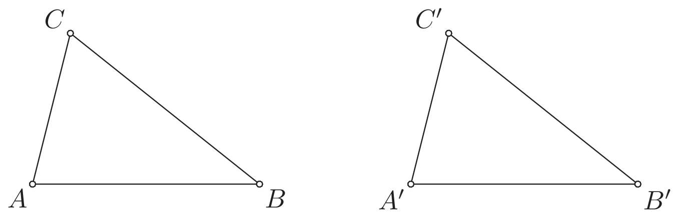
Геометрија 2

- вежбе -

1 Подударност

Подсетимо се ставова о подударности троуглова. Јасно нам је да два подударна троугла имају међусобно подударне одговарајуће странице и углове. Обратно, за два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ довољно је доказати само за нека три пара страница или углова да су подударни. Ставови који се доказују у теорији и који дају ове довољне услове за подударност два троугла зову се Ставови о подударности троуглова. Има их пет и сада ћемо их навести.

Став 1. *Нека су дати троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Ако важи нешто од следећег:*
1° ***(СУС)*** *$AB = A'B'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $AC = A'C'$;*
2° ***(ССС)*** *$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$;*
3° ***(УСУ)*** *$\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $AB = A'B'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$;*
4° ***(ССУ)*** *$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, а углови $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle A'B'C'$ су оба оштра, оба права или оба тупа;*
5° ***(УУС)*** *$AB = A'B'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$;*
онда је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



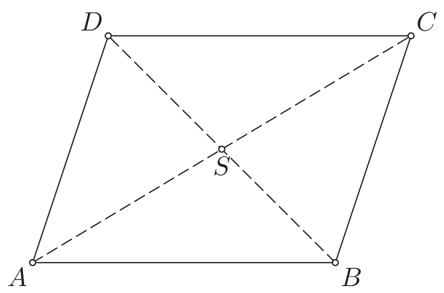
Дакле, сваки од ставова 1°–5° еквивалентан је са подударношћу троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$.

Приметимо да код троуглова не можемо тек тако писати знак „=” уместо знака „$\cong$”. Код дужи и углова се то може толерисати, јер се ту уместо једнакости скупова тачака мисли на једнакост дужина дужи, односно мера углова. Међутим, одговарајућа мера за троуглове је површина, а два троугла која имају исту површину не морају бити подударна.

Вратимо се сада на Ставове о подударности троуглова. На први поглед нам се може учинити да су ставови УСУ и УУС исти, јер уколико су нама позната нека два угла троугла, познат нам је и трећи због тога што је збир углова у троуглу једнак 180°, односно π. Но, на овом предмету се изучавају две геометрије, еуклидска и хиперболичка. Еуклидска геометрија је стандардна, уобичајена геометрија с којом се сусрећемо још у основној школи, а о хиперболичкој геометрији ћемо учити касније. За сада ћемо рећи да се испоставља да ће у хиперболичкој геометрији збир углова у троуглу увек бити мањи од π и да тај збир може бити било који број између 0 и π.

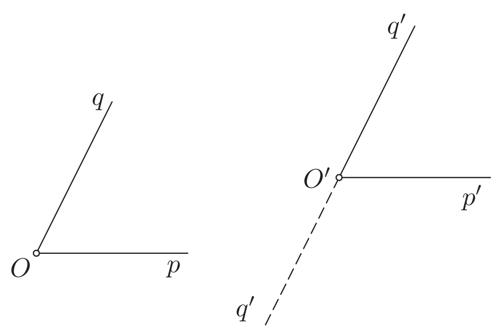
Осим ставова о подударности троуглова, користићемо једно веома важно тврђење везано за паралелограм. Најпре дајмо дефиницију паралелограма.

Дефиниција 1. Четвороугао $ABCD$ је *паралелограм* ако је $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$.



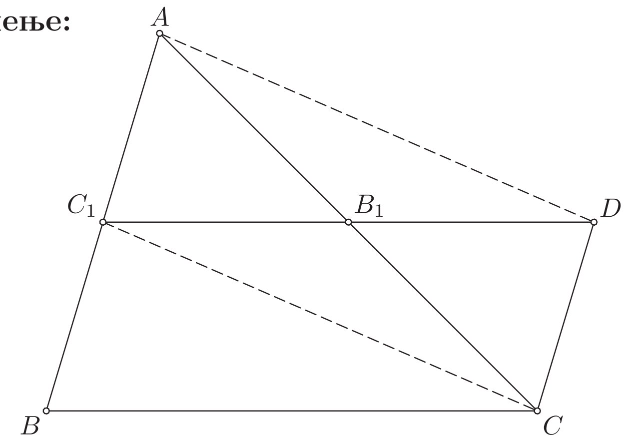
Теорема 1. *Нека је у равни дат конвексан четвороугао $ABCD$. Следећа тврђења су еквивалентна.*
1° *Четвороугао $ABCD$ је паралелограм.*
2° *Свака два суседна угла четвороугла $ABCD$ су суплементна.*
3° *Парови наспрамних углова четвороугла $ABCD$ су парови подударних углова.*
4° *$AB \parallel CD$ и $AB = CD$*
5° *$AB = CD$ и $AD = BC$*
6° *Дијагонале AC и BD имају заједничко средиште.*

Теорема 2 (Углови са паралелним крацима)**.** *Нека су $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'O'q'$ такви да је $Op \parallel O'p'$ и $Oq \parallel O'q'$. Тада је $\measuredangle pOq = \measuredangle p'O'q'$ или $\measuredangle pOq + \measuredangle p'O'q' = \pi$.*



1. (**Средња линија троугла**) Ако су B_1 и C_1 средишта дужи CA и BA троугла ABC, онда су праве BC и B_1C_1 паралелне и важи $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.

Решење:



Нека је D тачка на полуправој C_1B_1 таква да је $C_1B_1 = B_1D$. Тада је тачка B_1 средиште дијагонала AC и C_1D четвороугла AC_1CD, те је он паралелограм. Следи да је $AC_1 \parallel CD$ и да је $AC_1 = CD$ као наспрамне странице паралелограма. Како је $AC_1 = C_1B$ јер је C_1 средиште AB, имамо да је $C_1B = CD$, а како су праве AC_1 и C_1B исте, следи да је и $C_1B \parallel CD$. Одавде закључујемо да је четвороугао $BCDC_1$ паралелограм, па имамо да је $BC \parallel C_1D$ и $BC = C_1D$. Како имамо да су праве C_1B_1 и C_1D исте, следи да је $C_1B_1 \parallel BC$, а како је B_1 средиште C_1D, следи да је $C_1B_1 = \frac{1}{2}C_1D = \frac{1}{2}BC$, што је и требало доказати.

Дефиниција 2. Дуж која повезује средишта две странице троугла ABC зове се *средња линија* троугла $\triangle ABC$.

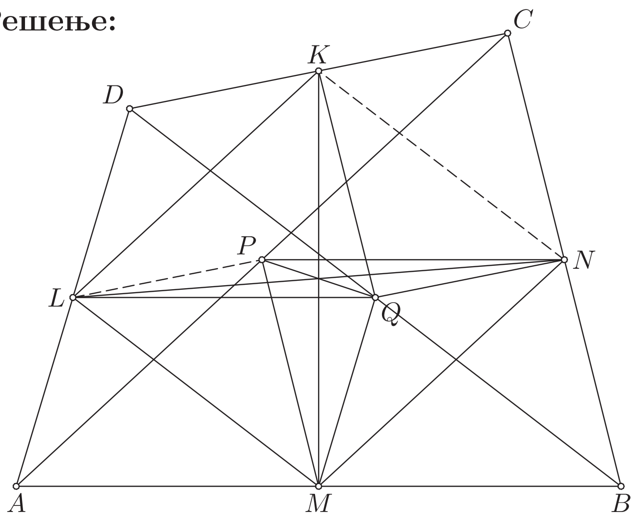
2. Ако су A, B, C, D четири различите тачке и M, N, K, L, P, Q средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC, DB редом, доказати:

а) MN и KL, MP и QK, NP и QL су међусобно подударне дужи;

б) дужи LN, MK, PQ имају заједничко средиште;

в) сваки од углова $\measuredangle PMQ$, $\measuredangle PNQ$, $\measuredangle LMN$ подударан је једном од углова којег одређују праве BC и AD, AB и CD, AC и BD.

Решење:

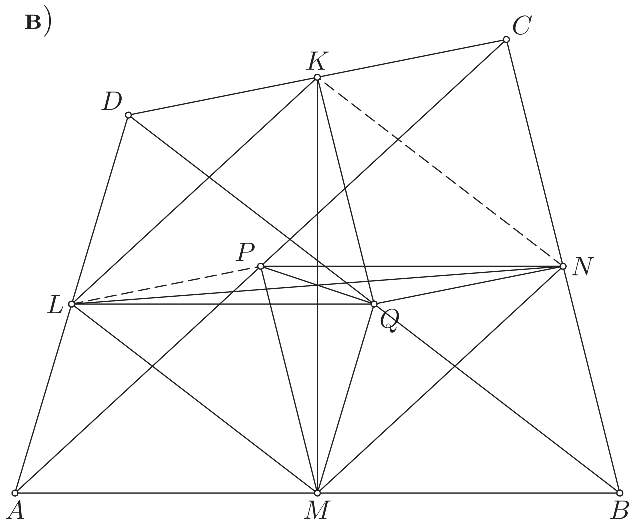


а) Како су тачке M и N средишта дужи AB и BC, редом, дуж MN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па закључујемо да је $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. Такође, KL је средња линија троугла $\triangle ACD$, па следи да је $KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Закључујемо да је $MN \parallel KL$ и $MN = KL$.

Слично је и QK средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $QK \parallel BC$ и $QK = \frac{1}{2}BC$. Такође је MP средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $MP \parallel BC$ и $MP = \frac{1}{2}BC$, па закључујемо да је $QK \parallel MP$ и $QK = MP$.

б) Из дела **а**) имамо да је $MN \parallel KL$ и $MN = KL$, па је четвороугао $MNKL$ паралелограм. Следи да његове дијагонале MK и LN имају заједничко средиште. Такође, из дела **а**) закључујемо да је $QK \parallel MP$ и $QK = MP$, па је четвороугао $KPMQ$ паралелограм. Одавде закључујемо да његове дијагонале KM и PQ имају заједничко средиште. Како смо доказали да и MK и LN имају заједничко средиште, а свака дуж има јединствено средиште, следи да све три дужи (MK, LN и PQ) имају заједничко средиште.

в)

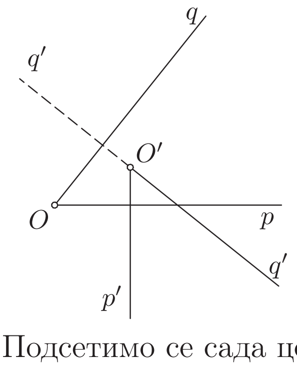


Дуж PM је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $PM \parallel BC$, а дуж MQ је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $MQ \parallel AD$. Ако са $\measuredangle(AD, BC)$ означимо угао који граде праве AD и BC, онда тај угао и угао $\measuredangle PMQ$ имају паралелне краке, па су подударни. Дакле, $\measuredangle PMQ = \measuredangle(AD, BC)$.

Дуж PN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $PN \parallel AB$, а дуж NQ је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $NQ \parallel CD$. Угао који граде праве AB и CD и угао $\measuredangle PNQ$ имају паралелне краке, па морају бити једнаки, односно важи $\measuredangle PNQ = \measuredangle(AB, CD)$.

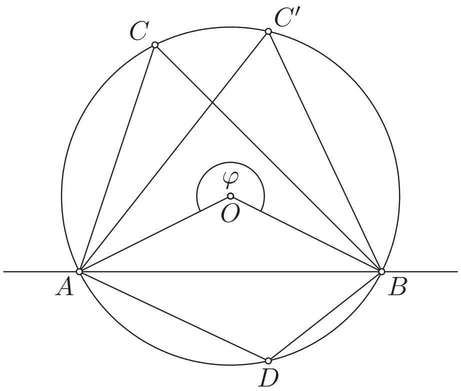
Коначно, LM је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $LM \parallel BD$, а MN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $MN \parallel AC$. Сада видимо да углови $\measuredangle LMN$ и $\measuredangle(AC, BD)$ имају паралелне краке, па следи да је $\measuredangle LMN = \measuredangle(AC, BD)$.

Теорема 3 (Углови са нормалним крацима)**.** *Нека су $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'O'q'$ такви да је $Op \perp O'p'$ и $Oq \perp O'q'$. Тада је $\measuredangle pOq = \measuredangle p'O'q'$ или $\measuredangle pOq + \measuredangle p'O'q' = \pi$.*



Подсетимо се сада централних и периферијских углова.

Дефиниција 3. Нека је k круг, нека је O његов центар и нека су A, B, C тачке са тог круга. Угао $\measuredangle ACB$ зове се *периферијски угао*, а угао $\measuredangle AOB$ зове се *централни угао*.



Ако су тачке C и O са исте стране праве AB, онда знамо да је $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB$. Зато се у том случају каже да централни угао $\measuredangle AOB$ *одговара* периферијском углу $\measuredangle ACB$. С тим у вези, ако је C' нека друга тачка на кругу k таква да су C, C', O с исте стране праве AB, онда из $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB$ и $\measuredangle AOB = 2\measuredangle AC'B$ следи да је $\measuredangle ACB = \measuredangle AC'B$. За периферијске углове $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle AC'B$ каже се да су *над истим луком* или *над истом тетивом* (у овом случају, луком $\widehat{AB}$, односно тетивом AB). Међутим, ако је D тачка на кругу k која је са супротне стране праве AB од тачака C, C', O, онда неће бити $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$. Разлог је тај што његов одговарајући централни угао није угао $\measuredangle AOB$. У ствари, његов централни угао је на слици означен са φ и представља допуну угла $\measuredangle AOB$ до пуног угла. И у овом случају важи да је одговарајући централни угао два пута већи од периферијског, дакле $\varphi = 2\measuredangle ADB$. Израчунајмо колики је угао $\measuredangle ADB$. Како је пун угао једнак 2π, следи да је $\measuredangle AOB + \varphi = 2\pi$, па је $\varphi = 2\pi - \measuredangle AOB = 2\pi - 2\measuredangle ACB$. Одавде закључујемо да је $\measuredangle ADB = \pi - \measuredangle ACB$.

Приметимо да периферијски углови $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle ADB$ нису над истим луком, јер је угао $\measuredangle ACB$ над луком $\widehat{ADB}$, док је угао $\measuredangle ADB$ над луком $\widehat{ACB}$. Формулишимо теорему.

Теорема 4. *Периферијски углови над истим луком су међусобно подударни. Периферијски углови над истом тетивом су или подударни или суплементни углови.*

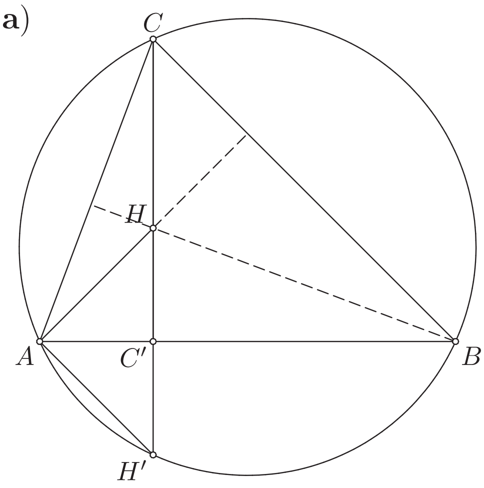
Важи и обратно. Наиме, нека су у равни дате тачке A, B, C на кругу k и тачка C' за коју не знамо да ли је на кругу. Уколико су C, C' са исте стране праве AB и $\measuredangle ACB = \measuredangle AC'B$ или уколико су C, C' са супротних страна праве AB и $\measuredangle ACB + \measuredangle AC'B = \pi$, следи да $C' \in k$.

Ако су тачке A, B са круга k такве да је AB пречник и ако је O центар круга k, онда је централни угао $\measuredangle AOB$ опружени угао, тј. $\measuredangle AOB = \pi$.

Теорема 5. *Периферијски угао над пречником је прав.*

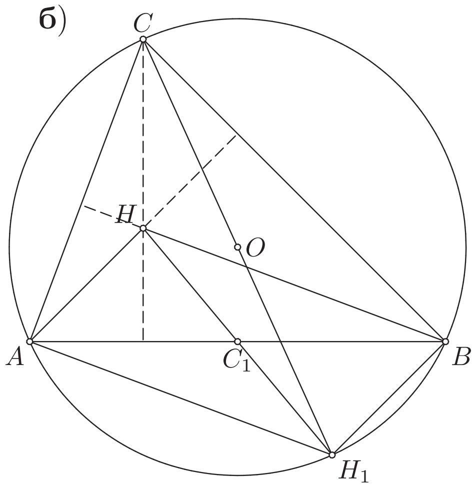
3. Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на:
а) странице троугла; **б)** средишта страница троугла;
припадају кругу описаном око тог троугла.

Решење:
а)



Означимо са C' подножје висине из темена C на правој AB, а са H' тачку која је симетрична ортоцентру H у односу на страницу AB (у питању је осна симетрија). Тада је $HH' \perp AB$ и тачка C' је средиште дужи HH', тј. $HC' = C'H'$. Како је и $\measuredangle HC'A = \measuredangle H'C'A$, јер су оба угла права (једнака $90°$, односно $\frac{\pi}{2}$) и $AC' = AC'$, на основу става СУС закључујемо да је $\triangle HC'A \cong \triangle H'C'A$. Добијамо да је $\measuredangle AH'C' = \measuredangle AHC'$. Нама је циљ да докажемо да су углови $\measuredangle AH'C$ и $\measuredangle ABC$ подударни, јер ћемо онда имати да је угао $\measuredangle AH'C$ периферијски над луком $\widehat{AC}$, па ће H' припадати описаном кругу троугла $\triangle ABC$. Углови $\measuredangle AH'C'$ и $\measuredangle AH'C$ су исти, па је довољно доказати да је $\measuredangle AHC' = \measuredangle ABC$. Међутим, како је $HC' \perp AB$ јер је HC' висина, и $AH \perp BC$ јер је AH висина, следи да углови $\measuredangle AHC'$ и $\measuredangle ABC$ имају нормалне краке, те су међусобно подударни.

б)



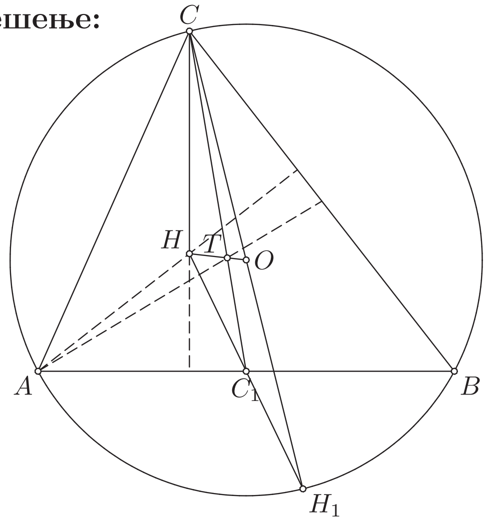
Означимо са C_1 средиште странице AB троугла $\triangle ABC$ и са H_1 тачку симетричну ортоцентру H у односу на тачку C_1 (сада је у питању централна симетрија). Тада је тачка C_1 средиште дужи HH_1. У четвороуглу AH_1BH дијагонале AB и HH_1 имају заједничко средиште, тачку C_1, па је у питању паралелограм. Закључујемо да је $BH \parallel H_1A$ и да је $AH \parallel H_1B$. Како је BH висина, следи да је $BH \perp AC$, па следи и да је $H_1A \perp AC$, тј. $\measuredangle H_1AC = \frac{\pi}{2}$. Према томе, троугао $\triangle ACH_1$ је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена A, C, H_1) средиште хипотенузе CH_1. Слично, AH је висина, па је $AH \perp BC$, а пошто је $H_1B \parallel AH$, следи да је $H_1B \perp BC$, тј. да је $\measuredangle H_1BC = \frac{\pi}{2}$. Према томе, троугао $\triangle BCH_1$ је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена B, C, H_1) средиште хипотенузе CH_1.

Описани кругови троуглова $\triangle ACH_1$ и $\triangle BCH_1$ имају исти центар (средиште дужи CH_1) и исти полупречник (половина дужи CH_1), те ти троуглови имају исти описани круг. Дакле, један исти круг садржи тачке A, B, C, H_1. Како се око сваког троугла може описати само један круг, тј. за сваке три неколинеарне тачке постоји јединствени круг који их садржи, следи да описани круг троугла $\triangle ABC$ (тј. онај круг који садржи његова темена A, B, C) мора бити исти као и круг који садржи тачке A, B, C, H_1 (дакле, заједнички описани круг троуглова $\triangle ACH_1$ и $\triangle BCH_1$). Овим је доказано да се тачка H_1 налази на описаном кругу троугла $\triangle ABC$.

Напомена 1. Није потребно посебно доказивати да и тачке симетричне ортоцентру H у односу на странице AC и BC, као и тачке симетричне средиштима тих страница, припадају описаном кругу троугла $\triangle ABC$ јер су све три странице троугла $\triangle ABC$ међусобно равноправне.

4. (**Ојлерова права**) Средиште описаног круга O, ортоцентар H и тежиште T произвољног троугла су колинеарне тачке и важи $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$. Доказати.

Решење:



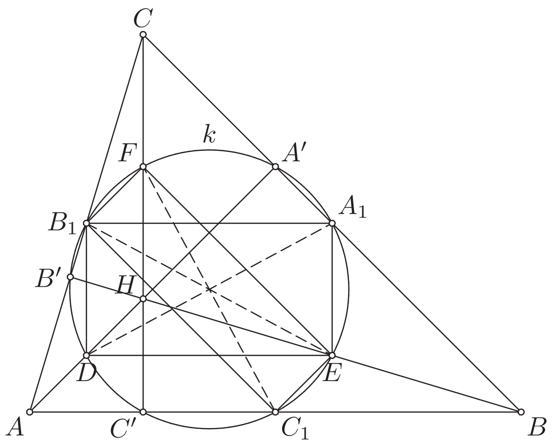
Нека је H_1 тачка из 3. задатка, тј. тачка симетрична ортоцентру H у односу на средиште C_1 странице AB. Посматрајмо троугао $\triangle CH_1H$. Како је C_1 средиште његове странице H_1H, следи да је дуж CC_1 тежишна дуж тог троугла. Такође, дуж CC_1 је и тежишна дуж троугла $\triangle ABC$, јер је C_1 средиште његове странице AB. Из 3. задатка следи да је CH_1 пречник описаног круга троугла $\triangle ABC$, па је његов центар O средиште дужи CH_1. Дакле, дуж HO је тежишна дуж троугла $\triangle CH_1H$, па је њен пресек са тежишном дужи CC_1 тежиште троугла $\triangle CH_1H$. Означимо га са T_1 и докажимо да је то заправо тачка T (тежиште троугла $\triangle ABC$), тј. да је $T_1 = T$.

Како је тежиште сваког троугла тачка која дели његове тежишне дужи у односу 2:1, следи да тежиште T троугла $\triangle ABC$ дели његову тежишну дуж CC_1 у односу 2:1, тј. важи $CT : TC_1 = 2 : 1$. Такође, тежиште T_1 троугла $\triangle CH_1H$ дели његову тежишну дуж CC_1 у односу 2:1, тј. важи $CT_1 : T_1C_1 = 2 : 1$. Како је тачка која дели неку дуж у неком односу јединствена, следи да је $T_1 = T$. Дакле, T је тежиште и троугла $\triangle CH_1H$. Према томе, тачка T припада његовој тежишној дужи HO (па су H, T, O колинеарне) и дели је у односу 2:1, тј. важи $HT : TO = 2 : 1$. Како T припада баш дужи HO, следи да вектори $\overrightarrow{HT}$ и $\overrightarrow{TO}$ имају исти смер, а из $HT : TO = 2 : 1$ следи да је $HT = 2TO$, па је заиста $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$.

Дефиниција 4. Права која садржи колинеарне тачке H, T, O зове се *Ојлерова йрава.*

5. (**Ојлеров круг**) Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла припадају једном кругу. Доказати.

Решење:



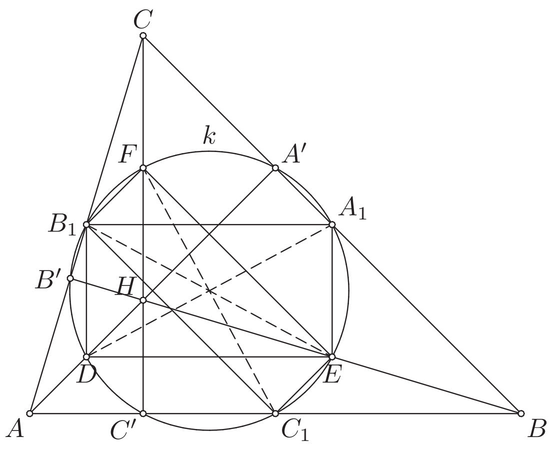
Нека су A', B', C' редом подножја висина из темена A, B, C на страницама BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$ и нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB. Дужи које спајају темена и ортоцентар H троугла $\triangle ABC$ су дужи AH, BH, CH, па означимо редом са D, E, F њихова средишта. Треба доказати да постоји круг који садржи ових девет тачака $(A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F)$.

Посматрајмо четвороугао DEA_1B_1. Дуж B_1A_1 је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $B_1A_1 \parallel AB$ и $B_1A_1 = \frac{1}{2}AB$, а дуж DE је средња линија троугла $\triangle ABH$, па је $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Закључујемо да је DEA_1B_1 паралелограм. Поред тога, DB_1 је средња линија троугла $\triangle ACH$, па је $DB_1 \parallel CH$. Како је $CH \perp AB$ јер је CH висина, следи да је $DB_1 \perp AB$. Међутим, имамо да је $B_1A_1 \parallel AB$, па је $DB_1 \perp B_1A_1$. Према томе, угао $\measuredangle DB_1A_1$ је прав, па како је паралелограм који има један прав угао заправо правоугаоник, следи да је четвороугао DEA_1B_1 правоугаоник. Како се око правоугаоника може описати круг, следи да постоји круг који садржи тачке A_1, B_1, D, E.

Слично, четвороугао B_1C_1EF је правоугаоник. Заиста, он је паралелограм, јер је B_1C_1 средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $B_1C_1 \parallel BC$ и $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$ и EF је средња линија троугла $\triangle BCH$, па је $EF \parallel BC$ и $EF = \frac{1}{2}BC$, одакле закључујемо да је $B_1C_1 \parallel EF$ и $B_1C_1 = EF$.

Поред тога, C_1E је средња линија троугла $\triangle ABH$, па је $C_1E \parallel AH$, а пошто је $AH \perp BC$ јер је AH висина, важи и $C_1E \perp BC$. А како је $B_1C_1 \parallel BC$, следи да је $C_1E \perp B_1C_1$, тј. да је угао $\measuredangle B_1C_1E$ прав, па је четвороугао B_1C_1EF паралелограм са једним правим углом, односно он је правоугаоник.

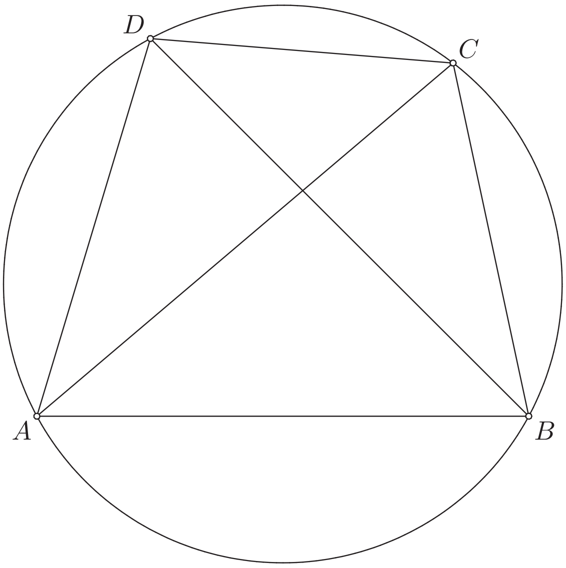
Како је дијагонала правоугаоника пречник његовог описаног круга, следи да је његов центар средиште дијагонале, а полупречник половина дијагонале. Дуж B_1E је заједничка дијагонала правоугаоника DEA_1B_1 и B_1C_1EF, па следи да описани кругови тих правоугаоника имају исти центар и исти полупречник, односно та два правоугаоника имају исти описани круг. Дакле, круг који садржи тачке A_1, B_1, D, E садржи и тачке B_1, C_1, E, F. Дакле, постоји круг, назовимо га k, који садржи тачке A_1, B_1, C_1, D, E, F.



Остаје нам још да докажемо да тачке A', B', C' припадају том кругу. Дуж B_1E је пречник круга k, а угао $\measuredangle B_1B'E$ је прав, јер је $B'E$ висина, а права B_1B' је иста као и права AC. Како је $\measuredangle B_1B'E$ прав као и периферијски угао над пречником B_1E круга k, то тачка B' припада кругу k. Слично доказујемо и да тачке A', C' припадају кругу k. Уочимо дијагоналу DA_1 правоугаоника DEA_1B_1 и приметимо да је угао $\measuredangle DA'A_1$ прав, јер је DA' висина, а права $A'A_1$ је иста као и права BC. Како је $\measuredangle DA'A_1$ прав, онда тачка A' припада кругу k са пречником DA_1. За тачку C' уочимо дијагоналу FC_1 правоугаоника B_1C_1EF и приметимо да је $\measuredangle FC'C_1 = \frac{\pi}{2}$ јер је FC' висина, а права $C'C_1$ иста као и права AB. Како је угао $\measuredangle FC'C_1$ прав, онда тачка C' припада кругу k са пречником FC_1.

Дефиниција 5. Круг који садржи тачке $A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F$ зове се *Ојлеров круг*.

Дефиниција 6. Четвороугао $ABCD$ је *тетиван* ако се око њега може описати круг, тј. ако постоји круг који садржи његова темена A, B, C, D.



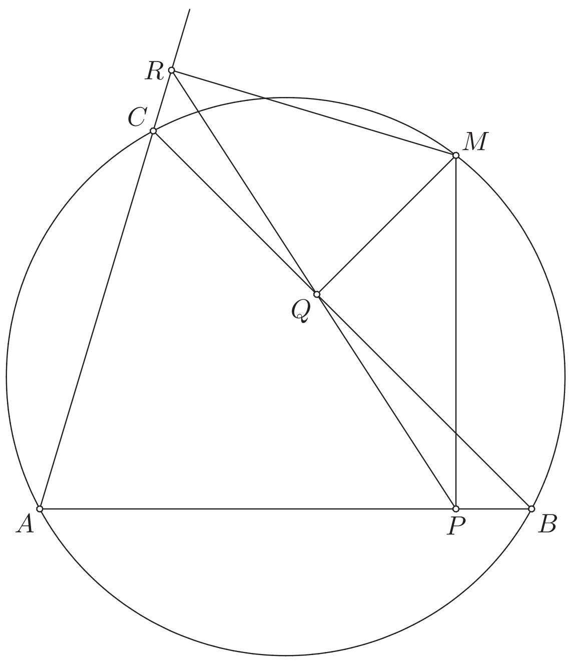
Посматрајмо конвексан четвороугао $ABCD$. Нека је он тетиван. Наспрамни углови $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle BCD$ су периферијски углови над тетивом BD и при томе су тачке A, C са супротних страна праве BD. Следи да је $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \pi$. Обратно, нека не знамо да ли је четвороугао $ABCD$ тетиван, а имамо да је $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \pi$. Посматрајмо круг k описан око троугла $\triangle ABD$. Како се тачке A, C налазе са супротних страна праве BD, следи да је угао $\measuredangle BCD$ периферијски над тетивом BD, па његово теме C припада кругу k. Дакле, круг k садржи темена четвороугла $ABCD$, па је четвороугао $ABCD$ тетиван.

Дакле, услов да су наспрамни углови конвексног четвороугла суплементни потребан је и довољан (дакле еквивалентан) да четвороугао $ABCD$ буде тетиван. Специјално, уколико су напрамни углови четвороугла $ABCD$ прави, онда су они суплементни, па је четвороугао $ABCD$ тетиван.

Од еквивалентних услова за тетивност конвексног четвороугла даћемо још један. Ако је четвороугао $ABCD$ конвексан и $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$, онда је тај четвороугао тетиван. Овај услов је у ствари услов подударности периферијских углова $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$ над луком $\widehat{AB}$ (тачке C, D су са исте стране праве AB).

6. (**Симсонова права**) Подножја нормала из произвољне тачке круга описаног око неког троугла, на правама које садрже странице тог троугла, припадају једној правој.

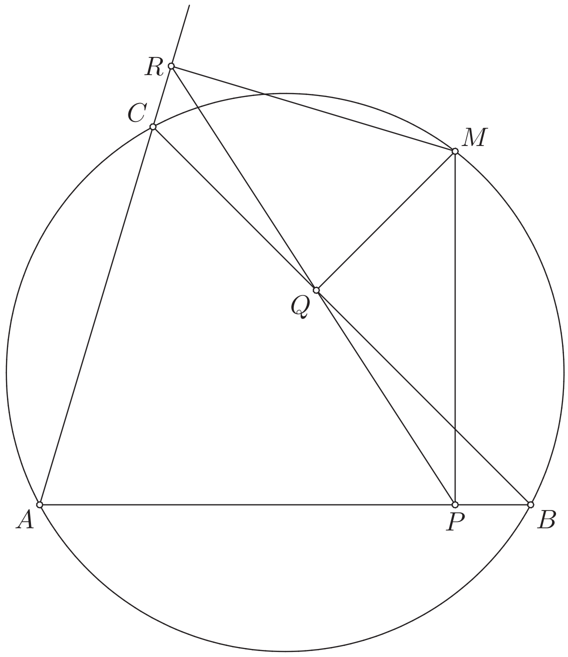
Решење:



Нека је M произвољна тачка на кругу описаном око троугла $\triangle ABC$ и нека су P, Q, R редом подножја нормала из M на праве AB, BC, CA. Уколико докажемо да је $\measuredangle PQB = \measuredangle CQR$, онда ће због колинеарности тачака B, Q, C (Q је подножје нормале из M на праву BC, па припада тој правој) углови $\measuredangle PQB$ и $\measuredangle CQR$ бити унакрсни, па ће онда и тачке P, Q, R припадати једној правој, тј. биће колинеарне.

Уочимо четвороугао $APMR$. Он је тетиван, јер су му наспрамни углови $\measuredangle APM$ и $\measuredangle ARM$ прави, па су суплементни. Следи да су и друга два наспрамна угла суплементна, тј. $\measuredangle PAR + \measuredangle PMR = \pi$. Даље, уочимо четвороугао $CQMR$. И он је тетиван, јер су му супротни углови $\measuredangle CQM$ и $\measuredangle CRM$ прави, па су суплементни. Одавде закључујемо да су периферијски углови $\measuredangle CQR$ и $\measuredangle CMR$ над луком $\widehat{CR}$ подударни. Дакле, $\measuredangle CQR = \measuredangle CMR$.

Посматрајмо сада четвороугао $PBMQ$. Њему су углови $\measuredangle BQM$ и $\measuredangle BPM$ над BM подударни, јер су то прави углови. Следи да је четвороугао $PBMQ$ тетиван, па је $\measuredangle PQB = \measuredangle PMB$, јер су то периферијски углови над луком $\widehat{PB}$. Коначно, четвороугао $ABMC$ је тетиван (по дефиницији, његова темена A, B, M, C припадају једном кругу и то баш описаном кругу троугла $\triangle ABC$), па су супротни углови $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BMC$ суплементни, тј. $\measuredangle BAC + \measuredangle BMC = \pi$.



Сада, како је $\measuredangle BAC = \measuredangle PAR$ јер је у питању исти угао и како важи да је $\measuredangle BAC + \measuredangle BMC = \pi$ и $\measuredangle PAR + \measuredangle PMR = \pi$, закључујемо да је $\measuredangle BMC = \measuredangle PMR$. А како имамо да је $\measuredangle BMC = \measuredangle PMB + \measuredangle PMC$ и $\measuredangle PMR = \measuredangle PMC + \measuredangle CMR$, следи да је $\measuredangle PMB = \measuredangle CMR$. Одавде следи, због $\measuredangle PQB = \measuredangle PMB$ и $\measuredangle CQR = \measuredangle CMR$, да је $\measuredangle PQB = \measuredangle CQR$, што смо и желели да докажемо.

Дефиниција 7. Права која садржи тачке P, Q, R зове се *Симсонова права*.

Дефиниција 8. Четвороугао $ABCD$ је *тангентан* уколико се у њега може уписати круг, тј. уколико постоји круг такав да су странице тог четвороугла тангенте на том кругу.

Ако се код четвороугла бисектрисе унутрашњих углова секу у једној тачки, онда је тај четвороугао тангентан.

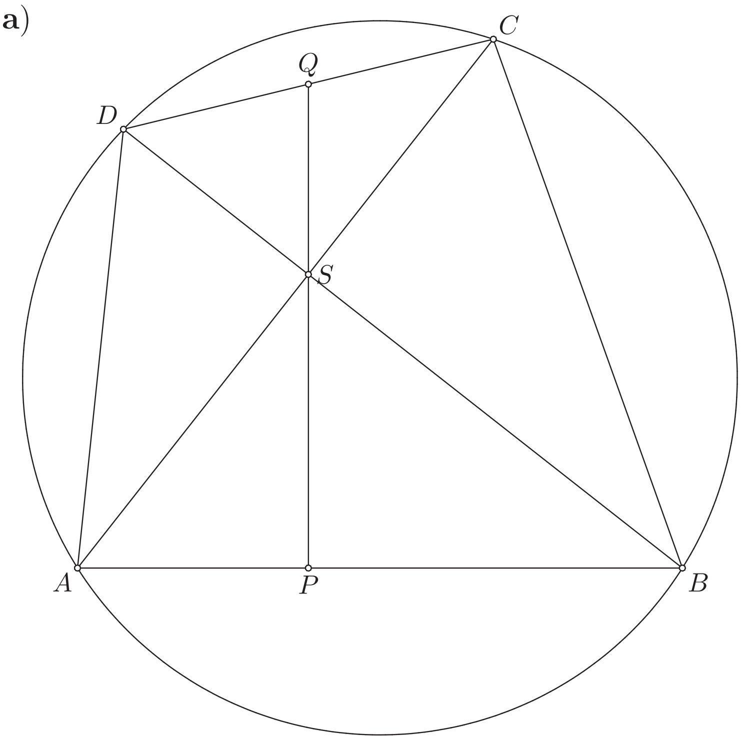
7. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале међусобно нормалне и секу се у тачки S.

а) Права која садржи тачку S и нормална је на правој AB садржи средиште дужи CD. Доказати.

б) Ако су A', B', C', D' пројекције тачке S на правама AB, BC, CD, DA, редом, тада је четвороугао $A'B'C'D'$ тетиван и тангентан. Доказати.

Решење:

а)

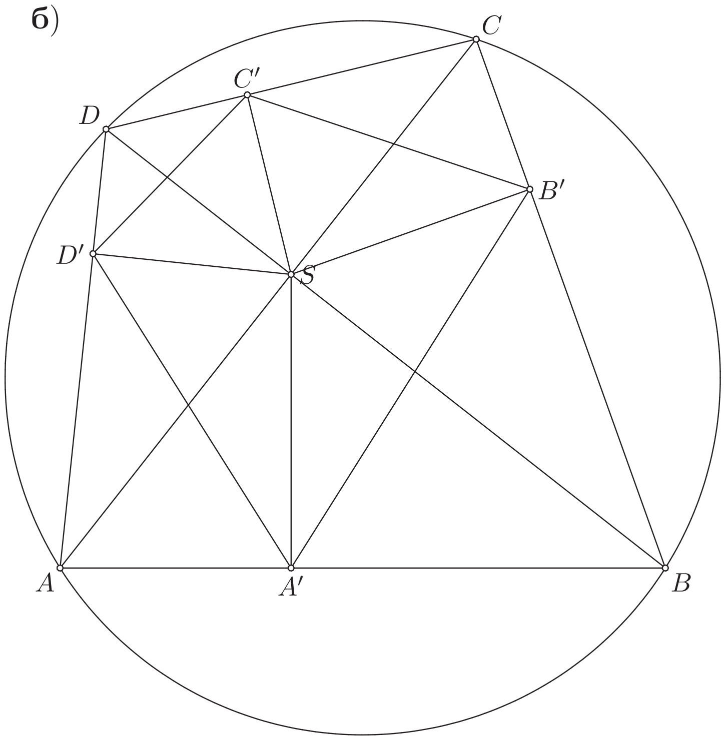


Нека је P подножје нормале из S на страници AB и нека је Q пресечна тачка праве PS и странице CD. Означимо угао $\measuredangle BAC = \alpha$ и угао $\measuredangle ABD = \beta$. Како је $\measuredangle BAS = \measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABS = \measuredangle ABD = \beta$, из $\measuredangle BAS + \measuredangle ABS + \measuredangle ASB = \pi$ и $\measuredangle ASB = \frac{\pi}{2}$ (дијагонале четвороугла $ABCD$ су нормалне) следи да је $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$, тј. да је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Даље, $\measuredangle BDC = \measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD = \beta$ (периферијски углови над истим луком). Како је $\measuredangle APS = \frac{\pi}{2}$ и $\measuredangle PAS = \measuredangle BAS = \alpha$, следи да је $\measuredangle PSA = \pi - \measuredangle APS - \measuredangle PAS = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$. Поред тога, како је $\measuredangle ASB = \frac{\pi}{2}$, следи да је $\measuredangle PSB = \measuredangle ASB - \measuredangle PSA = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$.

Сада приметимо да су углови $\measuredangle DSQ$ и $\measuredangle PSB$ унакрсни, па следи да је $\measuredangle DSQ = \measuredangle PSB = \alpha$. Такође, углови $\measuredangle CSQ$ и $\measuredangle PSA$ унакрсни, па је и $\measuredangle CSQ = \measuredangle PSA = \beta$. У троуглу $\triangle DSQ$ су углови $\measuredangle DSQ = \alpha$ и $\measuredangle SDQ$ подударни (јер је $\measuredangle SDQ = \measuredangle BDC = \alpha$), па је он једнакокраки. Следи да је $DQ = QS$. А у троуглу $\triangle CSQ$ су углови $\measuredangle CSQ = \beta$ и $\measuredangle SCQ$ подударни (јер је $\measuredangle SCQ = \measuredangle ACD = \beta$), па је и тај троугао једнакокраки. Следи да је $CQ = QS$, па заједно са $DQ = QS$ следи да је $CQ = DQ$, односно да је Q средиште CD.

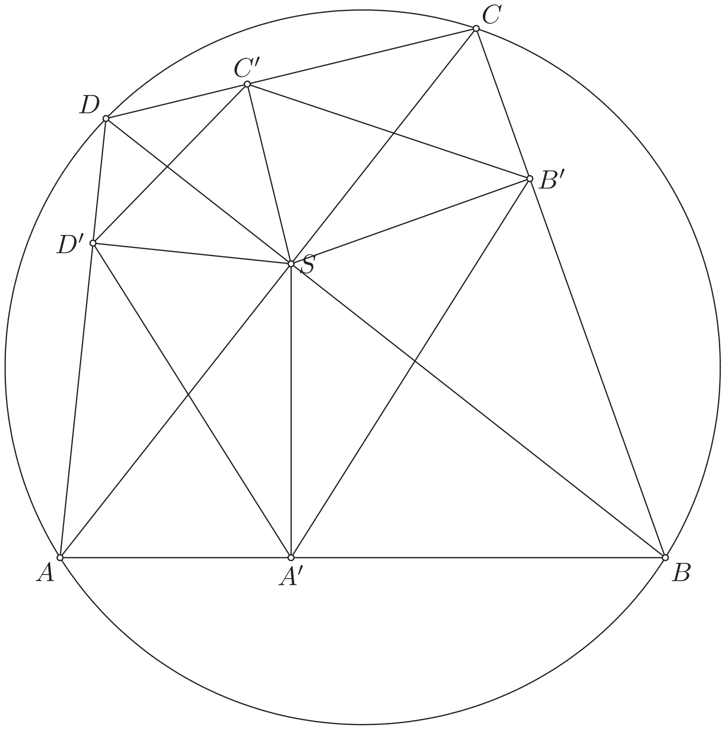
б)



Докажимо да су $A'S, B'S, C'S, D'S$ симетрале унутрашњих углова код темена A', B', C', D' четвороугла $A'B'C'D'$. Тада ћемо имати да се симетрале унутрашњих углова четвороугла $A'B'C'D'$ секу у једној тачки (тачки S), па ће то бити центар његовог уписаног круга, а сам четвороугао ће бити тангентни.

Четвороугао $A'BB'S$ је тетиван. Заиста, наспрамни углови $\measuredangle BA'S$ и $\measuredangle BB'S$ су оба права, па су и суплементни. Слично, четвороугао $B'CC'S$ је тетиван јер су наспрамни углови $\measuredangle CB'S$ и $\measuredangle CC'S$ прави углови, па су суплементни, затим је четвороугао $C'DD'S$ тетиван јер су му наспрамни углови $\measuredangle DC'S$ и $\measuredangle DD'S$ оба права, па су суплементни, и, коначно, четвороугао $D'AA'S$ је тетиван јер су му наспрамни углови $\measuredangle AD'S$ и $\measuredangle AA'S$ оба права, па су суплементни. Иначе, сви малопре поменути углови су прави јер су, по дефиницији, тачке A', B', C', D' подножја нормала из S редом на страницама AB, BC, CD, DA.

Пре него што искористимо тетивност горепоменутих четвороуглова, означимо углове: $\measuredangle SA'B' = \alpha$, $\measuredangle SB'C' = \beta$, $\measuredangle SC'D' = \gamma$, $\measuredangle SD'A' = \delta$. Из тетивности четвороугла $A'BB'S$ следи да је $\measuredangle SBB' = \measuredangle SA'B' = \alpha$ (периферијски над луком $\widehat{SB'}$). Међутим, $\measuredangle DBC = \measuredangle SBB' = \alpha$, па из тетивности четвороугла $ABCD$ следи да је $\measuredangle DAC = \measuredangle DBC = \alpha$ (периферијски над луком $\widehat{DC}$), а сада из $\measuredangle SAD' = \measuredangle CAD = \alpha$ и тетивности четвороугла $D'AA'S$ следи да је $\measuredangle SA'D' = \measuredangle SAD' = \alpha$. Дакле, $\measuredangle SA'B' = \alpha = \measuredangle SA'D'$, па је заиста $A'S$ симетрала угла $B'A'D'$, тј. унутрашњег угла код темена A' четвороугла $A'B'C'D'$.



