G њен пресек са правом FA . Талесова теорема нам тада даје да је $FB : FC = BG : CA$, па је довољно доказати да је $BG = AB$. Права AG је симетрала угла $\sphericalangle BAD = \pi - \alpha$ (то је спољашњи угао код темена A троугла $\triangle ABC$), па је $\sphericalangle GAB = \frac{\pi - \alpha}{2}$. Из $BG \parallel AC$ закључујемо да су углови $\sphericalangle GBA$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$ углови с паралелним крацима, па су они подударни. Дакле,

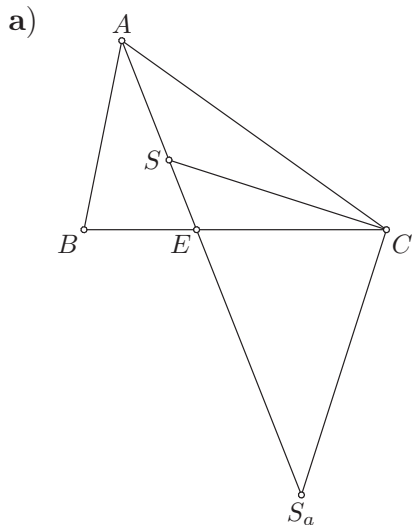
$\angle GBA = \alpha$. Одавде је $\angle BGA = \pi - \angle GBA - \angle GAB = \pi - \alpha - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}$, па је $\angle BGA = \angle GAB$. Дакле, троугао $\triangle BAG$ је једнакокраки, па је $BG = BA$. Овим је доказ завршен, јер је сада $BF : CF = BG : AC = AB : AC$, што је и требало доказати.

Видимо да је понекад потребно „доцртати” неке тачке и праве да би се лакше дошло до решења задатка. Овде су тачка D и права BG добијене у жељи да се искористи Талесова теорема.

2. Нека су E и F тачке из претходног задатка. Доказати:

- а) $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;
- б) $AE : SE = (AB + AC + BC) : BC$, $AE : S_aE = (AB + AC - BC) : BC$;
- в) $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

Решење: Овде су тачке E, F из 1. задатка, а тачке S, S_a, S_b, S_c су тачке из Великог задатка, дакле центри редом уписаног круга k и споља уписаних кругова k_a, k_b, k_c .



Применом Теореме о симетрали угла (1. задатка) на троугао $\triangle CAE$ закључујемо да је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE$. Такође, знамо да је $BE : CE = AB : AC$ (1. задатак), па је $AC : CE = AB : BE$. Означимо тај однос са λ , дакле нека је $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BE} = \lambda$. Одавде је $AC = \lambda CE$ и $AB = \lambda BE$, па је $AB + AC = \lambda(BE + CE) = \lambda BC$. Следи да је $\lambda = (AB + AC) : BC$, а како је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE = \lambda$, следи да је $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$.

б) Како је $AE = AS + SE$, дељењем са SE добијамо да је

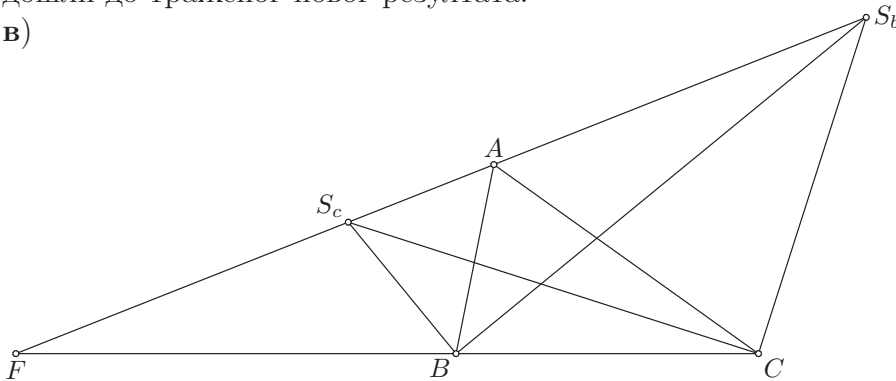
$$\begin{aligned}\frac{AE}{SE} &= \frac{AS + SE}{SE} = \frac{AS}{SE} + \frac{SE}{SE} \\ &= \frac{AS}{SE} + 1 = \frac{AB + AC}{BC} + 1 \\ &= \frac{AB + AC}{BC} + \frac{BC}{BC} = \frac{AB + AC + BC}{BC}.\end{aligned}$$

Слично, како је $AE = AS_a - S_aE$, дељењем са S_aE добијамо да је

$$\begin{aligned}\frac{AE}{S_aE} &= \frac{AS_a - S_aE}{S_aE} = \frac{AS_a}{S_aE} - \frac{S_aE}{S_aE} \\ &= \frac{AS_a}{S_aE} - 1 = \frac{AB + AC}{BC} - 1 \\ &= \frac{AB + AC}{BC} - \frac{BC}{BC} = \frac{AB + AC - BC}{BC}.\end{aligned}$$

Овде смо само користили претходне резултате и уз мало рачунања дошли до траженог новог резултата.

в)



Применом Теореме о симетрали угла на троугао $\triangle BAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AB : BF$. Такође, применом те теореме на троугао $\triangle CAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AC : CF$. Означимо тражени непознати однос са λ , дакле $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = \lambda$. На основу добијених резултата имамо да је $AB : BF = AC : CF = \lambda$. Одавде следи да је $AB = \lambda BF$ и $AC = \lambda CF$, па одузимањем добијамо да је $AC - AB = \lambda(CF - BF) = \lambda BC$. Дакле, $\lambda = (AC - AB) : BC$, па следи тражени резултат $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

3. Доказати (важе ознаке из великог задатка):

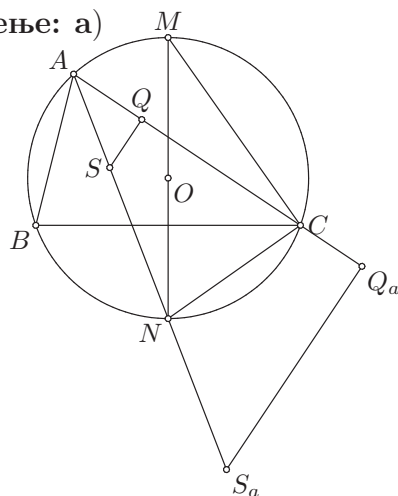
а) $SA \cdot SN = 2r\rho$;

б) $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$;

в) $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$;

г) $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

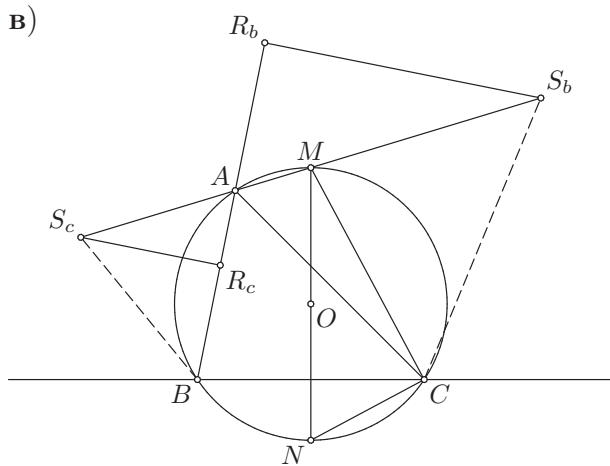
Решење: а)



Сличност даје односе, а не производе дужи, али можемо те односе помножити дужима које су у имениоцима и доћи до производа. Како нам се јавља полупречник уписаног круга, морамо уочити подножје нормале из центра S уписаног круга на некој од страница троугла $\triangle ABC$, нпр. подножје Q на страници AC . Пошто нам се јавља $2r$, тј. пречник описаног круга, и пошто већ имамо тачку N , уочимо тачку M из Великог задатка, јер тада имамо пречник $MN = 2r$.

Сада имамо да је $\angle SAQ = \angle NAC = \angle NMC$ (периферијски над луком \widehat{NC}) и да су углови $\angle SQA$ и $\angle NCM$ прави ($\angle NCM$ је периферијски над пречником NM), па је $\angle SQA = \angle NCM$. Следи да је $\triangle ASQ \sim \triangle MNC$, па је $SA : NM = SQ : NC$. Множењем са NM и NC добијамо да је $SA \cdot NC = NM \cdot SQ$. Како је $NM = 2r$, $SQ = \rho$ и $NC = SN$ (Велики задатак, став 6)), следи да је $SA \cdot SN = 2r\rho$, што је и требало доказати.

б) Слично као у делу а), уочимо тачке M, Q_a из Великог задатка. Имамо да је $\angle S_aAQ_a = \angle NAC = \angle NMC$ (периферијски над луком \widehat{NC}) и да су углови $\angle S_aQ_aA$ и $\angle NCM$ прави, па је $\angle S_aQ_aA = \angle NCM$. Следи да је $\triangle AS_aQ_a \sim \triangle MNC$, па је $S_aA : NM = S_aQ_a : NC$, односно, после множења, $S_aA \cdot NC = NM \cdot S_aQ_a$. Заменом $NM = 2r$, $S_aQ_a = \rho_a$ и $NC = S_aN$ (Велики задатак, став 6)) добијамо $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$.

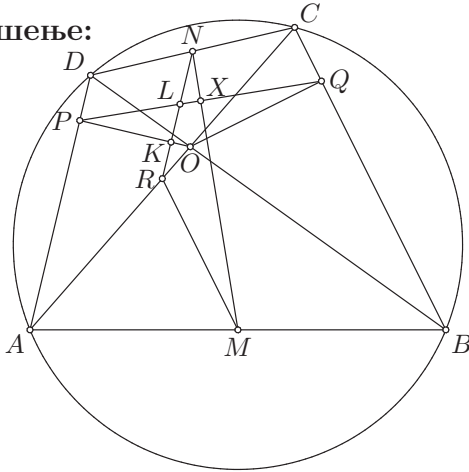


Како нам се овде јавља ρ_b , уочимо подножје нормале из S_b на некој од страница троугла $\triangle ABC$, нпр. на страници AB (дакле, тачку R_b) и како се поново јавља пречник описаног круга $2r$, уочимо пречник MN . Углови $\angle MNC$ и $\angle MAC$ су периферијски над луком \widehat{MC} , па су подударни, дакле $\angle MNC = \angle MAC = \frac{\pi - \alpha}{2}$ (права AM је симетрала спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$). Такође, $\angle S_bAR_b = \frac{\pi - \alpha}{2}$, па је $\angle MNC = \angle S_bAR_b$. Важи и $\angle MCN = \frac{\pi}{2} = \angle S_bR_bA$, па следи да је $\triangle MNC \sim \triangle S_bAR_b$. Дакле, $S_bA : MN = S_bR_b : MC$, односно $S_bA \cdot MC = MN \cdot S_bR_b$. Заменом $MN = 2r$, $S_bR_b = \rho_b$ и $MC = S_bM$ (Велики задатак, став **6**) добијамо $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$.

г) Слично као у делу **в**), уочимо тачке M, R_c из Великог задатка. Имамо да је $\angle S_cAR_c = \frac{\pi - \alpha}{2} = \angle MAC = \angle MNC$ (прве две једнакости важе јер је S_cM симетрала спољашњег угла код темена A , а последња јер су то периферијски углови над луком \widehat{MC}), као и $\angle S_cR_cA = \frac{\pi}{2} = \angle MCN$, па је $\triangle S_cAR_c \sim \triangle MNC$. Следи $S_cA : MN = S_cR_c : MC$, односно $S_cA \cdot MC = MN \cdot S_cR_c$. Заменом $MN = 2r$, $S_cR_c = \rho_c$ и $MC = S_cM$ (Велики задатак, став **6**) добијамо $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, M и N редом средишта страница AB и CD , O пресек дијагонала AC и BD , а P и Q нормалне пројекције тачке O редом на AD и BC . Доказати да је $MN \perp PQ$.

Решење:



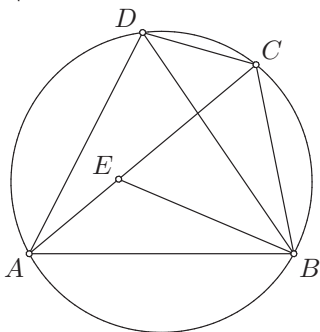
Нека је R средиште дијагонале AC . Тада је RM средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $RM \parallel BC$ и $RM = \frac{1}{2}BC$, а RN је средња линија троугла $\triangle ACD$, па је $RN \parallel AD$ и $RN = \frac{1}{2}AD$. Даље, како је $OQ \perp BC$ и $OP \perp AD$, следи да је $RM \perp OQ$ и $RN \perp OP$, па је $\angle MRN = \angle QOP$ (углови с нормалним крацима). Поред тога имамо да је $\frac{MR}{RN} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AD} = \frac{BC}{AD}$, па је довољно да докажемо да је $OQ : OP = BC : AD$ да би следило да је $\triangle MRN \sim \triangle QOP$.