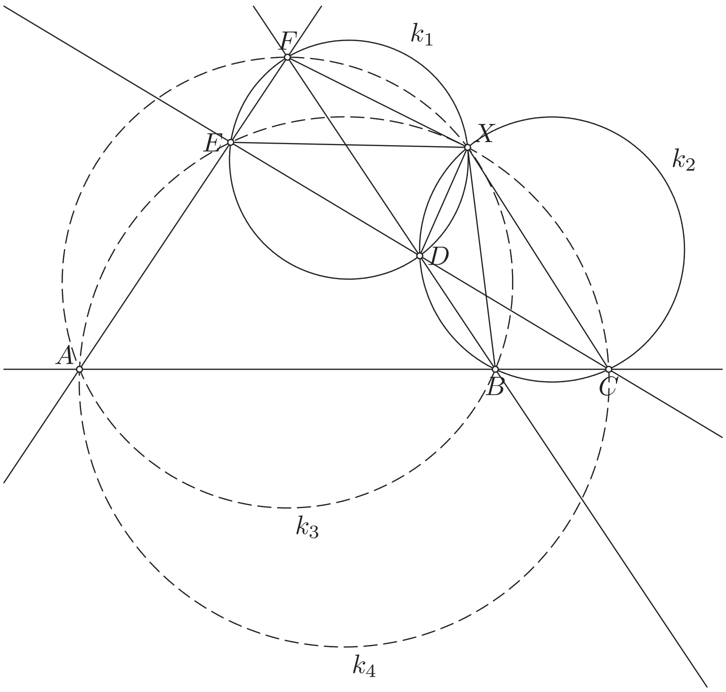
Сасвим слично се доказује да је $\beta = \measuredangle SB'C' = \measuredangle SCC' = \measuredangle ACD = \measuredangle ABD = \measuredangle A'BS = \measuredangle A'B'S$, тј. да је $\measuredangle SB'C' = \measuredangle SB'A' = \beta$, а затим и да је $\measuredangle SC'D' = \measuredangle SC'B' = \gamma$ и $\measuredangle SD'A' = \measuredangle SD'C' = \delta$. Дакле, заиста се тачка S налази у пресеку симетрала унутрашњих углова четвороугла $A'B'C'D'$, па је тај четвороугао тангентан.

Приметимо да су унутрашњи углови код темена A', B', C', D' четвороугла $A'B'C'D'$ подударни редом угловима $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$. Да бисмо доказали да је $A'B'C'D'$ тетиван, довољно је доказати да је збир нека два супротна угла, нпр. углова код темена A' и C', једнак опруженом углу. Другим речима, довољно је доказати да је $2\alpha + 2\gamma = \pi$, односно да је $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Из претходног имамо да је $\measuredangle SBC = \alpha$ и да је $\measuredangle SCB = \gamma$, па како из услова нормалности дијагонала AC и BD четвороугла $ABCD$ имамо да је $\measuredangle BSC = \frac{\pi}{2}$, следи да је

$$\alpha + \gamma = \measuredangle SBC + \measuredangle SCB = \pi - \measuredangle BSC = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

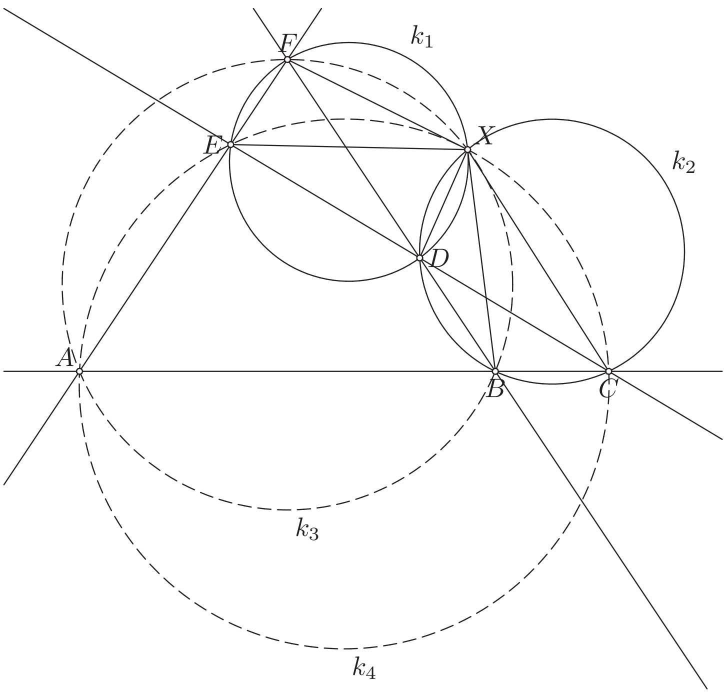
8. (**Микелова теорема**) Четири праве у општем положају у равни одређују четири троугла. Доказати да се описани кругови тих троуглова секу у једној тачки.

Решење:



Означимо пресечне тачке ових правих са A, B, C, D, E, F, као на слици. Тада имамо четири троугла (то су $\triangle DEF, \triangle BCD, \triangle ABF, \triangle ACE$). Нека су k_1, k_2, k_3, k_4 редом њихови описани кругови. Желимо да докажемо да се они секу у једној тачки. Нека су X, D пресечне тачке кругова k_1 и k_2. Означимо углове $\measuredangle EDF = \alpha$, $\measuredangle EXD = \beta$ и $\measuredangle DXB = \gamma$. Углови $\measuredangle BDC$ и $\measuredangle EDF$ су унакрсни, па су подударни. Дакле, $\measuredangle BDC = \alpha$. Угао $\measuredangle EXF$ је периферијски над луком $\widehat{EF}$, па је подударан углу $\measuredangle EDF$. Следи да је $\measuredangle EXF = \alpha$. Такође, угао $\measuredangle BXC$ је периферијски над луком $\widehat{BC}$, па је подударан углу $\measuredangle BDC$. Следи да је и $\measuredangle BXC = \alpha$.

Имамо и да је $\measuredangle EFD = \measuredangle EXD = \beta$ јер су то периферијски углови над луком $\widehat{ED}$, као и $\measuredangle DCB = \measuredangle DXB = \gamma$ јер су то периферијски углови над луком $\widehat{DB}$. Одредимо угао $\measuredangle BAF = \measuredangle CAE$, пошто је то заједнички унутрашњи угао четвороуглова $ABXF$ и $ACXE$. У томе ће нам помоћи угао $\measuredangle CEA$ који је спољашњи угао код темена E троугла DEF, па је једнак збиру његова два несуседна унутрашња угла, а то су $\measuredangle EFD = \beta$ и $\measuredangle EDF = \alpha$. Дакле, $\measuredangle CEA = \alpha + \beta$. Следи да је $\measuredangle CAE = \pi - \measuredangle CEA - \measuredangle ACE = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.



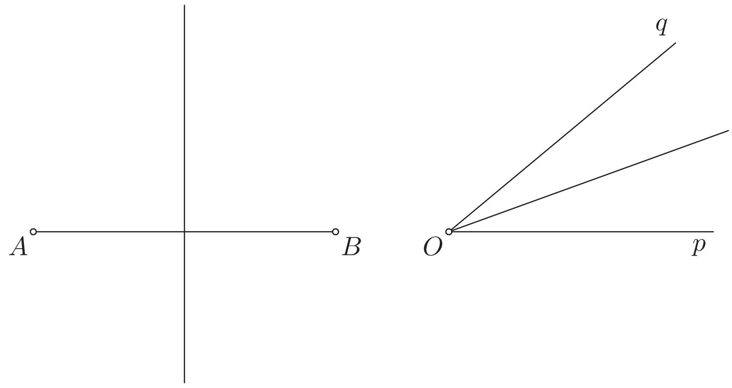
Сада доказујемо да су четвороуглови $ABXF$ и $ACXE$ тетивни, јер ћемо тада добити да њихово заједничко теме X припада круговима који садрже тачке A, B, F, односно A, C, E, а то су баш описани кругови троуглова $\triangle ABF$, односно $\triangle ACE$. А како је $\measuredangle BXF = \measuredangle BXD + \measuredangle DXE + \measuredangle EXF = \alpha+\beta+\gamma$, као и $\measuredangle CXE = \measuredangle CXB + \measuredangle BXD + \measuredangle DXE = \alpha+\beta+\gamma$, следи да су супротни углови $\measuredangle BAF$ и $\measuredangle BXF$ четвороугла $ABXF$, односно $\measuredangle CAE$ и $\measuredangle CXE$ четвороугла $ACXE$, суплементни. Дакле, то су тетивни четвороуглови, па имамо да X припада круговима k_3, k_4 (описаним око троуглова $\triangle ABF$, односно $\triangle ACE$).

Према томе, тачка X припада круговима k_1, k_2, k_3, k_4. Како се кругови k_1, k_2 секу у тачкама D, X, а пресек сва четири круга садржи тачку X и мора бити подскуп скупа који је пресек k_1 и k_2, следи да је пресек сва четири круга или скуп $\{D, X\}$ или скуп $\{X\}$ (тј. само тачка X). Међутим, тачка D не припада ни кругу k_3 ни кругу k_4, па следи да не припада пресеку сва четири круга. Дакле, пресек кругова k_1, k_2, k_3, k_4 је само тачка X, тј. та четири круга секу се у једној тачки (тачки X).

Напомена 2. Када би кругови k_1 и k_2 имали само једну пресечну тачку D тј. тачку додира, тада праве не би биле у општем положају, већ би FE и BC биле паралелне. Дакле, кругови k_1 и k_2 се морају сећи у две различите тачке.

Дефиниција 9. Нека је α раван и нека се у њој налазе дуж AB и угао $\measuredangle pOq$. *Медијатриса* дужи AB је њена симетрала, тј. то је права у равни α која садржи њено средиште и нормална је на њој. *Бисектриса* угла $\measuredangle pOq$ је полуправа чије је теме тачка O, која припада углу $\measuredangle pOq$ и која дели угао $\measuredangle pOq$ на два подударна угла.

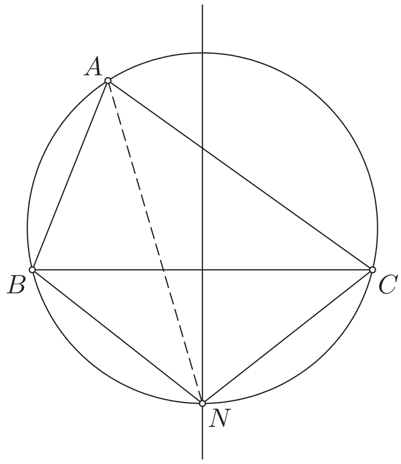
Дакле, медијатриса дужи је исто што и симетрала дужи, док је бисектриса угла *полуправа* која га дели на два подударна угла за разлику од симетрале угла која је *права* која садржи бисектрису.



Теорема 6. *Нека је α раван и нека се у њој налазе дуж AB и угао $\measuredangle pOq$. Медијатриса дужи AB је скуп свих тачака X равни α таквих да је $XA = XB$. Бисектриса угла $\measuredangle pOq$ је скуп свих тачака Y равни α које припадају углу $\measuredangle pOq$ таквих да је $YY_1 = YY_2$, где је Y_1 подножје нормале из Y на крак Op, а Y_2 подножје нормале из Y на крак Oq.*

9. Медијатриса странице и бисектриса наспрамног угла троугла секу се у тачки која припада описаном кругу тог троугла. Доказати.

Решење:

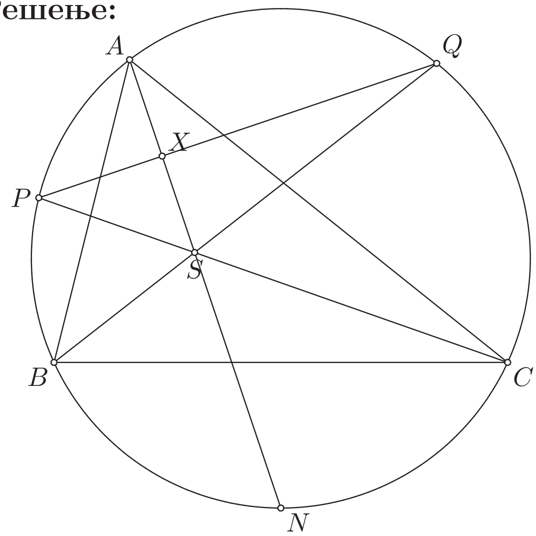


Нека је N пресечна тачка медијатрисе странице BC и описаног круга троугла $\triangle ABC$ која припада оном луку $\widehat{BC}$ којем не припада тачка A (наиме, постоје две пресечне тачке медијатрисе странице BC и описаног круга, па морамо прецизирати коју од њих желимо означити са N, а како желимо да то буде она тачка која се налази у углу $\measuredangle BAC$ и како имамо два лука $\widehat{BC}$, за N бирамо тачку на оном луку $\widehat{BC}$ на којем се не налази тачка A). Све што сада треба доказати јесте да је полуправа AN бисектриса угла $\measuredangle BAC$, па је довољно доказати да је $\measuredangle BAN = \measuredangle NAC$.

Троугао $\triangle NBC$ је једнакокраки јер је $NB = NC$ (N је на медијатриси дужи BC), па следи да је $\measuredangle NBC = \measuredangle BCN$. Означимо те углове са φ. Углови $\measuredangle BAN$ и $\measuredangle BCN$ су оба периферијска над луком $\widehat{BN}$, па су они подударни, тј. $\measuredangle BAN = \measuredangle BCN = \varphi$. Слично, углови $\measuredangle NAC$ и $\measuredangle NBC$ су оба периферијска над луком $\widehat{NC}$, па су они подударни, тј. важи $\measuredangle NAC = \measuredangle NBC = \varphi$. Овим је доказ завршен, јер је сада $\measuredangle BAN = \varphi = \measuredangle NAC$.

10. Нека су P и Q средишта лукова AB и AC круга описаног око троугла ABC и s_α бисектриса угла $\measuredangle BAC$. Доказати да је $PQ \perp s_\alpha$.

Решење:



Из 9. задатка имамо да су P, Q тачке такве да су CP, BQ бисектрисе углова $\measuredangle BCA$ и $\measuredangle ABC$. Као што знамо, бисектрисе унутрашњих углова троугла секу се у центру уписаног круга, па означимо пресечну тачку CP, BQ, s_α са S. Такође, означимо са X пресечну тачку PQ и s_α.

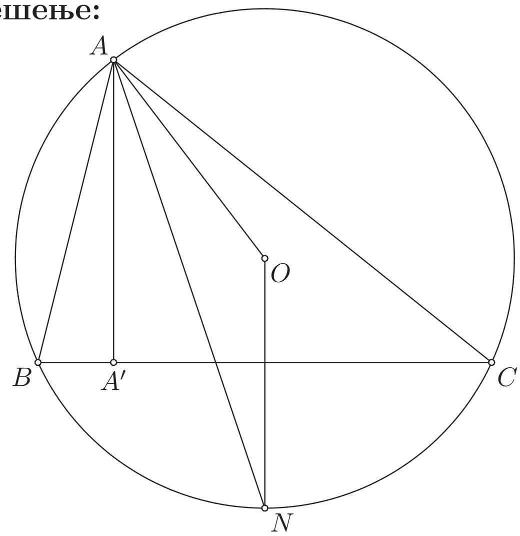
Посматрајмо троугао $\triangle XSQ$ и израчунајмо његове унутрашње углове. Прво имамо да је $\measuredangle XQS = \measuredangle PQB = \measuredangle PCB = \frac{\gamma}{2}$, јер је CP бисектриса угла $\measuredangle BCA = \gamma$. Угао $\measuredangle XSQ$ је спољашњи угао троугла $\triangle ABS$, па је једнак збиру његових несуседних унутрашњих углова, а то су углови $\measuredangle BAS$ и $\measuredangle ABS$. Из чињенице да су AS и BS бисектрисе углова $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$ следи да је $\measuredangle BAS = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle ABS = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle XSQ = \measuredangle BAS + \measuredangle ABS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, па је

$$\measuredangle SXQ = \pi - \measuredangle XSQ - \measuredangle XQS = \pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

а то управо значи да је $QX \perp XS$, односно да је $PQ \perp s_\alpha$.

11. Нека су A', N и O редом подножје висине из A, пресек бисектрисе угла $\measuredangle BAC$ са описаном кругом троугла ABC ($AB < AC$) и центар описаног круга, доказати $\measuredangle A'AN = \measuredangle ANO = \measuredangle NAO = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC - \measuredangle ACB)$.

Решење:



На основу 9. задатка следи да се тачка N налази на медијатриси странице BC, па пошто и тачка O припада тој медијатриси, следи да је права ON баш медијатриса странице BC. Одавде добијамо да је $ON \perp BC$, а како је и $AA' \perp BC$, следи да је $ON \parallel AA'$. Сада имамо да углови $\measuredangle A'AN$ и $\measuredangle ANO$ имају заједнички крак AN и паралелне краке $A'A$ и NO, па су то подударни углови. Дакле, $\measuredangle A'AN = \measuredangle ANO$. Троугао $\triangle ANO$ је једнакокрак, јер су OA и ON полупречници описаног круга троугла $\triangle ABC$, па су подударни, тј. $OA = ON$. Следи да су углови наспрам њих подударни, тј. да је $\measuredangle ANO = \measuredangle NAO$.

Сада када знамо да су ови углови подударни, треба да изразимо било који од њих преко углова β и γ, тј. углова $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ACB$. Изразимо нпр. угао $\measuredangle A'AN$. Имамо да је $\measuredangle A'AN = \measuredangle BAN - \measuredangle BAA'$ и да је $\measuredangle BAN = \frac{\alpha}{2}$. Како је троугао $\triangle ABA'$ правоугли и $\measuredangle A'BA = \measuredangle CBA = \beta$, следи да је $\measuredangle BAA' = \pi - \measuredangle BA'A - \measuredangle A'BA = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$. Сада имамо да је

$$\begin{aligned}\measuredangle A'AN &= \measuredangle BAN - \measuredangle BAA' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\alpha - \pi + 2\beta}{2} \\ &= \frac{\alpha - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2},\end{aligned}$$

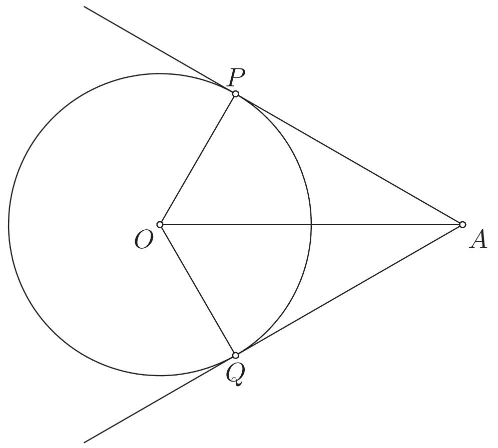
што је и требало доказати.

Напомена 3. Где се овде користила претпоставка да је $AB < AC$? Ако замислимо да смо на претходној слици обрнуто означили тачке B и C, онда није $\measuredangle A'AN = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC - \measuredangle ACB)$, него је $\measuredangle A'AN = \frac{1}{2}(\measuredangle ACB - \measuredangle ABC)$. Поента је у томе што се при претпоставци $AB > AC$ мења распоред тачака на слици и онда не важе неке ствари које важе када је $AB < AC$. Конкретно, не важи $\measuredangle A'AN = \measuredangle BAN - \measuredangle BAA'$, већ $\measuredangle A'AN = \measuredangle A'AB - \measuredangle NAB$, па то мења резултат.

У строго формалном доказу, какви су нпр. докази на предавањима, морали бисмо помоћу претпоставке $AB < AC$ доказивати да важи распоред тачака који добијамо цртањем слике. Међутим, када решавамо задатке на колоквијуму или испиту, ми то не морамо да доказујемо, већ је довољно да то „видимо са слике”. Зато је неопходно нацртати слику која одговара датој претпоставци. Конкретно у овом задатку, треба нацртати слику тако да заиста буде $AB < AC$, што смо и учинили.

Дефиниција 10. Нека је A тачка ван круга k и нека су P, Q додирне тачке тангенти из тачке A на кругу k. Дужи AP, AQ зову се *тангентне дужи* из тачке A на кругу k.

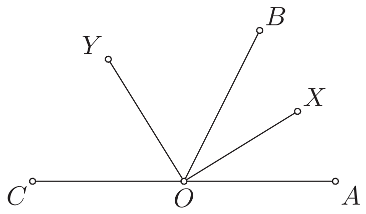
Теорема 7. *Тангентне дужи из тачке A на кругу k су подударне.*



Доказ: Посматрајмо троуглове $\triangle OPA$ и $\triangle OQA$. Њима је заједничка страница OA, странице OP и OQ су подударне јер су то полупречници круга k, углови $\measuredangle OPA$ и $\measuredangle OQA$ су прави (углови између тангенти и полупречника), па су подударни, а углови $\measuredangle OAP$ и $\measuredangle OAQ$ су оба оштра јер већ имамо праве углове у троугловима $\triangle OPA$ и $\triangle OQA$, па преостали углови морају бити оштри. Закључујемо на основу става ССУ да је $\triangle OPA \cong \triangle OQA$, па је $AP = AQ$, што је и требало доказати. $\square$

Дефиниција 11. *Напоредни углови* су они углови који имају заједничко теме и један крак, а преостали краци припадају једној правој.

Теорема 8. *Бисектрисе напоредних углова су међусобно нормалне.*

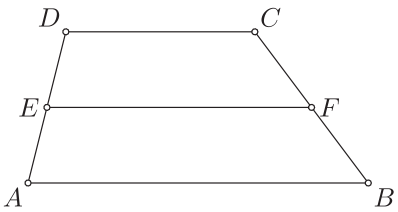


Доказ: Нека је $\measuredangle AOB = \alpha$ и $\measuredangle BOC = \beta$. Тада је $\alpha + \beta = \pi$. Ако је OX бисектриса угла $\measuredangle AOB$, а OY бисектриса угла $\measuredangle BOC$, онда је $\measuredangle XOB = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle BOY = \frac{\beta}{2}$. Следи да је $\measuredangle XOY = \measuredangle XOB + \measuredangle BOY = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$, тј. да су бисектрисе OX и OY међусобно нормалне. $\square$

Дефиниција 12. Четвороугао $ABCD$ је *трапез* са *основицама* AB, CD и *крацима* AD, BC ако је $AB \parallel CD$.

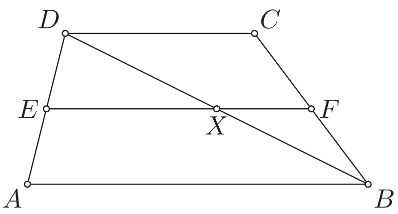
Имали смо средњу линију троугла, а сада ћемо дефинисати и средњу линију трапеза.

Дефиниција 13. Нека је $ABCD$ трапез и нека су E, F редом средишта кракова AD, BC. Дуж EF зове се *средња линија* трапеза $ABCD$.



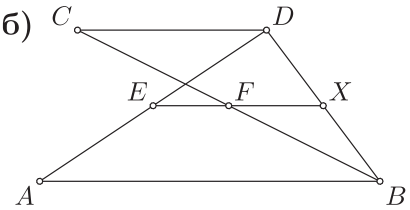
Теорема 9. *Нека је четвороугао $ABCD$ трапез и нека су E, F средишта кракова AD, BC. Тада је средња линија EF паралелна основицама трапеза, тј. $EF \parallel AB$ и $EF \parallel CD$ и важи*
а*) $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ ако је трапез $ABCD$ конвексан;*
б*) $EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$ ако је трапез $ABCD$ неконвексан и $AB > CD$.*

Доказ: а)



Нека је X средиште дијагонале BD трапеза $ABCD$. Следи да је EX средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $EX \parallel AB$ и $EX = \frac{1}{2}AB$. Слично, XF је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $XF \parallel CD$ и $XF = \frac{1}{2}CD$. Како је $AB \parallel CD$, следи да је $EX \parallel XF$, па су тачке E, X, F колинеарне. Одавде добијамо да је $EF \parallel AB$ и $EF = EX + XF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

б)



Нека је X средиште дијагонале BD трапеза $ABCD$. Следи да је EX средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $EX \parallel AB$ и $EX = \frac{1}{2}AB$. Слично, XF је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $XF \parallel CD$ и $XF = \frac{1}{2}CD$. Како је $AB \parallel CD$, следи да је $EX \parallel XF$, па су тачке E, X, F колинеарне. Одавде добијамо да је $EF \parallel AB$ и $EF = EX - XF = \frac{1}{2}(AB - CD)$. $\square$

Напомена 4. Ми смо доказали да су одређене дужи средње линије (троугла или трапеза) ако знамо да су њени крајеви средишта одговарајућих страница и онда смо добијали паралелност. Међутим, довољно је да знамо само за један крај дужи да је средиште одговарајуће странице и да знамо паралелност да би посматрана дуж била средња линија. Ово убудуће можемо користити.

12. (**Велики задатак**) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC $(b > c)$, са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB, са P_i, Q_i, R_i $(i = a, b, c)$ тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB, са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l, при чему је M на луку BAC, са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB, са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c, доказати да је:

1) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, $\quad \mathcal{B}(A, P, P'_a)$, $\quad \mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$, $\quad \mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$;

2) $AQ_a = AR_a = p$, $\quad QQ_a = RR_a = a$, $\quad Q_bQ_c = R_bR_c = a$;

3) $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$;

4) $PP_a = b - c$, $\quad P_bP_c = b + c$;

5) $PA_1 = P_aA_1$, $\quad P_cA_1 = P_bA_1$;

6) $NS = NS_a = NB = NC$, $\quad MS_b = MS_c = MB = MC$;

7) $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$, $\quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$;

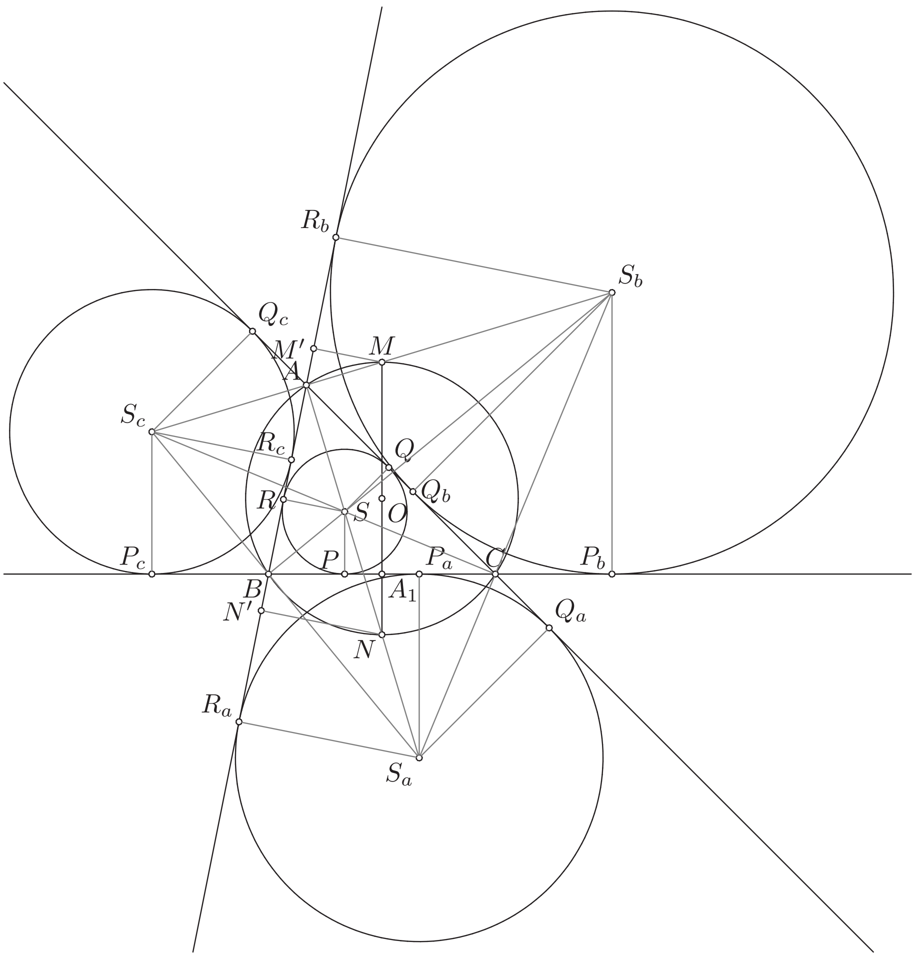
8) $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$, $\quad NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$;

9) $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$;

10) $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN', \quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$;

11) $M'N' = b$.

Решење:

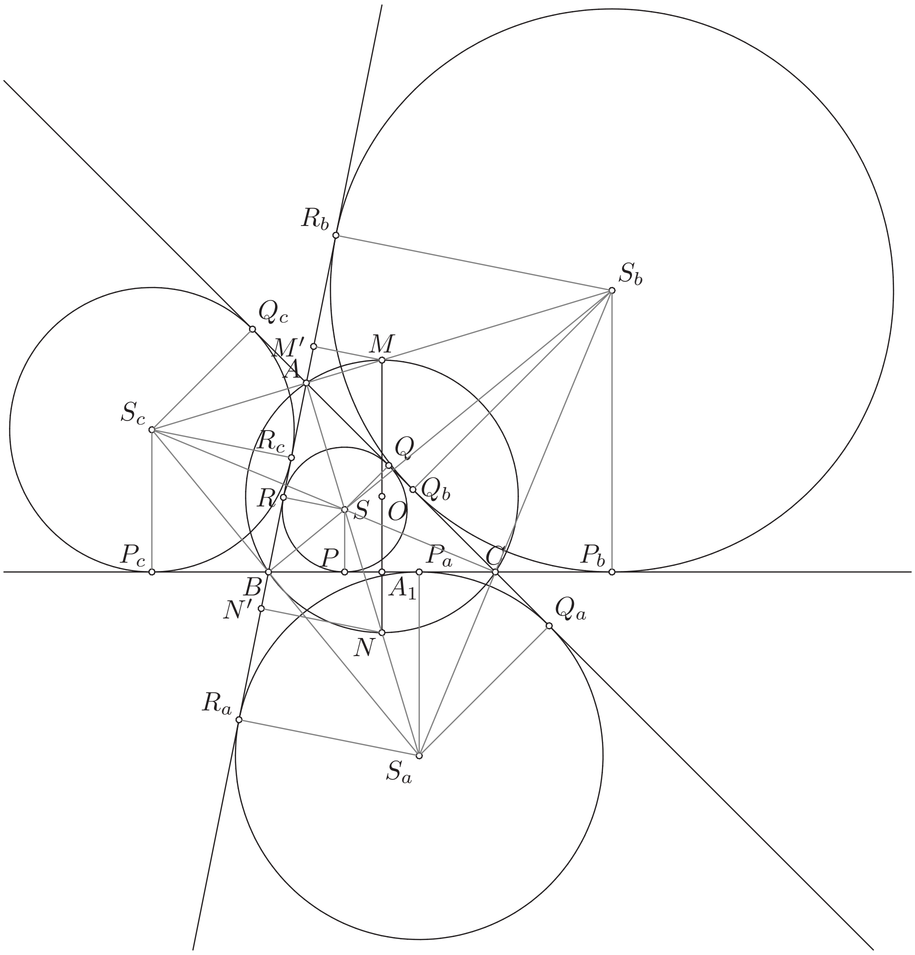


1) Ово тврђење нећемо сада доказивати, јер ћемо у доказу користити сличност. Доказ ћемо видети у следећем поглављу.

2) Доказујемо $AQ_a = AR_a = p, \quad QQ_a = RR_a = a, \quad Q_bQ_c = R_bR_c = a$. Дужи AQ_a и AR_a су тангентне дужи из тачке A на споља уписаном кругу k_a, па следи да су оне подударне, тј. да је $AQ_a = AR_a$. Да бисмо доказали да су те дужи једнаке полуобиму троугла $\triangle ABC$, посматрајмо збир $AQ_a + AR_a$. Имамо да је $AQ_a + AR_a = AC + CQ_a + AB + BR_a = AC + AB + CQ_a + BR_a$, па како је $CQ_a = CP_a$ и $BR_a = BP_a$, јер су то тангентне дужи редом из тачака C, B на кругу k_a, следи да је

$$\begin{aligned} AQ_a + AR_a &= AC + AB + CQ_a + BR_a \\ &= b + c + CP_a + BP_a = b + c + BC \\ &= b + c + a = 2p, \end{aligned}$$

па је $AQ_a = AR_a = \frac{2p}{2} = p$, што је и требало доказати. Такође, јасно је да смо овим доказали да је и $BP_b = BR_b = p$, као и $CP_c = CQ_c = p$, јер смо већ напомињали да су сва три темена троугла равноправна.



Даље, како је $AQ = AR$, јер су то тангентне дужи из тачке A на уписаном кругу k, следи да је $QQ_a = AQ_a - AQ = AR_a - AR = RR_a$. Такође, пошто знамо да је $AQ_a = AR_a = p$, треба да докажемо да је $AQ = AR = p - a$, да би било $QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a$. У том циљу, означимо $AQ = AR = x$, $BR = BP = y$ (тангентне дужи из

B на k) и $CP = CQ = z$ (тангентне дужи из C на k). Сада из очигледних једнакости

$$\begin{aligned} AR + RB &= AB \\ BP + PC &= BC \\ CQ + QA &= CA \end{aligned}$$

следи да имамо следећи систем линеарних алгебарских једначина са непознатим x, y, z:

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y + z &= a \\ z + x &= b. \end{aligned}$$

Саберимо све три једначине и добићемо $x + y + y + z + z + x = c + a + b$, односно $2(x + y + z) = 2p$, односно $x + y + z = p$. Сада лако добијамо да је

$$\begin{aligned} x &= x + y + z - (y + z) = p - a, \\ y &= x + y + z - (x + z) = p - b \qquad \text{и} \\ z &= x + y + z - (x + y) = p - c. \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо да је $AQ = AR = x = p - a$ (успут смо доказали и да је $BR = BP = y = p - b$ и $CP = CQ = z = p - c$), па је

$$QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a.$$

Приметимо да је $Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b$, а имамо да је $CQ_c = p$, као и да је $CQ_b = CP_b$ јер су то тангентне дужи из тачке C на кругу k_b. Како је $CP_b = BP_b - BC$ и $BP_b = p$, следи да је $CP_b = p - a$, па имамо да је

$$Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b = p - CP_b = p - (p - a) = a.$$

Слично, приметимо да је $R_bR_c = BR_b - BR_c$, затим да је $BR_b = p$, да је $BR_c = BP_c = CP_c - CB$ и да је $CP_c = p$, па је $BR_c = CP_c - CB = p - a$, што значи да је

$$R_bR_c = BR_b - BR_c = p - (p - a) = a,$$

што је и требало доказати.

3) Доказујемо $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$. Све смо већ доказали док смо доказивали **2)**. Заиста, доказали смо да је

$AQ = AR = x = p - a$, затим да је $CQ_b = CP_b = p - a$ и коначно да је $BR_c = BP_c = p - a$. Дакле, заиста је

$$AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a.$$

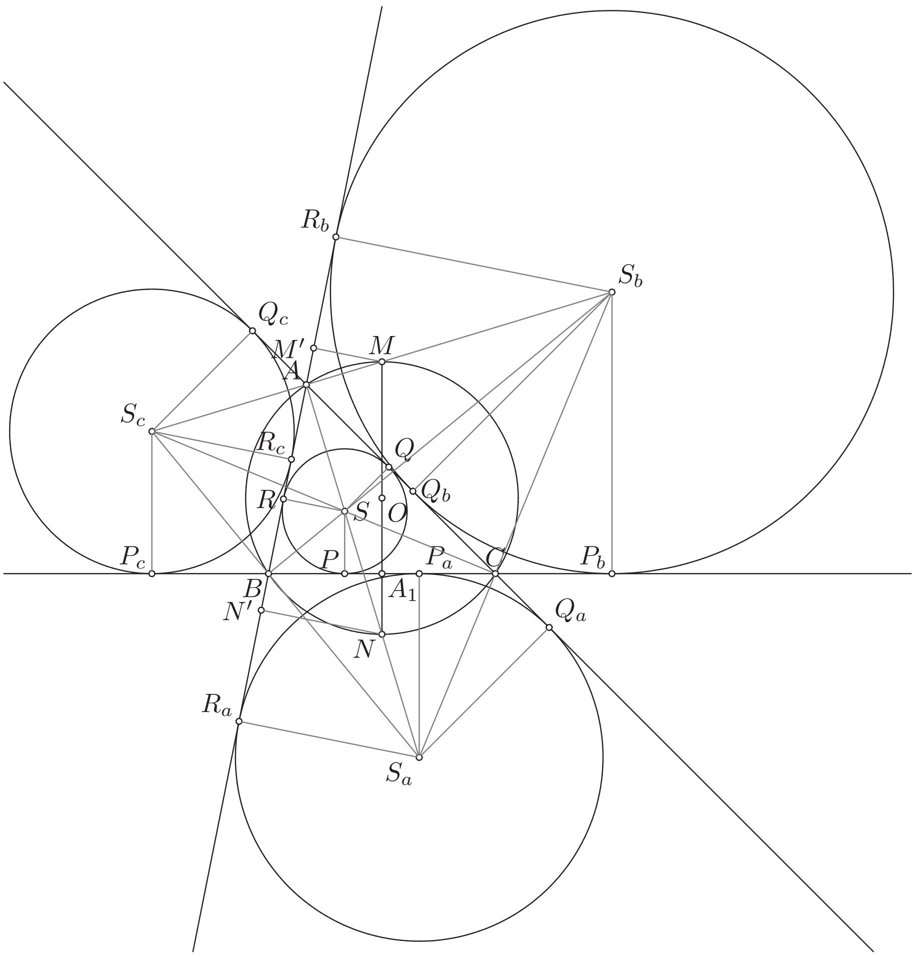
4) Доказујемо $PP_a = b - c, \quad P_bP_c = b + c$. Имамо да је $PP_a = BP_a - BP$ и знамо да је $BP = y = p - b$. Како је $BP_a = BR_a$ јер су то тангентне дужи из B на кругу k_a и како је $BR_a = AR_a - AB = p - c$, следи да је

$$PP_a = BP_a - BP = BR_a - (p - b) = p - c - (p - b) = b - c.$$

Даље, имамо да је $P_bP_c = P_bC + CP_c$ и знамо да је $P_bC = p - a$ и да је $CP_c = p$, па следи да је

$$P_bP_c = P_bC + CP_c = p - a + p = 2p - a = a + b + c - a = b + c.$$

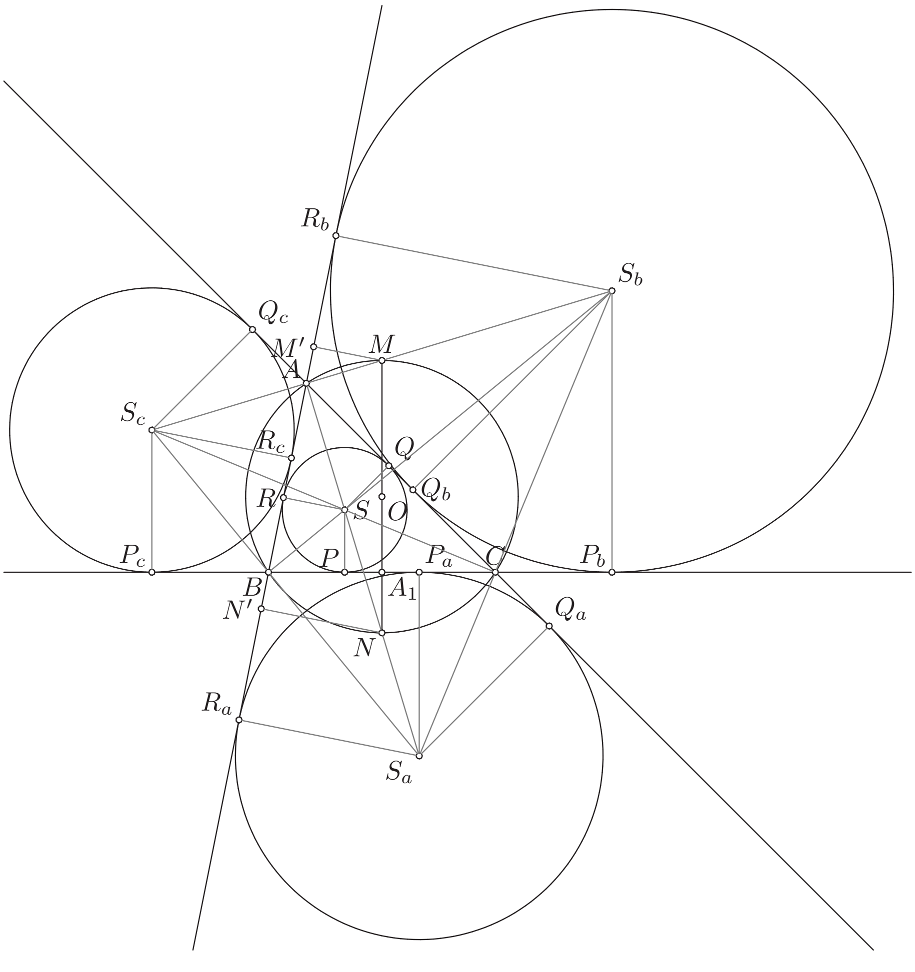
што је и требало доказати.



5) Доказујемо $PA_1 = P_aA_1, \quad P_cA_1 = P_bA_1$. Практично треба доказати да је A_1 (средиште дужи BC) средиште дужи PP_a и P_bP_c. Имамо да је

$$\begin{aligned}
PA_1 &= BA_1 - BP = \frac{1}{2}BC - (p-b) \\
&= \frac{a}{2} - \frac{a+b+c}{2} + b = \frac{a-a-b-c+2b}{2} \\
&= \frac{b-c}{2} = \frac{1}{2}PP_a,
\end{aligned}$$

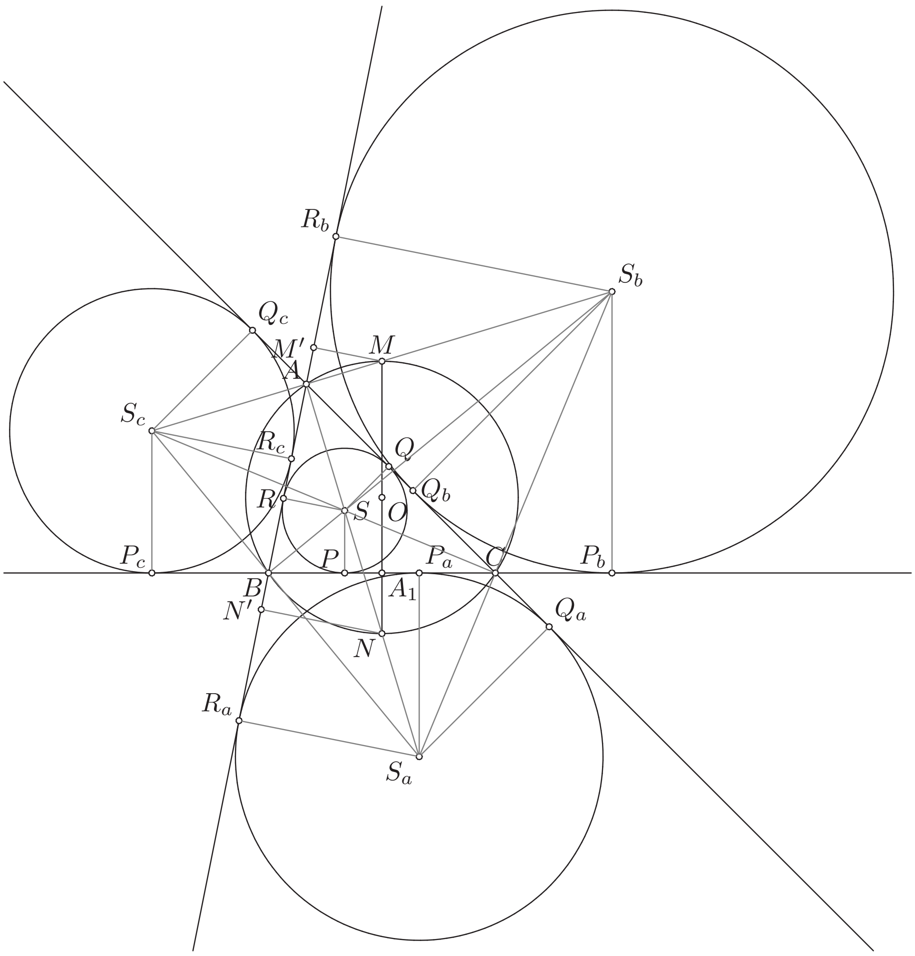
па је заиста A_1 средиште дужи PP_a, тј. $PA_1 = P_aA_1$.



Слично, имамо да је

$$\begin{aligned} P_cA_1 &= P_cB + BA_1 = p - a + \frac{1}{2}BC \\ &= \frac{a+b+c}{2} - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} \\ &= \frac{b+c}{2} = \frac{1}{2}P_cP_b, \end{aligned}$$

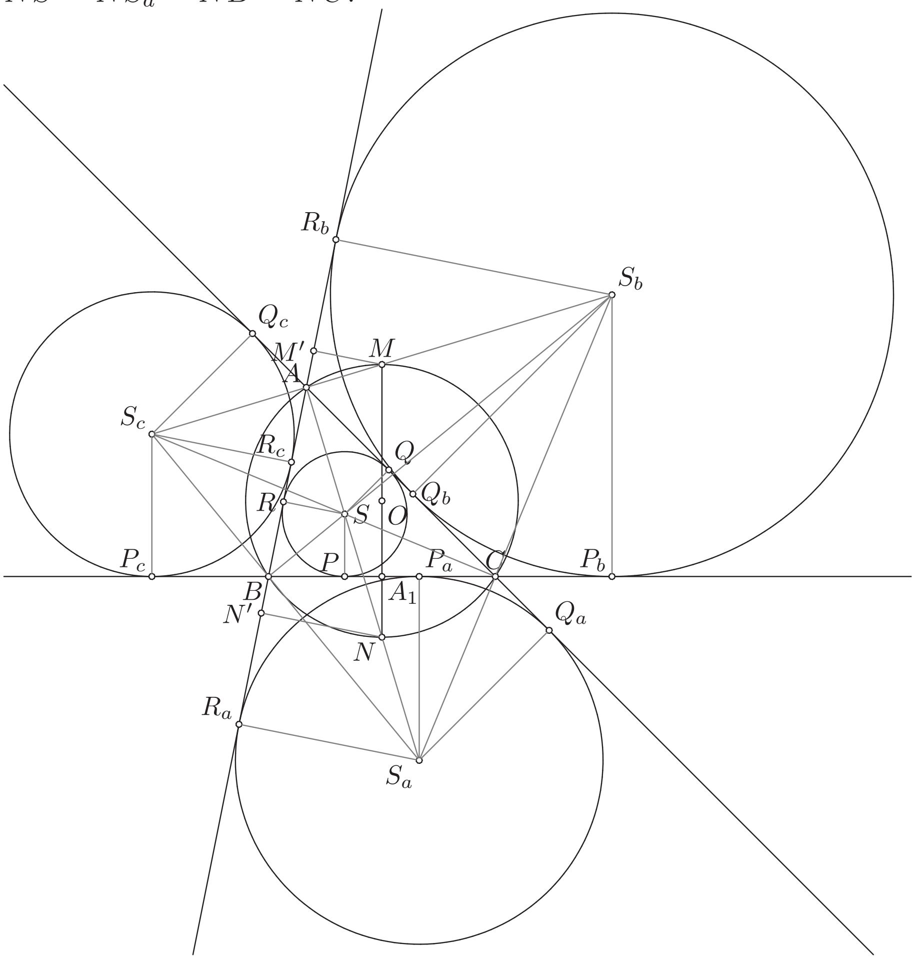
па је A_1 средиште дужи P_cP_b, односно важи $P_cA_1 = P_bA_1$.



6) Доказујемо $NS = NS_a = NB = NC$, $\quad MS_b = MS_c = MB = MC$. Четвороугао SPP_aS_a је трапез јер је $SP \perp BC$ и $S_aP_a \perp BC$, па је $SP \parallel S_aP_a$. Такође, $A_1N \perp BC$ јер је права A_1N симетрала дужи BC, па је $A_1N \parallel SP$ и $A_1N \parallel S_aP_a$. Како је A_1 средиште PP_a, следи да је

A_1N средња линија неконвексног трапеза SPP_aS_a. Закључујемо да је N средиште дужи SS_a и $A_1N = \frac{1}{2}(S_aP_a - SP) = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$.