Троуглови $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ су слични, јер имају подударне углове. Заиста, $\angle AOD = \angle BOC$ јер су то унакрсни углови и $\angle ADO = \angle BCO$ (периферијски над луком \widehat{AB}). Код сличних троуглова висине се односе исто као и странице, па је $OQ : OP = BC : AD$ (OQ је висина троугла BOC , а OP је висина троугла AOD). Дакле, $MR : RN = BC : AD = OQ : OP$ и $\angle MRN = \angle QOP$, па је $\triangle MRN \sim \triangle QOP$. Следи да је $\angle RNM = \angle OPQ$ и $\angle RMN = \angle OQP$.

Означимо са K, L редом пресечне тачке праве RN са правима OP и OQ и означимо са X пресечну тачку праве MN и праве PQ . Углови $\angle KPL$ и $\angle XNL$ су међусобно подударни, јер је $\angle KPL = \angle OPQ$ и $\angle XNL = \angle MNR$, а $\angle OPQ = \angle MNR$. Такође, $\angle KLP = \angle XLN$, јер су то унакрсни углови. Следи да троуглови $\triangle PKL$ и $\triangle NXL$ имају подударне углове, па је $\angle LXN = \angle LKP$. Међутим, $\angle LKP = \frac{\pi}{2}$, јер је то угао између праве NR и праве OP , а важи $NR \perp OP$. Према томе, $\angle LXN = \frac{\pi}{2}$, а то је угао између праве PQ и праве MN , па закључујемо да је $MN \perp PQ$.

5. Птоломејева теорема. Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао, доказати да важи $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Доказ:



Идеја је да производ $AC \cdot BD$ напишемо као збир два сабирка, од којих ће један бити једнак са $AB \cdot CD$, а други са $AD \cdot BC$. Ако на дијагонали AC уочимо неку тачку E , онда је $AC = AE + EC$, па је $AC \cdot BD = (AE + EC) \cdot BD = AE \cdot BD + EC \cdot BD$. Треба погоднo одабрати тачку E тако да нпр. буде $AE \cdot BD = AB \cdot CD$ и $EC \cdot BD = AD \cdot BC$, односно $AE : CD = AB : BD$ и $EC : AD = BC : BD$. Зато узмимо тачку E на дијагонали AC такву да је $\angle ABE = \angle DBC$.

Како је $\angle BAE = \angle BDC$ (периферијски над \widehat{BC}) и $\angle ABE = \angle DBC$, следи да је $\triangle ABE \sim \triangle DBC$, па је $AE : DC = AB : DB$. Дакле, важи $AE \cdot BD = AB \cdot CD$. Даље, имамо да је $\angle ECB = \angle ADB$ (периферијски над \widehat{AB}) и $\angle EBC = \angle EBD + \angle DBC = \angle EBD + \angle ABE = \angle ABD$, па је $\triangle EBC \sim \triangle ABD$. Следи да је $EC : AD = BC : BD$, па добијамо $EC \cdot BD = AD \cdot BC$. Сабирањем добијамо да је

$$\begin{aligned} AE \cdot BD + EC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ (AE + EC) \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ AC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Дефиниција 14. Нека је \mathcal{F} фамилија правих неке равни. Ако

1) постоји тачка S која припада свим правима фамилије \mathcal{F} и све праве које садрже тачку S припадају фамилији \mathcal{F} ;

2) постоји права s која је паралелна свим правима фамилије \mathcal{F} и све праве које су паралелне правој s припадају фамилији \mathcal{F} ;

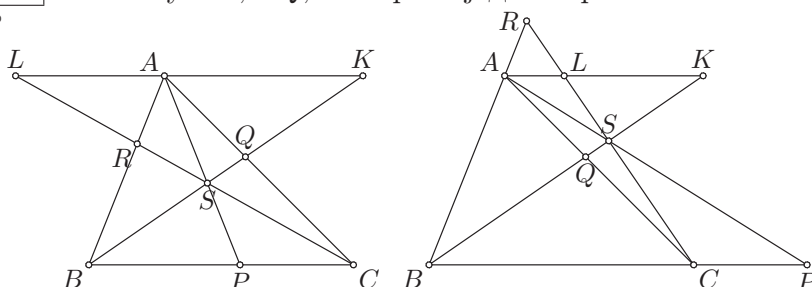
онда такву фамилију \mathcal{F} зовемо *праменом њравих*. Ако прамен \mathcal{F} задовољава услов 1), кажемо да је то прамен *конкурентних* правих, а ако прамен \mathcal{F} задовољава услов 2), кажемо да је то прамен *паралелних* правих.

Чевина теорема. Ако су P, Q, R редом тачке правих BC, CA, AB где су A, B, C три неколинеарне тачке, тада праве AP, BQ, CR припадају једном прамену ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$.

Доказ: Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. У формулацији теореме требало би додати услов да се тачке P, Q, R разликују од темена A, B, C троугла $\triangle ABC$, јер иначе број Π или није добро дефинисан (ако је нпр. $P = C$, онда није дефинисано $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$), или је једнак 0 (ако је нпр. $P = B$).

\Rightarrow : Нека су AP, BQ, CR праве једног прамена.

1°



Нека је S заједничка пресечна тачка правих AP, BQ, CR и нека су K, L редом пресечне тачке правих BQ, CR са правом која садржи тачку A и паралелна је са BC . Тада је на основу Талесове теореме

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{KA}{AL} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{KA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AL}{CB}, \end{aligned}$$

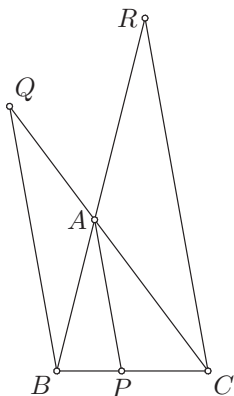
па добијамо да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{KA}{AL} \cdot \frac{CB}{KA} \cdot \frac{AL}{CB} = 1.$$

Ако је тачка S у унутрашњости троугла $\triangle ABC$, онда тачке P, Q, R припадају редом *дужима* BC, CA, AB , па је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$. Дакле, тада је $\Pi > 0$. Тачка S не може припадати ни правој AB , ни правој AC , нити правој BC , јер ће тада нека од тачака P, Q, R бити теме троугла. Према томе, тачка S не припада троуглу $\triangle ABC$, па остаје још случај када је у спољашњости троугла $\triangle ABC$ (и, наравно, не припада ни правој AB , ни правој AC нити правој BC). Тада ће тачно једна од тачака P, Q, R припадати одговарајућој дужи (BC, AC, AB). Нпр. нека тачка Q припада дужи AC , као што је на слици. Тада је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$

и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је поново $\Pi > 0$. Слично добијамо да је $\Pi > 0$ и у преостала два случаја (P припада дужи BC , односно R припада дужи AB). Дакле, имамо $\Pi > 0$ и $|\Pi| = 1$, па следи да је $\Pi = 1$.