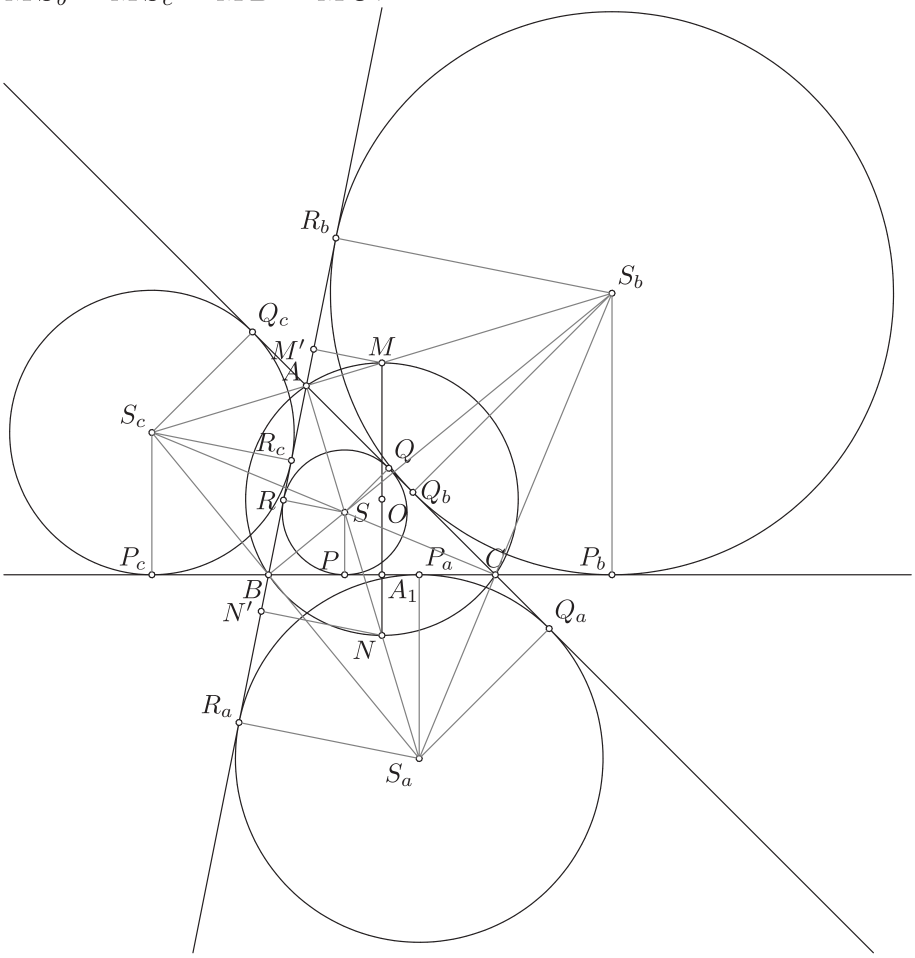
Троугао $\triangle SBS_a$ је правоугли с правим углом код темена B (SB је симетрала унутрашњег, а BS_a је симетрала спољашњег угла код темена B троугла $\triangle ABC$) и N је средиште хипотенузе SS_a, па је N центар описаног круга $\triangle SBS_a$. Следи да је $NS = NS_a = NB$, а како N припада симетрали дужи BC, следи да је $NB = NC$, па имамо да је $NS = NS_a = NB = NC$.



Докажимо да M припада бисекриси AS_b спољашњег угла $\measuredangle CAR_b$ троугла $\triangle ABC$. Како је AS бисектриса унутрашњег угла $\measuredangle BAC$ троугла $\triangle ABC$, следи да је $SA \perp AS_b$, тј. да је $\measuredangle SAS_b = \frac{\pi}{2}$. Тачка N припада бисектриси AS, па је $\measuredangle NAS_b = \frac{\pi}{2}$, а MN је пречник описаног круга l троугла $\triangle ABC$, па је $\measuredangle NAM = \frac{\pi}{2}$ (периферијски угао над пречником). Одавде закључујемо да тачка M припада полуправој AS_b, што смо и тражили.

Четвороугао $S_cP_cP_bS_b$ је трапез, јер је $S_cP_c \perp BC$ и $S_bP_b \perp BC$, па је $S_cP_c \parallel S_bP_b$. Такође, $A_1M \perp BC$ јер је права A_1M симетрала дужи BC, па је $A_1M \parallel S_cP_c$ и $A_1M \parallel S_bP_b$. Тачка A_1 је средиште P_cP_b, па следи да је A_1M средња линија (конвексног) трапеза $S_cP_cP_bS_b$. Закључујемо да је M средиште дужи S_bS_c и $A_1M = \frac{1}{2}(S_bP_b + S_cP_c) = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$.

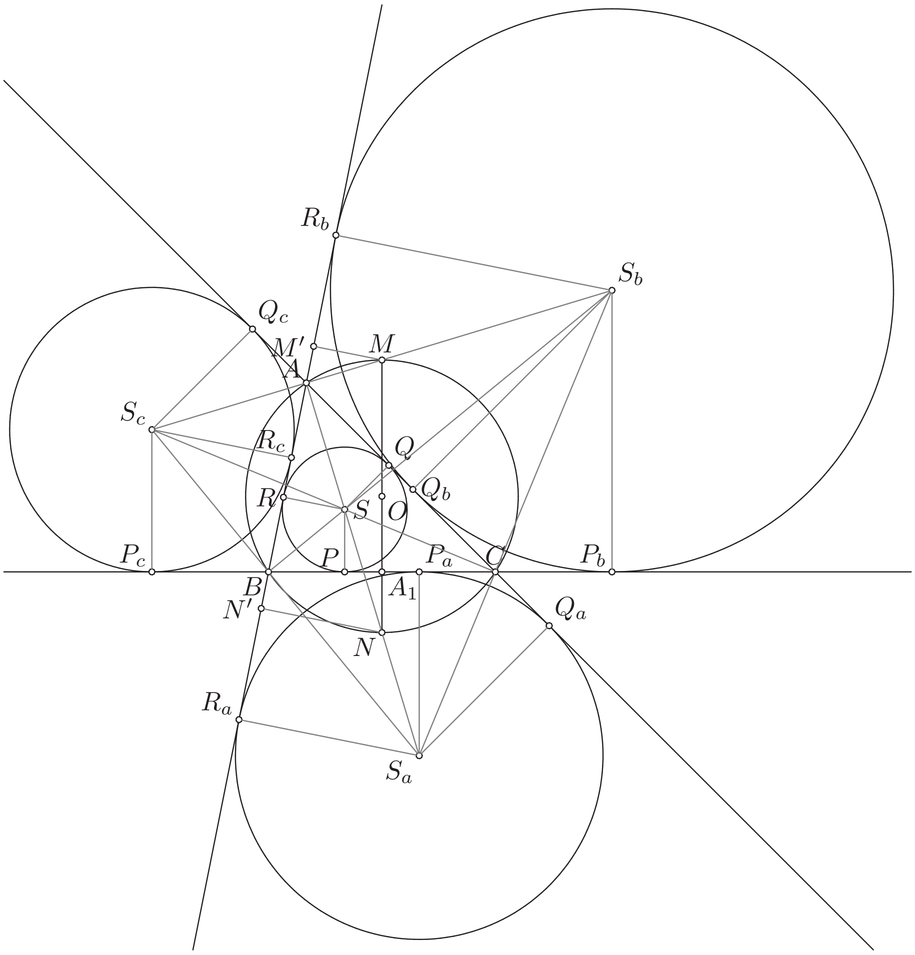
Троугао $\triangle S_bBS_c$ је правоугли с правим углом код темена B (S_bB је симетрала унутрашњег, а BS_c је симетрала спољашњег угла код темена B троугла $\triangle ABC$) и M је средиште хипотенузе S_bS_c, па следи да је M центар описаног круга троугла $\triangle S_bBS_c$. Према томе, $MS_b = MS_c = MB$, а како је $MB = MC$ јер M припада симетрали дужи BC, па следи да је $MS_b = MS_c = MB = MC$.



7) Доказујемо $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b+\rho_c)$, $\quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a-\rho)$, а то смо већ доказали док смо доказивали део **6)**.

8) Доказујемо $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b-\rho_c)$, $\quad NN' = \frac{1}{2}(\rho+\rho_a)$. Четвороугао $S_cR_cR_bS_b$ је трапез јер је $S_cR_c \perp AB$ и $S_bR_b \perp AB$, па је $S_cR_c \parallel S_bR_b$. Такође, $MM' \perp AB$, па је $MM' \parallel S_cR_c$ и $MM' \parallel S_bR_b$, а M је средиште S_cS_b, па је MM' средња линија неконвексног трапеза $S_cR_cR_bS_b$. Следи да је $MM' = \frac{1}{2}(S_bR_b - S_cR_c) = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$.

Четвороугао SRR_aS_a је трапез јер је $SR \perp AB$ и $S_aR_a \perp AB$, па је $SR \parallel S_aR_a$. Такође, $NN' \perp AB$, па је $NN' \parallel SR \parallel S_aR_a$ и N је средиште SS_a, па је NN' средња линија конвексног трапеза SRR_aS_a. Закључујемо да је $NN' = \frac{1}{2}(SR + S_aR_a) = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$.



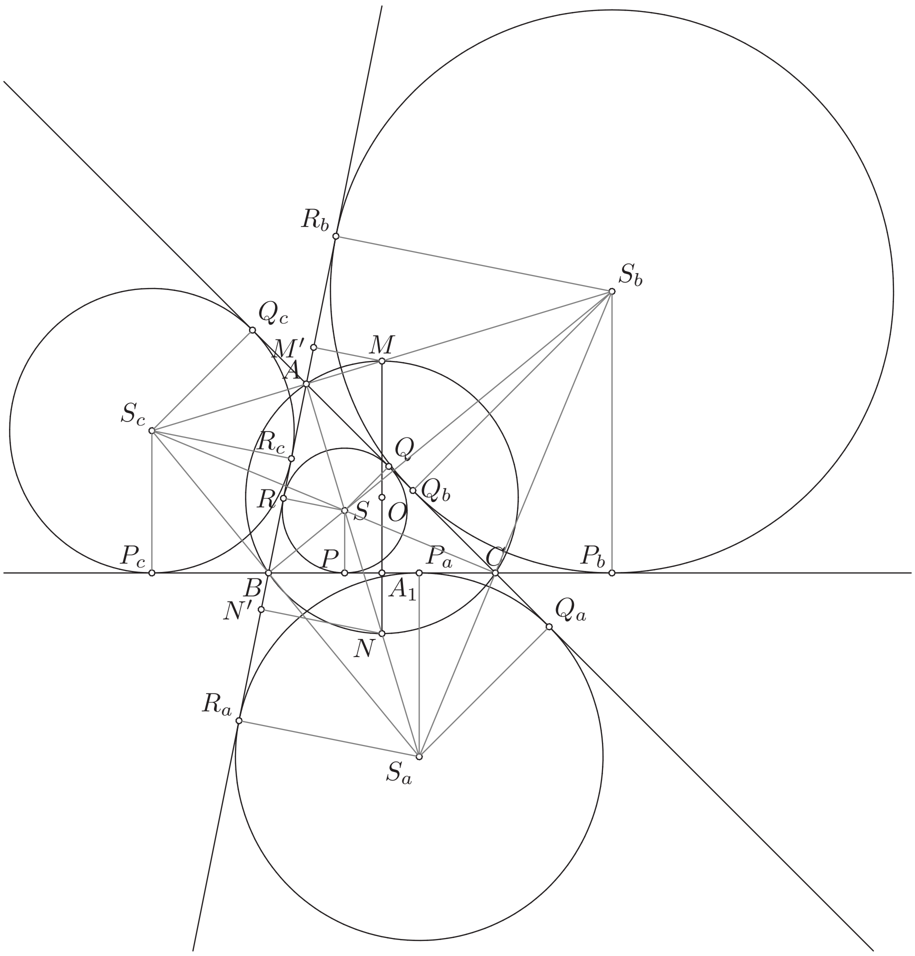
9) Доказујемо $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$. За пречник MN описаног круга l троугла $\triangle ABC$ имамо с једне стране да је $MN = 2r$, а с друге стране да је $MN = MA_1 + A_1N = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c + \rho_a - \rho)$. Дакле, $2r = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho)$, па је $4r = \rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho$, односно $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$.

10) Доказујемо $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN'$, $\quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$. У делу **8)** смо доказали да је MM' средња линија трапеза $S_cR_cR_bS_b$, па је M' средиште странице R_cR_b. Дакле, $R_cM' = \frac{1}{2}R_cR_b = \frac{a}{2}$. Даље имамо да је $BM' = BR_c + R_cM' = p - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} = \frac{1}{2}(b + c)$ и да је $AM' = BM' - BA = \frac{1}{2}(b + c) - c = \frac{1}{2}(b - c)$.

Такође, у делу **8)** доказали смо да је NN' средња линија трапеза SRR_aS_a, па је N' средиште RR_a. Следи да је $N'R_a = \frac{1}{2}RR_a = \frac{a}{2}$, па је $AN' = AR_a - N'R_a = p - \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-a}{2} = \frac{1}{2}(b+c)$. Такође, следи да је $BN' = AN' - AB = \frac{1}{2}(b+c) - c = \frac{1}{2}(b-c)$.

Дакле, доказали смо да важи

$$AM' = BN' = \frac{1}{2}(b-c) \qquad \text{и} \qquad AN' = BM' = \frac{1}{2}(b+c).$$



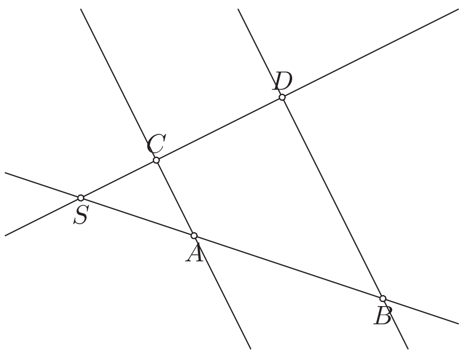
11) Доказујемо да је $M'N' = b$. Јасно је да је $M'N' = M'A + AN' = \frac{1}{2}(b - c + b + c) = b$ што је и требало доказати.

2 Сличност

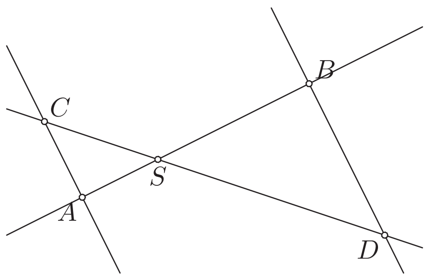
Подсетимо се Талесове теореме, једне од најстаријих теорема у математици.

Теорема 10 (**Талес**). *Нека се праве* p, q *секу у тачки* S. *Нека су* A, B *две различите тачке праве* p, *које су различите од* S *и нека су* C, D *две различите тачке праве* q, *које су различите од* S. *Тада је*

$$\begin{aligned} AC \parallel BD \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD} = \frac{AC}{BD} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}. \end{aligned}$$



При томе, уопште не мора да важи распоред тачака као што је на овој слици. Теорема ће важити и ако имамо неки други распоред тачака.

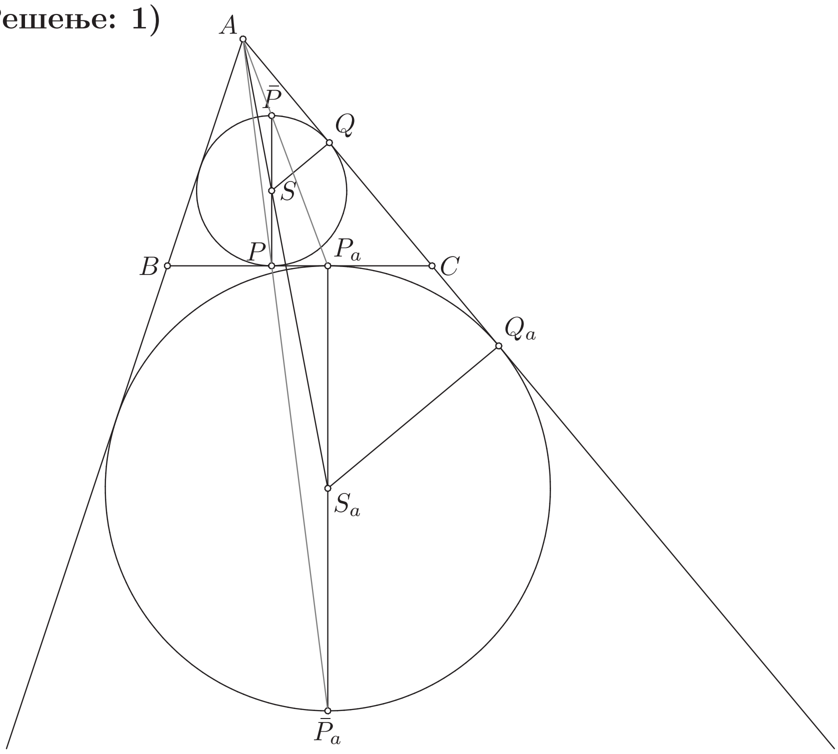


Искористимо Талесову теорему да решимо део **1)** Великог задатка (задатка 1.12).

1.12. (**Велики задатак**) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC $(b > c)$, са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB, са P_i, Q_i, R_i $(i = a, b, c)$ тачке у којима спoља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB, са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l, при чему је M на луку BAC, са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB, са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c, доказати да је:

1) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$, $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$.

Решење: 1)

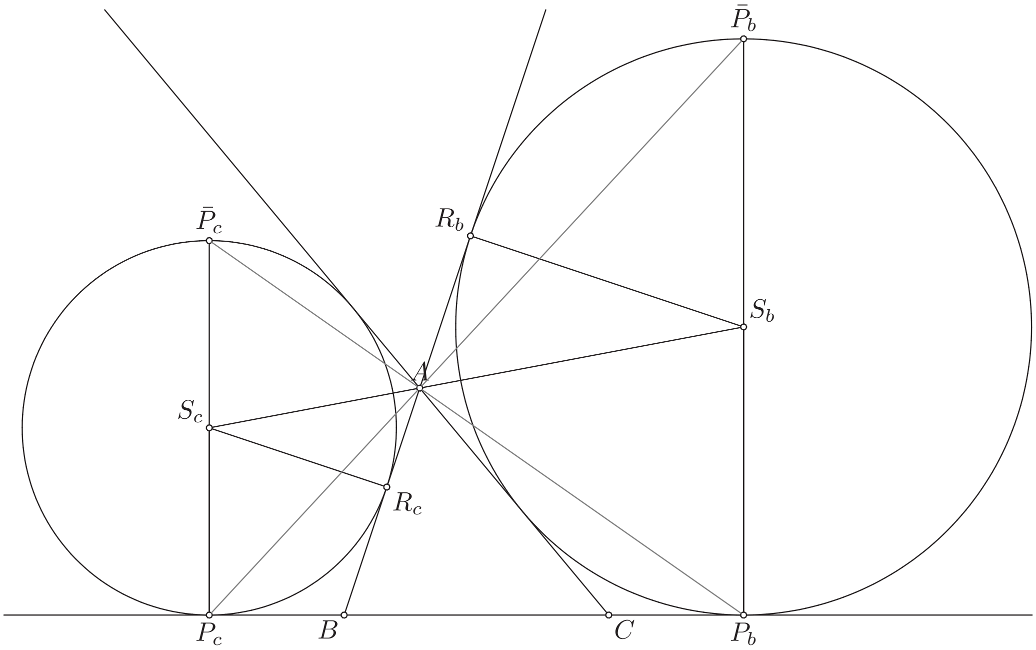


Нека је $\bar{P}$ пресечна тачка праве SP и праве AP_a. Довољно је доказати да важи $\mathcal{B}(A, \bar{P}, P_a)$ и $P' = \bar{P}$. Како тачке P, P' припадају уписаном кругу k троугла $\triangle ABC$ и правој SP и важи $SP = SP' = \rho$, а тачка P не припада правој AP_a, следи да је довољно доказати да је $S\bar{P} = \rho$ да би било $P' = \bar{P}$.

Праве SS_a и QQ_a се секу у тачки A и важи $SQ \perp AC$ и $S_aQ_a \perp AC$, па је $SQ \parallel S_aQ_a$. Према Талесовој теореми следи да је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SQ}{S_aQ_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Такође, имамо и да се праве SS_a и $\bar{P}P_a$ секу у тачки A и да је $S\bar{P} \perp BC$ и $S_aP_a \perp BC$, па је $S\bar{P} \parallel S_aP_a$. Пошто важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, према Талесовој теореми следи да важи $\mathcal{B}(A, \bar{P}, P_a)$ и $\frac{S\bar{P}}{S_aP_a} = \frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Међутим, важи $S_aP_a = \rho_a$, па је $\frac{S\bar{P}}{\rho_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$, одакле закључујемо да је $S\bar{P} = \rho$, односно да је $P' = \bar{P}$. Дакле, важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$.

Нека је $\bar{P}_a$ пресечна тачка праве S_aP_a и праве AP. Довољно је доказати да важи $\mathcal{B}(A, P, \bar{P}_a)$ и $P'_a = \bar{P}_a$. Како тачке P_a, P'_a припадају споља уписаном кругу k_a троугла $\triangle ABC$ и правој S_aP_a и важи $S_aP_a = SP'_a = \rho_a$, а тачка P_a не припада правој AP, следи да је довољно доказати да је $S_a\bar{P}_a = \rho_a$ да би било $P'_a = \bar{P}_a$.

Већ смо доказали да је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Праве SS_a и $P\bar{P}_a$ се секу у тачки A и из $SP \perp BC$ и $S_a\bar{P}_a \perp BC$ закључујемо да је $SP \parallel S_a\bar{P}_a$. Пошто важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, на основу Талесове теореме следи да важи $\mathcal{B}(A, P, \bar{P}_a)$ и $\frac{S_a\bar{P}_a}{SP} = \frac{AS_a}{AS} = \frac{\rho_a}{\rho}$. Међутим, важи $SP = \rho$, па је $\frac{S_a\bar{P}_a}{\rho} = \frac{\rho_a}{\rho}$, одакле закључујемо да је $S_a\bar{P}_a = \rho_a$, тј. $P'_a = \bar{P}_a$. Дакле, важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$.



Нека је $\bar{P}_b$ пресечна тачка праве S_bP_b и праве AP_c и нека је $\bar{P}_c$ пресечна тачка праве S_cP_c и праве AP_b. Довољно је доказати да важи $\mathcal{B}(P_c, A, \bar{P}_b)$ и $P'_b = \bar{P}_b$, као и да важи $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$ и $P'_c = \bar{P}_c$. Како тачке P_b, P'_b припадају споља уписаном кругу k_b троугла $\triangle ABC$ и правој S_bP_b и важи $S_bP_b = S_bP'_b = \rho_b$, а тачка P_b не припада правој AP_c, следи да је довољно доказати да је $S_b\bar{P}_b = \rho_b$ да би било $P'_b = \bar{P}_b$. Слично, како тачке P_c, P'_c припадају споља уписаном кругу k_c троугла $\triangle ABC$ и правој S_cP_c и важи $S_cP_c = S_cP'_c = \rho_c$, а тачка P_c не припада правој AP_b, следи да је довољно доказати да је $S_c\bar{P}_c = \rho_c$ да би било $P'_c = \bar{P}_c$.

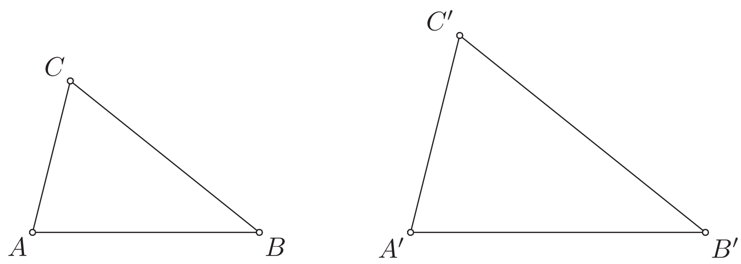
Праве S_bS_c и R_bR_c се секу у тачки A и важи $S_bR_b \perp AB$ и $S_cR_c \perp AB$, па је $S_bR_b \parallel S_cR_c$. Према Талесовој теореми следи да је $\frac{AS_b}{AS_c} = \frac{S_bR_b}{S_cR_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$. Такође, имамо и да се праве S_bS_c и $\bar{P}_bP_c$ секу у тачки A и да је $S_b\bar{P}_b \perp BC$ и $S_cP_c \perp BC$, па је $S_b\bar{P}_b \parallel S_cP_c$. Пошто важи $\mathcal{B}(S_c, A, S_b)$, према Талесовој теореми следи да важи $\mathcal{B}(P_c, A, \bar{P}_b)$ и $\frac{S_b\bar{P}_b}{S_cP_c} = \frac{AS_b}{AS_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$. Међутим, $S_cP_c = \rho_c$, па је $\frac{S_b\bar{P}_b}{\rho_c} = \frac{\rho_b}{\rho_a}$, одакле закључујемо да је $S_b\bar{P}_b = \rho_b$, односно да је $P'_b = \bar{P}_b$.

Дакле, важи $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$.

Праве S_bS_c и $P_b\bar{P}_c$ се секу у тачки A и из $S_bP_b \perp BC$ и $S_c\bar{P}_c \perp BC$ закључујемо да је $S_bP_b \parallel S_c\bar{P}_c$. Пошто важи $\mathcal{B}(S_b, A, S_c)$, из Талесове теореме следи да важи $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$ и $\frac{S_c\bar{P}_c}{S_bP_b} = \frac{AS_c}{AS_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$. Међутим, важи $S_bP_b = \rho_b$, па је $\frac{S_c\bar{P}_c}{\rho_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$, одакле закључујемо да је $S_c\bar{P}_c = \rho_c$, тј. $P'_c = \bar{P}_c$. Дакле, важи $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$.

Као што смо имали Ставове о подударности троуглова, постоје и Ставови о сличности троуглова. Што се тиче њихових формулација, имаћемо странице и углове, и то баш као код ставова о подударности (нпр. неке две и њима захваћен угао), с тим што имамо у виду да сличност чува *подударност углова* и *односе страница*.

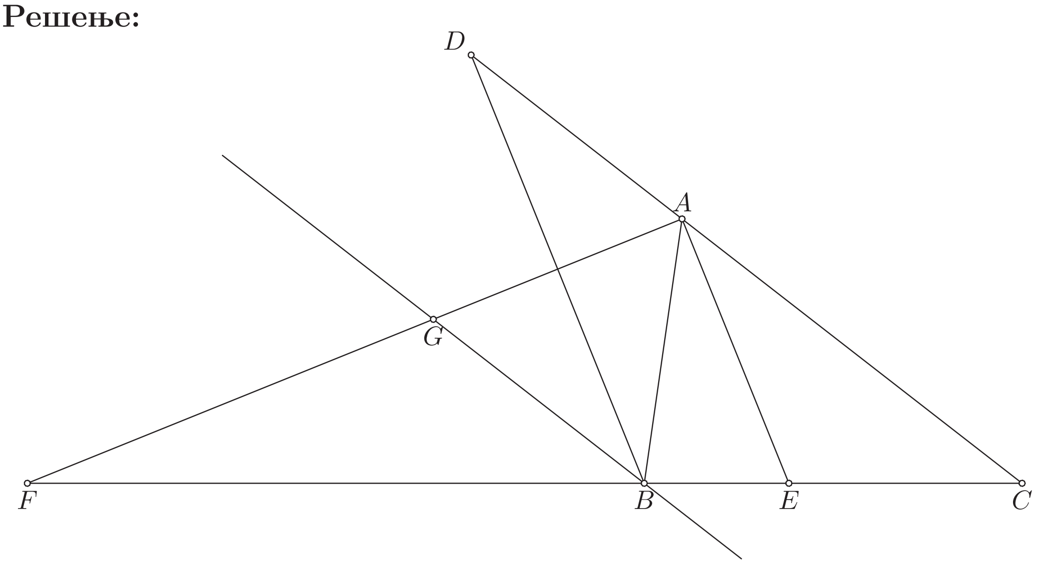
Став 2. *Нека су дати троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Ако важи нешто од следећег:*
1° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$;
2° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$;
3° $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$;
4° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, *а углови* $\measuredangle ABC$ *и* $\measuredangle A'B'C'$ *су оба оштра, оба права или оба тупа;*
онда је $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Сада прелазимо на задатке из сличности. Први задатак је Теорема о симетрали угла. Ова теорема је веома важна и треба је знати, јер ће се користити и у даљим задацима (нпр. као што се средња линија користи у многим другим задацима).

1. (**Теорема о симетрали угла**) Ако су E и F тачке у којима бисектрисе унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ $(AB < AC)$ секу праву BC доказати $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.

Решење:



Идеја је да применимо Талесову теорему. Да бисмо пронашли колики је однос $BE : CE$, довољно је да нађемо колики је однос $CE : EB$, па потражимо на полуправој CA тачку D такву да важи $\mathcal{B}(C, A, D)$ и $AD = AB$. Уколико докажемо да је $DB \parallel AE$, према Талесовој теореми ће бити $CE : EB = CA : AD$, па ће одатле следити $BE : CE = AD : AC$. Како је $AD = AB$, добићемо да је $BE : CE = AB : AC$, а то и треба доказати.

Уколико докажемо да је $\measuredangle BDA = \measuredangle EAC = \frac{\alpha}{2}$, следиће да су то углови с паралелним крацима, па ће бити $DB \parallel AE$. Како је $AD = AB$, следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па је $\measuredangle BDA = \measuredangle DBA$. Означимо те углове са φ. Угао $\measuredangle BAC = \alpha$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle BDA = \varphi$ и $\measuredangle DBA = \varphi$. Дакле, $\alpha = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па је $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, доказали смо да је $\measuredangle BDA = \frac{\alpha}{2}$, па је $DB \parallel AE$, а одатле следи да је $BE : CE = AB : AC$.

Сада желимо да нађемо однос $BF : CF = FB : FC$, па уочимо праву која садржи B и паралелна је са правом AC. Означимо са G њен пресек са правом FA. Талесова теорема нам тада даје да је $FB : FC = BG : CA$, па је довољно доказати да је $BG = AB$. Права AG је симетрала угла $\measuredangle BAD = \pi - \alpha$ (то је спољашњи угао код темена A троугла $\triangle ABC$), па је $\measuredangle GAB = \frac{\pi - \alpha}{2}$. Из $BG \parallel AC$ закључујемо да су углови $\measuredangle GBA$ и $\measuredangle BAC = \alpha$ углови с паралелним крацима, па су они подударни. Дакле,

$\measuredangle GBA = \alpha$. Одавде је $\measuredangle BGA = \pi - \measuredangle GBA - \measuredangle GAB = \pi - \alpha - \frac{\pi-\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}$, па је $\measuredangle BGA = \measuredangle GAB$. Дакле, троугао $\triangle BAG$ је једнакокраки, па је $BG = BA$. Овим је доказ завршен, јер је сада $BF : CF = BG : AC = AB : AC$, што је и требало доказати.

Видимо да је понекад потребно „доцртати" неке тачке и праве да би се лакше дошло до решења задатка. Овде су тачка D и права BG добијене у жељи да се искористи Талесова теорема.

2. Нека су E и F тачке из претходног задатка. Доказати:

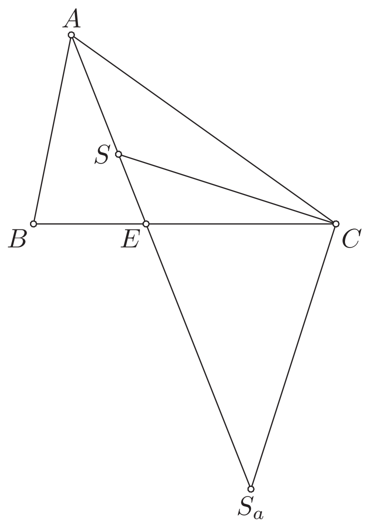
а) $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;

б) $AE : SE = (AB+AC+BC) : BC$, $AE : S_aE = (AB+AC-BC) : BC$;

в) $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

Решење: Овде су тачке E, F из 1. задатка, а тачке S, S_a, S_b, S_c су тачке из Великог задатка, дакле центри редом уписаног круга k и споља уписаних кругова k_a, k_b, k_c.

а)



Применом Теореме о симетрали угла (1. задатка) на троугао $\triangle CAE$ закључујемо да је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE$. Такође, знамо да је $BE : CE = AB : AC$ (1. задатак), па је $AC : CE = AB : BE$. Означимо тај однос са λ, дакле нека је $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BE} = \lambda$. Одавде је $AC = \lambda CE$ и $AB = \lambda BE$, па је $AB + AC = \lambda(BE + CE) = \lambda BC$. Следи да је $\lambda = (AB + AC) : BC$, а како је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE = \lambda$, следи да је $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$.

б) Како је $AE = AS + SE$, дељењем са SE добијамо да је

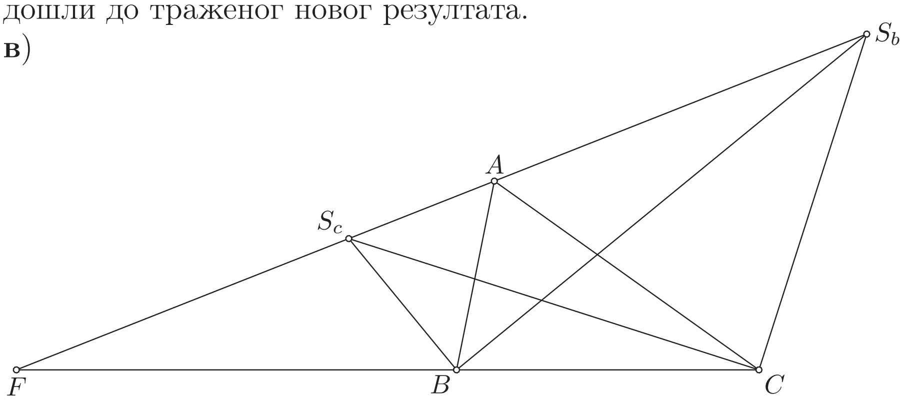
$$\begin{aligned}
\frac{AE}{SE} &= \frac{AS+SE}{SE} = \frac{AS}{SE} + \frac{SE}{SE} \\
&= \frac{AS}{SE} + 1 = \frac{AB+AC}{BC} + 1 \\
&= \frac{AB+AC}{BC} + \frac{BC}{BC} = \frac{AB+AC+BC}{BC}.
\end{aligned}$$

Слично, како је $AE = AS_a - S_aE$, дељењем са S_aE добијамо да је

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{S_aE} &= \frac{AS_a - S_aE}{S_aE} = \frac{AS_a}{S_aE} - \frac{S_aE}{S_aE} \\
&= \frac{AS_a}{S_aE} - 1 = \frac{AB+AC}{BC} - 1 \\
&= \frac{AB+AC}{BC} - \frac{BC}{BC} = \frac{AB+AC-BC}{BC}.
\end{aligned}$$

Овде смо само користили претходне резултате и уз мало рачунања дошли до траженог новог резултата.

в)



Применом Теореме о симетрали угла на троугао $\triangle BAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AB : BF$. Такође, применом те теореме на троугао $\triangle CAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AC : CF$. Означимо тражени непознати однос са λ, дакле $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = \lambda$. На основу добијених резултата имамо да је $AB : BF = AC : CF = \lambda$. Одавде следи да је $AB = \lambda BF$ и $AC = \lambda CF$, па одузимањем добијамо да је $AC - AB = \lambda(CF - BF) = \lambda BC$. Дакле, $\lambda = (AC - AB) : BC$, па следи тражени резултат $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

3. Доказати (важе ознаке из великог задатка):

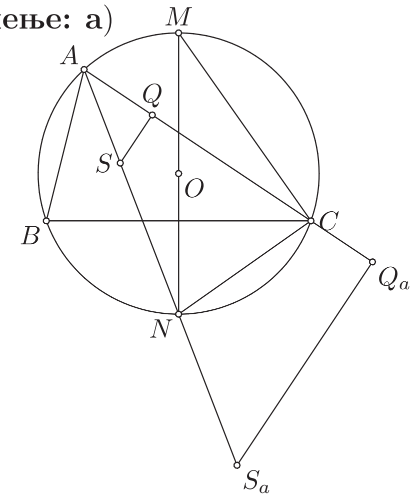
а) $SA \cdot SN = 2r\rho$;

б) $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$;

в) $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$;

г) $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

Решење: а)

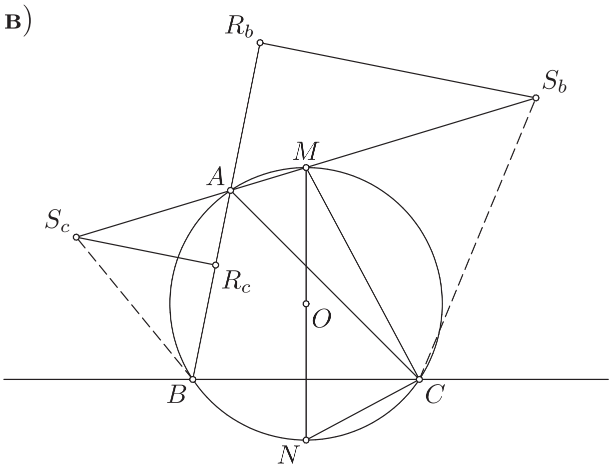


Сличност даје односе, а не производе дужи, али можемо те односе помножити дужима које су у имениоцима и доћи до производа. Како нам се јавља полупречник уписаног круга, морамо уочити подножје нормале из центра S уписаног круга на некој од страница троугла $\triangle ABC$, нпр. подножје Q на страници AC. Пошто нам се јавља $2r$, тј. пречник описаног круга, и пошто већ имамо тачку N, уочимо тачку M из Великог задатка, јер тада имамо пречник $MN = 2r$.

Сада имамо да је $\measuredangle SAQ = \measuredangle NAC = \measuredangle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\measuredangle SQA$ и $\measuredangle NCM$ прави ($\measuredangle NCM$ је периферијски над пречником NM), па је $\measuredangle SQA = \measuredangle NCM$. Следи да је $\triangle ASQ \sim \triangle MNC$, па је $SA : NM = SQ : NC$. Множењем са NM и NC добијамо да је $SA \cdot NC = NM \cdot SQ$. Како је $NM = 2r$, $SQ = \rho$ и $NC = SN$ (Велики задатак, став **6)**), следи да је $SA \cdot SN = 2r\rho$, што је и требало доказати.

б) Слично као у делу **а)**, уочимо тачке M, Q_a из Великог задатка. Имамо да је $\measuredangle S_aAQ_a = \measuredangle NAC = \measuredangle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\measuredangle S_aQ_aA$ и $\measuredangle NCM$ прави, па је $\measuredangle S_aQ_aA = \measuredangle NCM$. Следи да је $\triangle AS_aQ_a \sim \triangle MNC$, па је $S_aA : NM = S_aQ_a : NC$, односно, после множења, $S_aA \cdot NC = NM \cdot S_aQ_a$. Заменом $NM = 2r$, $S_aQ_a = \rho_a$ и $NC = S_aN$ (Велики задатак, став **6)**) добијамо $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$.

в)

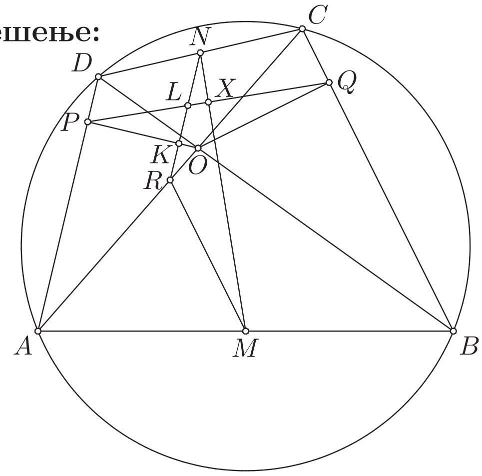


Како нам се овде јавља ρ_b, уочимо подножје нормале из S_b на некој од страница троугла $\triangle ABC$, нпр. на страници AB (дакле, тачку R_b) и како се поново јавља пречник описаног круга $2r$, уочимо пречник MN. Углови $\measuredangle MNC$ и $\measuredangle MAC$ су периферијски над луком $\widehat{MC}$, па су подударни, дакле $\measuredangle MNC = \measuredangle MAC = \frac{\pi-\alpha}{2}$ (права AM је симетрала спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$). Такође, $\measuredangle S_bAR_b = \frac{\pi-\alpha}{2}$, па је $\measuredangle MNC = \measuredangle S_bAR_b$. Важи и $\measuredangle MCN = \frac{\pi}{2} = \measuredangle S_bR_bA$, па следи да је $\triangle MNC \sim \triangle S_bAR_b$. Дакле, $S_bA : MN = S_bR_b : MC$, односно $S_bA \cdot MC = MN \cdot S_bR_b$. Заменом $MN = 2r$, $S_bR_b = \rho_b$ и $MC = S_bM$ (Велики задатак, став **6)**) добијамо $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$.

г) Слично као у делу **в)**, уочимо тачке M, R_c из Великог задатка. Имамо да је $\measuredangle S_cAR_c = \frac{\pi-\alpha}{2} = \measuredangle MAC = \measuredangle MNC$ (прве две једнакости важе јер је S_cM симетрала спољашњег угла код темена A, а последња јер су то периферијски углови над луком $\widehat{MC}$), као и $\measuredangle S_cR_cA = \frac{\pi}{2} = \measuredangle MCN$, па је $\triangle S_cAR_c \sim \triangle MNC$. Следи $S_cA : MN = S_cR_c : MC$, односно $S_cA \cdot MC = MN \cdot S_cR_c$. Заменом $MN = 2r$, $S_cR_c = \rho_c$ и $MC = S_cM$ (Велики задатак, став **6)**) добијамо $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, M и N редом средишта страница AB и CD, O пресек дијагонала AC и BD, а P и Q нормалне пројекције тачке O редом на AD и BC. Доказати да је $MN \perp PQ$.

Решење:



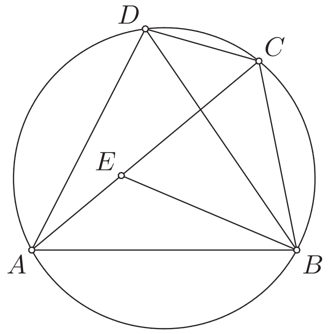
Нека је R средиште дијагонале AC. Тада је RM средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $RM \parallel BC$ и $RM = \frac{1}{2}BC$, а RN је средња линија троугла $\triangle ACD$, па је $RN \parallel AD$ и $RN = \frac{1}{2}AD$. Даље, како је $OQ \perp BC$ и $OP \perp AD$, следи да је $RM \perp OQ$ и $RN \perp OP$, па је $\measuredangle MRN = \measuredangle QOP$ (углови с нормалним крацима). Поред тога имамо да је $\frac{MR}{RN} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AD} = \frac{BC}{AD}$, па је довољно да докажемо да је $OQ : OP = BC : AD$ да би следило да је $\triangle MRN \sim \triangle QOP$.

Троуглови $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ су слични, јер имају подударне углове. Заиста, $\measuredangle AOD = \measuredangle BOC$ јер су то унакрсни углови и $\measuredangle ADO = \measuredangle BCO$ (периферијски над луком $\overparen{AB}$). Код сличних троуглова висине се односе исто као и странице, па је $OQ : OP = BC : AD$ (OQ је висина троугла BOC, а OP је висина троугла AOD). Дакле, $MR : RN = BC : AD = QO : OP$ и $\measuredangle MRN = \measuredangle QOP$, па је $\triangle MRN \sim \triangle QOP$. Следи да је $\measuredangle RNM = \measuredangle OPQ$ и $\measuredangle RMN = \measuredangle OQP$.

Означимо са K, L редом пресечне тачке праве RN са правима OP и QP и означимо са X пресечну тачку праве MN и праве PQ. Углови $\measuredangle KPL$ и $\measuredangle XNL$ су међусобно подударни, јер је $\measuredangle KPL = \measuredangle OPQ$ и $\measuredangle XNL = \measuredangle MNR$, а $\measuredangle OPQ = \measuredangle MNR$. Такође, $\measuredangle KLP = \measuredangle XLN$, јер су то унакрсни углови. Следи да троуглови $\triangle PKL$ и $\triangle NXL$ имају подударне углове, па је $\measuredangle LXN = \measuredangle LKP$. Међутим, $\measuredangle LKP = \frac{\pi}{2}$, јер је то угао између праве NR и праве OP, а важи $NR \perp OP$. Према томе, $\measuredangle LXN = \frac{\pi}{2}$, а то је угао између праве PQ и праве MN, па закључујемо да је $MN \perp PQ$.

5. Птоломејева теорема. Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао, доказати да важи $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Доказ:



Идеја је да производ $AC \cdot BD$ напишемо као збир два сабирка, од којих ће један бити једнак са $AB \cdot CD$, а други са $AD \cdot BC$. Ако на дијагонали AC уочимо неку тачку E, онда је $AC = AE + EC$, па је $AC \cdot BD = (AE+EC) \cdot BD = AE \cdot BD + EC \cdot BD$. Треба погодно одабрати тачку E тако да нпр. буде $AE \cdot BD = AB \cdot CD$ и $EC \cdot BD = AD \cdot BC$, односно $AE : CD = AB : BD$ и $EC : AD = BC : BD$. Зато узмимо тачку E на дијагонали AC такву да је $\measuredangle ABE = \measuredangle DBC$.

Како је $\measuredangle BAE = \measuredangle BDC$ (периферијски над $\overset{\frown}{BC}$) и $\measuredangle ABE = \measuredangle DBC$, следи да је $\triangle ABE \sim \triangle DBC$, па је $AE : DC = AB : DB$. Дакле, важи $AE \cdot BD = AB \cdot CD$. Даље, имамо да је $\measuredangle ECB = \measuredangle ADB$ (периферијски над $\overset{\frown}{AB}$) и $\measuredangle EBC = \measuredangle EBD + \measuredangle DBC = \measuredangle EBD + \measuredangle ABE = \measuredangle ABD$, па је $\triangle EBC \sim \triangle ABD$. Следи да је $EC : AD = BC : BD$, па добијамо $EC \cdot BD = AD \cdot BC$. Сабирањем добијамо да је

$$\begin{aligned} AE \cdot BD + EC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ (AE + EC) \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ AC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

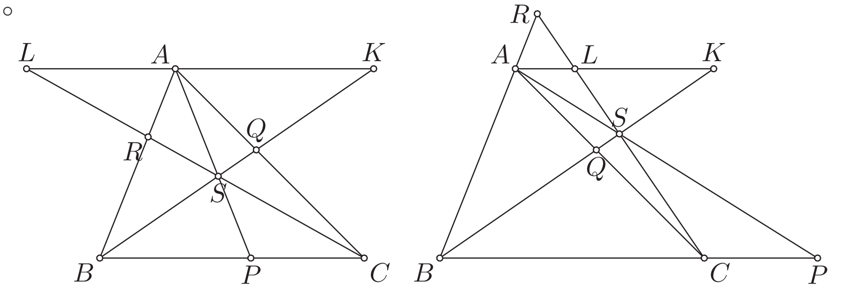
Дефиниција 14. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија правих неке равни. Ако
1) постоји тачка S која припада свим правима фамилије $\mathcal{F}$ и све праве које садрже тачку S припадају фамилији $\mathcal{F}$;
2) постоји права s која је паралелна свим правима фамилије $\mathcal{F}$ и све праве које су паралелне правој s припадају фамилији $\mathcal{F}$;
онда такву фамилију $\mathcal{F}$ зовемо *праменом правих*. Ако прамен $\mathcal{F}$ задовољава услов 1), кажемо да је то прамен *конкурентних* правих, а ако прамен $\mathcal{F}$ задовољава услов 2), кажемо да је то прамен *паралелних* правих.

Чевина теорема. Ако су P, Q, R редом тачке правих BC, CA, AB где су A, B, C три неколинеарне тачке, тада праве AP, BQ, CR припадају једном прамену ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$.

Доказ: Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. У формулацији теореме требало би додати услов да се тачке P, Q, R разликују од темена A, B, C троугла $\triangle ABC$, јер иначе број Π или није добро дефинисан (ако је нпр. $P = C$, онда није дефинисано $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$), или је једнак 0 (ако је нпр. $P = B$).

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека су AP, BQ, CR праве једног прамена.

1°



Нека је S заједничка пресечна тачка правих AP, BQ, CR и нека су K, L редом пресечне тачке правих BQ, CR са правом која садржи тачку A и паралелна је са BC. Тада је на основу Талесове теореме

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{KA}{AL} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{KA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AL}{CB}, \end{aligned}$$

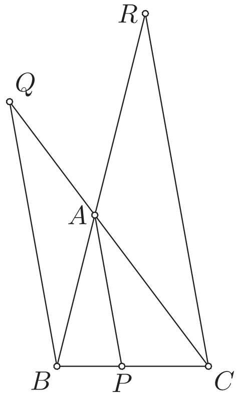
па добијамо да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{KA}{AL} \cdot \frac{CB}{KA} \cdot \frac{AL}{CB} = 1.$$

Ако је тачка S у унутрашњости троугла $\triangle ABC$, онда тачке P, Q, R припадају редом *дужима* BC, CA, AB, па је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$. Дакле, тада је $\Pi > 0$. Тачка S не може припадати ни правој AB, ни правој AC, нити правој BC, јер ће тада нека од тачака P, Q, R бити теме троугла. Према томе, тачка S не припада троуглу $\triangle ABC$, па остаје још случај када је у спољашњости троугла $\triangle ABC$ (и, наравно, не припада ни правој AB, ни правој AC нити правој BC). Тада ће тачно једна од тачака P, Q, R припадати одговарајућој дужи (BC, AC, AB). Нпр. нека тачка Q припада дужи AC, као што је на слици. Тада је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$

и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је поново $\Pi > 0$. Слично добијамо да је $\Pi > 0$ и у преостала два случаја (P припада дужи BC, односно R припада дужи AB). Дакле, имамо $\Pi > 0$ и $|\Pi| = 1$, па следи да је $\Pi = 1$.

2°



Нека су праве AP, BQ, CR међусобно паралелне. На основу Талесове теореме је

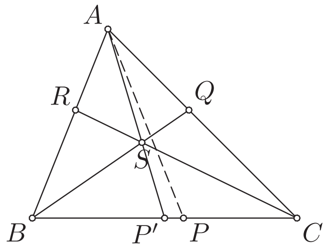
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CB}{BP}$$
$$\frac{AR}{RB} = \frac{PC}{CB},$$

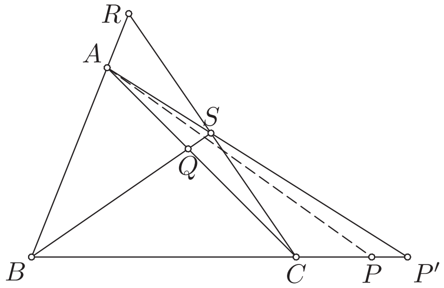
па је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CB}{BP} \cdot \frac{PC}{CB} = 1.$$

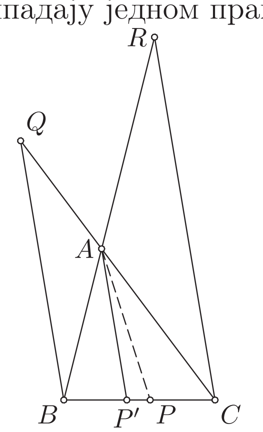
Праве AP, BQ, CR морају бити такве та тачно две од њих не пролазе кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, а трећа пролази. Стога тачно две од тачака P, Q, R припадају дужима BC, CA, AB, а трећа не припада. Нпр. ако права AP пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, онда праве BQ, CR не пролазе кроз унутрашњост троугла и тачка P припада дужи BC, а тачке Q, R не припадају дужима CA, AR. Следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је $\Pi > 0$. Слично и у преостала два случаја (права BQ пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, односно права CR пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$) добијамо да је $\Pi > 0$. Дакле, важи $\Pi > 0$ и $|\Pi| = 1$, па закључујемо да је $\Pi = 1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $\Pi = 1$. Посматрајмо праве BQ и CR.
1°





Нека се праве BQ и CR секу у тачки S. Означимо са P' пресечну тачку праве AS и праве BC. На основу дела $\boxed{\Longrightarrow}$ следи $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Такође, по претпоставци је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$, па је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па се праве AP, BQ, CR секу у тачки S. Дакле, AP, BQ, CR припадају једном прамену.
2°



Нека је $BQ \parallel CR$. Означимо са P' пресечну тачку праве која садржи тачку A и паралелна је са правом BQ (и правом CR) и праве BC. На основу дела $\boxed{\Longrightarrow}$ следи $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Такође, $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$, па је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па су праве AP, BQ, CR паралелне. Дакле, праве AP, BQ, CR припадају једном прамену. $\square$

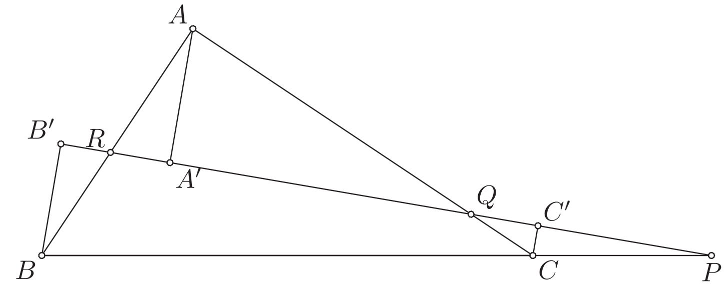
Менелајева теорема. Тачке P, Q, R правих одређених страницама BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$ су колинеарне ако и само ако важи

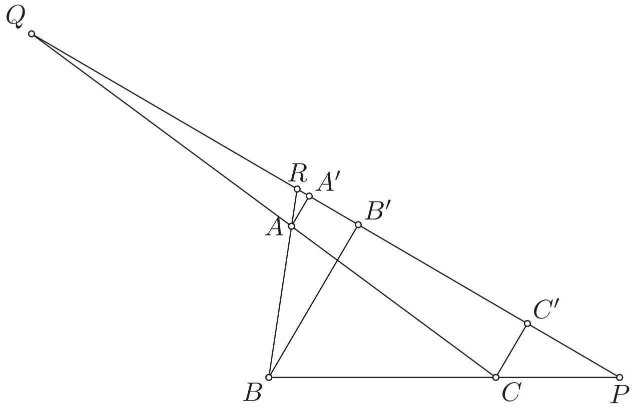
$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$$

.

Доказ: Означимо поново $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Слично као код формулације Чевине теореме, и у формулацији ове теореме требало би додати услов да се тачке P, Q, R разликују од темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ (из истих разлога као малопре, јер ће број Π бити недефинисан ако је нпр. $P = C$ или ће бити једнак нули ако је нпр. $P = B$).

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека су P, Q, R колинеарне и нека је p права која их садржи. Означимо са A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој p. Тада су праве AA', BB', CC' паралелне, па на основу Талесове теореме имамо:





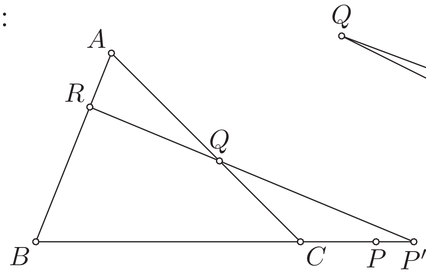
$$\begin{aligned}
\frac{BP}{PC} &= \frac{BB'}{CC'}\\
\frac{CQ}{QA} &= \frac{CC'}{AA'}\\
\frac{AR}{RB} &= \frac{AA'}{BB'}.
\end{aligned}$$

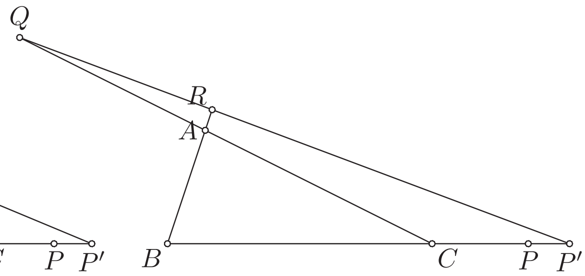
Следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1.$$

Како права p не садржи ниједно теме троугла A, B, C јер би иначе нека од тачака P, Q, R била теме троугла, на основу Пашове аксиоме закључујемо да или тачно две од тачака P, Q, R припадају одговарајућим дужима BC, CA, AB или ниједна од њих не припада одговарајућој дужи. Ако нпр. тачке Q, R припадају редом дужима CA, AB, важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$, па је $\Pi < 0$. Слично, ако тачке P, Q припадају редом дужима BC, CA или ако тачке P, R припадају редом дужима BC, AB, следи да је $\Pi < 0$. Ако ниједна од тачака P, Q, R не припада одговарајућој дужи (BC, CA, AB), важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је поново $\Pi < 0$. Закључујемо да је $\Pi < 0$ и $|\Pi| = 1$, па је $\Pi = -1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$:





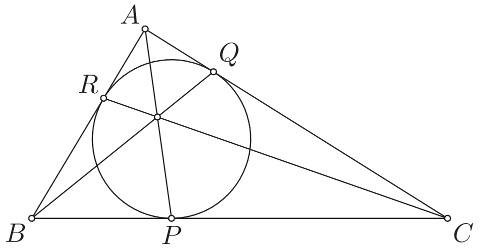
Нека је $\Pi = -1$. Означимо са P' пресечну тачку праве QR и праве BC. На основу дела $\boxed{\Longrightarrow}$ следи да је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. Такође, по претпоставци је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$, па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па су тачке P, Q, R колинеарне. $\square$

Напомена 5. Да би докази смерова $\boxed{\Longleftarrow}$ Чевине и Менелајеве теореме били до краја коректни, морали бисмо да докажемо да тачке P' постоје, тј. у случају 1° Чевине теореме да AS и BC нису паралелне, у случају 2° Чевине теореме да права која садржи A и паралелна је са BQ и CR није паралелна са BC, а у Менелајевој теореми да праве QR и BC нису паралелне. Међутим, то овде нећемо радити.

Напомена 6. У некој литератури се уместо израза „Чевина теорема” може наћи и израз „Чеваова теорема”.

6. Ако су P, Q, R тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB, доказати да су праве AP, BQ, CR конкурентне.

Решење:



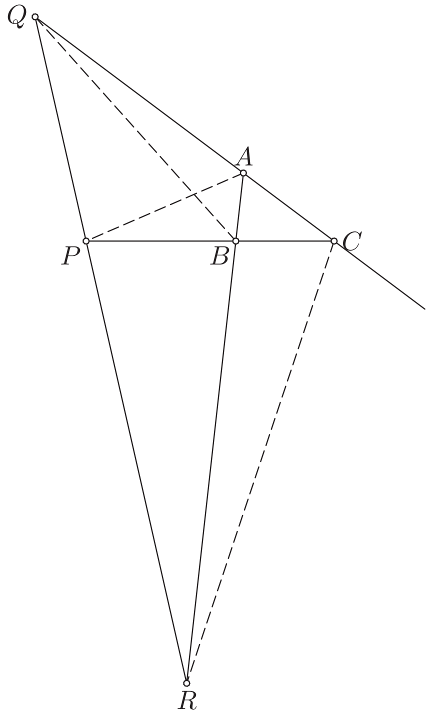
Нека је $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Тангентне дужи из тачака A, B, C на уписаном кругу троугла $\triangle ABC$ су подударне ($AQ = AR$, $BR = BP$, $CP = CQ$), па следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BR}{PC} \cdot \frac{CP}{QA} \cdot \frac{AQ}{RB} = 1.$$

Тачке P, Q, R припадају дужима BC, CA, AB, па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QB}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$. Одавде закључујемо да је $\Pi > 0$, па због $|\Pi| = 1$ следи да је $\Pi = 1$. На основу Чевине теореме закључујемо да праве AP, BQ, CR припадају једном прамену. С обзиром на то да дужи BQ, CR припадају унутрашњости троугла $\triangle ABC$, оне се секу, па закључујемо да праве AP, BQ, CR припадају прамену конкурентних правих, тј. оне су конкурентне (секу се у једној тачки).

7. Доказати да уколико постоје тачке у којима бисектрисе спољашњих углова код темена A, B, C секу праве одређене наспрамним страницама троугла ABC, оне су колинеарне.

Решење:



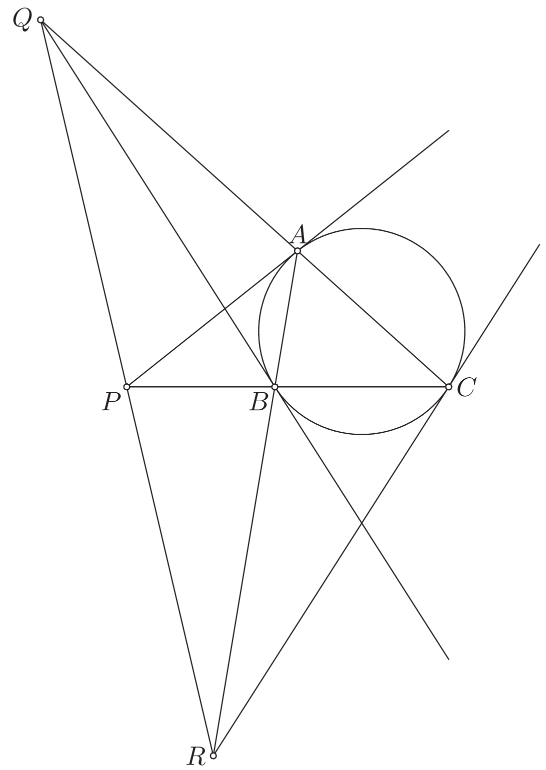
Нека су P, Q, R редом пресечне тачке симетрала спољашњих углова код темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ са правима BC, CA, AB. Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. На основу Теореме о симетрали угла следи да је

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{BA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AC}{CB}, \end{aligned}$$

па је $|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} \cdot \frac{AC}{CB} = 1$. Како симетрале спољашњих углова троугла припадају спољашњости троугла, следи да ниједна од тачака P, Q, R не припада одговарајућој дужи (BC, CA, AB), па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$. Дакле, $\Pi < 0$ и $|\Pi| = 1$, па је $\Pi = -1$. На основу Менелајеве теореме следи да су тачке P, Q, R колинеарне.

8. Доказати да тачке P, Q, R у којима тангенте описаног круга троугла ABC у његовим теменима секу праве одређене наспрамним страницама, уколико постоје, припадају једној правој.

Решење:



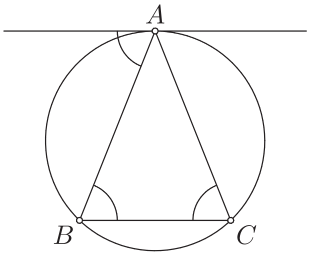
Нека су P, Q, R редом пресечне тачке тангенти у теменима A, B, C троугла $\triangle ABC$ на његовом описаном кругу са правима BC, CA, AB. Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Угао $\measuredangle PAB$ је угао између тангенте PA и тетиве AB, па је подударан с периферијским углом $\measuredangle ACB$ над том тетивом. Следи да је $\measuredangle PAB = \measuredangle PCA (= \measuredangle BCA)$, а како је и $\measuredangle APB = \measuredangle CPA$ (исти угао), следи да је $\triangle PAB \sim \triangle PCA$. Одавде је $\frac{BP}{AP} = \frac{PA}{PC} = \frac{AB}{AC}$, па следи да је $\frac{BP}{PC} = \frac{BP}{AP} \cdot \frac{AP}{PC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Слично, $\measuredangle QBA = \measuredangle ACB$ (угао $\measuredangle QBA$ између тангенте QB и тетиве BA подударан је с периферијским углом $\measuredangle ACB$ над том тетивом) и $\measuredangle BQA = \measuredangle BQC$ (исти угао), па је $\triangle QBC \sim \triangle QAB$. Следи $\frac{CQ}{BQ} = \frac{QB}{QA} = \frac{BC}{AB}$, па је $\frac{CQ}{QA} = \frac{CQ}{BQ} \cdot \frac{BQ}{QA} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$. Коначно, $\measuredangle RCB = \measuredangle BAC$ (угао $\measuredangle RCB$ између тангенте RC и тетиве CB подударан је с периферијским углом $\measuredangle BAC$ над том тетивом) и $\measuredangle BRC = \measuredangle ARC$ (исти угао), па је $\triangle RAC \sim \triangle RCB$. Следи да је

$\frac{AR}{CR} = \frac{RC}{RB} = \frac{AC}{CB}$, па је $\frac{AR}{RB} = \frac{AR}{CR} \cdot \frac{CR}{RB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$. Према томе,

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \cdot \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1.$$

Како тангенте AP, BQ, CR припадају спољашњости описаног круга троугла $\triangle ABC$, следи да оне припадају и спољашњости троугла $\triangle ABC$, па тачке P, Q, R не припадају одговарајућим дужима BC, CA, AB. Према томе, $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је и $\Pi < 0$. Дакле, $\Pi = -1$, па према Менелајевој теореми следи да су тачке P, Q, R колинеарне.

Напомена 7. Размотримо у ком случају је нека од тангенти паралелна са наспрамном страницом, нпр. када је тангента у темену A троугла $\triangle ABC$ на његовом описаном кругу паралелна са BC.



Назначени угао између тангенте и тетиве AB подударан је с периферијским углом $\measuredangle ACB$ над том тетивом, а с друге стране подударан је с углом $\measuredangle ABC$, јер су то углови с паралелним крацима. Закључујемо да је $\measuredangle ACB = \measuredangle ABC$, па је троугао $\triangle ABC$ једнакокраки с основицом BC. Дакле, задатак се могао решавати само за троуглове $\triangle ABC$ који нису једнакокраки, јер иначе не постоји нека од тачака P, Q, R.

Дефиниција 15. Нека су P, Q, R, S четири различите колинеарне тачке. Пар тачака (P, Q) је *хармонијски спрегнут* с паром тачака (R, S) ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ и пишемо $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Следе неке особине релације хармонијске спрегнутости. Најпре, та релација је симетрична у следећем смислу. Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\mathcal{H}(P, Q; S, R)$, $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$, $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$, односно небитан је да ли је у питању пар (P, Q) или пар (Q, P), као и да ли је у питању пар (R, S) или пар (S, R). Такође, ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$, тј. ако је пар (P, Q) хармонијски спрегнут с паром (R, S), онда је и пар (R, S) хармонијски спрегнут с паром (P, Q). Докажимо ове особине.

Ако је $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$, онда је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$, што по дефиницији даје $\mathcal{H}(P,Q;S,R)$. Множењем бројилаца и именилаца с леве и десне стране једнакости бројем -1 добијамо да је $\frac{-\overrightarrow{PS}}{-\overrightarrow{SQ}} = -\frac{-\overrightarrow{PR}}{-\overrightarrow{RQ}}$, односно да је $\frac{\overrightarrow{SP}}{\overrightarrow{QS}} = -\frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{QR}}$. Како су тачке P,Q,R,S међусобно различите, ниједан од ових вектора није нула вектор, па ни бројеви с леве и десне стране једнакости нису једнаки 0, што значи да можемо узети њихове инверзе и они ће такође бити једнаки. Добијамо да је $\frac{\overrightarrow{QS}}{\overrightarrow{SP}} = -\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{RP}}$, а то по дефиницији значи да је $\mathcal{H}(Q,P;S,R)$. Поновном заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо $\mathcal{H}(Q,P;R,S)$.

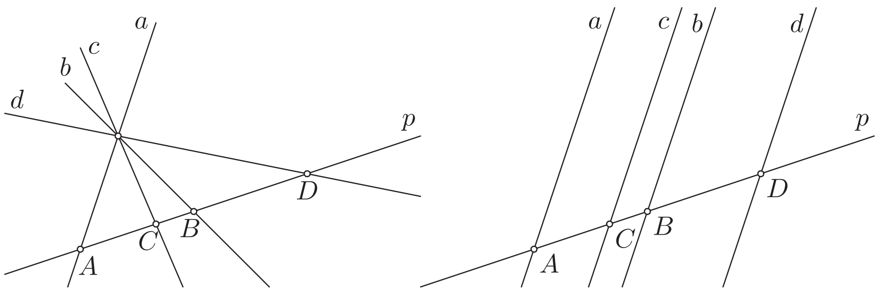
Ако је $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$, онда је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = \lambda$. Следи да је $\overrightarrow{PR} = \lambda\overrightarrow{RQ}$ и $\overrightarrow{PS} = -\lambda\overrightarrow{SQ} = \lambda\overrightarrow{QS}$. Вектори $\overrightarrow{RP}$ и $\overrightarrow{PS}$ су колинеарни и ниједан од њих није нула вектор, па следи да је $\lambda \neq 0$ и постоји однос тих вектора који је једнак $\frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{PS}} = \frac{-\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PS}} = \frac{-\lambda\overrightarrow{RQ}}{\lambda\overrightarrow{QS}} = -\frac{\overrightarrow{RQ}}{\overrightarrow{QS}}$. Следи да је $\mathcal{H}(R,S;P,Q)$.

Даље, ако су P,Q,R три разне колинеарне тачке и R није средиште дужи PQ, тада постоји јединствена тачка S таква да је $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$. Заиста, тада је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \notin \{0,1\}$, па постоји јединствена тачка S таква да је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$ (због $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq -1$ следе постојање и јединственост тачке S). Због $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq 0$ следи да је S различита од P, а наравно мора бити и $S \neq Q$ и $S \neq R$, па је заиста $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$.

Ако је $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$, онда важи тачно један од распореда тачака $\mathcal{B}(P,R,Q)$ и $\mathcal{B}(P,S,Q)$. Заиста, из $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$ следи $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = \lambda$. Како због различитости тачака P,Q,R,S важи $\lambda \neq 0$, следи да је тачно један од односа $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$ и $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ позитиван (други је наравно негативан). Ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} > 0$, онда је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} < 0$, па важи $\mathcal{B}(P,R,Q)$ и не важи $\mathcal{B}(P,S,Q)$. Ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} < 0$, онда је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} > 0$, па важи $\mathcal{B}(P,S,Q)$ и не важи $\mathcal{B}(P,R,Q)$. Према томе, важи тачно један од распореда тачака $\mathcal{B}(P,R,Q)$ и $\mathcal{B}(P,S,Q)$.

Дефинисаћемо и хармонијску спрегнутост парова правих.

Дефиниција 16. Нека праве a,b,c,d припадају једном прамену. Кажемо да је пар (a,b) *хармонијски спрегнут* с паром (c,d) ако постоји права p таква да је $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, $p \cap c = \{C\}$, $p \cap d = \{D\}$ и важи $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. Тада пишемо $\mathcal{H}(a,b;c,d)$.



Да би дефиниција била коректна, требало би доказати да ова особина не зависи од избора праве p. То нећемо радити. Навешћемо само једну особину без доказа. Ако су a, b, c, d праве конкурентног прамена (конкурентне праве) и $c \perp d$, важи $\mathcal{H}(a, b; c, d)$ ако и само су c и d симетрале углова који граде праве a и b (има их два и треба да c буде симетрала једног од њих, а d симетрала оног другог).

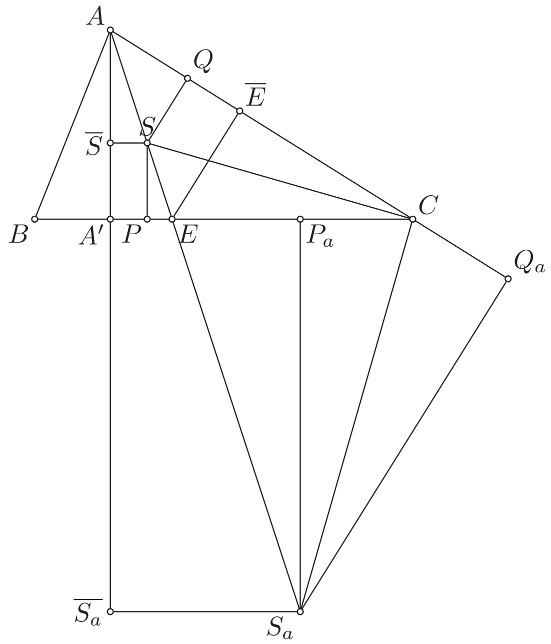
Због доказане симетричности релације хармонијске спрегнутости парова тачака, следи и симетричност релације хармонијске спрегнутости парова правих. Такође, често уместо „пар (P, Q) је хармонијски спрегнут с паром (R, S)" или „парови (P, Q) и (R, S) су хармонијски спрегнути" кажемо и „тачке P, Q, R, S су хармонијски спрегнуте". Слично, често кажемо „праве a, b, c, d су хармонијски спрегнуте".

9. Нека су $\overline{S}, \overline{S_a}, \overline{S_b}, \overline{S_c}$ пројекције тачака S, S_a, S_b, S_c на праву одређену висином AA' троугла ABC, а $\overline{E}$ пројекција E на праву AC. Доказати:

a) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$, $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$, $\mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a)$, $\mathcal{H}(A', E; P, P_a)$;

b) $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$, $\mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$, $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$.

Решење:



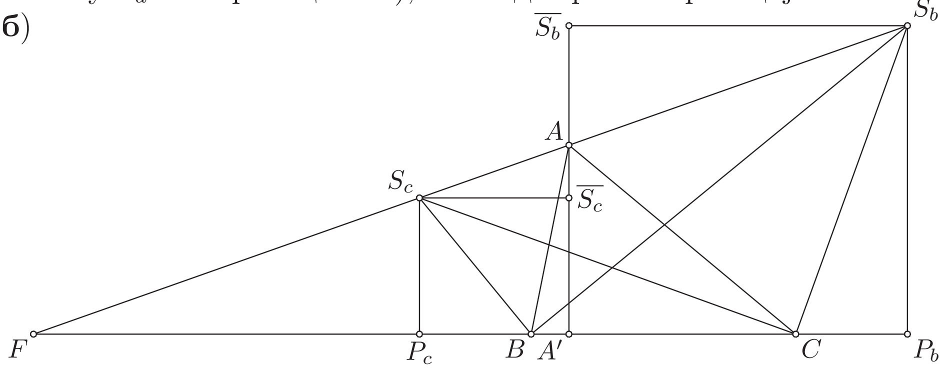
a) Тачке S, S_a су редом центар уписаног и спроља уписаног круга који додирује страницу BC, а тачка E је пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A и (наспрамне) странице BC. На основу Теореме о симетрали угла (1. задатка) следи $AS : SE = AS_a : S_aE (= AC : CE)$. Такође, како важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, S, E, S_a)$ следи да су односи $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}}$ и $\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$ супротних знакова, па важи $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}} = -\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$, тј. $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$.

Сада ћемо доказати да се нормалним пројектовањем чува хармонијска спрегнутост тачака. Тачке A, S, E, S_a се пројектују у тачке $A, \overline{S}, A', \overline{S_a}$ и доказујемо да из $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ следи $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$. Важи $S\overline{S} \perp AA'$, $EA' \perp AA'$ и $S_a\overline{S_a} \perp AA'$, па следи да је $S\overline{S} \parallel EA' \parallel S_a\overline{S_a}$, па Талесова теорема даје $A\overline{S} : \overline{S}A' = AS : SE = AS_a : S_aE = A\overline{S_a} : \overline{S_a}A'$. Нормално пројектовање чува распоред тачака, па из распореда тачака $\mathcal{B}(A, S, E, S_a)$ закључујемо да важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, \overline{S}, A', \overline{S_a})$. Следи $\frac{\overrightarrow{A\overline{S}}}{\overrightarrow{\overline{S}A'}} = -\frac{\overrightarrow{A\overline{S_a}}}{\overrightarrow{\overline{S_a}A'}}$, па је $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a})$.

Сада када знамо да нормално пројектовање чува хармонијску спрегнутост тачака, из $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ директно следи $\mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a)$, као и

$\mathcal{H}(A', E; P, P_a)$. Заиста, тачке A, S, E, S_a пројектују се у тачке $A, Q, \overline{E}, Q_a$ на правој AC и у тачке A', P, E, P_a на правој BC (центри S, S_a уписаног и спола уписаног круга пројектују се редом у додирне тачке тих кругова и одговарајуће странице, односно праве која је садржи; дакле, S се пројектује у Q на страници AC и у P на страници BC, а S_a у Q_a на правој AC и у P_a на страници BC), па следе тражене релације.

б)



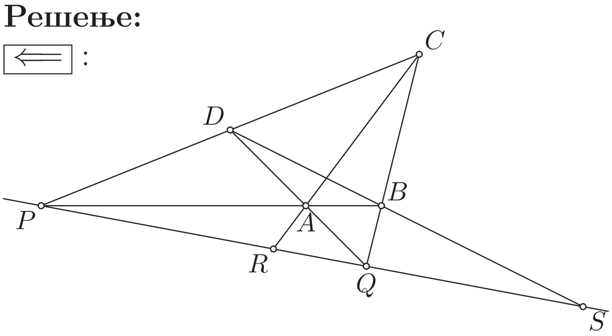
Тачке S_b, S_c су центри спола уписаних кругова који додирују редом странице AC, AB, а тачка F је пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A и (наспрамне) странице BC. На основу Теореме о симетрали угла (1. задатка) следи $AS_c : S_cF = AS_b : S_bF (= AB : BF)$. У зависности од тога да ли је $AB < AC$ или $AB > AC$ важи распоред $\mathcal{B}(F, S_c, A, S_b)$ или распоред $\mathcal{B}(F, S_b, A, S_c)$ (не може бити $AB = AC$, јер је тада симетрала спољашњег угла код темена A паралелна с правом BC и не постоји тачка F), па су односи $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}}$ и $\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$ супротних знакова. Дакле, $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}} = -\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$, па важи $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$.

Нормалним пројектовањем тачке F, S_c, A, S_b пројектују се у тачке F, P_c, A', P_b на правој BC и у тачке $A', \overline{S_c}, A, \overline{S_b}$ на правој AA', па из $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$ следе $\mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$ и $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$.

10. Важи $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$ ако и само ако постоје четири тачке A,B,C,D такве да важи $AB\cap CD=\{P\}$, $BC\cap AD=\{Q\}$, $PQ\cap AC=\{R\}$, $PQ\cap BD=\{S\}$.

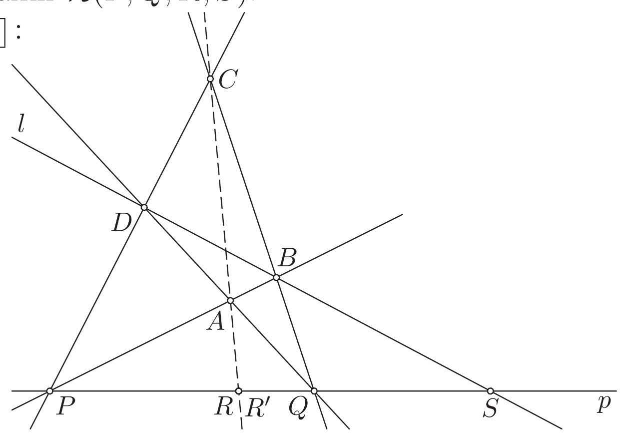
Решење:

$\boxed{\Longleftarrow}$:



Нека су A,B,C,D четири разне тачке у равни и нека постоје тачке $\{P\}=AB\cap CD$, $\{Q\}=BC\cap AD$, $\{R\}=PQ\cap AC$, $\{S\}=PQ\cap BD$. Посматрајмо троугао $\triangle PQC$, тачке R,B,D редом на његовим страницама PQ,QC,CP и тачку S на правој PQ. Праве PB,QD,CR секу се у тачки A, па оне припадају једном прамену. Према Чевиној теореми следи да је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}\cdot\frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{BC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DP}}=1$. Такође, тачке S,B,D су колинеарне, па је према Менелајевој теореми $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}\cdot\frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{BC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DP}}=-1$. Следи да је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}=\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{QB}}\cdot\frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{CD}}=-\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$, па важи $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$:



Нека су P,Q,R,S хармонијски спрегнуте тачке (важи $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$). Означимо са p праву која садржи тачке P,Q,R,S. Треба пронаћи неке четири тачке A,B,C,D у некој равни која садржи праву p тако да важи $\{P\}=AB\cap CD$, $\{Q\}=BC\cap AD$, $\{R\}=PQ\cap AC$, $\{S\}=PQ\cap BD$. Одаберимо произвољну праву l која садржи тачку S и различита је од праве p и одаберимо на њој произвољне две разне тачке B,D различите од тачке S такве да $PB\nparallel QD$ и $PD\nparallel QB$ (убрзо ћемо видети зашто морамо наметнути баш ова два услова). Како желимо да одаберемо тачке

A, C тако да буде $\{P\} = AB \cap CD$ и $\{Q\} = BC \cap AD$, добијамо да тачка A мора припадати правима PB и QD и да тачка C мора припадати правима PD и QB. Из тих разлога нека је $\{A\} = PB \cap QD$ и $\{C\} = PD \cap QB$ (дакле, морамо наметнути услове $PB \nparallel QD$ и $PD \nparallel QB$ да би постојали пресеци тих правих).

Сада имамо четири тачке A, B, C, D и треба још проверити да ли је $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = BC \cap AD$, $\{R\} = PQ \cap AC$, $\{S\} = PQ \cap BD$. Прве две једнакости важе јер смо бирали тачке A, C тако да оне важе. Такође, важи и четврта једнакост ($\{S\} = PQ \cap BD$) јер смо тако бирали тачке B, D. Треба још проверити да ли је $\{R\} = PQ \cap AC$. Означимо пресек правих PQ и AC са R'. На основу дела $\boxed{\Longleftarrow}$ следи да важи $\mathcal{H}(P, Q; R', S)$, односно $\frac{\overrightarrow{PR'}}{\overrightarrow{R'Q}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. По претпоставци важи и $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, односно $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Дакле, следи $\frac{\overrightarrow{PR'}}{\overrightarrow{R'Q}} = \frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = k$, па је $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = k\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RQ} = (k+1)\overrightarrow{RQ}$, али и $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR'} + \overrightarrow{R'Q} = k\overrightarrow{R'Q} + \overrightarrow{R'Q} = (k+1)\overrightarrow{R'Q}$, те је $R' = R$. Према томе, важи и $\{R\} = PQ \cap AC$.

Дефиниција 17. Нека су A, B, C три колинеарне тачке. Дефинишемо израз $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ на следећи начин:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \cdot AC, & \text{ако није } \mathcal{B}(B, A, C) \\ -AB \cdot AC, & \text{ако јесте } \mathcal{B}(B, A, C) \end{cases}.$$

11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB, тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Longleftrightarrow AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.

Решење: Лако се проверава да израз дефинисан у дефиницији 17 суштински представља скаларни производ колинеарних вектора. Заиста, ако није $\mathcal{B}(B, A, C)$, онда је $\cos\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos 0 = 1$, па добијамо $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC$, а ако јесте $\mathcal{B}(B, A, C)$, онда је $\cos\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos\pi = -1$, па је $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = -AB \cdot AC$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B; C, D) &\iff \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \\ &\iff \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

$$\iff (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$$

(овде користимо дистрибутивност „множења" у односу на сабирање вектора)

$$\begin{aligned} \iff \quad & \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \\ = \quad & -\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

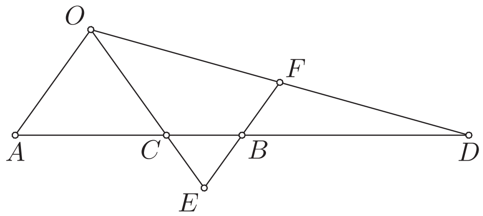
Сада искористимо да је $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$ и да за свако X, Y важи $-\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX}$.

$$\begin{aligned} \iff\quad & -\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} \quad = \\ = \quad & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff\quad & 2OB^2 = 2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD} \\ \iff\quad & OB^2 = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD} \\ \iff\quad & AO^2 = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}. \end{aligned}$$

12. Ако су A, B, C, D разне тачке праве p, O тачка ван те праве, E и F тачке у којима права која садржи тачку B и паралелна је OA сече OC и OD, доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff B$ је средиште EF.

Решење:



На основу Талесове теореме следи да је $AC : CB = AO : EB$, као и $AD : DB = AO : BF$, па је

$$AC : CB = AD : DB \iff AO : EB = AO : BF \iff EB = BF.$$

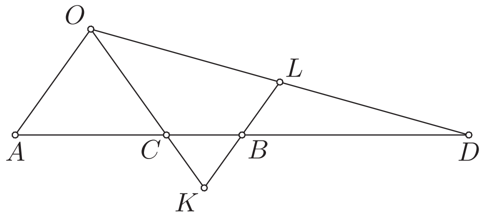
По претпоставци су A, B, C, D разне тачке праве p, па је $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD} = l\overrightarrow{AB}$, за неке $k, l \notin \{0, 1\}$, при чему је $k \neq l$. Дакле, $\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = k\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{CB}$, па је $(1-k)\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$, односно $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{k}{1-k}$. Слично је $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{l}{1-l}$. Како је $k \neq l$, онда је $k - kl \neq l - kl$, односно $k(1-l) \neq l(1-k)$, па је $\frac{k}{1-k} \neq \frac{l}{1-l}$. Одавде следи да је $AC : CB = AD : DB$ могуће само у случају да је $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$. Дакле,

$$\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AC : CB = AD : DB \iff EB = BF.$$

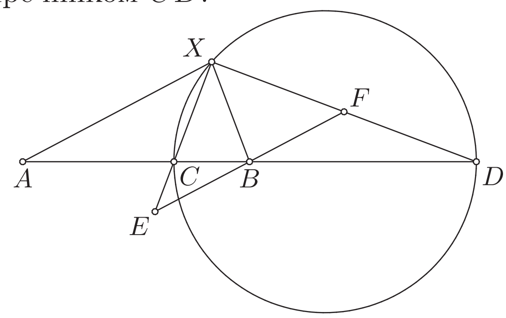
Да би ово било еквивалентно са тиме да је B средиште дужи EF, треба само проверити да ли су тачке E, F различите. Ако би било $E = F$, онда би праве OC и OD биле исте, а како се тачка O налази ван праве p која садржи C, D следило би да је $C = D$, што је у супротности с условом задатка. Дакле, $E \neq F$, па је заиста $EB = BF \iff B$ је средиште EF. Према томе, доказали смо да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff B$ је средиште EF.

13. (**Аполонијев круг**) Одредити скуп свих тачака у равни којима су растојања од двеју датих тачака сразмерна датим неподударним дужима.

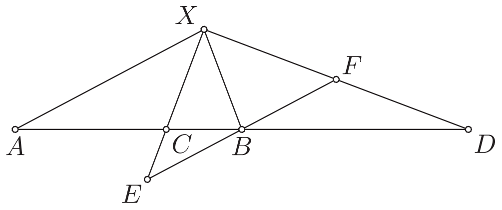
Решење:



Нека су m, n две дате неподударне дужи и нека су A, B две дате тачке. Нека је O произвољна тачка ван праве AB таква да је $OA = m$, нека је p права паралелна правој OA која садржи тачку B, нека су K, L тачке праве p с разних страна тачке B такве да је $BK = BL = n$ и нека су C, D пресечне тачке правих OK, OL с правом AB. На основу Талесове теореме следи да је $AC : CB = AO : BK = m : n = AO : BL = AD : DB$, па тачке C, D припадају траженом геометријском месту l тачака X таквих да је $AX : XB = m : n$. Докажимо да је тражено ГМТ l круг k над пречником CD.



$\boxed{\supseteq}$: Нека је $X \in k$ произвољна тачка круга k. Докажимо да је $AX : XB = m : n$. Ако се тачка X поклапа с неком од тачака C, D, доказ је завршен. Нека се тачка X разликује од тачака C, D. Посматрајмо праву паралелну правој AX кроз тачку B и означимо њен пресек са правима XC, XD редом са E, F. На основу Талесове теореме је $AX : BE = AC : CB = m : n$, као и $AX : BF = AD : DB = m : n$, па следи да је $BE = BF$, тј. да је B средиште дужи EF. Троугао $\triangle EXF$ је правоугли, јер је $\measuredangle EXF = \measuredangle CXD = \frac{\pi}{2}$ као периферијски угао над пречником CD. Како је B средиште хипотенузе EF, што је уједно и центар описаног круга тог троугла, значи да је $BE = BF = BX$, а како је $AX : BE = m : n$, следи да је $AX : XB = m : n$.



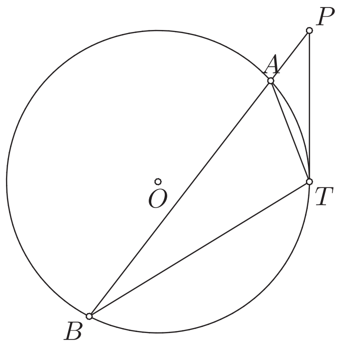
$\boxed{\subseteq}$: Нека је $X \in l$ произвољна тачка, тј. нека је X таква да је $AX : XB = m : n$ и докажимо да $X \in k$. Ако се тачка X поклапа с неком од тачака C, D (што је могуће, јер је $AC : CB = AD : DB = m : n$), доказ је завршен. Нека се тачка X разликује од тачака C, D. Посматрајмо поново праву паралелну правој AX кроз тачку B и означимо њен пресек са правима XC, XD редом са E, F. На основу Талесове теореме је $AX : BE = AC : CB = m : n$ и $AX : BF = AD : DB = m : n$, па због $AX : XB = m : n$ следи да је $BE = BF = BX$, тј. да је B центар описаног круга троугла $\triangle EXF$. Према томе, тај троугао је правоугли, тј. $\measuredangle EXF = \frac{\pi}{2}$. Пошто је $\measuredangle CXD = \measuredangle EXF$, следи да је то периферијски угао над пречником CD, тј. да X припада кругу над пречником CD, односно да $X \in k$.

Дефиниција 18. Круг k из претходног задатка зове се *Аполонијев круг*.

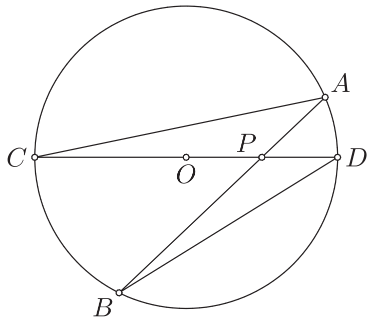
Став 3. *Нека је $k(O, r)$ круг равни α, P тачка те равни и A, B пресечне тачке круга k и произвољне праве која садржи тачку P и има заједничких тачака с кругом k (може бити и тангента, тада је $A = B$). Вредност израза $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ не зависи од избора те праве.*

Доказ: Разликујемо случајеве када је тачка P на кругу, у спољашњости круга или у његовој унутрашњости.

Ако је тачка P на кругу k, онда се увек једна од тачака A, B поклапа с тачком P, па је $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 = PO^2 - r^2$ (јер је $OP = r$).



Нека је тачка P у спољашњости круга k и нека је PT тангента тог круга. Троуглови $\triangle PTA$ и $\triangle PBT$ су слични, јер је $\measuredangle TPA = \measuredangle BPT$ и $\measuredangle PTA = \measuredangle PBT$ (угао између тангенте и тетиве подударан је периферијском углу над том тетивом). Следи да је $PT : PB = PA : PT$, тј. $PA \cdot PB = PT^2$. Како је $\triangle PTO$ правоугли, на основу Питагорине теореме је $PT^2 = PO^2 - OT^2 = PO^2 - r^2$. Такође, како је P у спољашњости круга k, следи да не важи $\mathcal{B}(A, P, B)$, па на основу дефиниције 17 важи $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB = PO^2 - r^2$.



Нека је тачка P у унутрашњости круга k и нека се разликује од центра O. Посматрајмо праву PO и означимо њене пресеке с кругом k са C, D тако да важи $\mathcal{B}(C, O, P, D)$. Троуглови $\triangle PAC$ и $\triangle PDB$ су слични, јер је $\measuredangle PAC = \measuredangle BAC = \measuredangle BDC = \measuredangle BDP$ и $\measuredangle PCA = \measuredangle DCA = \measuredangle DBA = \measuredangle DBP$ (периферијски углови над истим луковима су подударни). Следи да је $PA : PD = PC : PB$, тј. $PA \cdot PB = PC \cdot PD = (PO + OC) \cdot (OD - PO) = (r + PO) \cdot (r - PO) = r^2 - PO^2$. Како је P тачка у унутрашњости круга k, следи да важи $\mathcal{B}(A, P, B)$, па на основу дефиниције 17 важи $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -PA \cdot PB = -(r^2 - PO^2) = PO^2 - r^2$.

Ако је $P = O$, онда је $PA = PB = r$ и важи $\mathcal{B}(A, P, B)$. Према томе, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -PA \cdot PB = -r^2 = PO^2 - r^2$ (јер је $PO = 0$).

Према томе, у свим случајевима је $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$, што значи да вредност тог израза не зависи од избора праве која садржи тачку P. $\square$

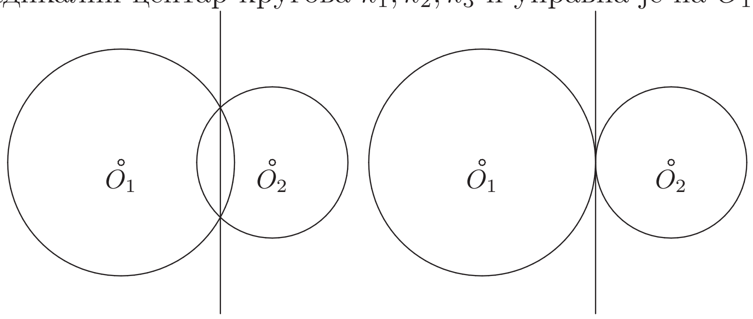
Дефиниција 19. Вредност израза $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} (= PO^2 - r^2)$ назива се *потенцијом* тачке P у односу на круг $k(O, r)$ и обележава се са $p(P, k)$.

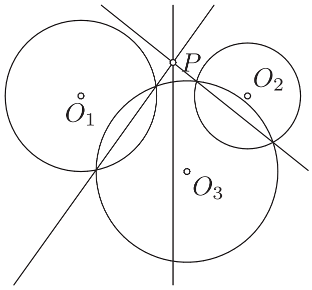
Из дефиниције је јасно да је потенција тачке P већа од нуле ако P припада спољашњости круга k, једнака нули ако припада кругу k, а мања од нуле ако припада унутрашњости круга k. Такође, најмању потенцију има тачка O и она је једнака $-r^2$.

Став 4. *Скуп свих тачака равни које имају једнаке потенције у односу на кругове $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$ је права управна на правој O_1O_2.*

Дефиниција 20. Права из претходног става назива се *потенцијалном* или *радикалном осом* кругова k_1 и k_2.