2°



Нека су праве AP, BQ, CR међусобно паралелне. На основу Талесове теореме је

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CB}{BP}$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{PC}{CB},$$

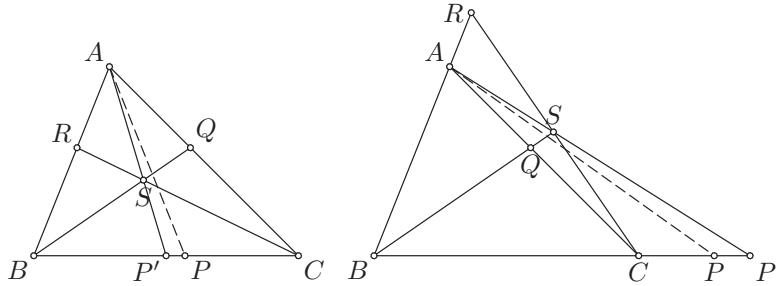
па је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CB}{BP} \cdot \frac{PC}{CB} = 1.$$

Праве AP, BQ, CR морају бити такве та тачно две од њих не пролазе кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, а трећа пролази. Стога тачно две од тачака P, Q, R припадају дужима BC, CA, AB , а трећа не припада. Нпр. ако права AP пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, онда праве BQ, CR не пролазе кроз унутрашњост троугла и тачка P припада дужи BC , а тачке Q, R не припадају дужима CA, AB . Следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је $\Pi > 0$. Слично и у преостала два случаја (права BQ пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, односно права CR пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$) добијамо да је $\Pi > 0$. Дакле, важи $\Pi > 0$ и $|\Pi| = 1$, па закључујемо да је $\Pi = 1$.

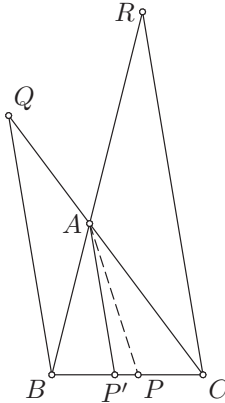
$\boxed{\Leftarrow}$: Нека је $\Pi = 1$. Посматрајмо праве BQ и CR .

1°



Нека се праве BQ и CR секу у тачки S . Означимо са P' пресечну тачку праве AS и праве BC . На основу дела $\boxed{\Rightarrow}$ следи $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Такође, по претпоставци је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$, па је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па се праве AP, BQ, CR секу у тачки S . Дакле, AP, BQ, CR припадају једном прамену.

2°



Нека је $BQ \parallel CR$. Означимо са P' пресечну тачку праве која садржи тачку A и паралелна је са правом BQ (и правом CR) и праве BC . На основу дела $\boxed{\Rightarrow}$ следи $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Такође, $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$, па је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па су праве AP, BQ, CR паралелне. Дакле, праве AP, BQ, CR припадају једном прамену. \square

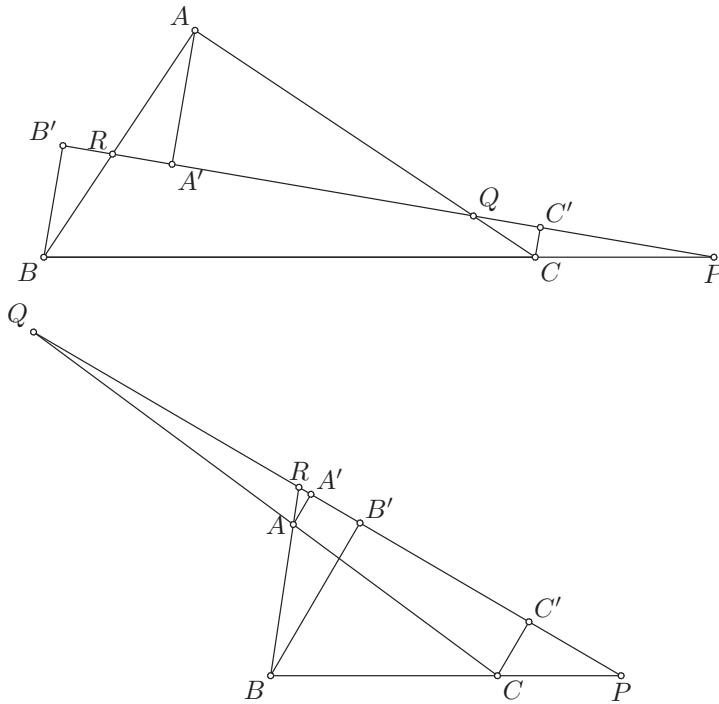
Менелајева теорема. Тачке P, Q, R правих одређених страницама BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$ су колинеарне ако и само ако важи

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$$

Доказ: Означимо поново $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Слично као код формулације Чевине теореме, и у формулацији ове теореме требало би додати услов

да се тачке P, Q, R разликују од темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ (из истих разлога као малопре, јер ће број Π бити недефинисан ако је нпр. $P = C$ или ће бити једнак нули ако је нпр. $P = B$).

\Rightarrow : Нека су P, Q, R колинеарне и нека је p права која их садржи. Означимо са A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој p . Тада су праве AA', BB', CC' паралелне, па на основу Талесове теореме имамо:



$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{BB'}{CC'} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CC'}{AA'} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AA'}{BB'}. \end{aligned}$$

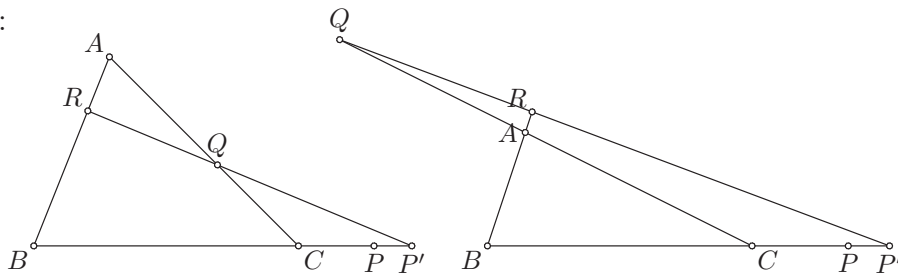
Следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1.$$

Како права p не садржи ниједно теме троугла A, B, C јер би иначе нека од тачака P, Q, R била теме троугла, на основу Пашове аксиоме закључујемо да или тачно две од тачака P, Q, R припадају одговарајућим дужицама BC, CA, AB или ниједна од њих не припада одговарајућој дужи. Ако

нпр. тачке Q, R припадају редом дужима CA, AB , важи $\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} < 0, \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$, па је $\Pi < 0$. Слично, ако тачке P, Q припадају редом дужима BC, CA или ако тачке P, R припадају редом дужима BC, AB , следи да је $\Pi < 0$. Ако ниједна од тачака P, Q, R не припада одговарајућој дужи (BC, CA, AB) , важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0, \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је поново $\Pi < 0$. Закључујемо да је $\Pi < 0$ и $|\Pi| = 1$, па је $\Pi = -1$.