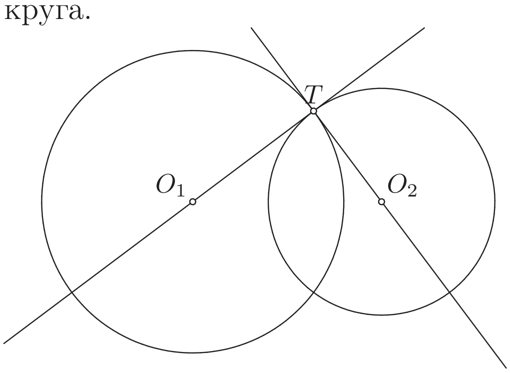
Ако имамо три круга у равни, њихове радикалне осе припадају једном прамену, а ако је у питању прамен конкурентних правих, пресечна тачка се назива *радикалним центром* тих кругова. Како конструисати радикалну осу кругова $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$? Ако се они секу у тачкама A, B, потенција тих тачака у односу на оба круга је нула, па оне припадају њиховој радикалној оси. Следи да је радикална оса управо права AB. Ако се k_1, k_2 додирују у тачки A, њена потенција у односу на оба круга је нула, па је радикална оса кругова k_1, k_2 права која садржи тачку A и управна је на O_1O_2, што је заједничка тангента кругова k_1, k_2 у њиховој додирној тачки A. Ако кругови k_1, k_2 немају заједничких тачака, онда конструишемо круг $k_3(O_3, r_3)$ такав да његов центар O_3 не припада правој O_1O_2 и да сече кругове k_1, k_2. Затим конструишемо радикалне осе кругова k_1, k_3 и кругова k_2, k_3. У њиховом пресеку налази се тачка која има једнаке потенције у односу на сва три круга, односно радикални центар кругова k_1, k_2, k_3. Радикална оса кругова k_1, k_2 је права која садржи радикални центар кругова k_1, k_2, k_3 и управна је на O_1O_2.

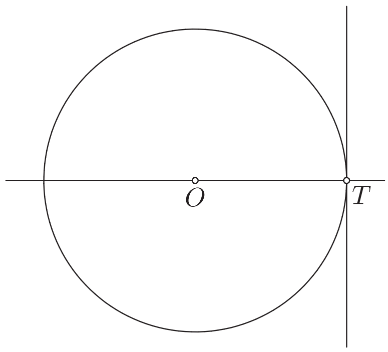




Дефиниција 21. Нека су у равни дати кругови k_1, k_2 који се секу и нека су t_1, t_2 редом тангенте тих кругова у некој од пресечних тачака. *Угао* између кругова k_1, k_2 је угао који граде тангенте t_1, t_2. Ако је $t_1 \perp t_2$, за кругове k_1, k_2 кажемо да су међусобно *нормални* (*управни, ортогонални*) и то означавамо са $k_1 \perp k_2$. Слично, ако су у равни дати права и круг који се секу, *угао* између праве и круга је угао између те праве и тангенте круга у некој од пресечних тачака, а ако су оне међусобно нормалне, онда су и тај круг и та права међусобно *нормални*.

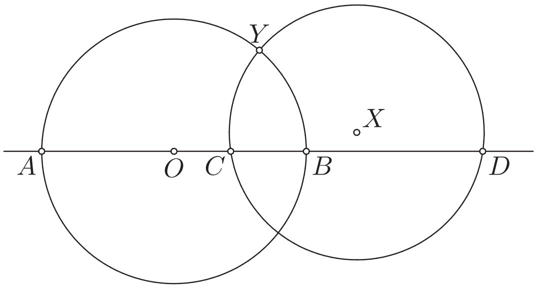
Размотримо кад су кругови, односно круг и права, међусобно нормални. Знамо да је тангента неког круга нормална на полупречнику који садржи додирну тачку. Пошто је код нормалних кругова k_1, k_2 тангента t_1 круга k_1 у пресечној тачки T нормална на тангенти t_2 круга k_2 у тачки T и на полупречнику O_1T круга k_1, следи да је тангента t_2 заправо права O_1T, односно да тангента t_2 садржи центар O_1 круга k_1. Дакле, кругови k_1, k_2 су међусобно нормални ако и само ако се секу и тангента једног од кругова у некој од пресечних тачака садржи центар другог круга. Слично, права и круг су нормални ако и само ако права садржи центар круга.





14. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D. Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff k \perp l$.

Решење:



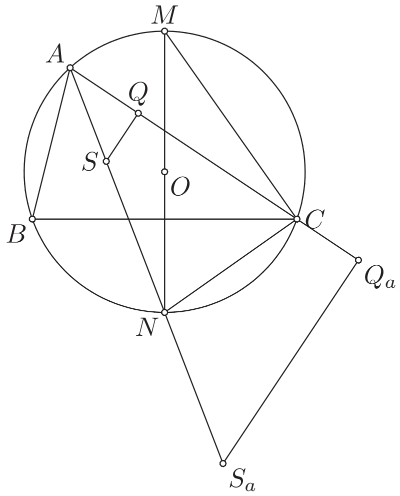
Означимо са O центар круга k. Тачка O је и средиште дужи AB јер је AB пречник круга k.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. На основу 11. задатка следи $AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = p(O, l)$. Нека је Y додирна тачка неке тангенте круга l из тачке O. Тада је $p(O, l) = OY^2$, па је $AO = OY$, тј. $Y \in k$. Према томе, кругови k и l се секу у тачки Y. Како је OY тангента круга l у тачки Y и садржи центар O круга k, следи да је $k \perp l$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $k \perp l$ и нека је Y једна од пресечних тачака тих кругова. Тада је $OY = AO$. Тангента круга l у тачки Y садржи центар O круга k, тј. OY је тангента круга l, па је $p(O, l) = OY^2$. Дакле, $AO^2 = OY^2 = p(O, l) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$, па на основу 11. задатка следи да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

15. Ако је $l(O,r)$ описани круг, $k(S,\rho)$ уписани круг и $k_a(S_a,\rho_a)$ споља уписани круг који додирује страницу BC датог троугла ABC, доказати да је $OS^2=r^2-2r\rho$ и $OS_a^2=r^2+2r\rho_a$.

Решење:



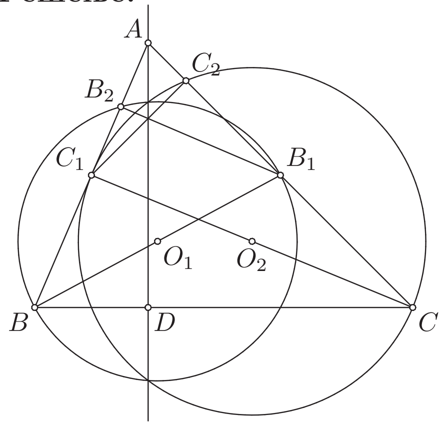
Потенције тачака S, S_a у односу на описани круг l су једнаке редом $p(S,l)=SO^2-r^2$ и $p(S_a,l)=S_aO^2-r^2$. Такође, ове потенције су једнаке $p(S,l)=\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SN}=-SA\cdot SN$ и $p(S_a,l)=\overrightarrow{S_aA}\cdot\overrightarrow{S_aN}=S_aA\cdot S_aN$. Остаје још да се израчунају $SA\cdot SN$ и $S_aA\cdot S_aN$.

Уочимо подножја нормала из тачака S, S_a на правој AC, означимо их редом са Q, Q_a и уочимо тачку M из Великог задатка. Имамо да је $\measuredangle SAQ=\measuredangle S_aAQ_a=\measuredangle NAC=\measuredangle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\measuredangle SQA$, $\measuredangle S_aQ_aA$ и $\measuredangle NCM$ прави ($\measuredangle NCM$ је периферијски над пречником NM), па је $\measuredangle SQA=\measuredangle S_aQ_aA=\measuredangle NCM$. Следи да је $\triangle ASQ\sim\triangle AS_aQ_a\sim\triangle MNC$, па је $SA:NM=SQ:NC$ и $S_aA:NM=S_aQ_a:NC$. Множењем обеју једнакости са NM и NC добијамо да је $SA\cdot NC=NM\cdot SQ$ и $S_aA\cdot NC=NM\cdot S_aQ_a$. Како је $NM=2r$, $SQ=\rho$, $S_aQ_a=\rho_a$ и $NC=SN=S_aN$ (Велики задатак, став **6)**), следи да је $SA\cdot SN=2r\rho$ и $S_aA\cdot S_aN=2r\rho_a$.

Дакле, $OS^2-r^2=-2r\rho$ и $OS_a^2-r^2=2r\rho_a$, па је $OS^2=r^2-2r\rho$ и $OS_a^2=r^2+2r\rho_a$, што је и требало доказати.

16. Права одређена висином AD троугла ABC представља радикалну осу кругова којима су пречници тежишне линије BB_1 и CC_1 тог троугла.

Решење:



Нека су O_1, O_2 редом средишта тежишних дужи BB_1, CC_1. Довољно је доказати да је $AD \perp O_1O_2$ и да тачка A има једнаке потенције у односу на кругове $k_1(O_1, O_1B), k_2(O_2, O_2C)$. Тачке B_1, C_1 су редом средишта страница AC, AB, па је B_1C_1 средња линија троугла $\triangle ABC$, што значи да је $B_1C_1 \parallel BC$. Према томе, BCC_1B_1 је неконвексан трапез, па је O_1O_2 његова средња линија, што значи да је $O_1O_2 \parallel BC$. С друге стране, важи $AD \perp BC$, па следи да је $AD \perp O_1O_2$.

Ако је угао $\measuredangle BAC$ прав, онда тачка A припада круговима k_1, k_2, јер је $\measuredangle BAC = \measuredangle BAB_1 = \measuredangle C_1AC$, па су то онда периферијски углови над пречницима BB_1, CC_1 тих кругова. У том случају су потенције тачке A у односу на кругове k_1, k_2 нула, па су једнаке. Нека угао $\measuredangle BAC$ није прав. Означимо са B_2 другу пресечну тачку круга k_1 и праве AB и са C_2 другу пресечну тачку круга k_2 и праве AC. Угао $\measuredangle BB_2B_1$ је периферијски над пречником BB_1 круга k_1, а угао $\measuredangle CC_2C_1$ је периферијски над пречником CC_1 круга k_2, па су то прави углови. Следи да су и углови $\measuredangle AB_2B_1, \measuredangle AC_2C_1$ прави. Дакле, троуглови $\triangle AB_2B_1, \triangle AC_2C_1$ имају два пара подударних углова (углови код темена A се поклапају и $\measuredangle AB_2B_1 = \measuredangle AC_2C_1 = 90°$), па су слични. Према томе, добијамо да је $AB_2 : AC_2 = AB_1 : AC_1$. Тачке B_1, C_1 су средишта страница AC, AB, тј. важи $AB_1 = \frac{AC}{2}, AC_1 = \frac{AB}{2}$, па је $AB_1 : AC_1 = \frac{AC}{2} : \frac{AB}{2} = AC : AB$, што значи да је $AB_2 : AC_2 = AC : AB$, тј. $AB_2 \cdot AB = AC_2 \cdot AC$. Ако је угао $\measuredangle BAC$ оштар, онда је $p(A, k_1) = AB_2 \cdot AB$ и $p(A, k_2) = AC_2 \cdot AC$, па су потенције једнаке. Ако је овај угао туп, онда је $p(A, k_1) = -AB_2 \cdot AB$ и $p(A, k_2) = -AC_2 \cdot AC$, па су и у овом случају потенције једнаке. Према томе, права AD је радикална оса кругова k_1, k_2.

3 Конструктивни задаци

У конструктивним задацима се тражи да лењиром и шестаром конструишемо фигуру у равни која испуњава одређена својства. Наведимо основне конструкције које можемо извршити лењиром и шестаром.
Лењир: Лењиром можемо конструисати праву која садржи две дате разне тачке, затим полуправу која садржи две дате разне тачке тако да једна од њих буде њено теме као и дуж чија су темена две дате разне тачке.
Шестар: Шестаром можемо конструисати круг чији је центар дата тачка и полупречник дата дуж, као и било који лук тог круга.

Овај списак конструкција је веома сиромашан. Уколико бисмо сваку сложену конструкцију морали да сводимо на основне, решења задатака би се непотребно компликовала, па зато проширујемо списак основних конструкција списком елементарних конструкција, које ћемо сматрати познатим и нећемо их сводити на основне:
− конструкција дужи подударне датој дужи;
− конструкција угла подударног датом углу;
− конструкција медијатрисе дужи;
− проналажење средишта дужи;
− конструкција бисектрисе угла;
− конструкција правог угла и нормале из тачке на правој;
− конструкција паралелних правих (полуправих, дужи);
− конструкција тангенте датог круга из дате тачке;
− конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дата дуж види под датим углом;
− подела дате дужи на n подударних дужи, где је $n \in \mathbb{N}$ произвољан природан број;
− конструкција троугла коме су:

• странице подударне датим дужима;

• две странице и њима захваћени угао подударни датим дужима и датом углу;

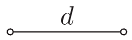
• једна страница и на њој налегли углови подударни датој дужи и датим угловима;

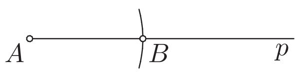
• две странице и угао наспрам једне од њих подударни датим дужима и датом углу, при чему је познато да ли је угао наспрам друге странице оштар, прав или туп;

• једна страница, угао наспрам ње и један од углова налеглих на њој подударни датој дужи и датим угловима.

Следе детаљни описи сваке од елементарних конструкција.

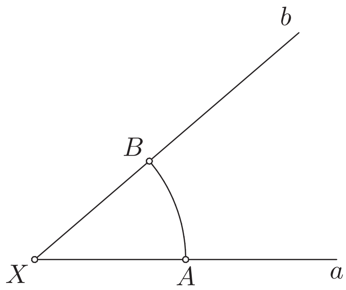
Конструкција дужи подударне датој дужи

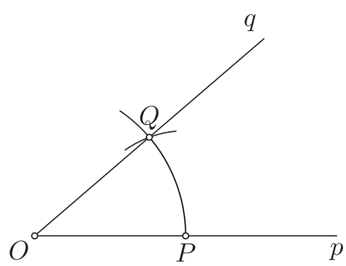




Означимо са A произвољну тачку и конструишимо произвољну полуправу Ap чије је теме тачка A. Конструишимо кружни лук с центром у тачки A чији је полупречник дуж d. У пресеку тог лука и полуправе Ap означимо тачку B и дуж AB је подударна дужи d.

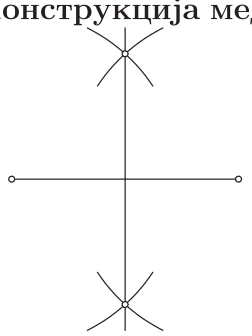
Конструкција угла подударног датом углу





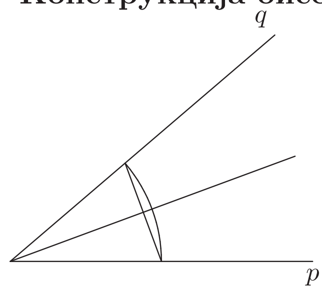
Означимо са O произвољну тачку и конструишимо произвољну полуправу Op чије је теме тачка O. Конструишимо лук l с центром у тачки O произвољног полупречника и означимо са P пресечну тачку тог лука и полуправе Op. На датом углу $\measuredangle aXb$ конструишимо лук с центром у X полупречника OP од крака Xa до крака Xb. Пресечне тачке тог лука с крацима Xa, Xb означимо редом са A, B. Конструишимо сада лук с центром у P полупречника AB и у пресеку с луком l означимо тачку Q. Конструишимо полуправу Oq с теменом O која садржи тачку Q и угао $\measuredangle pOq$ је подударан углу $\measuredangle aXb$.

Конструкција медијатрисе дужи; проналажење средишта дужи



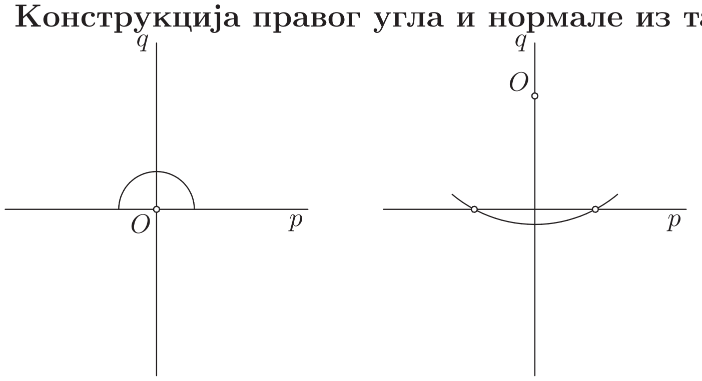
Конструишимо с обе стране праве која садржи дату дуж по један лук с центром у једном темену дужи, а потом и по један лук с центром у другом темену дужи, при чему су полупречници тих лукова подударни и већи су од половине дате дужи (да бисмо имали две пресечне тачке тих лукова). Конструишимо праву која пролази кроз те пресечне тачке и она је медијатриса те дужи. У пресеку дужи и њене медијатрисе налази се средиште те дужи.

Конструкција бисектрисе угла



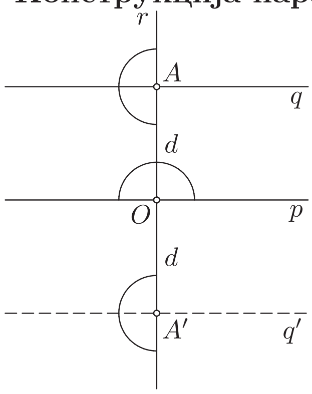
Конструишимо лук с центром у темену угла, произвољног полупречника, од једног до другог крака угла. Конструишимо дуж чија су темена пресечне тачке тог лука и кракова угла, конструишимо полуправу чије је теме теме угла и која припада медијатриси те дужи и она је бисектриса тог угла.

Конструкција правог угла и нормале из тачке на правој



Нека је дата права p и тачка O. Конструишимо лук с центром O довољно великог полупречника тако да пресече праву p у двема тачкама. Конструишимо медијатрису дужи чија су темена пресечне тачке тог лука и праве p и она је нормала на p из тачке O. За конструкцију правог угла довољно је конструисати бисектрису маког опруженог угла.

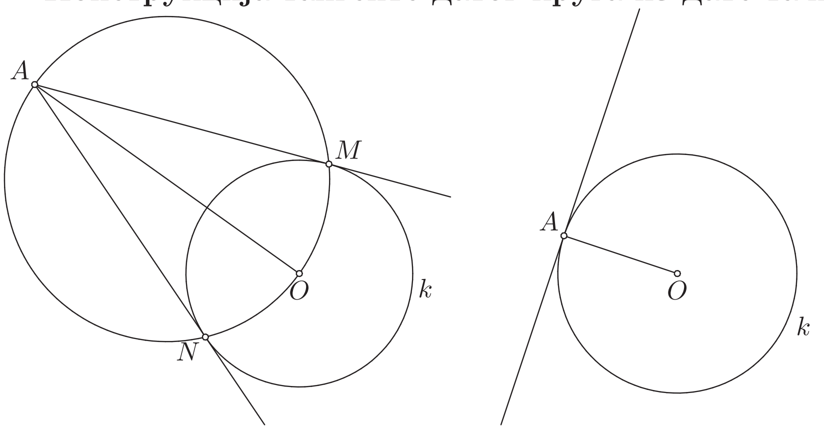
Конструкција паралелних правих



Нека је дата права p. Да бисмо конструисали праву q која је паралелна са p, конструишимо прво нормалу r на правој p у некој произвољној тачки O, а затим конструишимо нормалу q на правој r. Уколико желимо да права q буде на растојању d од праве p (d је дата дуж), конструишимо дуж OA која је подударна дужи d и конструишимо нормалу q на правој r у тачки A. Тада је $q \parallel p$ и налази се на растојању d од ње.

Приметимо да постоје две могућности за тачку A, па постоје и две могућности за праву q. Уколико нам је потребно да се одлучимо за једну од њих, наметнемо додатни услов који жељена права q треба да задовољи и он ће нам дати јединствен избор.

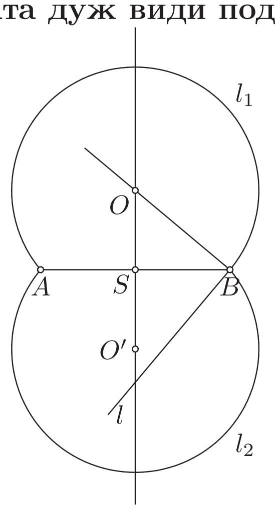
Конструкција тангенте датог круга из дате тачке



Ако је тачка A у спољашњости круга k, означимо с O центар круга k и конструишимо круг над пречником AO (центар му је средиште дужи AO и полупречник му је дуж чија су темена то средиште и тачка A). У пресеку тог круга и круга k означимо тачке M, N. Праве AM, AN су тражене тангенте.

Ако је тачка A на кругу k, онда конструишимо нормалу на полупречнику OA у тачки A.

Конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дата дуж види под датим углом

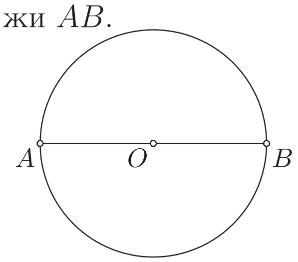


Нека је φ оштар угао, тј. нека је $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Конструишимо полуправу Bl с теменом B такву да је $\measuredangle ABl = \varphi$ и конструишимо нормалу n на полуправој Bl у тачки B. Конструишимо симетралу дужи AB и нека је њен пресек с правом n тачка O. Конструишимо лук l_1 с центром O од тачке A до тачке B такав да важи $l_1, O \underset{\cdot\cdot}{-} AB$. Нека је S средиште дужи AB. Конструишимо дуж SO' подударну дужи SO такву да важи $O, O' \div S$ и конструишимо лук l_2 с центром O' од тачке A до тачке B

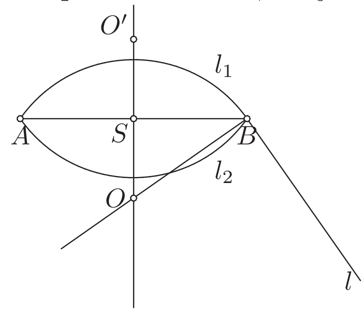
такав да важи $l_2, O' \ddot{-} AB$.

Унија лукова l_1 и l_2 јесте тражено ГМТ, јер је полуправа Bl нормална на полупречнику OB круга који садржи лук l_1, па је она тангента и с тетивом AB заклапа угао φ. За произвољну тачку X с лука l_1 угао $\measuredangle AXB$ периферијски над луком $\widehat{AB}$ (који није лук l_1) и подударан је углу између тетиве AB и тангенте Bl, односно углу φ, а онда због симетрије исто важи и за лук l_2.

Напоменимо да тачка O' није пресек полуправе Bl и медијатрисе дужи AB.

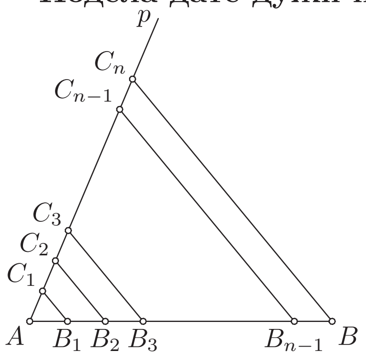


Нека је сада φ прав угао, тј. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Конструишимо круг l над пречником AB и то је тражено ГМТ (за свако $X \in l$ угао $\measuredangle AXB$ је периферијски над пречником AB, па је прав, тј. подударан је углу φ).



Коначно, ако је φ туп угао, тј. $\varphi > \frac{\pi}{2}$, конструкција иде слично као у првом случају (када је φ оштар), с тим што уместо услова $l_1, O \ddot{-} AB$ и $l_2, O' \ddot{-} AB$ имамо услове $l_1, O \div AB$ и $l_2, O' \div AB$.

Подела дате дужи на n подударних дужи

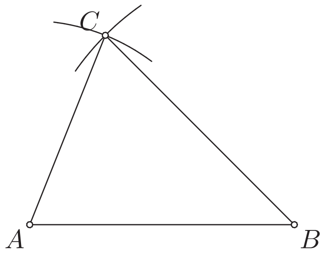


Нека је AB дата дуж. Конструишимо произвољну полуправу Ap различиту од полуправе AB такву да угао $\measuredangle BAp$ није опружен. Нека је C_1 произвољна тачка на полуправој Ap различита од тачке A и нека су $C_2, C_3, \ldots, C_n$ тачке на полуправој Ap такве да је $\mathcal{B}(A, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ и $AC_1 \cong C_1C_2 \cong C_2C_3 \cong \ldots \cong C_{n-1}C_n$. Конструишимо праву C_nB и затим конструишимо праве које садрже редом тачке $C_{n-1}, \ldots, C_2, C_1$ које су паралелне са правом C_nB. Њихове пресеке са дужи AB означимо редом са $B_{n-1}, \ldots, B_2, B_1$. Тада су на основу Талесове теореме (и њених последица) дужи $AB_1, B_1B_2, \ldots, B_{n-1}B$ међусобно подударне.

Елементарне конструкције троуглова

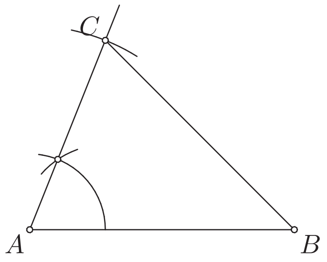
Приметимо да су увек дати они елементи троугла који се јављају у Ставовима о подударности троуглова. Разлог је што се Ставови користе да се докаже јединственост решења, односно да ако конструишемо два таква троугла (којима су одговарајући елементи дате дужи, односно дати углови), они морају бити међусобно подударни.

Конструкција троугла коме су дате странице a, b, c



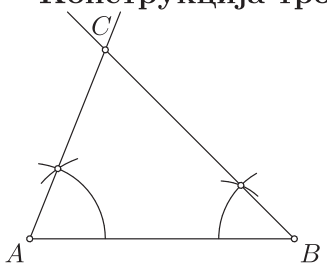
Нека су дате дужи a, b, c. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишимо лук с центром A полупречника b и лук с центром B полупречника a. У пресеку тих лукова означимо тачку C и добили смо троугао $\triangle ABC$.

Конструкција троугла коме су дати странице b, c и угао α



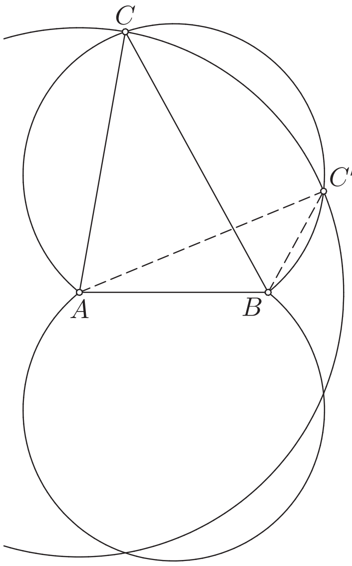
Нека су дати угао α и дужи b, c. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишемо полуправу Ap такву да је $\measuredangle BAp = \alpha$. Конструишимо лук с центром A полупречника b, у пресеку с полуправом Ap означимо тачку C и добили смо троугао $\triangle ABC$.

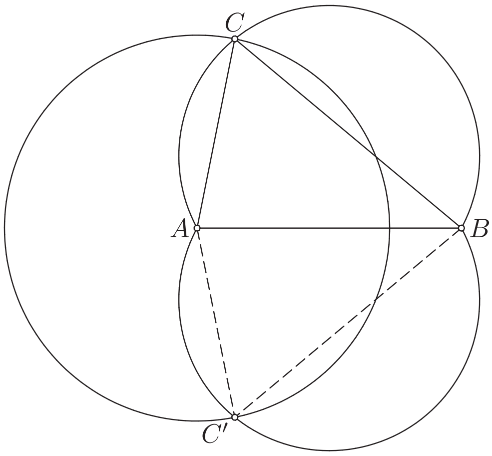
Конструкција троугла коме су дати страница c и углови α, β



Нека су дати дуж c и углови α, β. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишимо полуправу Ap такву да је $\measuredangle BAp = \alpha$ и полуправу Bq која је с исте стране праве AB с које је и полуправа Ap и за коју важи $\measuredangle ABq = \beta$. У пресеку тих полуправих означимо тачку C и добили смо троугао $\triangle ABC$.

Конструкција троугла коме су дати странице b, c и угао γ

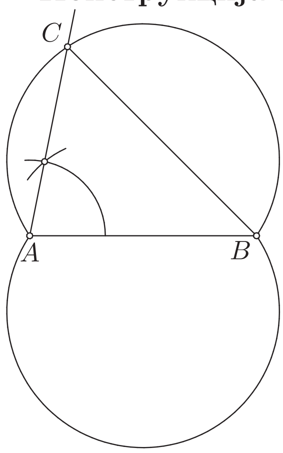




Нека су дати угао γ и дужи b, c и нека је познато да ли је угао β оштар, прав или туп. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишимо ГМТ l из којих се дуж AB види под углом γ. Конструишимо круг $k(A, b)$. У пресеку круга k и ГМТ l означимо са C ону тачку за коју је угао $\measuredangle ABC$ оштар ако је β оштар, прав ако је β прав, односно туп ако је β туп. Тако добијамо троугао $\triangle ABC$.

Ако није познато да ли је угао β оштар, прав или туп, онда могу постојати два неподударна троугла $\triangle ABC$ таквих да је $AB = c$, $\measuredangle BAC = \alpha$ и $AC = b$. Ако је $AC \leq AB$, добијена решења биће међусобно подударна (тада се каже да је решење јединствено до на подударност). Ако је $AC > AB$, број међусобно неподударних решења биће једнак броју пресечних тачака крупа $k(A, b)$ и једног од лукова ГМТ l (дакле, постојаће два неподударна решења ако се они секу у двема разним тачкама, постојаће јединствено решење до на подударност ако се они додирују, тј. секу у једној тачки, а неће бити решења ако они немају пресечних тачака).

Конструкција троугла коме су дати страница c и углови α, γ



Нека су дати дуж c и углови α, γ. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишимо ГМТ l из којих се дуж AB види под углом γ. Конструишимо полуправу Ap такву да је $\measuredangle BAp = \alpha$. У њеном пресеку са ГМТ l означимо са C тачку која није тачка A и добијамо троугао $\triangle ABC$.

Постоји још елементарних конструкција. Неке од њих ћемо навести у решењима задатака. Сада ћемо изучити етапе у решавању задатака из конструкција. Те етапе су Анализа, Конструкција, Доказ и Дискусија.

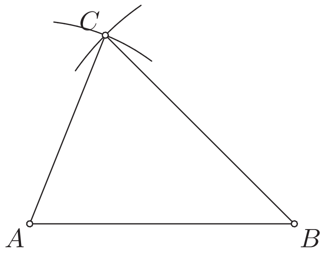
Анализа је етапа конструктивног задатка у којој се претпостави да имамо решен задатак, тј. да имамо конструисану фигуру која испуњава услове задатка P. Затим тражимо нове услове Q које та фигура задовољава помоћу којих се она може лакше конструисати. Услове Q изводимо из услова P, па дакле доказујемо и $P \Rightarrow Q$.

Конструкција је етапа у којој применом коначно много основних и елементарних конструкција описујемо како треба конструисати фигуру која задовољава услове Q које смо извели из задатих услова P током Анализе.

С обзиром на то да је наш задатак био да конструишемо фигуру која задовољава услове P, а ми смо у етапи Конструкција конструисали фигуру која задовољава услове Q, сада морамо доказати да тако конструисана фигура заиста задовољава почетне услове задатка, тј. услове P. Према томе, у етапи **Доказ** доказујемо $Q \Rightarrow P$. Све што смо навели у етапи Конструкција сматрамо да важи „по конструкцији” (ПК).

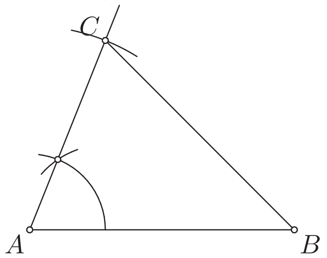
Коначно, у етапи **Дискусија** испитујемо колико постоји фигура које задовољавају услове задатка у зависности од њих. Испитајмо под којим је условима могуће извршити елементарне конструкције троуглова.

Троугао коме су дате странице a, b, c



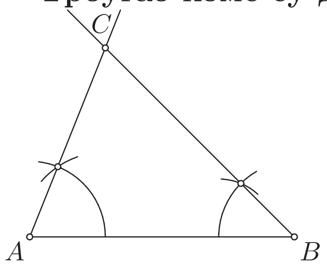
Ако су дате странице a, b, c, неопходно је да се лукови $l_1(A, b)$ и $l_2(B, a)$ секу у тачки ван дужи AB, што се дешава ако се одговарајући кругови секу у двема тачкама. Услов за ово је да је $|a - b| < AB < a + b$, што је познатије као неједнакост троугла за његове странице. Дакле, ако је $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, постоји јединствено решење до на подударност, а у супротном нема решења.

Троугао коме су дати странице b, c и угао α



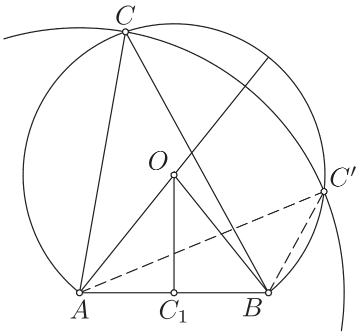
Ако су дати угао α и странице b, c, конструкција троугла је увек могућа и решење је јединствено до на подударност.

Троугао коме су дати страница c и углови α, β



Ако су дати дуж c и углови α, β, неопходно је да се краци Ap, Bq углова $\measuredangle BAp, \measuredangle ABq$ секу. Ово је тачно ако и само ако је $\alpha + \beta < \pi$, јер ако је $\alpha + \beta = \pi$, ови краци припадају паралелним правима, а ако је $\alpha + \beta > \pi$, праве које садрже ове краке се секу са супротне стране праве AB од оне где се ови краци налазе. Дакле, ако је $\alpha + \beta < \pi$, постоји јединствено решење до на подударност, а у супротном нема решења.

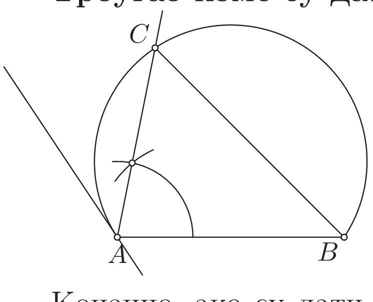
Троугао коме су дати странице b, c и угао γ



Ако су дате странице b, c и угао γ, при чему је познато да ли је угао β оштар, прав или туп, неопходно је да ГМТ l из којих се дуж AB види под углом γ и круг $k(A, b)$ имају заједничких тачака. Ово је тачно ако и само ако полупречник круга k није већи од пречника кругова који одређују ГМТ l. Ради једноставости, посматрајмо све само у једној од двеју полуравни с рубом AB. У њој се налази један од два лука који чине l.

Нека је O центар круга коме припада лук l и нека је C_1 средиште странице AB. Угао $\measuredangle AOB$ је централни угао над луком $\widehat{AB}$ (супротним од лука l), па је двапут већи од периферијског угла над истим луком. Како је l ГМТ из којих се дуж AB види под углом γ, следи да је $\measuredangle AOB = 2\gamma$. Троугао $\triangle ABO$ је једнакокрак, па је OC_1 симетрала угла $\measuredangle AOB$, што значи да је $\measuredangle AOC_1 = \frac{1}{2}\measuredangle AOB = \gamma$. Како је $\sin\measuredangle AOC_1 = \frac{AC_1}{AO}$, следи да је $\sin\gamma = \frac{\frac{1}{2}AB}{AO}$, па је $\sin\gamma = \frac{c}{2AO}$. Дакле, $2AO = \frac{c}{\sin\gamma}$ је пречник круга који садржи лук l, па следи да је услов постојања решења $b \leq \frac{c}{\sin\gamma}$.

Троугао коме су дати страница c и углови α, γ



Коначно, ако су дати дуж c и углови α, γ, услов постојања решења јесте да је угао $\measuredangle BAC$ мањи од угла који тангента t на кругу који садржи лук ГМТ l гради са тетивом AB (посматрамо, поново, све у једној од двеју полуравни с рубом AB). Угао који тангента t гради с тетивом AB суплементан је периферијском углу на ГМТ l, тј. једнак је $\pi - \gamma$. Дакле, мора бити $\alpha < \pi - \gamma$, односно $\alpha + \gamma < \pi$. У том случају постоји јединствено решење до на подударност.

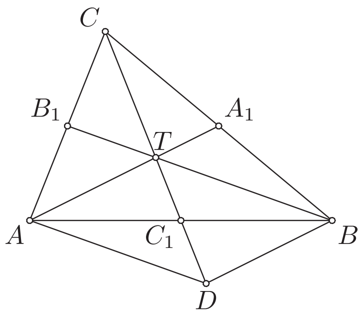
Напомена 8. Као што се може приметити, у дискусији под којим су условима могуће елементарне конструкције троуглова коришћене су тригонометријске функције. Надаље ће етапа Дискусија у задацима из конструкија бити једино место где сме да се користи тригонометрија, јер нам једино тригонометријске функције дају везу између дужи и углова која нам је потребна да бисмо одредили постојање и број неподударних решења. Дакле, у Анализи, Конструкцији и Доказу, као и у било ком задатку који није из конструкција, тригонометрија **не сме** да се користи.

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи:

1) t_a, t_b, t_c;	**7)** $\beta - \gamma, l_a, \rho$;
2) β, γ, p;	**8)** $\alpha, b - c, \rho_a$;
3) $\alpha, a, b + c$;	**9)** a, ρ_b, ρ_c;
4) $\beta, h_c, b \pm c$;	**10)** α, ρ, ρ_a;
5) $t_a, h_b, b \pm c$;	**11)** $b - c, h_a, \rho$.
6) $\beta - \gamma, b, c$;	

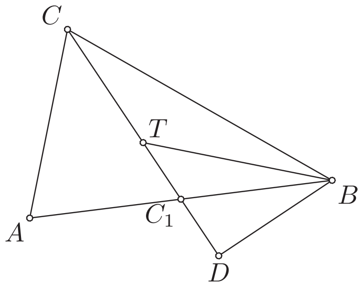
Решење: 1) t_a, t_b, t_c

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који задовољава услове задатка. Нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB. Тада су тежишне дужи AA_1, BB_1, CC_1 редом подударне датим дужима t_a, t_b, t_c.



Нека је T пресек тежишних дужи AA_1, BB_1, CC_1, тј. тежиште троугла $\triangle ABC$ и нека је тачка D симетрична тачки T у односу на тачку C_1. Тачка C_1 је заједничко средиште дужи TD и AB, па је четвороугао $ADBT$ паралелограм. Следи да је $AD \parallel BT$ и $AD = BT = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}t_b$, као и $BD \parallel AT$ и $BD = AT = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}t_a$. Takође, имамо да важи $TD = TC_1 + C_1D = 2TC_1 = 2 \cdot \frac{1}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c$. У троуглу $\triangle TDB$ имамо да је $TD = \frac{2}{3}t_c$, $DB = \frac{2}{3}t_a$ и $BT = \frac{2}{3}t_b$, па тај троугао умемо да конструишемо. Тачка C_1 је средиште дужи TD и AB, па је тачка A симетрична тачки B у односу на тачку C_1. Такође, како је $CT = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c = TD$, следи да је тачка T средиште дужи CD, као и да је тачка C симетрична тачки D у односу на тачку T.

Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle TDB$ такав да је $TD = \frac{2}{3}t_c$, $DB = \frac{2}{3}t_a$, $BT = \frac{2}{3}t_b$. Означимо са C_1 средиште дужи TD, са A тачку симетричну тачки B у односу на тачку C_1 и са C тачку симетричну тачки D у односу на тачку T.



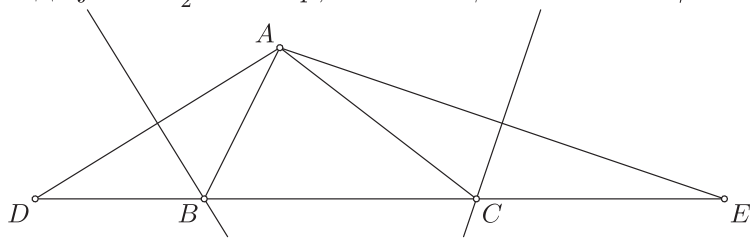
Доказ: Докажимо да овако конструисани троугао $\triangle ABC$ задовољава услове задатка. По конструкцији је C_1 средиште дужи AB. Означимо са A_1, B_1 редом средишта страница BC, CA. Треба доказати да су тежишне дужи AA_1, BB_1, CC_1 редом подударне дужима t_a, t_b, t_c. ПК је C_1 средиште дужи TD, па је $\mathcal{B}(T, C_1, D)$ и $TC_1 = C_1D$, а T је ПК средиште дужи CD, па следи $\mathcal{B}(C, T, D)$ и $CT = TD = TC_1 + C_1D = 2TC_1$. Дакле, важи распоред $\mathcal{B}(C, T, C_1, D)$ и $CT : TC_1 = 2TC_1 : TC_1 = 2 : 1$, па је T тежиште троугла $\triangle ABC$. Следи да је $AT = \frac{2}{3}AA_1$, $BT = \frac{2}{3}BB_1$ и $CT = \frac{2}{3}CC_1$. ПК је $BT = \frac{2}{3}t_b$ и $CT = TD = \frac{2}{3}t_c$, па следи да је $\frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}t_b$ и $\frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c$. Дакле, важи $BB_1 = t_b$ и $CC_1 = t_c$. Остаје још да докажемо да је $AA_1 = t_a$. Како је ПК C_1 заједничко средиште дужи AB и TD, следи да је четвороугао $ADBT$ паралелограм, па је $AT = BD$. ПК је $BD = \frac{2}{3}t_a$, а како је $AT = \frac{2}{3}AA_1$, следи да је $\frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}t_a$, тј. $AA_1 = t_a$.

Дискусија: Ако је $\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b \leq \frac{2}{3}t_c$ или $\frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c \leq \frac{2}{3}t_a$ или $\frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a \leq \frac{2}{3}t_b$, односно $t_a + t_b \leq t_c$ или $t_b + t_c \leq t_a$ или $t_c + t_a \leq t_b$, онда не постоји троугао $\triangle TDB$, па самим тим не постоји ни троугао $\triangle ABC$. Дакле, у овом случају нема решења.

Ако је $t_a + t_b > t_c$, $t_b + t_c > t_a$ и $t_c + t_a > t_b$, онда је троугао $\triangle TDB$ одређен јединствено до на подударност (каква год два различита троугла $\triangle TDB$ конструисали, они ће бити подударни на основу става ССС). Како троугао $\triangle TDB$ једнозначно одређује троугао $\triangle ABC$ (и обратно), следи да је и троугао $\triangle ABC$ одређен јединствено до на подударност. Према томе, у овом случају постоји јединствено решење до на подударност.

2) β, γ, p

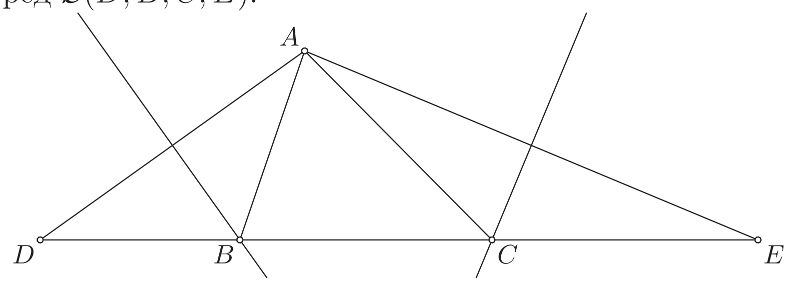
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\frac{BC+CA+AB}{2} = p$, $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle BCA = \gamma$.



Нека су D, E тачке на правој BC такве да је $\mathcal{B}(D,B,C,E)$, $DB = AB$ и $CE = AC$. Тада је $DE = AB + BC + CA = 2p$. Троугао $\triangle ABD$ је једнакокраки, јер је $AB = DB$, па следи да је $\measuredangle ADB = \measuredangle DAB = \varphi$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао тог троугла, па је он једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle ADB$ и $\measuredangle DAB$. Дакле, $\beta = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па следи да је $\varphi = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle ADB = \frac{\beta}{2}$. Слично се доказује да је $\measuredangle AEC = \frac{\gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle ADE$ важи да је $DE = 2p$, $\measuredangle ADE = \measuredangle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle AED = \measuredangle AEC = \frac{\gamma}{2}$, па тај троугао умемо да конструишемо. Како је $DB = AB$, следи да тачка B припада медијатриси дужи DA. Слично, из $CE = AC$ следи да тачка C припада медијатриси дужи AE.

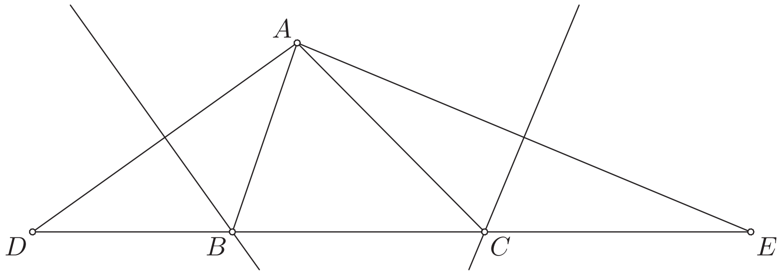
Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle ADE$ такав да је $DE = 2p$, $\measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$, $\measuredangle AED = \frac{\gamma}{2}$. Конструишимо медијатрисе дужи AD и AE и означимо редом њихове пресеке с дужи DE са B, C тако да важи распоред $\mathcal{B}(D,B,C,E)$.



Доказ: Треба доказати да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$, да је $\measuredangle ABC = \beta$ и да је $\measuredangle BCA = \gamma$. ПК је $\mathcal{B}(D,B,C,E)$, па је $DE = DB + BC + CE$. Тачка B припада медијатриси дужи AD, па је $DB = AB$, а тачка C припада медијатриси дужи AE, па је $EC = AC$. Следи да је $DE = AB+BC+AC$. Такође, ПК је $DE = 2p$, па следи да је $AB + BC + AC = 2p$, односно да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$.

Из $DB = AB$ следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па имамо да је $\measuredangle DAB = \measuredangle ADB$. ПК важи да је $\mathcal{B}(D,B,C,E)$ и $\measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$, па је

$\measuredangle ADB = \measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle ADB$. Дакле, $\measuredangle ABC = \measuredangle DAB + \measuredangle ADB = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$. Слично се доказује и да је $\measuredangle BCA = \gamma$.



Дискусија: Ако је $\beta + \gamma \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме су то унутрашњи углови, па задатак нема решења.

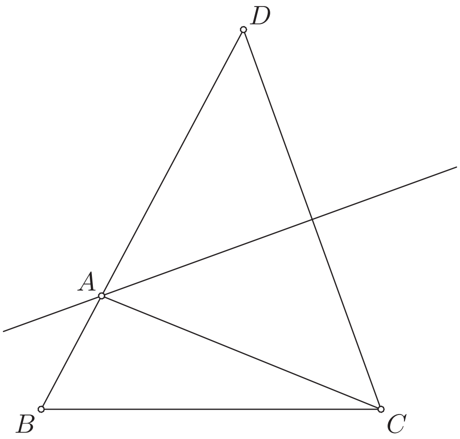
Нека је $\beta+\gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2} < \pi$, па постоји јединствен троугао $\triangle ADE$ до на подударност. Да ли медијатрисе страница AD и AE секу страницу DE редом у тачкама B, C тако да важи $\mathcal{B}(D, B, C, E)$? Угао $\measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AD, која је нормална на краку DA тога угла, сече његов други крак. Дакле, тачка B постоји и важи $B, E \doteqdot D$. Нама је потребно да важи распоред $\mathcal{B}(D, B, E)$, а то је тачно ако је $\measuredangle DAB < \measuredangle DAE$. Како је $\measuredangle DAB = \measuredangle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle DAE = \pi - \measuredangle ADE - \measuredangle AED = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, следи да важи $\mathcal{B}(D, B, E)$ ако испуњено $\frac{\beta}{2} < \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, односно $\beta + \frac{\gamma}{2} < \pi$, што је испуњено, јер је $\beta + \gamma < \pi$. Треба још проверити да ли медијатриса странице AE сече EB у тачки C таквој да важи $\mathcal{B}(B, C, E)$, јер ће онда важити распоред $\mathcal{B}(D, B, C, E)$.

Угао $\measuredangle AEB = \measuredangle AED = \frac{\gamma}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AE, која је нормална на краку EA тога угла, сече његов други крак EB у тачки C таквој да је $B, C \doteqdot E$. При томе важи распоред $\mathcal{B}(E, C, B)$ ако је $\measuredangle EAC < \measuredangle EAB$. Како је $\measuredangle EAC = \measuredangle AEC = \frac{\gamma}{2}$ и $\measuredangle EAB = \pi - \measuredangle ABE - \measuredangle AEB = \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, следи да је $\mathcal{B}(E, C, B)$ испуњен ако је $\frac{\gamma}{2} < \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, односно ако је $\beta + \gamma < \pi$.

Дакле, ако је $\beta + \gamma < \pi$, постоји јединствено решење до на подударност.

3) $\alpha, a, b+c$

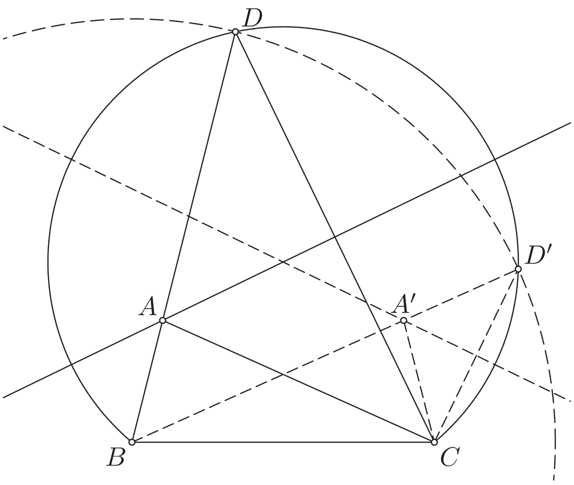
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\measuredangle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка таква да важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$. Тада је $BD = BA+AD = BA+AC = b+c$. Takође, троугао $\triangle ACD$ је једнакокраки, па је $\measuredangle ADC = \measuredangle ACD = \varphi$. Угао $\measuredangle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle ACD$. Следи да је $\alpha = \varphi + \varphi$, тј. $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, $\measuredangle ADC = \frac{\alpha}{2}$.

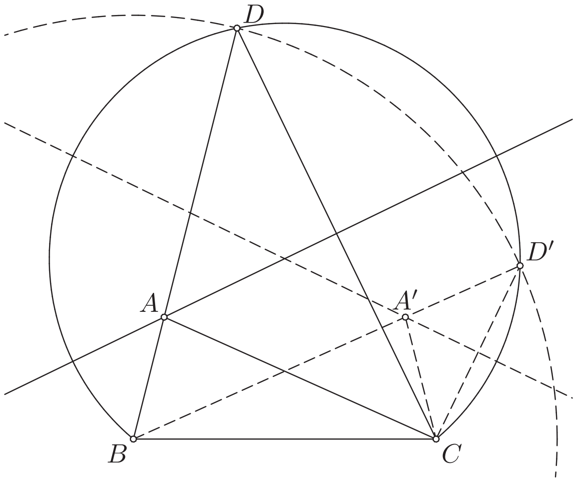
У троуглу $\triangle BCD$ је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\measuredangle BDC = \measuredangle ADC = \frac{\alpha}{2}$, па тај троугао умемо да конструишемо. Из $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$ следи да тачка A припада пресеку медијатрисе странице CD и странице BD.

Конструкција:



Конструишимо троугао $\triangle BCD$ такав да је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Конструишимо медијатрису странице CD и означимо са A њен пресек са страницом BD (дакле, да важи $\mathcal{B}(D, A, B)$).

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$. ПК је $BC = a$. Тачка A припада страници BD, па важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $BD = BA + AD$. С друге стране, тачка A припада медијатриси странице CD, па је $AD = AC$. Дакле, $BD = BA + AC$, а како је ПК $BD = b + c$, следи да је $BA + AC = b + c$. Троугао $\triangle ACD$ је једнакокрак, па је $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC$. Како је ПК $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$, следи да је $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Угао $\measuredangle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle ACD$ и $\measuredangle ADC$. Следи да је $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD + \measuredangle ADC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.



Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Ако је $b + c \leq a$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је $b + c$ збир двеју страница а a трећа страница (због неједнакости троугла), па задатак нема решења.

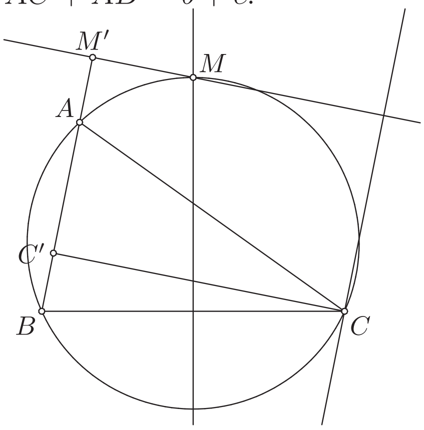
Нека је $\alpha < \pi$ и $b + c > a$. Да би постојао троугао $\triangle BCD$, потребно је да буде испуњено $BD \leq \frac{BC}{\sin \measuredangle BDC}$, односно $b + c \leq \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Нама није познато да ли је угао $\measuredangle BCD$ оштар, прав или туп. Како је $BD = b + c > a = BC$, следи да постоје два неподударна троугла $\triangle BCD$ ако је $b + c < \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, односно да је троугао $\triangle BCD$ јединствен ако је $b + c = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

Треба још проверити да ли медијатриса странице CD сече страницу BD, тј. да ли важи $\mathcal{B}(D, A, B)$. С обзиром на то да је $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, медијатриса дужи CD сигурно сече полуправу DB у некој тачки A (права нормална на једном краку оштрог угла сече други крак). Троугао $\triangle CDA$ је једнакокраки ($AC = AD$), па је $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \measuredangle BDC$. Тачка A припада дужи BD ако и само ако је $\measuredangle DCA < \measuredangle DCB$, односно ако и само ако је $\measuredangle BDC < \measuredangle DCB$. На основу неједнакости троугла, ово важи ако и само ако је $BC < DB$, тј. $a < b+c$, а ово смо претпоставили да важи. Дакле, за сваки од неподударних троуглова $\triangle BCD$ постоји тачка A, па постоје два неподударна троугла $\triangle ABC$.

Дакле, ако је $\alpha < \pi$, $b + c > a$ и $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > b + c$, постоје два неподударна решења. Ако је $\alpha < \pi$, $b+c > a$ и $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = b+c$, постоји јединствено решење до на подударност. У супротном нема решења.

4) а) $\beta, h_c, b + c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Ако је C' подножје висине из темена C, онда је $\measuredangle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC + AB = b + c$.



Нека су M, M' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, M' \doteq BC$ и $MM' \perp AB$. Следи да је $\measuredangle M'BC = \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BM' = \frac{1}{2}(b + c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB, тј. правој BM', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак BC угла $\measuredangle M'BC$. Тачка M припада правој која је нормална на правој BM' у тачки M' и медијатриси дужи BC. Коначно, тачка A припада правој BM' и описаном кругу троугла $\triangle BCM$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка M припада на основу Великог задатка.

Конструкција: Конструишимо дуж $BM' = \frac{1}{2}(b + c)$. Конструишимо угао $\measuredangle M'Bq = \beta$. Конструишимо праву p која је паралелна правој BM', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак Bq угла $\measuredangle M'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C. Конструишимо медијатрису m дужи BC. Конструишимо нормалу n на правој BM' у тачки M'. У пресеку правих m и n означимо са M тачку такву да важи $M, M' \doteq BC$. Конструишимо описани круг l троугла $\triangle BMC$. У пресеку круга l и праве BM' означимо тачку A (различиту од тачке B) такву да важи $A, M' \doteq BC$.

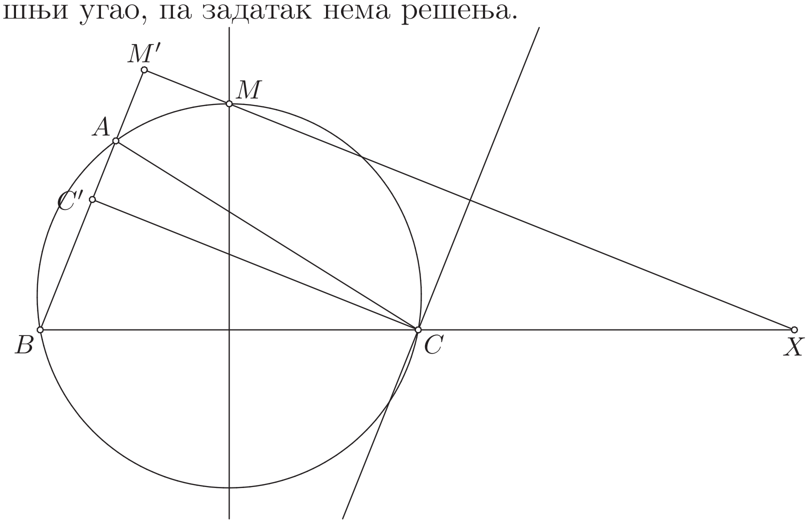
Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC = \beta$, $AC + AB = b + c$ и да је висина из темена C подударна дужи h_c.

ПК је $\measuredangle M'BC = \beta$ и $A, M' \doteq BC$. Следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle M'BC = \beta$.

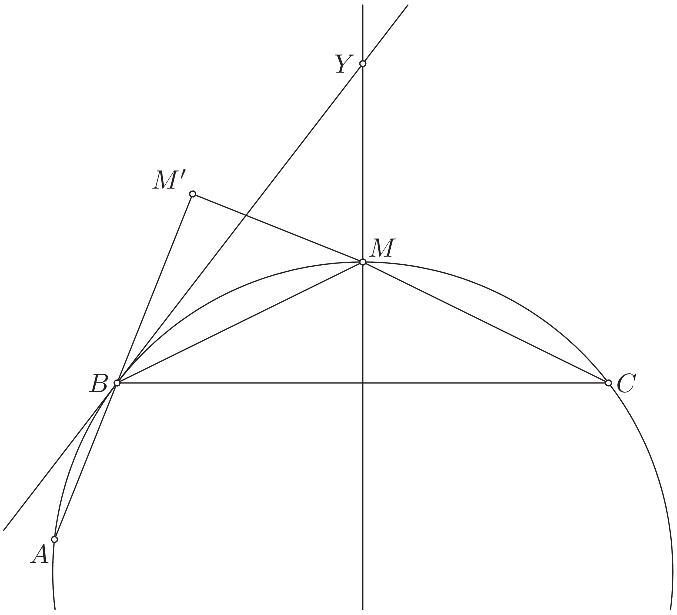
Тачка C припада правој која је паралелна правој BM', тј. правој AB и налази се на растојању h_c од ње. Ако је CC' висина из темена C, тј. ако је C' тачка на правој AB и $CC' \perp AB$, следи да је $CC' = h_c$ (дуж која је нормална на паралелним правима подударна је растојању између њих).

ПК круг l садржи тачке A, B, C, па је то описани круг троугла $\triangle ABC$. ПК тачка M припада медијатриси m странице BC и описаном кругу l троугла $\triangle ABC$. ПК важи $M, M' \doteq BC$ и $A, M' \doteq BC$, па следи да важи $A, M \doteq BC$. Према томе, тачка M је тачка из Великог задатка. Тачка M припада нормали n на правој BM', односно правој AB, у тачки M', па следи да је M' подножје нормале из тачке M на правој AB. Дакле, M' је тачка из Великог задатка. На основу Великог задатка је $BM' = \frac{1}{2}(AC + AB)$, а како је ПК $BM' = \frac{1}{2}(b + c)$, следи да је $\frac{1}{2}(AC + AB) = \frac{1}{2}(b + c)$, тј. да је $AC + AB = b + c$.

Дискусија: Ако је $\beta \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.



Нека је $\beta < \pi$. Ако β није оштар, онда се нормала n на правој BM' у тачки M' и полуправа BC (крак угла $\measuredangle M'BC = \measuredangle M'Bq = \beta$) не секу. Тада је испуњено $M, M' \doteq BC$. Ако је пак β оштар, онда се нормала n и полуправа BC секу у некој тачки X. Услов да важи $M, M' \doteq BC$ је $\frac{1}{2}BC < BX$. Из $\cos\beta = \frac{BM'}{BX}$ добијамо $BX = \frac{BM'}{\cos\beta}$, па услов да важи $M, M' \doteq BC$ гласи $\frac{1}{2}BC < \frac{BM'}{\cos\beta}$. Како је $\sin\beta = \frac{CC'}{BC} = \frac{h_c}{BC}$, следи да је $BC = \frac{h_c}{\sin\beta}$, па добијамо $\frac{h_c}{2\sin\beta} < \frac{b+c}{2\cos\beta}$, тј. $h_c < (b + c)\operatorname{tg}\beta$.

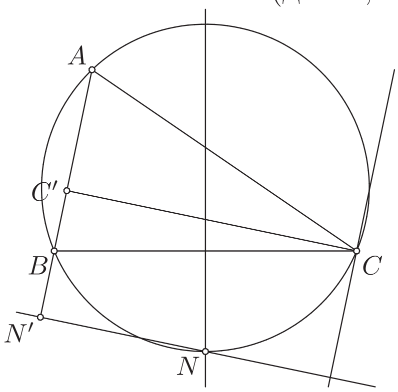


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити да се права BM' и круг l секу у тачкама A, B таквим да је $A, M' \doteq BC$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, M, M' \doteq BC$. Тада је $\measuredangle YBM$ угао између тетиве BM и тангенте t, па је подударан периферијском углу $\measuredangle BCM$ над тетивом BM. Троугао $\triangle BCM$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle MBC$ и $\measuredangle BCM$ подударни. Следи да је $\measuredangle YBM = \measuredangle BCM = \measuredangle MBC$. Услов да важи распоред $A, M' \doteq BC$ је да је угао $\measuredangle MBM'$ мањи од угла $\measuredangle MBY$, тј. од њему подударног угла $\measuredangle MBC$. Како је cos опадајућа функција на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos \measuredangle MBM' > \cos \measuredangle MBC$, тј. $\frac{BM'}{BM} > \frac{\frac{1}{2}BC}{BM}$, односно $BM' > \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b+c) > \frac{1}{2}\frac{h_c}{\sin\beta}$, тј. $h_c < (b+c)\sin\beta$. Овај услов је јачи од постојећег услова $h_c < (b+c)\operatorname{tg}\beta$ за оштре углове β, јер је $\sin\beta < \operatorname{tg}\beta$ за све $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, па је услов $h_c < (b+c)\operatorname{tg}\beta$ за оштре углове β сувишан. Такође, услов $h_c < (b+c)\sin\beta$ мора важити за све $\beta \in (0, \pi)$ да би постојало решење.

Дакле, ако је $\beta < \pi$ и $h_c \geq (b+c)\sin\beta$, нема решења, а ако је $\beta < \pi$ и $h_c < (b+c)\sin\beta$, постоји јединствено решење до на подударност.

б) $\beta, h_c, b - c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је C' подножје висине из темена C. Тада је $\measuredangle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC - AB = b - c$ (дакле, мора бити $AC > AB$).



Нека су N, N' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, N' \div BC$ (због $AB < AC$) и $NN' \perp AB$. Следи да је $\measuredangle N'BC = \pi - \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB, тј. правој BN', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак BC угла $\measuredangle N'BC$. Тачка N припада правој која је нормална на правој BN' у тачки N' и медијатриси дужи BC. Коначно, тачка A припада правој BN' и описаном кругу троугла $\triangle BCN$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка N припада на основу задатка 1.9.

Конструкција: Конструишимо дуж $BN' = \frac{1}{2}(b-c)$. Конструишимо угао $\measuredangle N'Bq = \pi - \beta$. Конструишимо праву p која је паралелна правој BN', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак Bq угла $\measuredangle N'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C. Конструишимо медијатрису m дужи BC. Конструишимо нормалу n на правој BN' у тачки N'. У пресеку правих m и n означимо са N тачку такву да важи $N, N' \doteqdot BC$. Конструишимо описани круг l троугла $\triangle BNC$. У пресеку круга l и праве BN' означимо са A тачку такву да важи $\mathcal{B}(A, B, N')$.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC = \beta$, $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$, као и да је висина из темена C подударна дужи h_c.

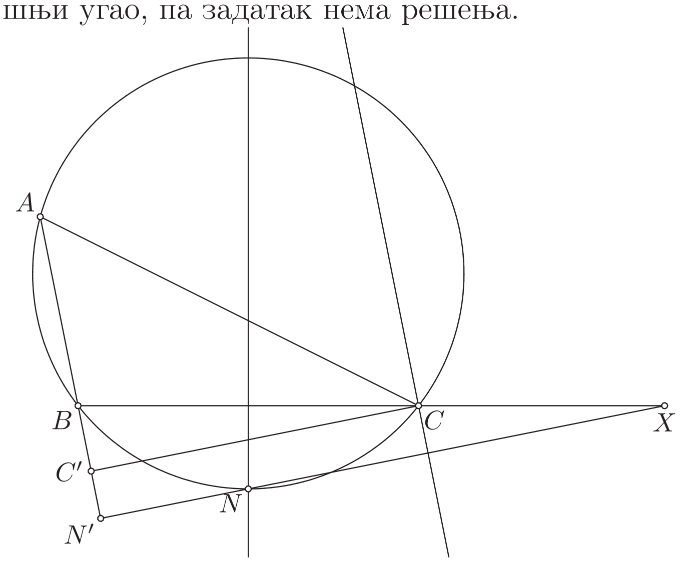
ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$ и $\measuredangle N'BC = \pi - \beta$, па је $\measuredangle ABC = \pi - \measuredangle N'BC = \pi - (\pi - \beta) = \beta$.

Тачка C припада правој која је паралелна правој BN', тј. правој AB и налази се на растојању h_c од ње. Ако је CC' висина из темена C, тј.

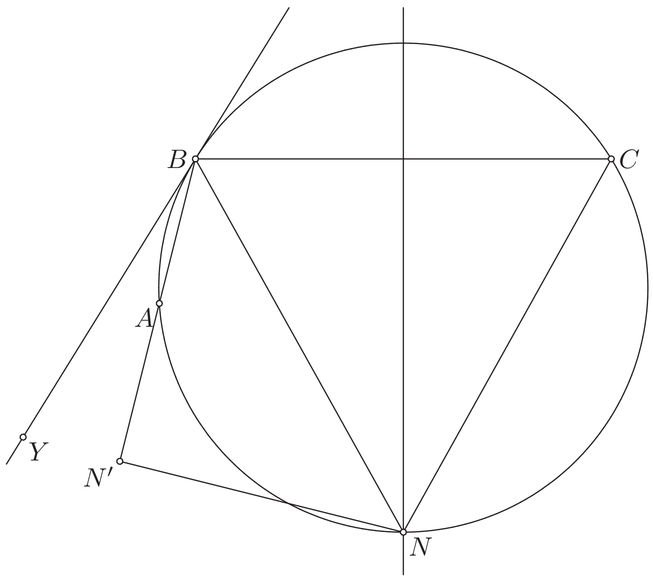
ако је C' тачка на правој AB и $CC' \perp AB$, следи да је $CC' = h_c$ (дуж која је нормална на паралелним правима подударна је растојању између њих).

Круг l садржи тачке A, B, C, па је то описани круг троугла $\triangle ABC$. Тачка N припада медијатриси m странице BC и описаном кругу l троугла $\triangle ABC$. ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$, па следи да важи $A, N' \div BC$, а како ПК важи $N, N' \ddot{-} BC$, следи да важи $A, N \div BC$. Према томе, тачка N је тачка из Великог задатка. Тачка N припада нормали n на правој BN', односно правој AB, у тачки N', па следи да је N' подножје нормале из тачке N на правој AB. Дакле, N' је тачка из Великог задатка. Због $\mathcal{B}(A, B, N')$, следи да је $AN' > AB$, а на основу Великог задатка је $AN' = \frac{1}{2}(AC + AB)$ (ово важи без обзира на то да ли је $AB < AC$ или није), па следи да је $\frac{1}{2}(AC + AB) > AB$, односно $AC + AB > 2AB$, тј. $AC > AB$. Сада основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(AC - AB)$, а како је ПК $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$, следи да је $\frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2}(b - c)$, тј. да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\beta \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.



Нека је $\beta < \pi$. Ако β није туп, онда $\pi - \beta$ није оштар, па се нормала n на правој BN' у тачки N' и полуправа BC (крак угла $\measuredangle N'BC = \measuredangle N'Bq = \pi - \beta$) не секу. Тада је испуњено $N, N' \ddot{-} BC$. Ако је пак β туп, тј. $\pi - \beta$ оштар, онда се нормала n и полуправа BC секу у некој тачки X. Услов да важи $N, N' \ddot{-} BC$ је $\frac{1}{2}BC < BX$. Из $\cos(\pi - \beta) = \frac{BN'}{BX}$ добијамо $BX = \frac{BN'}{\cos(\pi-\beta)}$, па услов да важи $N, N' \ddot{-} BC$ гласи $\frac{1}{2}BC < \frac{BN'}{\cos(\pi-\beta)}$. Како је $\sin(\pi - \beta) = \frac{CC'}{BC}$, следи да је $BC = \frac{CC'}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{h_c}{\sin(\pi-\beta)}$, па добијамо $\frac{h_c}{2\sin(\pi-\beta)} < \frac{b-c}{2\cos(\pi-\beta)}$, тј. $h_c < (b - c)\operatorname{tg}(\pi - \beta)$.

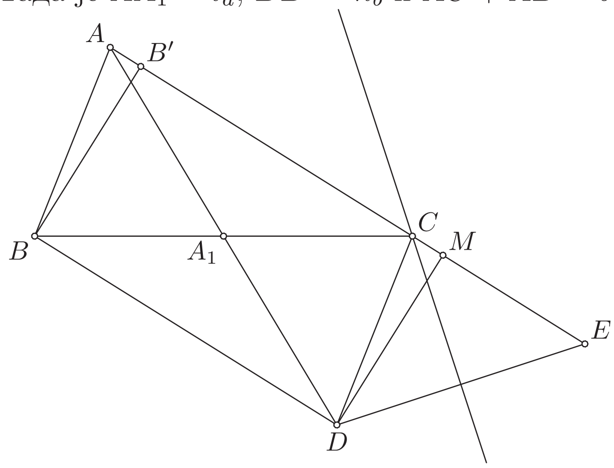


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, N, N' \doteqdot BC$. Тада је $\measuredangle YBN$ угао између тетиве BN и тангенте t, па је подударан периферијском углу $\measuredangle BCN$ над тетивом BN. Троугао $\triangle BCN$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle NBC$ и $\measuredangle BCN$ подударни. Следи да је $\measuredangle YBN = \measuredangle BCN = \measuredangle NBC$. Услов да важи распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$ је да је угао $\measuredangle N'BN$ већи од угла $\measuredangle YBN$, тј. од њему подударног угла $\measuredangle NBC$. Како је cos опадајућа функција на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos\measuredangle N'BN < \cos\measuredangle NBC$, тј. $\frac{BN'}{BN} < \frac{\frac{1}{2}BC}{BN}$, односно $BN' < \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b-c) < \frac{1}{2}\frac{h_c}{\sin\beta}$, тј. $(b-c)\sin\beta < h_c$ (важи $\sin(\pi-\beta) = \sin\beta$).

Према томе, ако је $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ и $(b-c)\sin\beta < h_c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Такође, ако је $\beta > \frac{\pi}{2}$ и $(b-c)\sin\beta < h_c < (b-c)\operatorname{tg}(\pi-\beta)$, задатак има јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

5) а) $t_a, h_b, b+c$

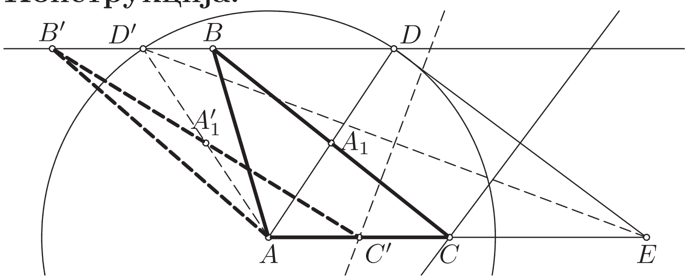
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темена B. Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1. Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1, па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $\mathcal{B}(A, C, E)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC + CE = AC + CD = AC + AB = b + c$, а како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због услова $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADE$ је $AD = 2t_a$ и $AE = b+c$, а висина DM је подударна дужи h_b. То значи да тачка D припада правој која је паралелна правој AE и налази се на растојању h_b од ње, као и да припада кругу с центром у A и полупречником $2t_a$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE. Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1, па је A_1 средиште дужи AD. Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC, па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1.

Конструкција:



Конструишимо дуж $AE = b + c$. Конструишимо праву p паралелну са AE на растојању h_b од ње. Конструишимо круг $k(A, 2t_a)$. У пресеку круга k и праве p означимо тачку D. Конструишимо симетралу дужи DE. У њеном пресеку с дужи AE означимо тачку C (дакле, $\mathcal{B}(A, C, E)$). Означимо с A_1 средиште дужи AD и са B тачку симетричну тачки C у односу на тачку A_1.

Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a, да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC + AB = b + c$.

ПК је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, па је AA_1 тежишна дуж из темена A. Такође, ПК је $AD = 2t_a$ и A_1 је средиште дужи AD, па следи да је $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1, па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је M подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. Како C припада правој AE, следи да су праве AC и AE исте, па из $AC \parallel BD$ следи да је $AE \parallel BD$. Права p садржи D и паралелна је са AE, па како и права BD садржи D и паралелна је са AE, следи да су праве p и BD исте, тј. да $B \in p$. Све тачке с праве p су на растојању h_b од праве AE, тј. од праве AC, па како је $BM \perp AC$, следи да је $BM = h_b$, што је и требало доказати.

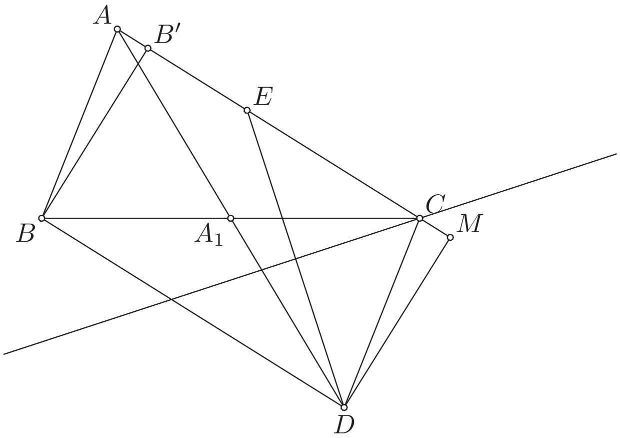
Коначно, C припада симетрали дужи DE, па је $CD = CE$, што заједно са $AB = CD$ даје $CE = AB$. По конструкцији је $\mathcal{B}(A, C, E)$, па је $AE = AC + CE = AC + AB$, а такође је по конструкцији $AE = b + c$, па следи да је $AC + AB = b + c$.

Дискусија: Да би круг $k(A, 2t_a)$ и права p имали заједничких тачака, мора бити $2t_a \geq h_b$. Заиста, права p је на растојању h_b од праве AE, што значи да за сваку тачку X са праве p важи $XA \geq h_b$. Ако је $2t_a = h_b$, онда имамо јединствену пресечну тачку D праве p и круга $k(A, 2t_a)$, а ако је $2t_a > h_b$, имамо две такве тачке D. Из Дискусије у делу **3)** овог задатка следи да симетрала странице DE троугла $\triangle ADE$ сече страницу AE у тачки C таквој да је $\mathcal{B}(A, C, E)$ ако и само ако је $AD < AE$, тј. ако и само ако је $2t_a < b + c$.

Дакле, ако је $h_b = 2t_a < b + c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Ако је $h_b < 2t_a < b + c$, задатак има два неподударна решења. У осталим случајевима задатак нема решења.

б) $t_a, h_b, b - c$

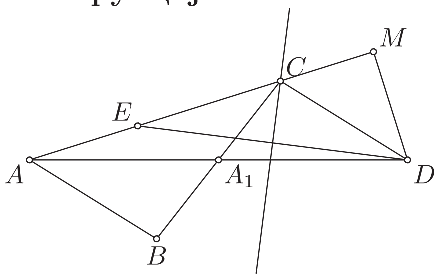
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темена B. Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC - AB = b - c$.



Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1. Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1, па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $\mathcal{B}(A, E, C)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC - CE = AC - CD = AC - AB = b - c$ и троугао $\triangle CDE$ је једнакокрак, па важи $\measuredangle CED = \measuredangle CDE$ и то су оштри углови. Следи да је $\measuredangle AED = \pi - \measuredangle CED$ туп угао, па важи распоред $\mathcal{B}(A, E, M)$. Дакле, тачка E је на страници AM таква да је $AE = b - c$. Како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADM$ је $AD = 2t_a$, $DM = h_b$ и $\measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$, па умемо да га конструишемо. Тачка E је таква да је $\mathcal{B}(A, E, M)$ и $AE = b - c$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE. Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1, па је A_1 средиште дужи AD. Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC, па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1.

Конструкција:



Конструишимо троугао $\triangle ADM$ такав је $AD = 2t_a$, $DM = h_b$ и $\measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$. На дужи AM означимо тачку E такву да је $AE = b - c$ (дакле, $\mathcal{B}(A, E, M)$). Конструишимо симетралу дужи ED и означимо са C њен пресек са правом AE тако да важи $\mathcal{B}(A, E, C)$. Означимо с A_1 средиште дужи AD и означимо са B тачку симетричну тачки C у односу на тачку A_1.

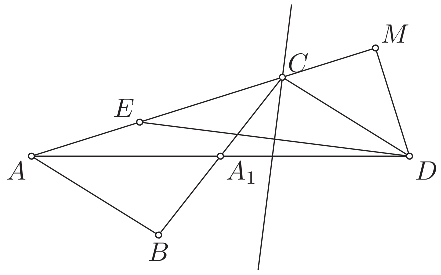
Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a, да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$.

ПК је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, па је AA_1 тежишна дуж из темена A. Такође, ПК је $AD = 2t_a$ и A_1 је средиште дужи AD, следи да је $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1, па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је B' подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. ПК је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AM$, а како су A, C, M колинеарне, следи да је $BB' \perp AM$, па важи $BB' \parallel DM$. Ово заједно са $AC \parallel BD$ и чињеницом да су праве $B'M$ и AC исте јер су тачке A, B', M, C колинеарне, следи да је $BD \parallel B'M$, па је четвороугао $BB'MD$ паралелограм (штавише правоугаоник, јер је $BB' \perp B'M$), што значи да је $BB' = DM$. ПК је $DM = h_b$, па је $BB' = h_b$.

Коначно, C припада симетрали дужи DE, па је $CD = CE$, што заједно са $AB = CD$ даје $CE = AB$. ПК је $\mathcal{B}(A, E, C)$, па је $AC > CE$, односно $AC > AB$. Такође, важи $AE = AC - CE = AC - AB$, а ПК је $AE = b - c$, па следи да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Да би троугао $\triangle ADM$ могао да се конструише, мора бити $AD > DM$ (јер је AD хипотенуза, а DM је катета правоуглог троугла $\triangle ADM$), тј. мора бити $2t_a > h_b$. Даље, да би било $\mathcal{B}(A, E, M)$, мора бити $AE < AM$. Из Питагорине теореме следи да је $AD^2 = AM^2 + DM^2$, па је $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{(2t_a)^2 - h_b^2} = \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$. Дакле, како је $AE = b - c$, добијамо услов $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$.

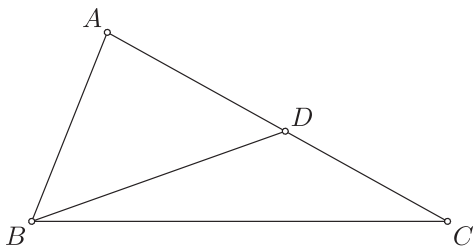


Остаје још да проверимо да ли је испуњено $\mathcal{B}(A, E, C)$. Угао $\measuredangle MED$ је оштар, јер је један од углова правоуглог троугла $\triangle MED$ који није прав ($\measuredangle EMD = \measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$ јер важи $\mathcal{B}(A, E, M)$). Следи да симетрала дужи ED сече крак EM оштрог угла $\measuredangle MED$ у тачки C таквој да важи $M, C \doteqdot E$, па како важи $A, M \div E$, следи да важи $A, C \div E$, тј. $\mathcal{B}(A, E, C)$.

Према томе, ако је $2t_a > h_b$ и $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

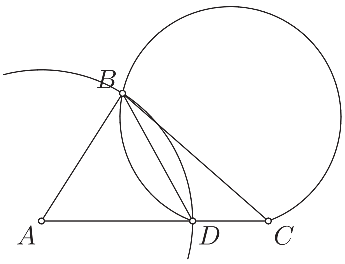
6) $\beta - \gamma, b, c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и важи $AC = b$, $AB = c$ и $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.



Како је наспрам већег угла већа страница, следи да је $AC > AB$, тј. да је $b > c$. Нека је D тачка таква да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = AB$. Тада је троугао $\triangle ABD$ једнакокрак, па је $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = \frac{\pi - \measuredangle BAC}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$. С друге стране, угао $\measuredangle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle CBD = \varphi$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA = \gamma$. Дакле, $\frac{\beta+\gamma}{2} = \varphi + \gamma$, па је $\varphi = \frac{\beta+\gamma}{2} - \gamma = \frac{\beta+\gamma-2\gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$ Дакле, $\measuredangle CBD = \frac{\beta-\gamma}{2}$, тј. дуж CD се из тачке B види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$.

Конструкција:



Конструишимо дуж $AC = b$. Означимо тачку D такву да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = c$. Конструишимо један од лукова ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$ и означимо га са l. Конструишимо круг $k(A, AD)$. Означимо са B ону пресечну тачку круга k и лука l која није тачка D.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и да је $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$, као и да је $AC = b$ и $AB = c$.

ПК је $AC = b$. Тачка B припада кругу $k(A, AD)$ и ПК је $AD = c$, па је $AB = AD = c$. ПК је $\mathcal{B}(A, D, C)$, па је $AC > AD$. Због $AD = AB$ следи да је $AC > AB$, па је и $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$. Тачка B припада луку l ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$, па следи да је $\measuredangle CBD = \frac{\beta-\gamma}{2}$. С друге стране, троугао $\triangle ABD$ је једнакокрак, па је $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = \frac{\pi - \measuredangle BAD}{2}$, а угао $\measuredangle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова, тј. $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD + \measuredangle BCD$. Због распореда $\mathcal{B}(A, D, C)$ је $\measuredangle BAD = \measuredangle BAC$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA$. Следи да је

$$\begin{aligned}
\measuredangle CBD &= \measuredangle ADB - \measuredangle BCD = \frac{\pi - \measuredangle BAD}{2} - \measuredangle BCD \\
&= \frac{\pi - \measuredangle BAC}{2} - \measuredangle BCA = \frac{\measuredangle ABC + \measuredangle ACB}{2} - \measuredangle BCA \\
&= \frac{\measuredangle ABC + \measuredangle ACB - 2\measuredangle BCA}{2} = \frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2}.
\end{aligned}$$

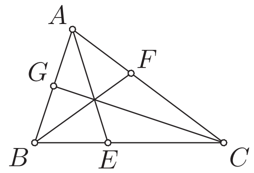
Дакле, важи $\frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$, па следи да је $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $b \leq c$ или $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.

Нека је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$. Све што треба проверити јесте да ли круг k и лук l осим тачке D имају још заједничких тачака. Круг k и лук l се секу само у тачки D ако и само ако центар O лука l припада дужи CD или важи $l, O \div CD$, што важи ако и само ако је угао под којим се са лука l види дуж CD прав или туп, односно ако и само ако је $\frac{\beta-\gamma}{2} \geq \frac{\pi}{2}$, тј. $\beta - \gamma \geq \pi$, што није тачно.

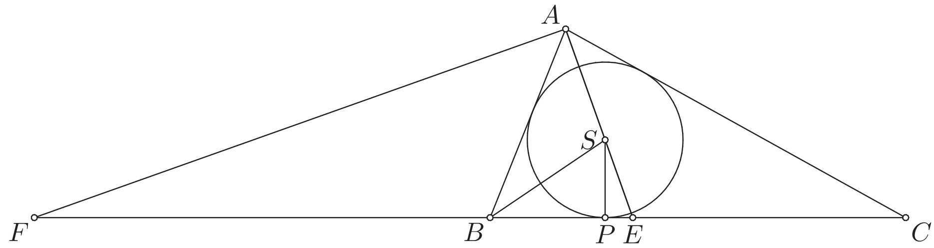
Дакле, ако је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$, онда задатак има јединствено решење до на подударност, а у осталим случајевима нема решења.

Дефиниција 22. Нека је $\triangle ABC$ троугао и нека су E, F, G редом пресечне тачке бисектриса унутрашњих углова код темена A, B, C и наспрамних страница BC, CA, AB. Дужи AE, BF, CG зову се *одсечци бисектриса унутрашњих углова* и означавају се редом са l_a, l_b, l_c.



7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$. Нека је S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$, нека је E пресечна тачка симетрале угла $\measuredangle BAC$ и странице BC и нека је P подножје нормале из тачке S на страници BC. Следи да је $AE = l_a$ и $SP = \rho$.

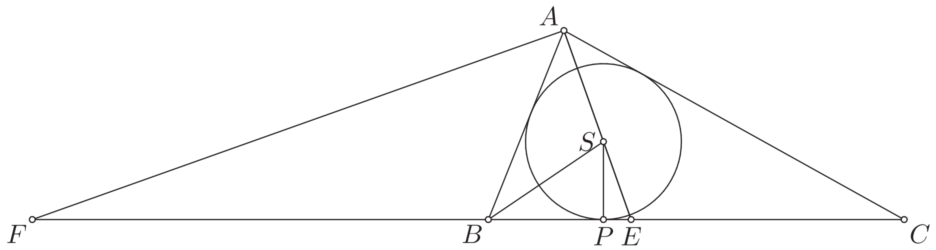


Из $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ следи да је $AC > AB$, па постоји пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A и праве BC. Означимо је са F. Тада важи распоред тачака $\mathcal{B}(F, B, E, C)$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle AFB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle AFB$ и $\measuredangle FAB$, а угао $\measuredangle FAE$ је прав, јер је то угао између симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$. Следи да је $\measuredangle FAB = \measuredangle FAE - \measuredangle BAE = \frac{\pi}{2} - \frac{\measuredangle BAC}{2}$, па је $\measuredangle ABC = \measuredangle AFB + \measuredangle FAB = \measuredangle AFB + \frac{\pi}{2} - \frac{\measuredangle BAC}{2}$. Дакле, $\measuredangle AFB = \measuredangle ABC - \frac{\pi}{2} + \frac{\measuredangle BAC}{2} = \frac{2\measuredangle ABC - \measuredangle BAC - \measuredangle ABC - \measuredangle ACB + \measuredangle BAC}{2} = \frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle AFE$ је $AE = l_a$, $\measuredangle AFE = \measuredangle AFB = \frac{\beta-\gamma}{2}$ и $\measuredangle FAE = \frac{\pi}{2}$, па тај троугао умемо да конструишемо. Како је P подножје нормале из тачке S на страници BC, тј. на правој FE и важи $SP = \rho$, следи да тачка S припада правој p која је паралелна са FE и налази се на растојању ρ од ње. При томе важи $A, S \mathrel{\overset{\cdot\cdot}{-}} BC$, тј. $A, S \mathrel{\overset{\cdot\cdot}{-}} FE$, па важи и $A, p \mathrel{\overset{\cdot\cdot}{-}} FE$. Уписани круг $k(S, \rho)$ додирује странице AB и AC, па су праве AB и AC тангенте из тачке A на уписаном кругу k троугла $\triangle ABC$. Тачке B, C су у пресеку тих тангенти и праве FE тако да важи распоред тачака $\mathcal{B}(F, B, E, C)$.

Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle AFE$ такав да је $AE = l_a$, $\measuredangle AFE = \frac{\beta-\gamma}{2}$ и $\measuredangle FAE = \frac{\pi}{2}$. Конструишимо праву p паралелну са FE која се налази на растојању ρ од ње и за коју важи $A, p \div FE$. У пресеку праве p и дужи AE означимо тачку S (дакле, важи $\mathcal{B}(A, S, E)$). Конструишимо круг $k(S, \rho)$ и конструишимо тангенте из тачке A на кругу k. У пресеку тих тангенти и праве FE означимо тачке B, C тако да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и да је $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$, затим да је одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A подударан дужи l_a и да је полупречник уписаног круга подударан дужи ρ.



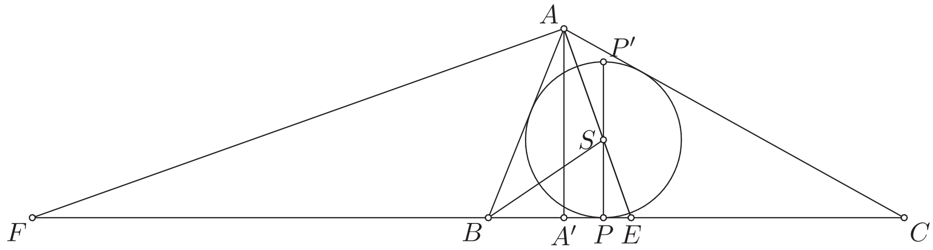
Тачка S је ПК на растојању ρ од праве FE, тј. од праве BC, па како је ПК k круг с центром у S и полупречником ρ, следи да је BC тангента круга k. ПК тачке B, C припадају тангентама круга k из тачке A, па су праве AB, AC тангенте круга k. ПК важи распоред $\mathcal{B}(B, E, C)$, па полуправа AE припада углу $\measuredangle BAC$. При томе, за тачку S са ње важи да је растојање од крака AB тог угла подударно дужи ρ, као и растојање од крака AC тог угла (јер круг $k(S, \rho)$ додирује праве AB и AC), па је полуправа AE бисектриса угла $\measuredangle BAC$. Према томе, круг k је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је споља уписани круг који додирује страницу BC (у Великом задатку означен са $k_a(S_a, \rho_a)$). Како важи $\mathcal{B}(A, S, E)$, закључујемо да је k уписани круг троугла $\triangle ABC$, па је његов полупречник ρ, што је и требало доказати,

Такође, како је полуправа AE бисектриса унутрашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$, следи да је E тачка у пресеку те бисектрисе и странице BC, па је AE одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A, а ПК је та дуж подударна дужи l_a.

Како је $\measuredangle FAE = \frac{\pi}{2}$, следи да је AF бисектриса спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ (јер је нормална на бисектриси AE унутрашњег угла код темена A). Угао $\measuredangle AEF$ је оштар (јер је угао правоуглог троугла $\triangle AFE$ који није прав угао) и он је спољашњи угао троугла $\triangle AEC$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\measuredangle EAC = \frac{\measuredangle BAC}{2}$ и $\measuredangle ACE = \measuredangle ACB$. Дакле, $\frac{\measuredangle BAC}{2} + \measuredangle ACB < \frac{\pi}{2}$, па следи да је и $\measuredangle BAC + 2\measuredangle ACB < \pi = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB$, тј. $\measuredangle ACB < \measuredangle ABC$.

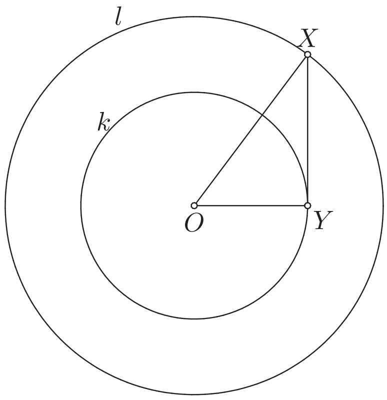
У делу Анализа је доказано да је тада $\measuredangle AFB = \frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2}$, а како ПК важи $\mathcal{B}(F, B, E)$ и $\measuredangle AFE = \frac{\beta-\gamma}{2}$, следи да је $\measuredangle AFB = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Према томе, $\frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$, тј. $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.



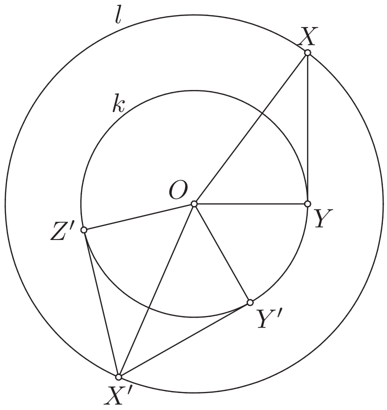
Нека је $\beta - \gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta-\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$, па постоји троугао $\triangle AFE$ и јединствен је до на подударност. Нека је A' подножје висине из темена A у троуглу $\triangle AFE$. Тада углови $\measuredangle A'AE$ и $\measuredangle AFE = \frac{\beta-\gamma}{2}$ имају нормалне краке, па је $\measuredangle A'AE = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Да би важило $\mathcal{B}(A, S, E)$, да би се тачка A налазила у спољашњости круга $k(S, \rho)$ и да би тангенте круга k из тачке A секле праву FE у тачкама B, C таквим да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$, потребно је и довољно да висина AA' буде већа од пречника круга k, тј. да важи $AA' > 2\rho$. Из правоуглог троугла $\triangle AA'E$ имамо $\cos\measuredangle A'AE = \frac{AA'}{AE} = \frac{AA'}{l_a}$, тј. да је $AA' = l_a \cos\measuredangle A'AE = l_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$. Према томе, услов је $l_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} > 2\rho$. Према томе, ако је $\beta - \gamma < \pi$ и $l_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} > 2\rho$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима, задатак нема решења.

Конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дати круг види под датим углом



Нека је $k(O, r)$ дати круг и φ дати угао. Нека је $Y \in k$ произвољна и нека је X таква да троугао $\triangle OXY$ задовољава $\measuredangle OYX = \frac{\pi}{2}$ и $\measuredangle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Конструишимо затим круг $l(O, OX)$ и то је тражено ГМТ.

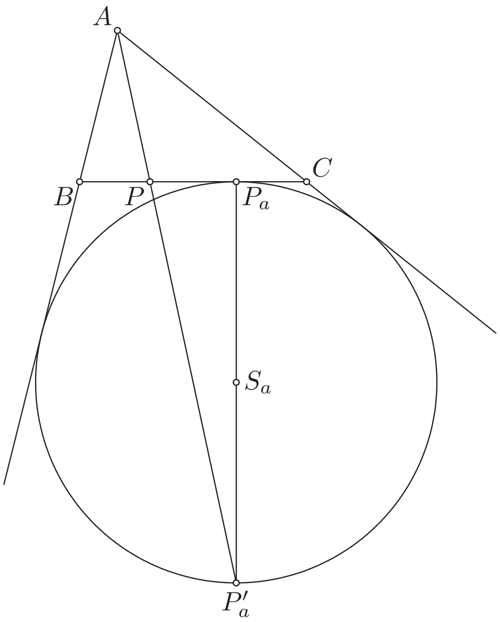
Покажимо да за сваку тачку X' са круга l важи да припада траженом ГМТ. Нека су Y', Z' додирне тачке тангенти круга k из тачке X'. Потребно је доказати да је $\measuredangle Y'X'Z' = \varphi$. Троуглови $\triangle X'OY'$ и $\triangle XOY$ задовољавају да је $X'O = XO$, $OY' = OY$ и $\measuredangle X'Y'O = \frac{\pi}{2} = \measuredangle XYO$, а углови $\measuredangle OX'Y'$ и $\measuredangle OXY$ су оба оштра (правоугли троуглови имају по један прав и два оштра угла). На основу става ССУ следи да је $\triangle X'OY' \cong \triangle XOY$, па је $\measuredangle OX'Y' = \measuredangle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Слично је и $\triangle X'OZ' \cong \triangle XOY$, па је $\measuredangle OX'Z' = \measuredangle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Следи да је $\measuredangle Y'X'Z' = \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi$.