\Leftarrow :



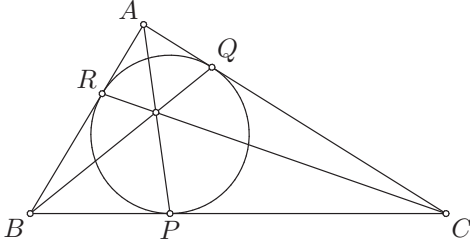
Нека је $\Pi = -1$. Означимо са P' пресечну тачку праве QR и праве BC . На основу дела \Leftarrow следи да је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. Такође, по претпоставци је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$, па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па су тачке P, Q, R колинеарне. \square

Напомена 5. Да би докази смерова \Leftarrow Чевине и Менелајеве теореме били до краја коректни, морали бисмо да докажемо да тачке P' постоје, тј. у случају 1° Чевине теореме да AS и BC нису паралелне, у случају 2° Чевине теореме да права која садржи A и паралелна је са BQ и CR није паралелна са BC , а у Менелајевој теореме да праве QR и BC нису паралелне. Међутим, то овде нећемо радити.

Напомена 6. У некој литератури се уместо израза „Чевина теорема” може наћи и израз „Чеваова теорема”.

6. Ако су P, Q, R тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB , доказати да су праве AP, BQ, CR конкурентне.

Решење:



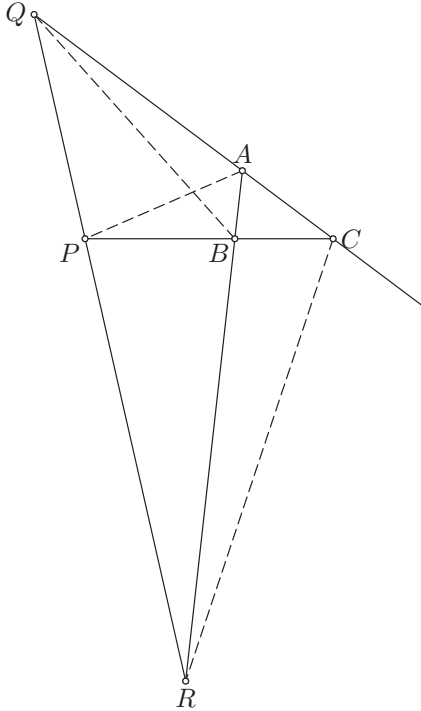
Нека је $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Тангентне дужи из тачака A, B, C на уписаном кругу троугла $\triangle ABC$ су подударне ($AQ = AR, BR = BP, CP = CQ$), па следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BR}{PC} \cdot \frac{CP}{QA} \cdot \frac{AQ}{RB} = 1.$$

Тачке P, Q, R припадају дужима BC, CA, AB , па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$. Одавде закључујемо да је $\Pi > 0$, па због $|\Pi| = 1$ следи да је $\Pi = 1$. На основу Чевине теореме закључујемо да праве AP, BQ, CR припадају једном прамену. С обзиром на то да дужи BQ, CR припадају унутрашњости троугла $\triangle ABC$, оне се секу, па закључујемо да праве AP, BQ, CR припадају прамену конкурентних правих, тј. оне су конкурентне (секу се у једној тачки).

7. Доказати да уколико постоје тачке у којима бисектрисе спољашњих углова код темена A, B, C секу праве одређене наспрамним странама троугла ABC , оне су колинеарне.

Решење:



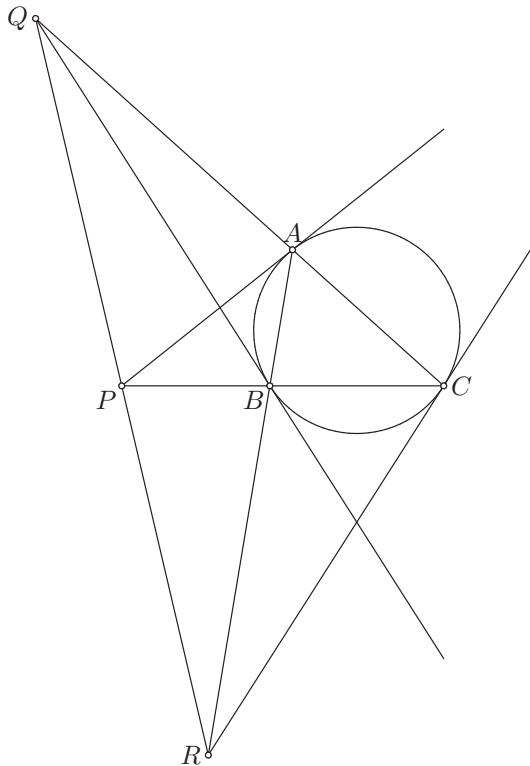
Нека су P, Q, R редом пресечне тачке симетрала спољашњих углова код темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ са правима BC, CA, AB . Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. На основу Теореме о симетрали угла следи да је

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{BA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AC}{CB}, \end{aligned}$$

па је $|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} \cdot \frac{AC}{CB} = 1$. Како симетрале спољашњих углова троугла припадају спољашњости троугла, следи да ниједна од тачака P, Q, R не припада одговарајућој дужи (BC, CA, AB) , па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$. Дакле, $\Pi < 0$ и $|\Pi| = 1$, па је $\Pi = -1$. На основу Менелајеве теореме следи да су тачке P, Q, R колинеарне.

8. Доказати да тачке P, Q, R у којима тангенте описаног круга троугла ABC у његовим теменима секу праве одређене наспрамним страницама, уколико постоје, припадају једној правој.