Напомена 9. Ова конструкција је помоћна конструкција и уколико се користи у неком другом задатку, потребно је исписати њене кораке у етапи Конструкција (могу се навести одвојено од осталих корака, с назнаком да се ради о помоћној конструкцији). Није потребно доказивати да се из сваке тачке конструисаног круга дати круг види под датим углом.

8) $\alpha, b-c, \rho_a$

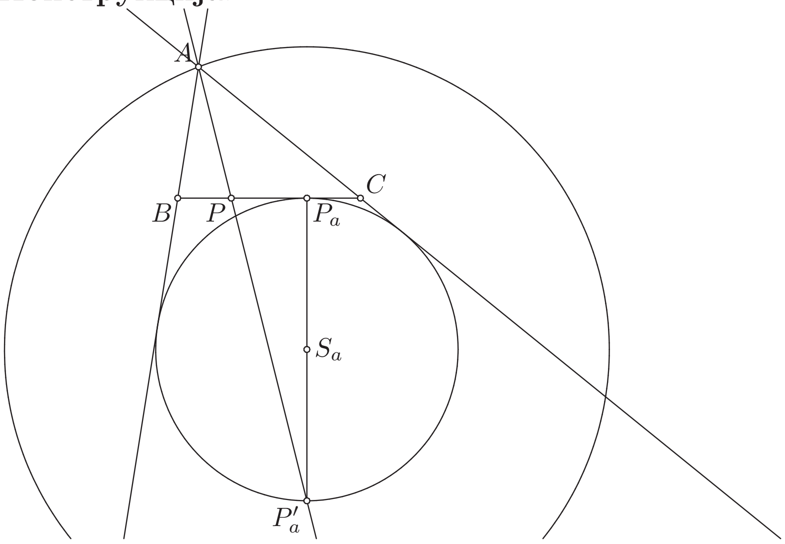
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $AC - AB = b - c$ и полупречник споља уписаног круга наспрам темена A је подударан дужи ρ_a.



Нека су P, S_a, P_a, P'_a тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка следи да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, као и $PP_a = b - c$.

У троуглу $\triangle PP_aP'_a$ је $PP_a = b - c$, $\measuredangle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$, па тај троугао умемо да конструишемо. Тачка S_a је средиште странице $P_aP'_a$ и можемо конструисати круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Тачка A припада правој PP'_a тако да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и из тачке A се круг k_a види под углом α. Тачке B, C су пресечне тачке тангенти круга k_a из тачке A и праве PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Конструкција:

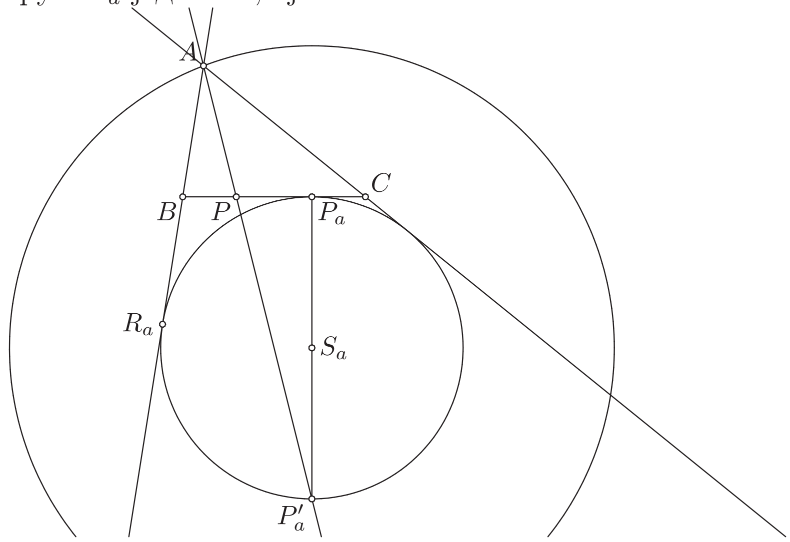


Конструишимо троугао $\triangle PP_aP'_a$ такав да је $PP_a = b-c$, $\measuredangle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$. Означимо са S_a средиште странице $P_aP'_a$ и конструишимо круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Конструишимо ГМТ l из којих се круг k_a види под углом α. Означимо са A пресечну тачку ГМТ l и праве PP'_a такву да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$. Конструишимо тангенте круга k_a из тачке A и означимо са B, C њихове пресеке са правом PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle BAC = \alpha$, $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$, као и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена A подударан дужи ρ_a.

Тачке B, C припадају тангентама круга k_a из тачке A, па су праве AB, AC тангенте круга k_a. ПК је S_a средиште $P_aP'_a$ и $\measuredangle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$, па следи да је $PP_a \perp P_aS_a$. ПК је $P_aP'_a = 2\rho_a$, па следи да је $S_aP_a = \frac{1}{2}P_aP'_a = \frac{1}{2}2\rho_a = \rho_a$, тј. S_aP_a је полупречник круга $k_a(S_a, \rho_a)$. Дакле, права PP_a је нормална на полупречнику круга k_a, па је она тангента тог круга. Штавише, како је $S_aP_a = \rho_a$, следи да је тачка P_a додирна тачка круга k_a и праве PP_a. Како ПК тачке B, C припадају правој PP_a и важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, следи да је права BC исто што и права PP_a и да тачка P_a припада дужи BC, па круг k_a додирује страницу BC троугла $\triangle ABC$. Дакле, круг k_a је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је споља уписани круг наспрам темена A. Како ПК важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и $P \in BC$, следи да важи $A, P'_a \div BC$. Такође, S_a је средиште $P_aP'_a$ и $P_a \in BC$, па следи да важи $P'_a, S_a \doteq BC$. Према томе, важи $A, S_a \div BC$, па је k_a спољa уписани круг који додирује страницу BC. Овим смо доказали и да је полупречник спољa уписаног круга наспрам темена A троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ_a.

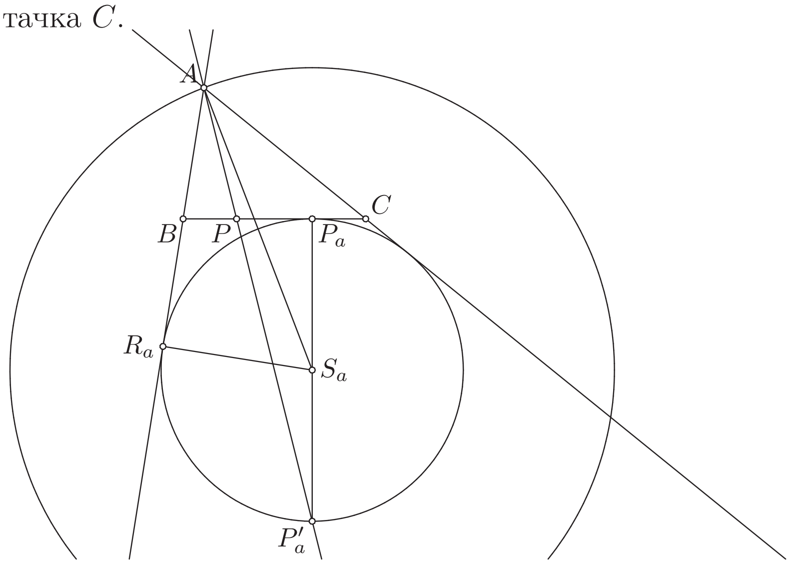
ПК је l ГМТ из којих се круг $k_a(S_a, \rho_a)$ види под углом α. Како тачка A припада ГМТ l, следи да је угао $\measuredangle BAC$ који граде тангенте AB, AC круга k_a једнак α, тј. $\measuredangle BAC = \alpha$.



Тачке S_a, P_a су редом центар споља уписаног круга наспрам темена A и додирна тачка тог круга и странице BC. Тачка S_a је средиште дужи $P_aP'_a$, па је тачка P'_a дијаметрално супротна тачки P_a. На основу Великог задатка, став **1)**, следи да су теме A, додирна тачка уписаног круга и странице BC и тачка P'_a колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве AP'_a и странице BC тачка P, следи да је тачка P додирна тачка уписаног круга и странице BC. Нека је R_a додирна тачка споља уписаног круга k_a и праве AB. На основу Великог задатка је дуж AR_a подударна полуобиму троугла $\triangle ABC$, $BP_a = BR_a = AR_a - AB$ и $BP = AR_a - AC$. Како важи распоред $\mathcal{B}(B, P, P_a)$ следи да је $BP_a > BP$, па је $AR_a - AB > AR_a - AC$, тј. $AC > AB$. На основу Великог задатка је $PP_a = AC - AB$, а како је ПК $PP_a = b - c$, следи да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

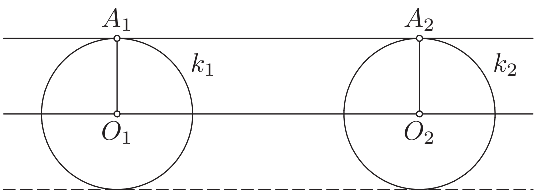
Нека је $\alpha < \pi$. Постоји троугао $\triangle PP_aP'_a$ и јединствен је до на подударност, па постоји и јединствено средиште S_a странице $P_aP'_a$. Полупречник S_aA круга l (ГМТ из којих се круг k_a види под углом α) је већи од ρ_a, па је тачка P'_a у унутрашњости круга l. Следи да права PP'_a сече круг l у двема тачкама, при чему је једна с исте стране тачке P'_a као тачка P, а друга је са супротне стране. Тачка A је она за коју важи $A, P \doteq P'_a$, а да би важило $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ (пошто може важити и $\mathcal{B}(P, A, P'_a)$), мора важити $S_aA > S_aP$, тј. и тачка P мора бити унутар круга l. Из Питагорине теореме је $S_aP^2 = S_aP_a^2 + P_aP^2 = \rho_a^2 + (b-c)^2$, па је $S_aP = \sqrt{\rho_a^2 + (b-c)^2}$. У правоуглом троуглу $\triangle AS_aR_a$ је S_aA хипотенуза, а катета S_aR_a наспрам угла $\measuredangle S_aAR_a = \frac{\alpha}{2}$ је подударна са полупречником ρ_a круга k_a, па је $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_a}{S_aA}$, тј. $S_aA = \frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Дакле, имамо услов $\frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b-c)^2}$. Тачка A је у спољашњости круга k_a, услов $\mathcal{B}(A, P, P_a')$ обезбеђује да тангенте круга k_a из тачке A секу праву PP_a тако да се тачке P, P_a налазе између тих пресечних тачака. Према томе, $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ служи томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка B, а која је тачка C.



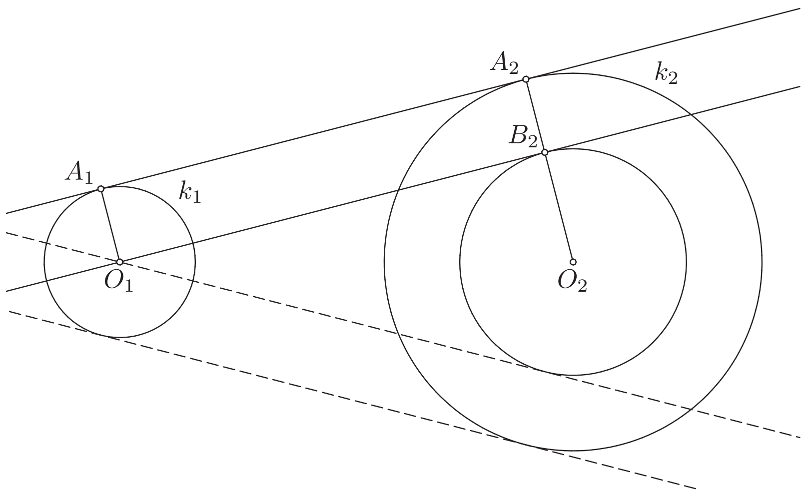
Према томе, ако је $\alpha < \pi$ и $\frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b-c)^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима задатак нема решења.

Конструкција заједничких спољашњих тангенти два круга

Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дати кругови.



Ако је $r_1 = r_2$, конструишимо праву t која је паралелна са правом O_1O_2 и налази се на растојању $r_1 (= r_2)$ од ње.



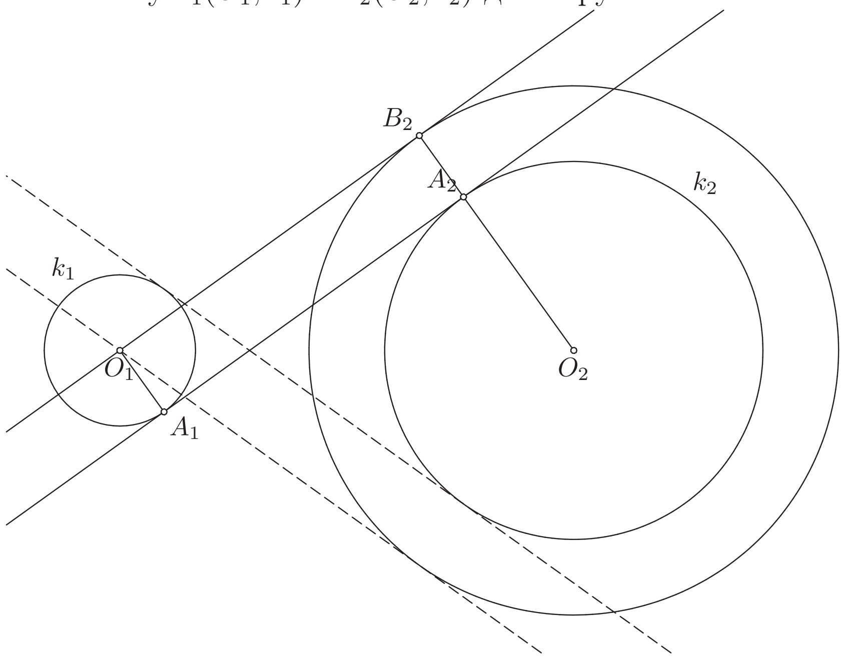
Без умањења општости претпоставимо да је $r_1 < r_2$ (ако није, тј. ако је $r_1 > r_2$, означимо тачку O_1 са O_2 и обратно, круг k_1 са k_2 и обратно и полупречник r_1 са r_2 и обратно). Конструишимо круг $k_2'(O_2, r_2 - r_1)$. Конструишимо тангенту t' круга k_2' из тачке O_1 и конструишимо праву t која је паралелна са правом t', налази се на растојању r_1 од ње и за коју важи $t, O_2 \div t'$.

Ако је $r_1 = r_2$ и $O_1 \neq O_2$, онда постоје тачно две праве t које су паралелне са O_1O_2 и налазе се на растојању $r_1(= r_2)$ од ње, па постоје тачно две заједничке спољашње тангенте кругова k_1, k_2. Ако је $r_1 = r_2$ и $O_1 = O_2$, онда се кругови k_1 и k_2 поклапају, па је свака тангента круга k_1 уједно и тангента круга k_2, па постоји бесконачно много заједничких спољашњих тангенти.

Нека је без умањења општости $r_1 < r_2$. Да би постојала тангента круга $k_2'(O_2, r_2 - r_1)$ из тачке O_1, она мора бити или на кругу k_2' или у његовој спољашњости, тј. мора важити $O_1O_2 \geq r_2 - r_1$. Ако је $O_1O_2 = r_2 - r_1$, тада постоји јединствена тангента t', па постоји и јединствена заједничка спољашња тангента кругова k_1, k_2. Ако је $O_1O_2 > r_2 - r_1$, онда постоје две тангенте t', па постоје и две заједничке тангенте кругова k_1, k_2.

Конструкција заједничких унутрашњих тангенти два круга

Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дати кругови.



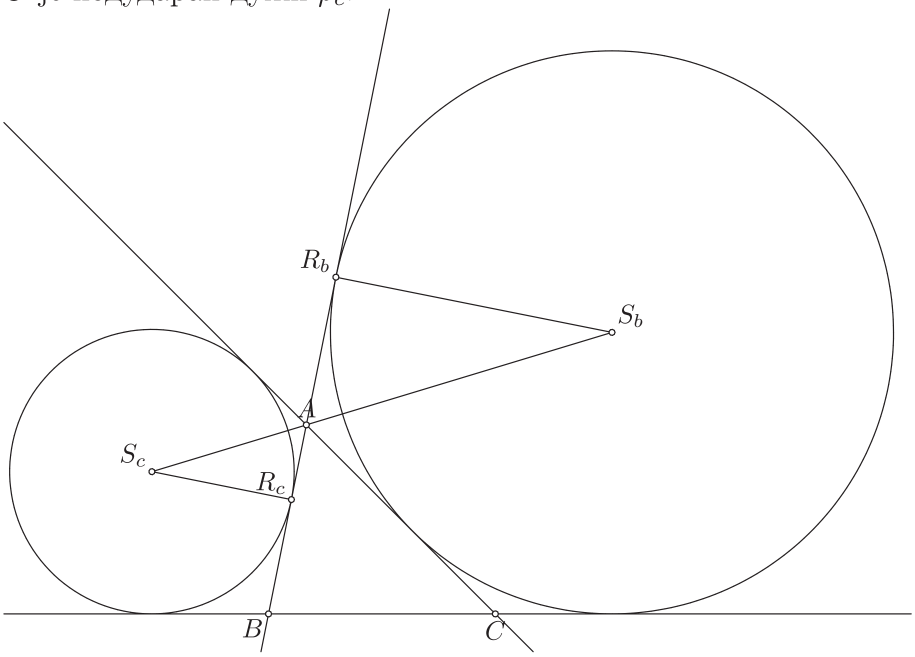
Конструишимо круг $k_2'(O_2, r_2 + r_1)$. Конструишимо тангенту t' круга k_2' из тачке O_1 и конструишимо праву t која је паралелна са правом t', налази се на растојању r_1 од ње и за коју важи $t, O_2 \div t'$.

Да би постојала тангента t' круга $k_2'(O_2, r_2 + r_1)$ из тачке O_1, она се мора налазити на кругу k_2' или у његовој спољашности. Дакле, мора важити $O_1O_2 \geq r_2 + r_1$. Ако је $O_1O_2 = r_2 + r_1$, онда постоји јединствена тангента t', па постоји и јединствена заједничка унутрашња тангента кругова k_1, k_2. Ако је $O_1O_2 > r_2 + r_1$, онда постоје две тангенте t', па постоје и две заједничке унутрашње тангенте кругова k_1, k_2.

Напомена 10. Ове конструкције су такође помоћне конструкције и уколико се користе у неком другом задатку, потребно је исписати њихове кораке у етапи Конструкција (могу се навести одвојено од осталих корака, с назнаком да се ради о помоћној конструкцији). Услови под којима су ове конструкције могуће и одговарајући број тангенти могу се користити у етапи Дискусија без додатног образложења.

9) a, ρ_b, ρ_c

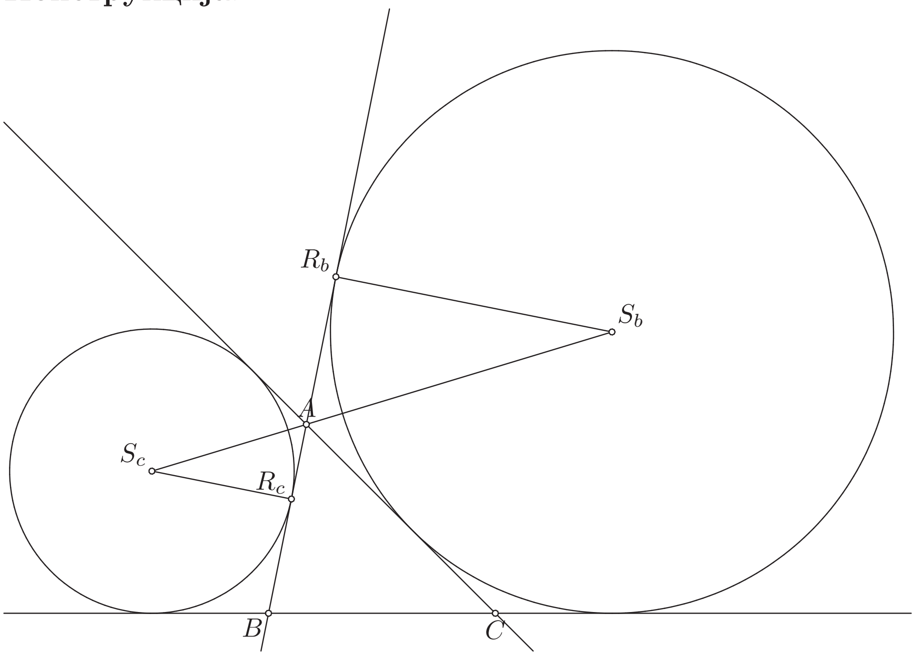
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $BC = a$, полупречник спољa уписаног круга наспрам темена B је подударан дужи ρ_b и полупречник споља уписаног круга наспрам темена C је подударан дужи ρ_c.



Нека су S_b, S_c, R_b, R_c тачке из Великог задатка и нека су k_b, k_c редом споља уписани кругови троугла $\triangle ABC$ наспрам темена B, C. Тада је на основу Великог задатка $R_bR_c = a$. За тачке S_b, S_c важи $S_bR_b = \rho_b$, $S_bR_b \perp R_bR_c$, $S_cR_c = \rho_c$, $S_cR_c \perp R_bR_c$ и $S_b, S_c \div R_bR_c$, па је R_bR_c заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c.

Права BC додирује кругове k_b, k_c, па је она њихова заједничка тангента. Како су $S_b, S_c \doteqdot BC$, у питању је њихова заједничка спољашња тангента. Према томе, тачка B је у пресеку заједничке спољашње тангенте кругова k_b, k_c и праве R_bR_c, при чему важи распоред $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Такође, права AC је заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c, која није R_bR_c. Према томе, тачка C се налази у пресеку те тангенте и заједничке спољашње тангенте кругова k_b, k_c која садржи тачку B, а тачка A се налази у пресеку те тангенте и праве R_bR_c.

Конструкција:

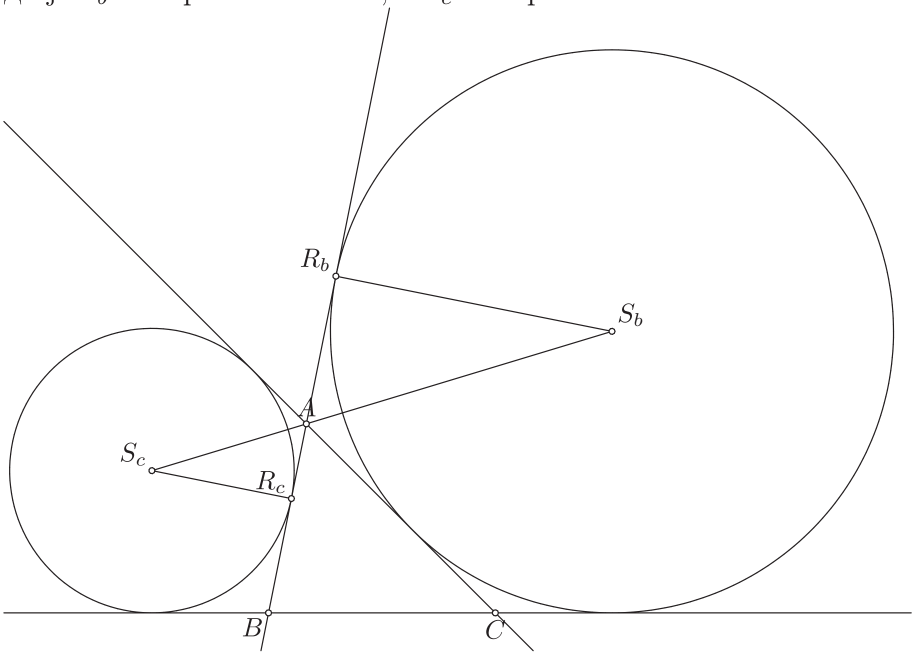


Конструишимо дуж $R_bR_c = a$. Конструишимо нормалу на R_bR_c у тачки R_c и означимо на њој са S_c тачку такву да је $S_cR_c = \rho_c$. Конструишимо нормалу на R_bR_c у тачки R_b и означимо на њој са S_b тачку такву да је $S_bR_b = \rho_b$ и $S_c, S_b \div R_bR_c$. Конструишимо кругове $k_b(S_b, \rho_b), k_c(S_c, \rho_c)$. Конструишимо заједничку спољашњу тангенту t кругова k_b, k_c која сече праву R_bR_c у тачки B таквој да важи $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Конструишимо заједничку унутрашњу тангенту t_1 кругова k_b, k_c која није права R_bR_c. Означимо са A пресечну тачку правих R_bR_c, t_1 и са C пресечну тачку правих t, t_1.

Доказ: Треба доказати да је $BC = a$, да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена B подударан дужи ρ_b и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена C подударан дужи ρ_c.

ПК је $R_bR_c \perp S_bR_b$, $R_bR_c \perp S_cR_c$, $S_bR_b = \rho_b$ и $S_cR_c = \rho_c$. ПК су S_b, S_c центри кругова k_b, k_c и S_bR_b, S_cR_c њихови полупречници, па је R_bR_c заједничка тангента кругова k_b, k_c, а због $S_b, S_c \div R_bR_c$ је у питању заједничка унутрашња тангента. ПК се тачке A, B налазе на правој R_bR_c, па су праве AB и R_bR_c исте. Такође, ПК се тачке B, C налазе на правој t, која је заједничка спољашња тангента кругова k_b, k_c. ПК је права AC заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c различита од R_bR_c.

Дакле, праве AB, BC, AC јесу заједничке тангете кругова k_b, k_c, па следи да су то уписани или споља уписани кругови троугла $\triangle ABC$. Пошто је BC заједничка спољашња тангента, следи да ниједан он њих није споља уписани круг наспрам темена A (ово важи зато што се од поменутих кругова с једне стране праве BC налазе три круга, а с друге стране један и то баш споља уписани напрам темена A). Такође, да је један од k_b, k_c уписани круг троугла $\triangle ABC$, онда би једна од правих AB, AC била заједничка спољашња тангента. Како то није случај, следи да су k_b, k_c споља уписани кругови наспрам темена B, C. Остаје још да се докаже да је k_b наспрам темена B, а k_c наспрам темена C.



Пошто ПК важи $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$, тачка R_c мора бити додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена C и странице AB, а тачка R_b додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена B и праве AB. Дакле, k_b јесте споља уписани круг наспрам темена B, а k_c јесте споља уписани круг наспрам темена C. ПК су полупречници кругова k_b, k_c подударни редом дужима ρ_b, ρ_c, па су полупречници споља уписаних кругова наспрам темена B, C троугла $\triangle ABC$ редом подударни датим дужима ρ_b, ρ_c.

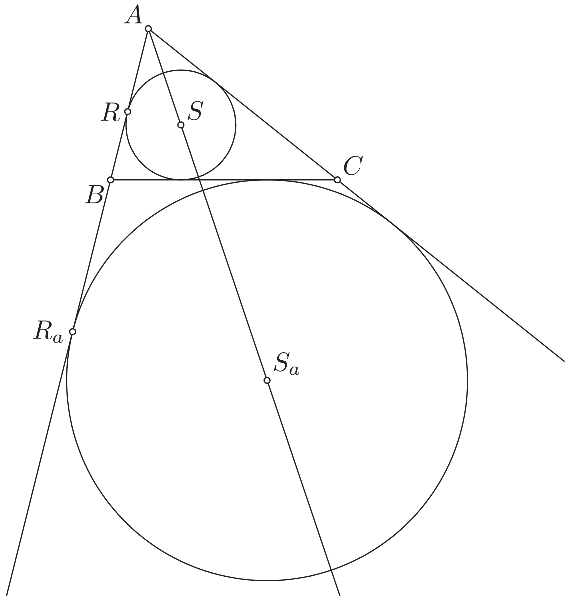
На основу Великог задатка следи да је $R_bR_c = BC$, а како је ПК $R_bR_c = a$, следи да је $BC = a$.

Дискусија: Кругове k_b, k_c је увек могуће конструисати и пошто имају заједничку унутрашњу тангенту R_bR_c која их не додирује у истој тачки, следи да имају и другу заједничку унутрашњу тангенту, као и две заједничке спољашње тангенте. Од њих тачно једна испуњава услов $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Дакле, конструкција троугла $\triangle ABC$ је увек могућа.

Према томе, за било које дужи a, ρ_b, ρ_c постоји јединствено решење до на подударност.

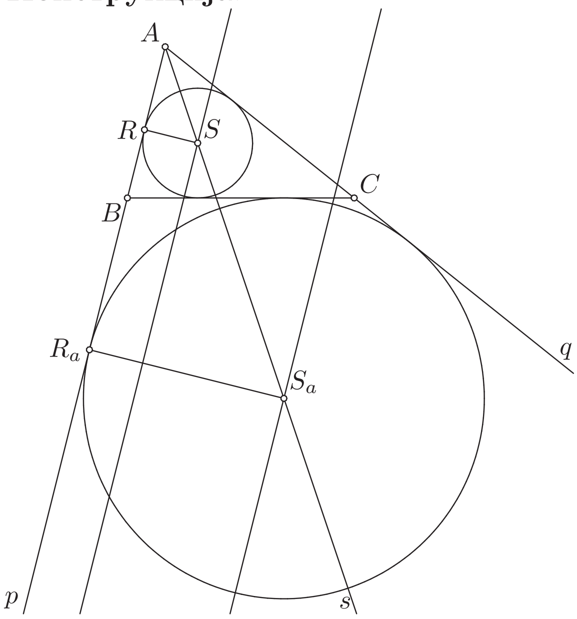
10) α, ρ, ρ_a

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle BAC = \alpha$, полупречник уписаног круга је подударан дужи ρ и полупречник споља уписаног круга наспрам темена A је подударан дужи ρ_a.



Нека су S, S_a редом центар уписаног круга k и центар споља уписаног круга k_a наспрам темена A и нека су R, R_a подножја нормала из тачака S, S_a на правој AB. Тачке S, S_a припадају бисектриси угла $\measuredangle BAC$ (полуправој!), а како су R, R_a редом додирне тачке кругова k, k_a и праве AB, следи да је $SR = \rho$ и $S_aR_a = \rho_a$. Према томе, тачка S се налази на растојању ρ од праве AB, а тачка S_a се налази на растојању ρ_a од праве AB. Права BC је заједничка тангента кругова k, k_a, а како важи $k, k_a \div BC$, у питању је заједничка унутрашња тангента тих кругова.

Конструкција:

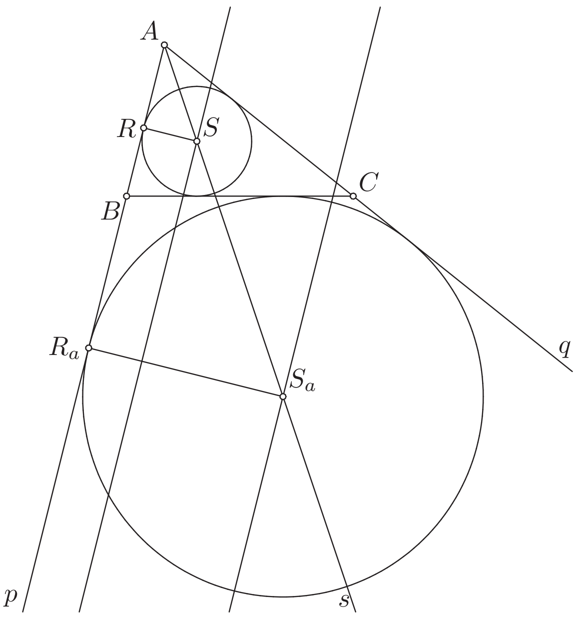


Конструишимо угао $\measuredangle pAq = \alpha$. Конструишимо бисектрису As (полуправу!) угла $\measuredangle pAq$. Конструишимо праву a која је паралелна са краком Ap угла $\measuredangle pAq$, налази се на растојању ρ од њега и налази се с оне стране праве одређене краком Ap с које се налазе крак (полуправа) Aq и бисектриса As угла $\measuredangle pAq$. Пресечну тачку праве a и бисекрисе As означимо са S. Конструишимо праву b која је паралелна са краком Ap угла $\measuredangle pAq$, налази се на растојању ρ_a од њега и налази се с оне стране праве одређене краком Ap с које се налазе крак (полуправа) Aq и бисектриса As угла $\measuredangle pAq$. Пресечну тачку праве b и бисекрисе As означимо са S_a тако да важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$. Конструишимо кругове $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, \rho_a)$ и конструишимо њихову заједничку унутрашњу тангенту t. Пресечну тачку тангенте t и крака Ap угла $\measuredangle pAq$ означимо са B, а пресечну тачку тангенте t и крака Aq означимо са C.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle BAC = \alpha$, да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ и да је полупречник спопља уписаног круга наспрам темена A троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ_a.

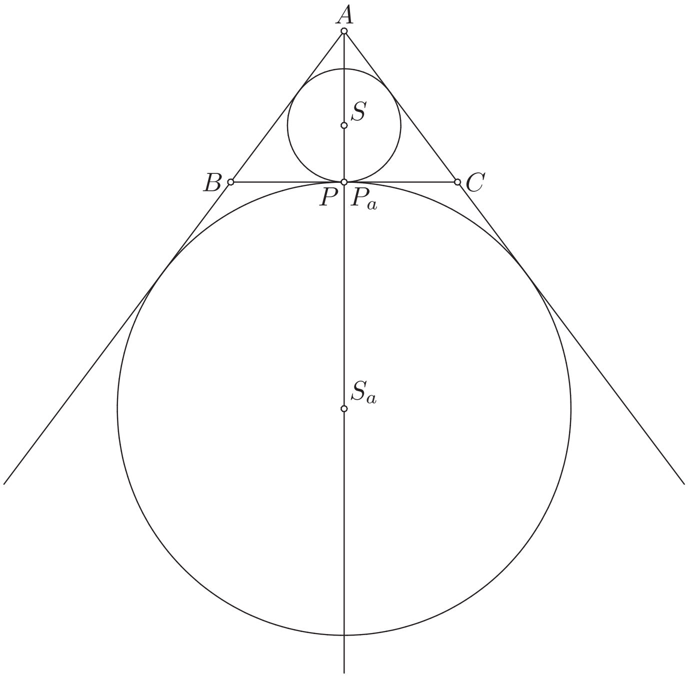
ПК тачка B припада краку Ap, а тачка C краку Aq угла $\measuredangle pAq$ који је ПК подударан углу α, па следи да је $\measuredangle BAC = \measuredangle pAq = \alpha$.

Центри S, S_a кругова k, k_a су на бисектриси As угла $\measuredangle BAC = \measuredangle pAq$ и налазе се редом на растојањима ρ, ρ_a од крака Ap, тј. крака AB, па како су им полупречници редом подударни дужима ρ, ρ_a, следи да они додирују краке Ap, Aq (тј. AB, AC) угла $\measuredangle pAq = \measuredangle BAC$. ПК је права BC заједничка унутрашња тангента кругова k, k_a, па је један од тих кругова уписани, а други спољa уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. С обзиром на то да ПК важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, следи да је $k(S, \rho)$ уписани, а $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг наспрам темена A. Коначно следи и да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ и да је полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC подударан дужи ρ_a.

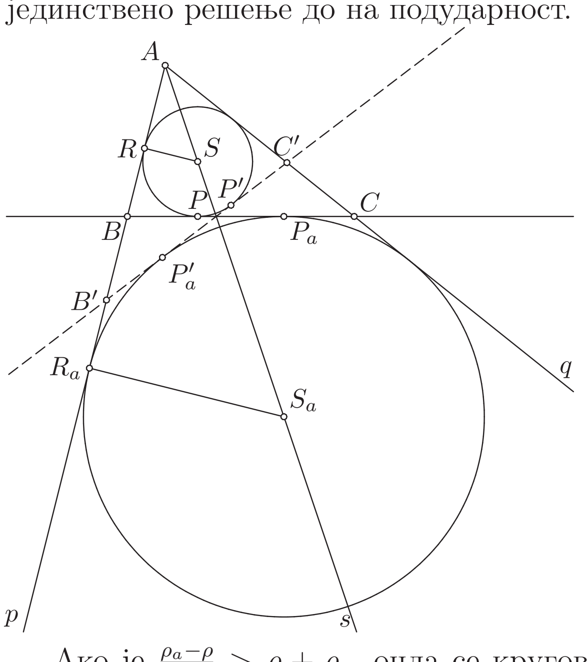


Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ чији је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Нека су R, R_a подножја нормала из тачака S, S_a редом на краку Ap. Тада према Талесовој теореми следи $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SR}{S_aR_a}$, а како се тачке S, S_a налазе редом на растојањима ρ, ρ_a од крака Ap, следи да је $SR = \rho$ и $S_aR_a = \rho_a$, па је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Да би важио распоред тачака $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, мора важити $AS < AS_a$, тј. $\frac{AS}{AS_a} < 1$, а то важи ако и само ако важи $\frac{\rho}{\rho_a} < 1$, тј. $\rho < \rho_a$. Кругови k, k_a имају заједничких унутрашњих тангенти ако и само ако важи $SS_a \geq \rho + \rho_a$. Из правоуглих троуглова $\triangle ASR$ и $\triangle AS_aR_a$ добијамо да је $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\measuredangle RAS = \frac{RS}{AS}$ и $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\measuredangle R_aAS_a = \frac{R_aS_a}{AS_a}$, па важи $AS = \frac{RS}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ и $AS_a = \frac{R_aS_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Према томе, важи $SS_a = AS_a - AS = \frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a - \rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, па је $\frac{\rho_a - \rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} \geq \rho + \rho_a$ услов постојања заједничких унутрашњих тангенти.



Ако важи $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \rho+\rho_a$, онда се кругови k, k_a додирују и постоји јединствена заједничка унутрашња тангента кругова k, k_a, па постоји јединствено решење до на подударност.

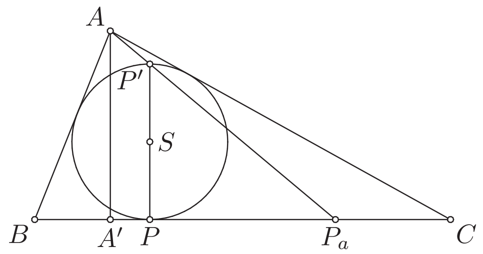


Ако је $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \rho+\rho_a$, онда се кругови k, k_a не додурују и имају две разне заједничке тангенте, па постоје два неподударна решења.

Дакле, ако је $\alpha < \pi$, $\rho < \rho_a$ и $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \rho+\rho_a$, онда постоји јединствено решење до на подударност. Ако је $\alpha < \pi$, $\rho < \rho_a$ и $\frac{\rho_a - \rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \rho + \rho_a$, онда постоје два неподударна решења. У осталим случајевима, задатак нема решења.

11) $b - c, h_a, \rho$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је A' подножје висине из темена A, S центар уписаног круга и P додирна тачка уписаног круга и странице BC. Тада важи $AB < AC$ и $AC - AB = b - c$, $AA' = h_a$ и $SP = \rho$.

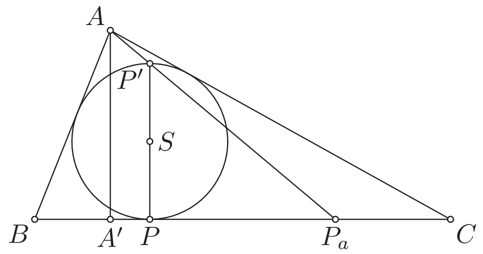


Нека су P', P_a тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, $PP_a = b - c$ и тачке A, P', P_a су колинеарне. Тачка S је средиште дужи $P'P$, па је $P'P = P'S + SP = 2SP = 2\rho$. У троуглу $\triangle P'PP_a$ је $P'P = 2\rho$, $\measuredangle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$ и $PP_a = b - c$, па тај троугао умемо да конструишемо. Тачка A припада правој $P'P_a$, налази се на растојању h_a од праве BC, тј. од праве PP_a и важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Тачке B, C припадају правој PP_a и тангентама уписаног круга $k(S, SP)$ из тачке A, тако да важи распоред $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle P'PP_a$ такав да је $P'P = 2\rho$, $\measuredangle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$ и $PP_a = b - c$. Означимо са S средиште дужи $P'P$ и конструишимо круг $k(S, SP)$. Конструишимо праву p која је паралелна са правом PP_a и налази се на растојању h_a од ње, такву да важи $p, S, P' \doteqdot PP_a$. У пресеку правих p и $P'P_a$ означимо тачку A тако да важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Конструишимо тангенте круга k из тачке A. У пресеку тих тангенти и праве PP_a означимо тачке B, C тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $AB < AC$ и $AC - AB = b - c$, да је висина из темена A подударна дужи h_a и да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ.

Тачка S је средиште дужи $P'P$ која је ПК подударна дужи 2ρ, па следи да је $SP = \frac{1}{2}P'P = \frac{1}{2}2\rho = \rho$. Како је по конструкцији $P'P \perp PP_a$, следи да је права PP_a нормална на полупречнику SP круга $k(S, SP)$, па је она тангента круга k у тачки P. ПК важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, па праву PP_a можемо означавати и са BC. Дакле, права BC је тангента круга k и додирује је у тачки P која ПК припада дужи BC. Такође, праве AB, AC су ПК тангенте круга k, па следи да је круг k или уписани круг или споља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. Како ПК важи $A, S \doteqdot PP_a$, тј. $A, S \doteqdot BC$, следи да је у питању уписани круг, па је његов полупречник подударан дужи ρ.



Дакле, P је додирна тачка уписаног круга и странице BC, а како је ПК тачка S средиште дужи $P'P$, следи да је тачка P' дијаметрално супротна тачки P. На основу Великог задатка, став **1)**, следи да су теме A, тачка P' и додирна тачка странице BC и спољa уписаног круга троугла $\triangle ABC$ наспрам темена A колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве AP' и странице BC тачка P_a, следи да је тачка P_a додирна тачка странице BC и спољa уписаног круга наспрам темена A. Ако је s полуобим троугла $\triangle ABC$, на основу Великог задатка следи да је $BP = s - AC$ и $BP_a = s - AB$, па због распореда $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ следи да је $BP < BP_a$, односно $s - AC < s - AB$, па је $AB < AC$. На основу Великог задатке је онда $PP_a = AC - AB$, а како је ПК $PP_a = b - c$, следи да је $AC - AB = b - c$.

Тачка A припада правој p која је паралелна са правом PP_a, тј. правом BC и налази се на растојању h_a од ње, па ако означимо са A' подножје висине из темена A троугла $\triangle ABC$, следи да је $AA' = h_a$.

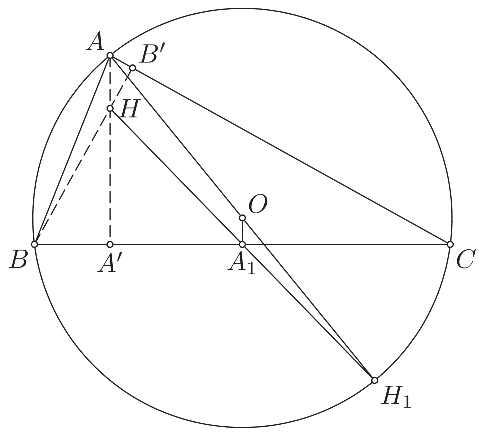
Дискусија: Да би важио услов $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, мора бити $h_a > 2\rho$, јер праве које су паралелне са PP_a и налазе се на растојању мањем од 2ρ секу дуж P_aP', а права која се налази на растојању 2ρ сече праву P_aP' у тачки P'. Ако важи тај услов, важи и да тачка A припада спољашњости круга $k(S, SP)$, јер права p (која је паралелна са PP_a и налази се на растојању $h_a(> 2\rho)$ од ње) нема заједничких тачака са кругом k, па постоје две тангенте круга k из тачке A. Такође, ако важи услов $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, те тангенте секу праву PP_a тако да се тачке P, P_a налазе између тих пресечних тачака, па услов $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ служи томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка B, а која је тачка C.

Дакле, ако важи $h_a > 2\rho$, постоји јединствено решење до на подударност, а ако важи $h_a \leq 2\rho$, задатак нема решења.

2. Конструисати троугао ABC ако су дати теме A, ортоцентар H и центар описаног круга O тог троугла.

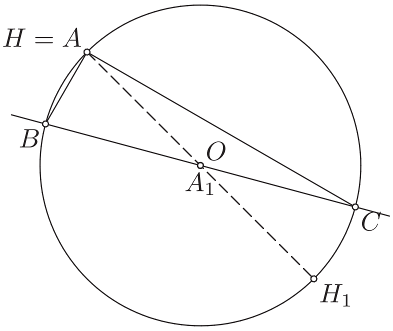
Решење:

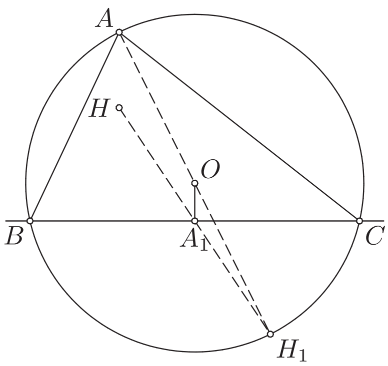
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. нека се његово теме A поклапа с датом тачком A, нека се његов ортоцентар поклапа с датом тачком H и нека се центар његовог описаног круга поклапа са тачком O.



Нека је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$ и нека је H_1 тачка симетрична ортоцентру H у односу на тачку A_1. У 3. задатку из области Подударност смо доказали да је тада тачка H_1 симетрична темену A у односу на центар O описаног круга троугла $\triangle ABC$. Приметимо да ако се тачке A, H поклапају, тј. ако је $\triangle ABC$ правоугли с правим углом код темена A, онда се поклапају и тачке O, A_1 јер се центар описаног круга налази на средишту хипотенузе BC, а ако се тачке A, H разликују, онда се разликују и тачке O, A_1 и имамо да је права BC нормална на правој OA_1 у тачки A_1.

Конструкција:





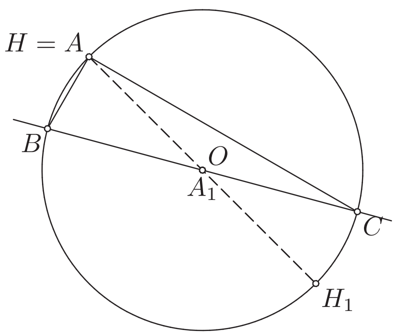
Означимо са H_1 тачку симетричну тачки A у односу на тачку O, а затим са A_1 средиште дужи HH_1. Конструишимо круг $l(O, OA)$. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда конструишимо произвољну праву p која садржи O и различита је од праве OA и означимо са B, C пресечне тачке те праве и круга l, а ако се тачке O, A_1 разликују, онда конструишимо праву p која је нормална на OA_1 у тачки A_1 и не садржи тачку A и означимо са B, C пресечне тачке те праве и круга l.