Решење:



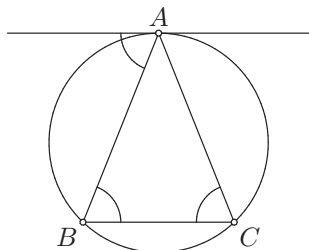
Нека су P, Q, R редом пресечне тачке тангенте у теменима A, B, C троугла $\triangle ABC$ на његовом описаном кругу са правима BC, CA, AB . Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Угао $\angle PAB$ је угао између тангенте PA и тетиве AB , па је подударан с периферијским углом $\angle ACB$ над том тетивом. Следи да је $\angle PAB = \angle PCA (= \angle BCA)$, а како је и $\angle APB = \angle CPA$ (исти угао), следи да је $\triangle PAB \sim \triangle PCA$. Одавде је $\frac{BP}{AP} = \frac{PA}{PC} = \frac{AB}{AC}$, па следи да је $\frac{BP}{PC} = \frac{BP}{AP} \cdot \frac{AP}{PC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Слично, $\angle QBA = \angle ACB$ (угао $\angle QBA$ између тангенте QB и тетиве BA подударан је с периферијским углом $\angle ACB$ над том тетивом) и $\angle BQA = \angle BQC$ (исти угао), па је $\triangle QBC \sim \triangle QAB$. Следи $\frac{CQ}{BQ} = \frac{QB}{QA} = \frac{BC}{AB}$, па је $\frac{CQ}{QA} = \frac{CQ}{BQ} \cdot \frac{BQ}{QA} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$. Коначно, $\angle RCB = \angle BAC$ (угао $\angle RCB$ између тангенте RC и тетиве CB подударан је с периферијским углом $\angle BAC$ над том тетивом) и $\angle BRC = \angle ARC$ (исти угао), па је $\triangle RAC \sim \triangle RCB$. Следи да је

$\frac{AR}{CR} = \frac{RC}{RB} = \frac{AC}{CB}$, па је $\frac{AR}{RB} = \frac{AR}{CR} \cdot \frac{CR}{RB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$. Према томе,

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \cdot \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1.$$

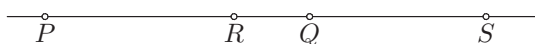
Како тангенте AP, BQ, CR припадају спољашњости описаног круга троугла $\triangle ABC$, следи да оне припадају и спољашњости троугла $\triangle ABC$, па тачке P, Q, R не припадају одговарајућим дужима BC, CA, AB . Према томе, $\frac{BP}{PC} < 0$, $\frac{CQ}{QA} < 0$ и $\frac{AR}{RB} < 0$, па је и $\Pi < 0$. Дакле, $\Pi = -1$, па према Менелајевој теореме следи да су тачке P, Q, R колинеарне.

Напомена 7. Размотримо у ком случају је нека од тангенти паралелна са насупрмном страницом, нпр. када је тангента у темену A троугла $\triangle ABC$ на његовом описаном кругу паралелна са BC .



Назначени угао између тангенте и тетиве AB подударан је с периферијским углом $\angle ACB$ над том тетивом, а с друге стране подударан је с углом $\angle ABC$, јер су то углови с паралелним крацима. Закључујемо да је $\angle ACB = \angle ABC$, па је троугао $\triangle ABC$ једнакокраки с основицом BC . Дакле, задатак се могао решавати само за троуглове $\triangle ABC$ који нису једнакокраки, јер иначе не постоји нека од тачака P, Q, R .

Дефиниција 15. Нека су P, Q, R, S четири различите колинеарне тачке. Пар тачака (P, Q) је *хармонијски сирећути* с паром тачака (R, S) ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ и пишемо $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.



Следе неке особине релације хармонијске спрегнутости. Најпре, та релација је симетрична у следећем смислу. Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\mathcal{H}(P, Q; S, R)$, $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$, $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$, односно небитан је да ли је у питању пар (P, Q) или пар (Q, P) , као и да ли је у питању пар (R, S) или пар (S, R) . Такође, ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$, тј. ако је пар (P, Q) хармонијски спрегнут с паром (R, S) , онда је и пар (R, S) хармонијски спрегнут с паром (P, Q) . Докажимо ове особине.

Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$, што по дефиницији даје $\mathcal{H}(P, Q; S, R)$. Множењем бројилаца и именилаца с леве и десне стране једнакости бројем -1 добијамо да је $\frac{-\overrightarrow{PS}}{-\overrightarrow{SQ}} = -\frac{-\overrightarrow{PR}}{-\overrightarrow{RQ}}$, односно да је $\frac{\overrightarrow{SP}}{\overrightarrow{QS}} = -\frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{QR}}$. Како су тачке P, Q, R, S међусобно различите, ниједан од ових вектора није нула вектор, па ни бројеви с леве и десне стране једнакости нису једнаки 0 , што значи да можемо узети њихове инверзе и они ће такође бити једнаки. Добивамо да је $\frac{\overrightarrow{QS}}{\overrightarrow{SP}} = -\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{RP}}$, а то по дефиницији значи да је $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$. Поновном заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$.

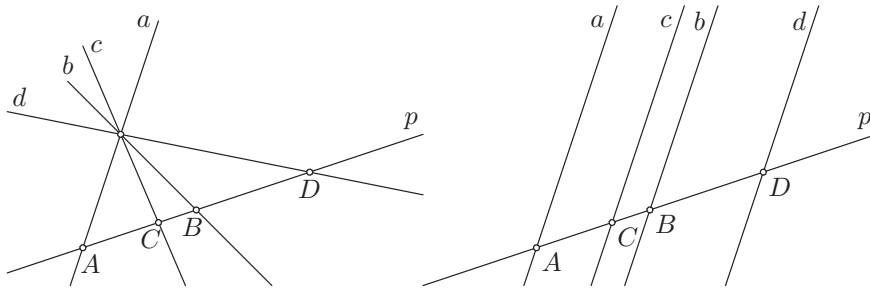
Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = \lambda$. Следи да је $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{RQ}$ и $\overrightarrow{PS} = -\lambda \overrightarrow{SQ} = \lambda \overrightarrow{QS}$. Вектори \overrightarrow{RP} и \overrightarrow{PS} су колинеарни и ниједан од њих није нула вектор, па следи да је $\lambda \neq 0$ и постоји однос тих вектора који је једнак $\frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{PS}} = \frac{-\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PS}} = \frac{-\lambda \overrightarrow{RQ}}{\lambda \overrightarrow{QS}} = -\frac{\overrightarrow{RQ}}{\overrightarrow{QS}}$. Следи да је $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$.

Даље, ако су P, Q, R три разне колинеарне тачке и R није средиште дужи PQ , тада постоји јединствена тачка S таква да је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$. Заиста, тада је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \notin \{0, 1\}$, па постоји јединствена тачка S таква да је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$ (због $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq -1$ следе постојање и јединственост тачке S). Због $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq 0$ следи да је S различита од P , а наравно мора бити и $S \neq Q$ и $S \neq R$, па је заиста $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда важи тачно један од распореда тачака $\mathcal{B}(P, R, Q)$ и $\mathcal{B}(P, S, Q)$. Заиста, из $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ следи $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = \lambda$. Како због различитости тачака P, Q, R, S важи $\lambda \neq 0$, следи да је тачно један од односа $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$ и $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ позитиван (други је наравно негативан). Ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} > 0$, онда је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} < 0$, па важи $\mathcal{B}(P, R, Q)$ и не важи $\mathcal{B}(P, S, Q)$. Ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} < 0$, онда је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} > 0$, па важи $\mathcal{B}(P, S, Q)$ и не важи $\mathcal{B}(P, R, Q)$. Према томе, важи тачно један од распореда тачака $\mathcal{B}(P, R, Q)$ и $\mathcal{B}(P, S, Q)$.

Дефинисаћемо и хармонијску спрегнутост парова правих.

Дефиниција 16. Нека праве a, b, c, d припадају једном прамену. Кажемо да је пар (a, b) *хармонијски сирећути* с паром (c, d) ако постоји права p таква да је $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, $p \cap c = \{C\}$, $p \cap d = \{D\}$ и важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. Тада пишемо $\mathcal{H}(a, b; c, d)$.



Да би дефиниција била коректна, требало би доказати да ова особина не зависи од избора праве p . То нећемо радити. Навешћемо само једну особину без доказа. Ако су a, b, c, d праве конкурентног прамена (конкурентне праве) и $c \perp d$, важи $\mathcal{H}(a, b; c, d)$ ако и само су c и d симетрале углова који граде праве a и b (има их два и треба да c буде симетрала једног од њих, а d симетрала оног другог).

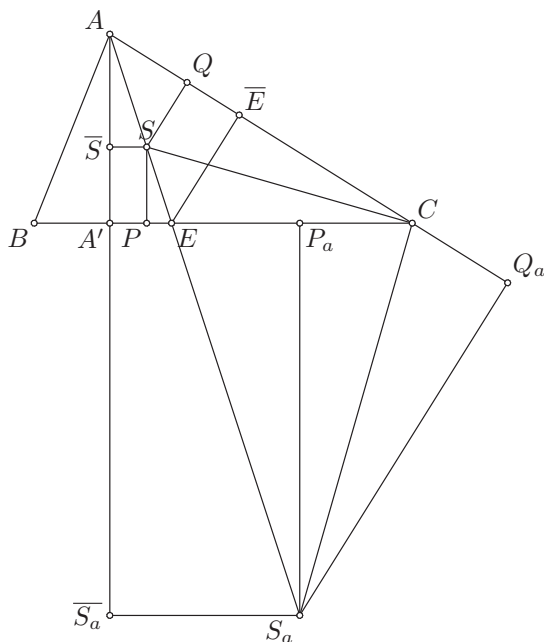
Због доказане симетричности релације хармонијске спрегнутости парова тачака, следи и симетричност релације хармонијске спрегнутости парова правих. Такође, често уместо „пар (P, Q) је хармонијски спрегнут с паром (R, S) ” или „парови (P, Q) и (R, S) су хармонијски спрегнути” кажемо и „тачке P, Q, R, S су хармонијски спрегнуте”. Слично, често кажемо „праве a, b, c, d су хармонијски спрегнуте”.

9. Нека су $\overline{S}, \overline{S}_a, \overline{S}_b, \overline{S}_c$ пројекције тачака S, S_a, S_b, S_c на праву одређену висином AA' троугла ABC , а \overline{E} пројекција E на праву AC . Доказати:

а) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a), \mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S}_a), \mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a), \mathcal{H}(A', E; P, P_a);$

б) $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c), \mathcal{H}(A', F; P_b, P_c), \mathcal{H}(A, A'; \overline{S}_b, \overline{S}_c).$

Решење:



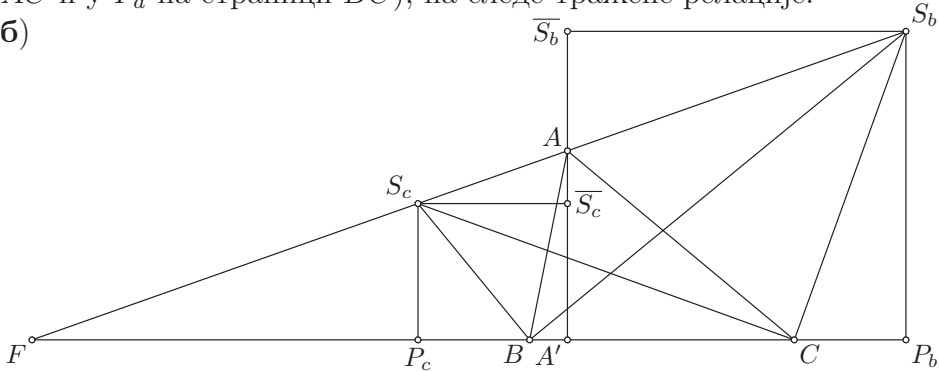
а) Тачке S, S_a су редом центар уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC , а тачка E је пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A и (наспрамне) странице BC . На основу Теореме о симетрали угла (1. задатка) следи $AS : SE = AS_a : S_aE (= AC : CE)$. Такође, како важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, S, E, S_a)$ следи да су односи $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}}$ и $\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$ супротних знакова, па важи $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}} = -\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$, тј. $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$.

Сада ћемо доказати да се нормалним пројектовањем чува хармонијска спрегнутост тачака. Тачке A, S, E, S_a се пројектују у тачке $A, \overline{S}, A', \overline{S}_a$ и доказујемо да из $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ следи $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S}_a)$. Важи $S\overline{S} \perp AA'$, $EA' \perp AA'$ и $S_a\overline{S}_a \perp AA'$, па следи да је $S\overline{S} \parallel EA' \parallel S_a\overline{S}_a$, па Талесова теорема даје $A\overline{S} : \overline{S}A' = AS : SE = AS_a : S_aE = A\overline{S}_a : \overline{S}_aA'$. Нормално пројектовање чува распоред тачака, па из распореда тачака $\mathcal{B}(A, S, E, S_a)$ закључујемо да важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, \overline{S}, A', \overline{S}_a)$. Следи $\frac{\overrightarrow{A\overline{S}}}{\overrightarrow{\overline{S}A'}} = -\frac{\overrightarrow{A\overline{S}_a}}{\overrightarrow{\overline{S}_aA'}}$, па је $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S}_a)$.

Сада када знамо да нормално пројектовање чува хармонијску спрегнутост тачака, из $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ директно следи $\mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a)$, као и

$\mathcal{H}(A', E; P, P_a)$. Заиста, тачке A, S, E, S_a пројектују се у тачке A, Q, \bar{E}, Q_a на правој AC и у тачке A', P, E, P_a на правој BC (центри S, S_a уписаног и споља уписаног круга пројектују се редом у додирне тачке тих кругова и одговарајуће странице, односно праве која је садржи; дакле, S се пројектује у Q на страници AC и у P на страници BC , а S_a у Q_a на правој AC и у P_a на страници BC), па следе тражене релације.

б)



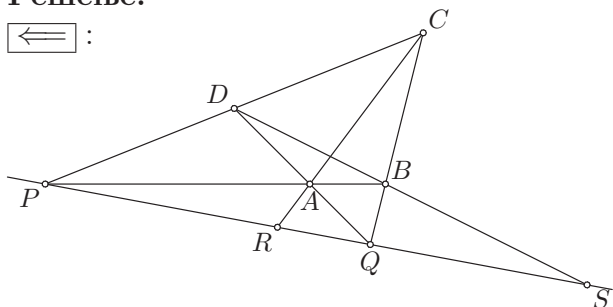
Тачке S_b, S_c су центри споља уписаних кругова који додирују редом странице AC, AB , а тачка F је пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A и (наспрамне) странице BC . На основу Теореме о симетрали угла (1. задатка) следи $AS_c : S_cF = AS_b : S_bF (= AB : BF)$. У зависности од тога да ли је $AB < AC$ или $AB > AC$ важи распоред $\mathcal{B}(F, S_c, A, S_b)$ или распоред $\mathcal{B}(F, S_b, A, S_c)$ (не може бити $AB = AC$, јер је тада симетрала спољашњег угла код темена A паралелна с правом BC и не постоји тачка F), па су односи $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}}$ и $\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$ супротних знакова. Дакле, $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}} = -\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$, па важи $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$.

Нормалним пројектовањем тачке F, S_c, A, S_b пројектују се у тачке F, P_c, A', P_b на правој BC и у тачке $A', \bar{S}_c, A, \bar{S}_b$ на правој AA' , па из $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$ следе $\mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$ и $\mathcal{H}(A, A'; \bar{S}_b, \bar{S}_c)$.

10. Важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ ако и само ако постоје четири тачке A, B, C, D такве да важи $AB \cap CD = \{P\}$, $BC \cap AD = \{Q\}$, $PQ \cap AC = \{R\}$, $PQ \cap BD = \{S\}$.

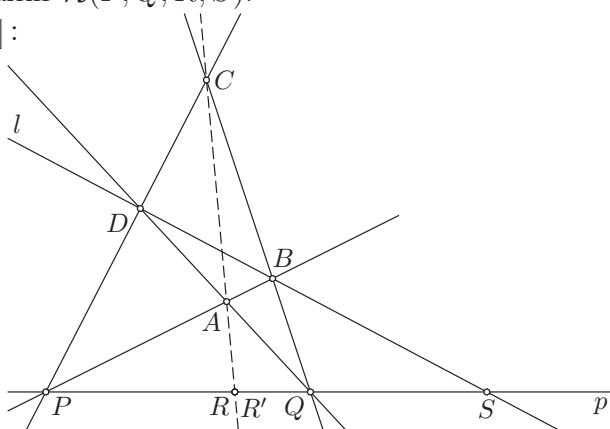
Решење:

\Leftarrow :



Нека су A, B, C, D четири разне тачке у равни и нека постоје тачке $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = BC \cap AD$, $\{R\} = PQ \cap AC$, $\{S\} = PQ \cap BD$. Посматрајмо троугао $\triangle PQC$, тачке R, B, D редом на његовим странама PQ, QC, CP и тачку S на правој PQ . Праве PB, QD, CR секу се у тачки A , па оне припадају једном прамену. Према Чевиној теорему следи да је $\frac{PR}{RQ} \cdot \frac{QB}{BC} \cdot \frac{CD}{DP} = 1$. Такође, тачке S, B, D су колинеарне, па је према Менелајевој теорему $\frac{PS}{SQ} \cdot \frac{QB}{BC} \cdot \frac{CD}{DP} = -1$. Следи да је $\frac{PR}{RQ} = \frac{BC}{QB} \cdot \frac{DP}{CD} = -\frac{PS}{SQ}$, па важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

\Rightarrow :



Нека су P, Q, R, S хармонијски спрегнуте тачке (важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$). Означимо са p праву која садржи тачке P, Q, R, S . Треба пронаћи неке четири тачке A, B, C, D у некој равни која садржи праву p тако да важи $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = BC \cap AD$, $\{R\} = PQ \cap AC$, $\{S\} = PQ \cap BD$. Одаберимо произвољну праву l која садржи тачку S и различита је од праве p и одаберимо на њој произвољне две разне тачке B, D различите од тачке S такве да $PB \nparallel QD$ и $PD \nparallel QB$ (убрзо ћемо видети зашто морамо наметнути баш ова два услова). Како желимо да одаберемо тачке

A, C тако да буде $\{P\} = AB \cap CD$ и $\{Q\} = BC \cap AD$, добијамо да тачка A мора припадати правима PB и QD и да тачка C мора припадати правима PD и QB . Из тих разлога нека је $\{A\} = PB \cap QD$ и $\{C\} = PD \cap QB$ (дакле, морамо наметнути услове $PB \nparallel QD$ и $PD \nparallel QB$ да би постојали пресеци тих правих).

Сада имамо четири тачке A, B, C, D и треба још проверити да ли је $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = BC \cap AD$, $\{R\} = PQ \cap AC$, $\{S\} = PQ \cap BD$. Прве две једнакости важе јер смо бирали тачке A, C тако да оне важе. Такође, важи и четврта једнакост ($\{S\} = PQ \cap BD$) јер смо тако бирали тачке B, D . Треба још проверити да ли је $\{R\} = PQ \cap AC$. Означимо пресек правих PQ и AC са R' . На основу дела $\boxed{\Leftarrow}$ следи да важи $\mathcal{H}(P, Q; R', S)$, односно $\frac{\overrightarrow{PR'}}{R'Q} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ}$. По претпоставци важи и $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, односно $\frac{\overrightarrow{PR}}{RQ} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ}$. Дакле, следи $\frac{\overrightarrow{PR'}}{R'Q} = \frac{\overrightarrow{PR}}{RQ} = k$, па је $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = k\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RQ} = (k+1)\overrightarrow{RQ}$, али и $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR'} + \overrightarrow{R'Q} = k\overrightarrow{R'Q} + \overrightarrow{R'Q} = (k+1)\overrightarrow{R'Q}$, те је $R' = R$. Према томе, важи и $\{R\} = PQ \cap AC$.

Дефиниција 17. Нека су A, B, C три колинеарне тачке. Дефинишемо израз $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ на следећи начин:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \cdot AC, & \text{ако није } \mathcal{B}(B, A, C) \\ -AB \cdot AC, & \text{ако јесте } \mathcal{B}(B, A, C) \end{cases}.$$

11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB , тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.

Решење:

Лако се проверава да израз дефинисан у дефиницији 17 суштински представља скаларни производ колинеарних вектора. Заиста, ако није $\mathcal{B}(B, A, C)$, онда је $\cos \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos 0 = 1$, па добијамо $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC$, а ако јесте $\mathcal{B}(B, A, C)$, онда је $\cos \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos \pi = -1$, па је $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = -AB \cdot AC$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B; C, D) &\iff \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \\ &\iff \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

$$\iff (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$$