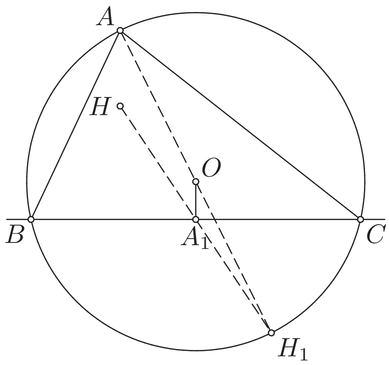
Доказ: Треба доказати да је тачка A једно теме троугла $\triangle ABC$, да је тачка H ортоцентар тог троугла и да је тачка O центар његовог описаног круга. Очигледно је испуњено да је тачка A теме троугла $\triangle ABC$.

ПК се тачке B, C разликују и припадају правој p која не садржи тачку A, па су A, B, C три неколинеарне тачке. Такође, оне ПК припадају кругу l, па је l описани круг троугла $\triangle ABC$, а како је O његов центар, следи да је O центар описаног круга троугла $\triangle ABC$.

Из претходног закључка следи да је $OB = OC$. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда тачка O припада страници BC, па због $OB = OC$ закључујемо да је O (тј. A_1) средиште странице BC. Ако се тачке O, A_1 разликују, онда је по конструкцији $OA_1 \perp BC$, па како O припада симетрали странице BC (јер важи $OB = OC$), следи да је OA_1 симетрала странице BC. ПК тачка A_1 припада страници BC, па следи да је она њено средиште. ПК је тачка H_1 симетрична темену A у односу на центар описаног круга, а у 3. задатку из области Подударност доказали смо да је тачка симетрична ортоцентру у односу на средиште странице BC симетрична и темену A у односу на центар описаног круга троугла $\triangle ABC$. Следи да је тачка H_1 симетрична ортоцентру у односу на средиште A_1 дужи BC, а самим тим и да је ортоцентар симетричан тачки H_1 у односу на тачку A_1. ПК је A_1 средиште дужи HH_1, па следи да је тачка H симетрична тачки H_1 у односу на средиште A_1 странице BC, што значи да је тачка H ортоцентар троугла $\triangle ABC$.

Дискусија: Ако се тачке A, O поклапају, задатак нема решења, јер се темена сваког троугла разликују од центра његовог описаног круга (а тада такође не постоји круг $l(O, OA)$). Нека су тачке A, O различите. Морамо обезбедити да права p коју конструишемо кроз тачку A_1 сече круг l у двема тачкама и да не садржи тачку A. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда смо ту праву конструисали произвољно тако да се разликује од праве OA. Свака права која пролази кроз тачку O сече круг l у двема тачкама и само права OA садржи тачку A. Дакле, тада постоји бесконачно много решења.





Нека се тачке O, A_1 разликују. Тачка O је средиште дужи AH_1, а тачка A_1 је средиште дужи HH_1. Ако су тачке A, H, H_1 неколинеарне (тј. ако постоји троугао $\triangle AHH_1$), онда је OA_1 његова средња линија и важи $OA_1 \parallel AH$ и $OA_1 = \frac{AH}{2}$. Ако су тачке A, H, H_1 колинеарне, онда је $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OH_1}$ и $\overrightarrow{HA_1} = \overrightarrow{A_1H_1}$ (јер су O, A_1 редом средишта дужи AH_1, HH_1), па следи да је $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OA_1}$. Следи да је $AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \|2\overrightarrow{OA_1}\| = 2\|\overrightarrow{OA_1}\| = 2OA_1$.

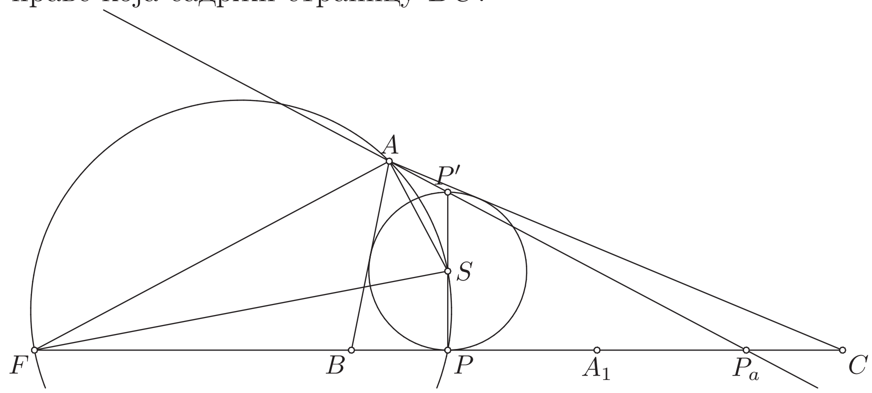
Да би права p која садржи A_1 и нормална је на OA_1 секла круг $l(O, OA)$ у двема тачкама, тачка A_1 мора припадати унутрашњости круга l, тј. мора бити $OA_1 < OA$. Дакле, добијамо услов $\frac{1}{2}AH < OA$, тј. $AH < 2OA$. У случају да права p садржи тачку A, нема решења, а у осталим случајевима постоје два решења, јер имамо избор коју ћемо од пресечних тачака праве p и круга l обележити са B, а коју са C. Ако су тачке A, H, O колинеарне, онда је троугао $\triangle ABC$ једнакокраки с врхом A, па заменом ознака теменима B, C добијамо подударна решења, а ако тачке A, H, O нису колинеарне, онда заменом ознака теменима B, C не добијамо подударна решења.

Дакле, ако се тачке O, A разликују, а тачке A, H поклапају, постоји бесконачно много решења. Ако се тачке O, A разликују, као и тачке A, H, ако су A, H, O колинеарне и важи $AH < 2OA$, постоје два међусобно подударна решења. Ако се тачке O, A и A, H разликују, A, H, O нису колинеарне, угао $\measuredangle HAO$ није туп и важи $AH < 2OA$, онда постоје два неподударна решења. Ако се тачке O, A и A, H разликују, A, H, O нису колинеарне и права p не садржи тачку A, постоје два неподударна решења. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

3. Дате су тачке A_1, S, F. Конструисати троугао ABC ако је A_1 средиште BC, S центар уписаног круга, а F пресек симетрале спољашњег угла у темену A и праве BC.

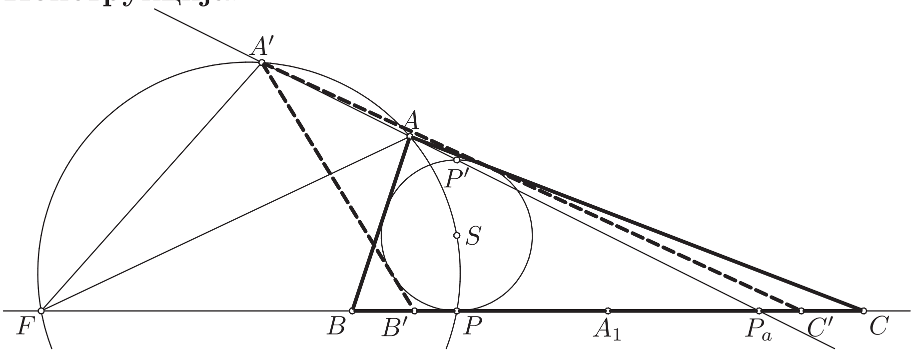
Решење:

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. нека је тачка A_1 средиште странице BC, тачка S центар његовог уписаног круга и F пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A и праве која садржи страницу BC.



Нека су P, P', P_a тачке из Великог задатка. Тачка P је подножје нормале из тачке S на страници BC, а самим тим и на правој FA_1. На основу Великог задатка је тачка P_a симетрична тачки P у односу на тачку A_1, а тачка P' јој је симетрична у односу на тачку S. Полуправа AS је бисектриса унутрашњег, а полуправа AF бисектриса спољашњег угла код темена A, што значи да је угао $\measuredangle FAS$ прав. Према томе, тачка A припада кругу над пречником FS. Takoђе, на основу Великог задатка важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, па тачка A припада правој P_aP'. Следи да она припада пресеку круга над пречником FS и праве P_aP'. Праве AB и AC су тангенте уписаног круга $k(S, SP)$ и тачке B, C припадају правој FA_1.

Конструкција:



Конструишимо праву FA_1. Означимо подножје нормале из тачке S на правој FA_1 са P, а затим тачке симетричне тачки P редом у односу на тачке A_1, S означимо са P_a, P'. Конструишимо круг над пречником FS и његов пресек с правом P_aP' означимо са A тако да важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Конструишимо тангенте круга $k(S, SP)$ из тачке A и њихове пресеке с правом FA_1 означимо са B, C тако да важи $\mathcal{B}(B, P, C)$.

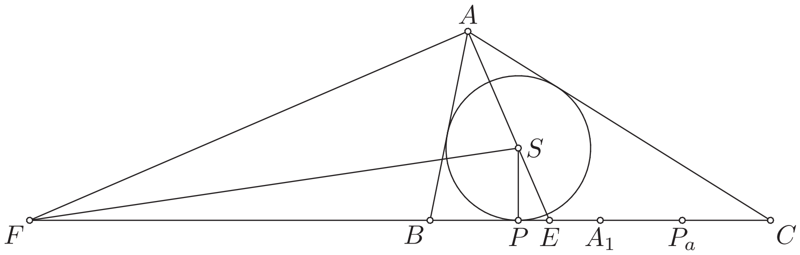
Доказ: Треба доказати да је тачка A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, да је тачка S центар његовог уписаног круга и да је F пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A и праве BC.

ПК је полупречник SP круга $k(S, SP)$ нормалан на правој FA_1, тј. на правој BC, па следи да је права BC тангента круга k. Такође, праве AB и AC су ПК тангенте круга k, а како ПК важи $\mathcal{B}(B, P, C)$, следи да је k уписани круг или споља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. Пошто ПК важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, следи $A, P' \doteq BC$, а пошто је S средиште PP', следи $\mathcal{B}(P, S, P')$, па је $P', S \doteq BC$. Следи $A, S \doteq BC$, па је k уписани круг троугла $\triangle ABC$, што значи да је његов центар S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$.

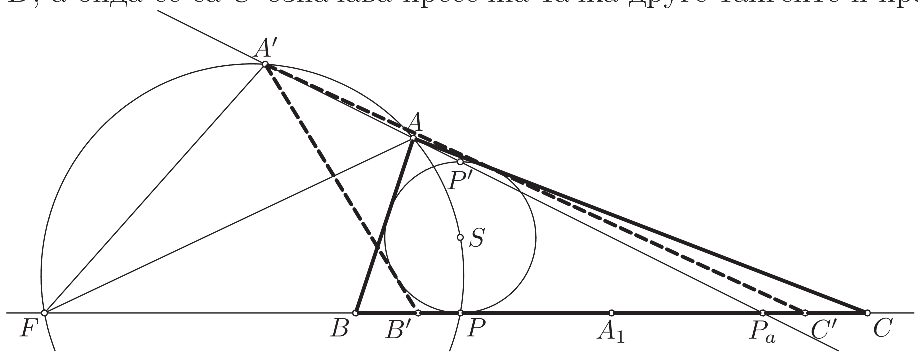
Из чињеница да је тачка P додирна тачка уписаног круга и странице BC, ПК тачка P' симетрична тачки P у односу центар уписаног круга S, $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ и да P_a припада правој BC, на основу Великог задатка следи да је тачка P_a додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена A и странице BC. Како је на основу Великог задатка средиште дужи BC уједно и средиште дужи PP_a, а ПК је A_1 средиште дужи PP_a, следи да је тачка A_1 средиште дужи BC.

Пошто је S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$, следи да је полуправа AS бисектриса унутрашњег угла код темена A. ПК тачка A припада кругу над пречником FS, па је угао $\measuredangle FAS$ прав. Дакле, полуправа AF је бисектриса спољашњег угла, па како тачка F припада правој BC, следи да је она пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ и праве која садржи страницу BC.

Дискусија: Центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$ припада његовој унутрашњости, па следи да не припада правој BC, а самим тим ни правој FA_1. Дакле, тачке F, A_1, S морају бити неколинеарне, иначе задатак нема решења.



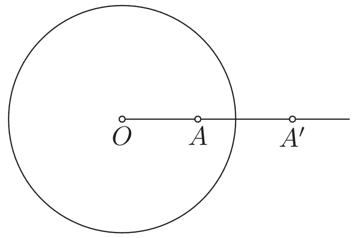
Нека је E пресечна тачка бисектрисе унутрашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ и странице BC. Без обзира на то да ли важи $\mathcal{B}(F, B, C)$ или $\mathcal{B}(F, C, B)$, важи $\mathcal{B}(F, P, E, A_1, P_a)$. Троугао $\triangle FAS$ је правоугли с правим углом код темена A, па је угао $\measuredangle FSA$ оштар. Због $\mathcal{B}(A, S, E)$ следи да је угао $\measuredangle FSE$ туп. Из $\mathcal{B}(F, E, A_1)$ следи да је $\measuredangle FSA_1 > \measuredangle FSE$, па је и угао $\measuredangle FSA_1$ туп. Дакле, да би постојало решење, тачке F, A_1, S морају бити такве да је угао $\measuredangle FSA_1$ туп. Такође, тачке F, S, A_1 морају бити такве да круг над пречником FS и полуправа P_aP' имају заједничких тачака. У том случају се било која од пресечних тачака полуправе P_aP' и круга над пречником FS може означити са A и биће испуњен услов $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Тачка A припада спољашњости круга $k(S, SP)$, што значи да постоје две тангенте круга k из тачке A и оне секу праву FA_1 са разних страна тачке P. Било која од тих тачака се може означити са B, а онда се са C означава пресечна тачка друге тангенте и праве FA_1.



Према томе, ако су тачке F, A_1, S неколинеарне такве да је угао $\measuredangle FSA_1$ туп и круг над пречником FS сече полуправу P_aP' у двема тачкама, задатак има четири неподударна решења, а ако се тај круг и полуправа P_aP' додирују, задатак има два неподударна решења. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

4 Инверзија

Дефиниција 23. Нека је $k(O, r)$ круг неке равни α. *Инверзија* у односу на круг k је пресликавање $\psi_k : \alpha \setminus \{O\} \longrightarrow \alpha \setminus \{O\}$ које тачку A слика у тачку A' полуправе OA такву да важи $OA \cdot OA' = r^2$.



Важно је нагласити да тачка O не припада ни домену ни кодомену пресликавања ψ_k.

Особине овог пресликавања су:

- ψ_k је инволуција, односно $\psi_k^2 = \mathrm{Id}$;

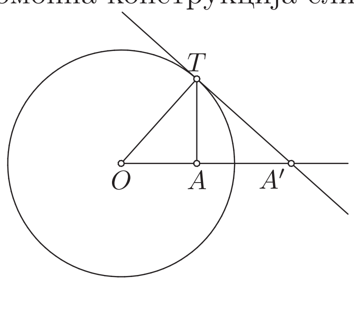
  Инверзија је очигледно инволуција, тј. $\psi_k^2 = \mathrm{Id}$, јер ако је A' слика тачке A, онда A' припада полуправој OA и важи $OA \cdot OA' = r^2$, па следи да тачка A припада полуправој OA' и важи $OA' \cdot OA = r^2$, што по дефиницији значи да је $\psi_k(A') = A$. Према томе, инверзија је бијекција и инволуција.

- тачка A се слика у себе ако и само ако припада кругу k;

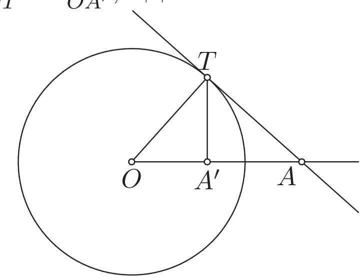
  Ако тачка A припада кругу k, онда је $OA \cdot OA = r^2$, па како A припада полуправој OA, следи да је $\psi_k(A) = A$. Обрнуто, ако је $\psi_k(A) = A$, онда је $OA \cdot OA = r^2$, тј. $OA = r$, па A припада кругу k.

- тачке из унутрашњости круга k, различите од тачке O, сликају се у тачке из спољашњости круга k и обрнуто;

  Помоћна конструкција слике тачке при инверзији:



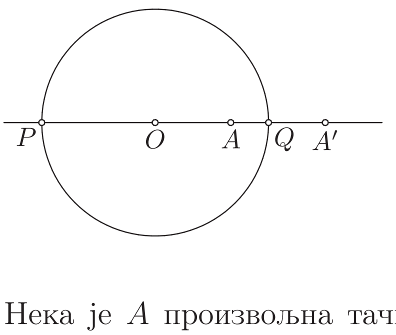
Нека је A тачка у унутрашњости круга k различита од тачке O. Конструишимо полуправу OA и нормалу n на тој полуправој у тачки A. Једну од пресечних тачака нормале n и круга k означимо са T и конструишимо тангенту круга k у тачки T (нормалу на OT у тачки T) и са A' означимо њен пресек с полуправом OA. Троуглови $\triangle OTA$ и $\triangle OA'T$ су слични јер је $\measuredangle TOA = \measuredangle A'OT$ и $\measuredangle OAT = \frac{\pi}{2} = \measuredangle OTA'$, па је $\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'}$, односно $OA \cdot OA' = OT \cdot OT = r^2$. Према томе, $\psi_k(A) = A'$.



Ако је A тачка у спољашњости круга k, онда конструишимо произвољну тангенту круга k из те тачке, означимо додирну тачку са T и конструишимо нормалу n на полуправој OA која садржи тачку T и означимо подножје те нормале са A'. На исти начин као малопре се добија да је $\psi_k(A) = A'$.

Према томе, овим смо доказали да се тачке из унутрашњости круга k, различите од O, сликају у његову спољашњост и обрнуто. Такође, тачке круга k се сликају у себе и све тачке које се сликају у себе припадају кругу k.

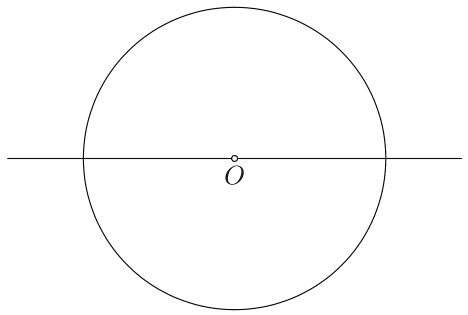
- ако је $\psi_k(A) = A'$ и ако је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне, онда важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$;

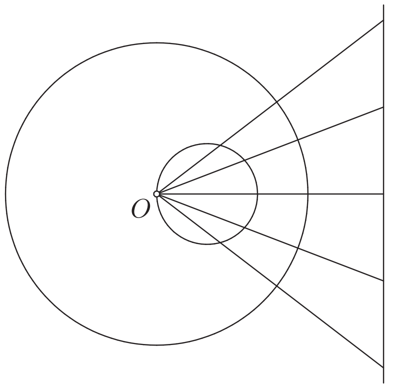


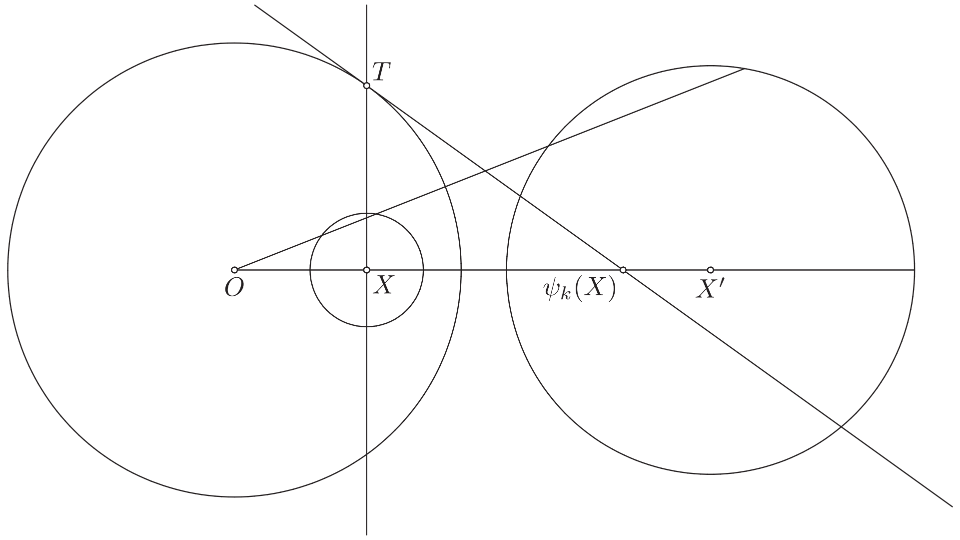
Нека је A произвољна тачка различита од O, $A' = \psi_k(A)$ и нека је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне. Тада је O средиште дужи PQ, а пошто A' припада полуправој OA, следи да није $\mathcal{B}(A, O, A')$, па по дефиницији 17 следи да је $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = OA \cdot OA' = r^2 = OP^2$. На основу задатка 2.11 следи да важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$.

- ако права p садржи тачку O, онда се $p \setminus \{O\}$ слика у $p \setminus \{O\}$;
- ако права p не садржи тачку O, онда се p слика у $l \setminus \{O\}$, где је l круг који садржи O;
- ако круг l садржи тачку O, онда се $l \setminus \{O\}$ слика у праву p која не садржи O;
- ако круг l не садржи тачку O, онда се l слика у круг l_1 који такође не садржи O, при чему се центар круга l **не слика** у центар круга l_1;

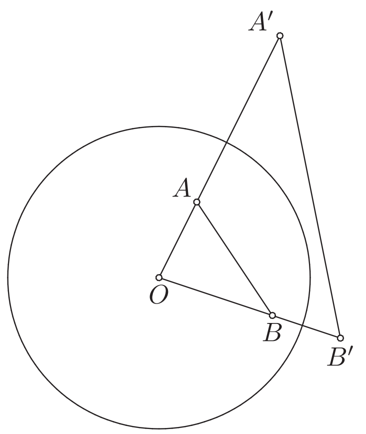
  На следећим сликама видимо како се инверзијом сликавају праве и кругови у зависности од тога да ли садрже тачку O. Такође, видимо да ако је $\psi_k(l) = l_1$, онда се центар круга l не слика у центар круга l_1.







- ако је $A' = \psi_k(A)$ и $B' = \psi_k(B)$, онда је $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$;



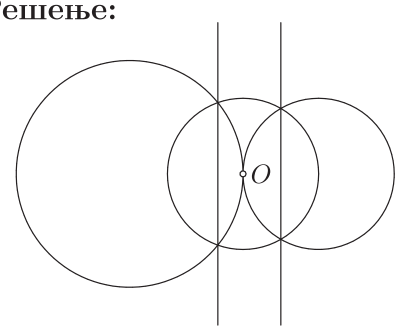
Нека су A, B две разне тачке и $A' = \psi_k(A), B' = \psi_k(B)$. Троуглови $\triangle OAB$ и $\triangle OB'A'$ су слични јер имају заједнички угао код темена O и из $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ следи да је $OA : OB' = OB : OA'$. Према томе, $OA : OB' = AB : B'A'$, тј. $A'B' = \frac{OB'}{OA} AB = \frac{OB \cdot OB'}{OA \cdot OB} AB = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.

- ψ_k чува углове између кривих.

  Угао између двеју кривих које се секу је угао између њихових тангенти у пресечној тачки, при чему је права сама себи тангента у произвољној тачки. Пошто инверзија чува углове, угао између тангенти двеју кривих у њиховој пресечној тачки једнак је углу између тангенти слика тих кривих при инверзији ψ_k у њиховој пресечној тачки. Пошто се инверзијом праве и кругови сликају у праве и кругове, инверзија чува углове између правих и кругова. Пресликавања која чувају углове називамо *конформним* пресликавањима.

1. Ако се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, тада се инверзијом сликају у две паралелне праве. Доказати.

Решење:



Нека је $k(O,r)$ круг инверзије (дакле, O је центар инверзије) и нека су k_1, k_2 кругови такви да је $k_1 \cap k_2 = \{O\}$. Пошто садржи центар инверзије, кад кажемо да се круг k_1 слика у праву k_1' која не садржи центар инверзије, морамо имати у виду да слика тачке O није дефинисана, па се формално скуп $k_1 \setminus \{O\}$ слика у праву k_1', тј. важи $\psi_k(k_1 \setminus \{O\}) = k_1'$. Слично и за круг k_2 важи $\psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = k_2'$, где је k_2' права која не садржи центар инверзије. Према томе, како је ψ_k бијекција, важи

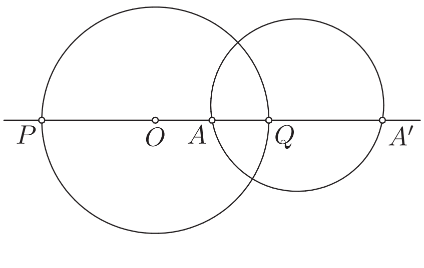
$$\begin{aligned} k_1' \cap k_2' &= \psi_k(k_1 \setminus \{O\}) \cap \psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = \psi_k((k_1 \setminus \{O\}) \cap (k_2 \setminus \{O\})) \\ &= \psi_k((k_1 \cap k_2) \setminus \{O\}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Дакле, праве k_1' и k_2' немају заједничких тачака, па су паралелне, што је и требало доказати.

2. Нека се инверзијом ψ_k тачка A која не припада кругу k слика у A' и нека је l произвољан круг који садржи A и A'. Доказати да је $l \perp k$.

У решењу овог задатка користићемо 11. и 14. задатак из области Сличност. Подсетимо се њихових поставки.
11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB, тада важи $\mathcal{H}(A,B;C,D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.
14. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A,C,B,D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D. Доказати да важи $\mathcal{H}(A,B;C,D) \iff k \perp l$.

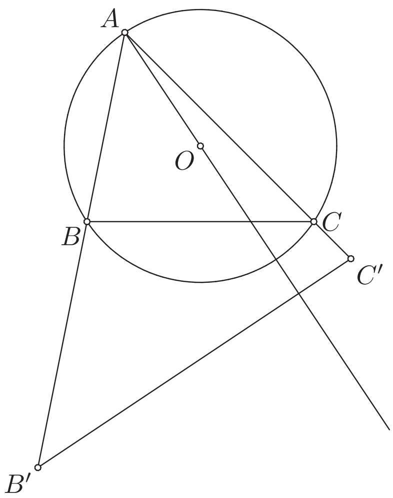
Решење:



Нека је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне. Тада је O средиште дужи PQ и важи $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = r^2 = PO^2$, па на основу 11. задатка из области Сличност важи $\mathcal{H}(P,Q;A,A')$. Дуж PQ је пречник круга k, круг l садржи тачке A, A' и важи $\mathcal{H}(P,Q;A,A')$, па на основу 14. задатка из области Сличност следи да је $k \perp l$, што је и требало доказати.

3. Нека је O центар описаног круга l троугла ABC. Ако су B' и C' тачке полуправих AB и AC такве да је $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ доказати да је $OA \perp B'C'$.

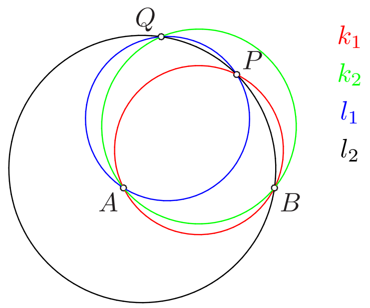
Решење:



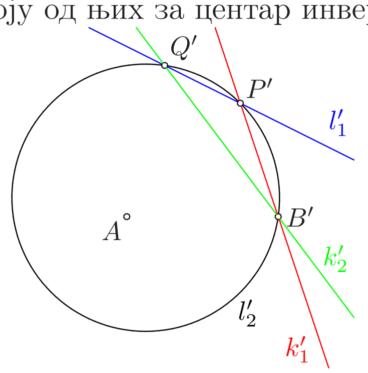
Нека је $k(A, \rho)$ круг с центром у тачки A чији је полупречник ρ једнак $\sqrt{AB \cdot AB'}$. Тада је $B' = \psi_k(B)$ и $C' = \psi_k(C)$. Описани круг l садржи тачку A, па се инверзијом ψ_k слика у праву $B'C'$ (тачније, $\psi_k(l \setminus \{A\}) = B'C'$). Такође, права AO садржи тачку A, па се инверзијом ψ_k слика у себе (тачније, $\psi_k(AO \setminus \{A\}) = AO \setminus \{A\}$). Права AO и круг l су међусобно нормални, јер права AO садржи центар O круга l. Пошто инверзија чува углове, следи да су слике праве AO и круга l међусобно нормални, тј. да је $AO \perp B'C'$, што је и требало доказати.

4. Нека је $ABPQ$ нететивни четвороугао. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABP и ABQ једнак углу између кругова описаних око троуглова PQA и PQB.

Решење:



Означимо кругове описане око троуглова $\triangle ABP, \triangle ABQ$ редом са k_1, k_2, а кругове описане око троуглова $\triangle PQA, \triangle PQB$ редом са l_1, l_2. Много је лакше наћи угао између правих него између кругова. Инверзија чува углове и одређене кругове слика у праве, па је пожељно применити неку инверзију и пресликати што већи број кругова у праве. Центар инверзије одаберимо тако да припада највећем броју кругова. Пошто све четири тачке A, B, P, Q припадају по трима круговима, одаберимо било коју од њих за центар инверзије, нпр. тачку A.

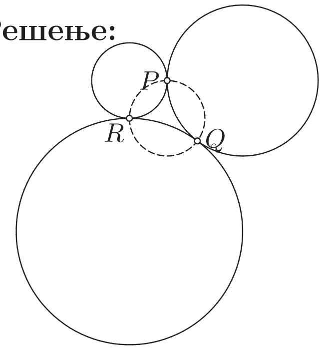


Дакле, нека је $k(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке B', P', Q' дате са $B' = \psi_k(B), P' = \psi_k(P), Q' = \psi_k(Q)$, праве k_1', k_2', l_1' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{A\}), k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{A\}), l_1' = \psi_k(l_1 \setminus \{A\})$ и нека је круг l_2' дат са $l_2' = \psi_k(l_2)$. Знамо да l_2 круг не садржи тачку A (ако би је садржао онда би четвороугао $ABPQ$ био тетиван што је у супротности да претпоставком задатка да је $ABPQ$ нететиван четвороугао), те се он слика у круг l_2' који не садржи тачку A. Круг k_1 садржи тачке B, P, па је $k_1' = B'P'$. Слично, $k_2' = B'Q'$ и $l_1' = P'Q'$, а како круг l_2 садржи тачке B, P, Q, следи да круг l_2' садржи тачке B', P', Q'. Угао између праве l_1' и круга l_2' једнак је оштром углу између тетиве $P'Q'$ и тангенте круга

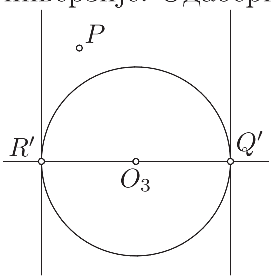
l_2' у некој од тачака P', Q' (подударни су), а тај угао је подударан периферијском углу над тетивом $P'Q'$, тј. углу $\measuredangle P'B'Q'$, што је угао између правих k_1', k_2'. Инверзија чува углове, па следи да је угао између кругова l_1, l_2 подударан углу између кругова k_1, k_2, што је и требало доказати.

5. Нека се кругови k_1, k_2, k_3 међусобно додирују у тачкама P, Q, R. Доказати да је круг описан око троугла PQR ортогоналан на сва три круга.

Решење:



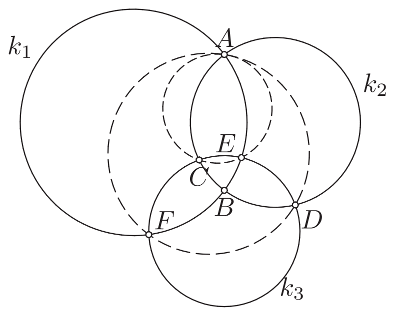
Нека је $k_1 \cap k_2 = \{P\}, k_2 \cap k_3 = \{Q\}, k_3 \cap k_1 = \{R\}$. Означимо круг описан око троугла $\triangle PQR$ са l. Кроз сваку од тачака P, Q, R пролазе по три од четири дата круга, па је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку P.



Нека је $k(P, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке Q', R' дате са $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R)$, нека су праве k_1', k_2', l' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{P\}), l' = \psi_k(l \setminus \{P\})$ и нека је круг k_3' дат са $k_3' = \psi_k(k_3)$. Кругови k_1, k_2 се додирују у центру инверзије P, па на основу 1. задатка следи да је $k_1' \parallel k_2'$, а такође кругови k_1, k_2 додирују круг k_3 редом у тачкама R, Q, па су k_1', k_2' тангенте круга k_3' редом у тачкама R', Q'. Према томе, ако је O_3 центар круга k_3', онда је $O_3R' \perp k_1'$ и $O_3Q' \perp k_2'$. Због $k_1' \parallel k_2'$, следи да је $O_3R' \parallel O_3Q'$, па следи да су тачке O_3, Q', R' колинеарне. Круг l садржи тачке P, Q, R, па је права $Q'R'$ слика круга l, односно права l'. Дакле, права l' је нормална на k_1', k_2' и садржи центар круга k_3', па је нормална и на k_3'. Инверзија чува углове, па следи да је $l \perp k_1, k_2, k_3$, што је и требало доказати.

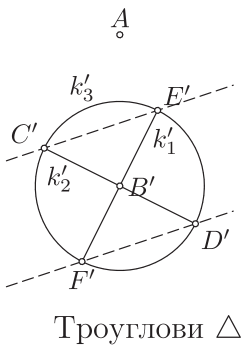
6. Кругови k_1, k_2, k_3 су међусобно ортогонални, при чему се k_1 и k_2 секу у тачкама A и B, k_2 и k_3 у тачкама C и D, k_3 и k_1 у тачкама E и F. Доказати да се кругови описани око троуглова ACE и ADF додирују у тачки A.

Решење:



Нека су l_1, l_2 кругови описани око троуглова $\triangle ACE, \triangle ADF$. Тачка A припада свим круговима осим кругу k_3, па одаберимо њу за центар инверзије.

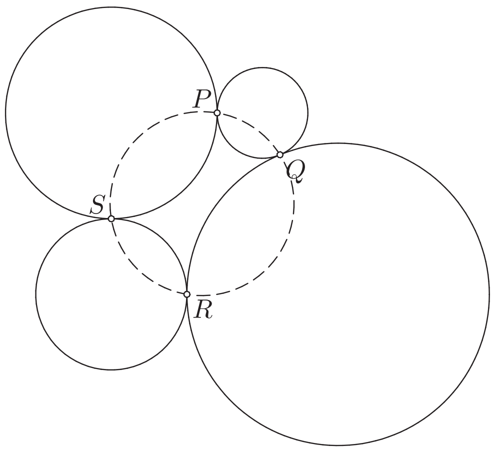
Нека је $k(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке B', C', D', E', F' дате са $B' = \psi_k(B)$, $C' = \psi_k(C)$, $D' = \psi_k(D)$, $E' = \psi_k(E)$, $F' = \psi_k(F)$, нека су праве k_1', k_2', l_1', l_2' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{A\})$, $k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{A\})$, $l_1' = \psi_k(l_1 \setminus \{A\})$, $l_2 = \psi_k(l_2 \setminus \{A\})$ и нека је круг k_3' дат са $k_3' = \psi_k(k_3)$. Инверзија чува углове, па следи да су праве k_1', k_2' међусобно управне у тачки B' и управне на кругу k_3', тј. садрже његов центар. Према томе, тачка B' је центар круга k_3'. Кругови k_1, k_3 имају заједничке тачке E, F, па следи да се права k_1' и круг k_3' секу у тачкама E', F'. Слично, права k_2' и круг k_3' се секу у тачкама C', D'. Круг l_1 садржи тачке A, C, E, а круг l_2 тачке A, D, F, па је $l_1' = C'E'$ и $l_2' = D'F'$.

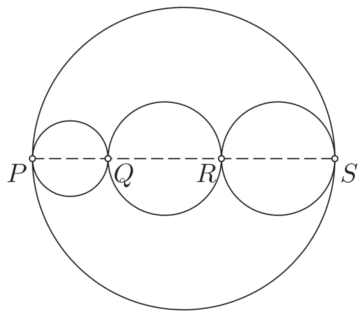


Троуглови $\triangle B'C'E'$ и $\triangle B'D'F'$ су једнакокрако правоугли, па следи да су углови $\measuredangle B'C'E'$ и $\measuredangle B'D'F'$ једнаки по 45°, па су и међусобно подударни. Према томе, следи да су праве $C'E'$ и $D'F'$ паралелне, тј. $l_1' \parallel l_2'$. Како кругови l_1 и l_2 имају заједничку тачку A, следи да им је то једина заједничка тачка, тј. да се додирују у тачки A.

7. У равни су дата четири круга од којих сваки додирује тачно два круга од преосталих. Доказати да су додирне тачке колинеарне или концикличне.

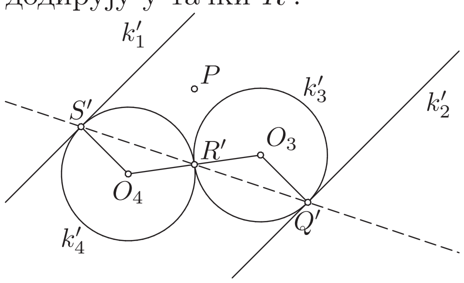
Решење:



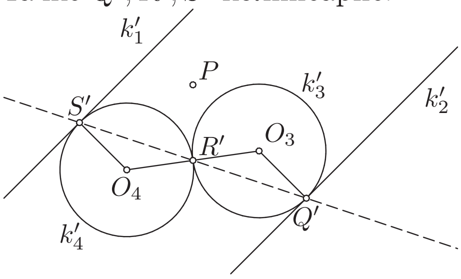


Нека се кругови k_1, k_2 додирују у тачки P, нека се кругови k_2, k_3 додирују у тачки Q, нека се кругови k_3, k_4 додирују у тачки R и нека се кругови k_4, k_1 додирују у тачки S. Треба доказати да су тачке P, Q, R, S колинеарне или концикличне. Свака од тачака P, Q, R, S заједничка је за по два круга, тако да је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку P.

Нека је $k(P, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке Q', R', S' дате са $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R), S' = \psi_k(S)$, праве k_1', k_2' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{P\})$ и кругови k_3', k_4' дати са $k_3' = \psi_k(k_3), k_4' = \psi_k(k_4)$. На основу 1. задатка следи да су праве k_1', k_2' паралелне, а пошто се k_2, k_3 додирују у тачки Q и k_1, k_4 додирују у тачки S, следи да су праве k_1', k_2' редом тангенте кругова k_4, k_3 у тачкама S', Q'. Пошто се кругови k_3, k_4 додирују у тачки R, следи да се кругови k_3', k_4' додирују у тачки R'.



Означимо са O_3, O_4 редом центре кругова k_3', k_4'. Пошто се они додирују у тачки R', следи да су тачке O_3, R', O_4 колинеарне. Према томе, довољно је доказати да важи $\measuredangle S'R'O_4 = \measuredangle Q'R'O_3$, јер ће тада то бити унакрсни углови и доказаћемо да су Q', R', S' колинеарне. Пошто су праве k_1', k_2' редом тангенте кругова k_4', k_3' у тачкама S', Q', следи да је $S'O_4 \perp k_1'$ и $Q'O_3 \perp k_2'$, а пошто су и паралелне, следи да важи $S'O_4 \parallel Q'O_3$. Према томе, углови $\measuredangle S'O_4R'$ и $\measuredangle Q'O_3R'$ јесу углови с паралелним крацима, па су подударни, тј. важи $\measuredangle S'O_4R' = \measuredangle Q'O_3R'$. Троуглови $\triangle O_4S'R', \triangle O_3Q'R'$ су једнакокраки и имају подударне углове при врху, па следи да имају подударне и остале углове. Специјално, важи $\measuredangle S'R'O_4 = \measuredangle Q'R'O_3$, те су тачке Q', R', S' колинеарне.

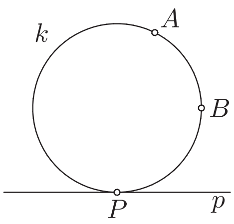


Онда су P, Q, R, S колинеарне или концикличне. Заиста, нека је p права која садржи тачке Q', R', S'. Инверзија је инволуција, па је $Q = \psi_k(Q')$, $R = \psi_k(R')$, $S = \psi_k(S')$. Ако $p \ni P$, онда је $\psi_k(p \setminus \{P\}) = p \setminus \{P\}$, па следи да $Q, R, S \in p$, што значи да су P, Q, R, S колинеарне. Ако $p \not\ni P$, онда је $\psi_k(p) = p' \setminus \{P\}$, где је p' круг који садржи тачку P и $Q, R, S \in p'$, што значи да су P, Q, R, S концикличне.

8. Конструисати круг k који садржи две дате тачке A и B и додирује дату праву p.

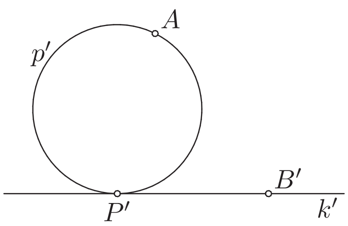
Решење:

Анализа: Нека је k круг који испуњава услове задатка, тј. нека $k \ni A, B$ и нека k додирује p.



Бар једна од тачака A, B не припада правој p, јер се права и круг додирују у тачно једној тачки, а A, B су различите тачке. Без умањења општости, претпоставимо да тачка A не припада правој p и одаберимо њу за центар инверзије.

Нека је $l(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека је тачка B' дата са $B' = \psi_l(B)$, права k' дата са $k' = \psi_l(k \setminus \{A\})$ и круг p' дат са $p' \setminus \{A\} = \psi_l(p)$, при чему $k' \not\ni A$ и $p' \ni A$.



Круг k садржи тачку B и додирује праву p, па следи да права k' садржи тачку B' и додирује круг p', тј. да је тангента круга p' из тачке B'.

Конструкција: Нека $p \not\ni A$. Конструишимо круг $l(A, \rho)$ произвољног полупречника $\rho > 0$. Конструишимо круг p' који садржи тачку A такав да важи $p' \setminus \{A\} = \psi_l(p)$. Одредимо тачку $B' = \psi_l(B)$ и конструишимо тангенту k' круга p' из тачке B' такву да $k' \not\ni A$. Конструишимо круг k који садржи тачку A такав да важи $k \setminus \{A\} = \psi_l(k')$.

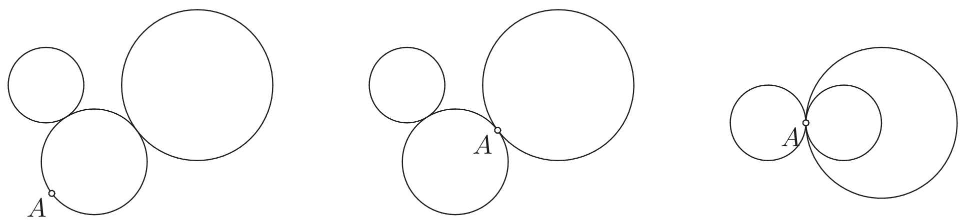
Доказ: По конструкцији, k' је права која не садржи тачку A, тј. центар инверзије, па је k круг који садржи тачку A. Такође, права k' садржи тачку $B' = \psi_l(B)$, па следи да k садржи тачку $B = \psi_l(B')$. По конструкцији, права k' додирује круг p' (у тачки различитој од тачке A, јер је k' не садржи), па следи да круг k додирује праву p.

Дискусија: Ако обе тачке A, B припадају правој p, задатак нема решења. У супротном, број решења је једнак броју тангенти круга p' из тачке B', које не садрже тачку A, што може бити нула ако B' припада унутрашњости круга p', један ако $B' \in p'$ или ако B' припада спољашњости круга p' и једна од тангенти је права AB', односно два у свим осталим случајевима.

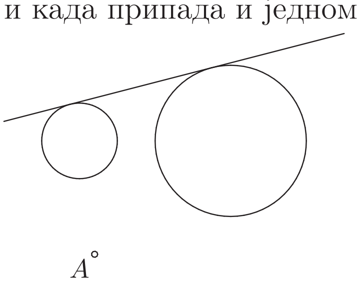
9. Конструисати круг k који садржи дату тачку A и додирује дате кругове k_1 и k_2.

Решење:

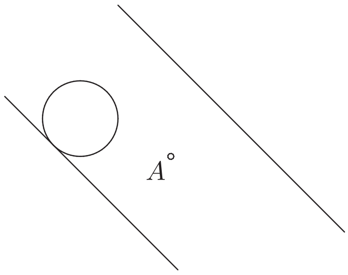
Анализа: Нека је k круг који испуњава услове задатка, тј. нека $k \ni A$ и нека k додирује кругове k_1, k_2.



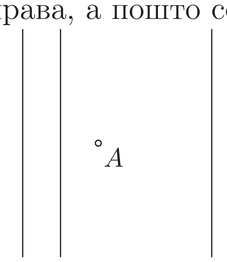
Нека је $l(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека је права k' дата са $k' = \psi_l(k \setminus \{A\})$. За праву k' важи да не садржи тачку A. Разликујемо три случаја: када тачка A не припада ни кругу k_1 ни кругу k_2, када припада тачно једном од њих (без умањења општости, кругу k_2) и када припада и једном и другом.



У првом случају су и $k_1' = \psi_l(k_1)$ и $k_2' = \psi_l(k_2)$ кругови који не садрже тачку A и додирују праву k', тј. k' је заједничка тангента кругова k_1', k_2'.



У другом случају је $k_1' = \psi_l(k_1)$ круг који не садржи тачку A и додирује праву k', тј. k' је тангента круга k_1'. Такође, $k_2' = \psi_l(k_2 \setminus \{A\})$ је права, а пошто се кругови k, k_2 додирују у тачки A, следи да је $k' \parallel k_2'$.



У трећем случају се инверзијом у односу на круг l оба круга (строго формално, без тачке A) сликају у праве које не садрже тачку A. Пошто се кругови k_1, k додирују у тачки A, на основу 1. задатка следи да важи $k_1' \parallel k'$. Исти закључак важи и за праве k_2', k', тј. важи $k_2' \parallel k'$.

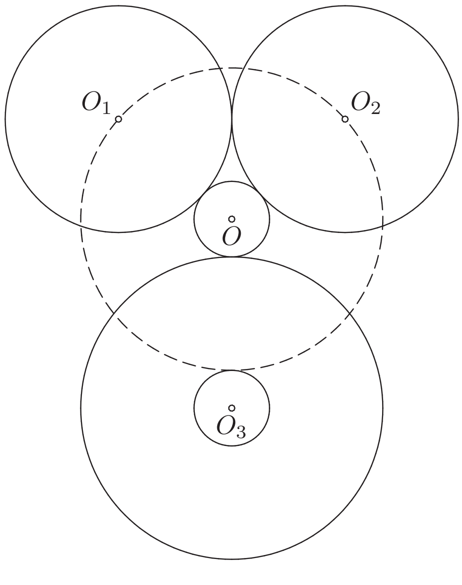
Конструкција: Конструишимо круг $l(A, \rho)$ произвољног полупречника $\rho > 0$. У зависности од тога да ли тачка A припада круговима k_1, k_2 или не, конструишимо њихове слике k_1', k_2' при инверзији ψ_l. Конструишимо праву k' која не садржи тачку A и испуњава један од следећа три услова:
1. заједничка је тангента кругова k_1', k_2', ако $A \notin k_1, k_2$.
2. паралелна је правој k_2' и тангента је круга k_1', ако $A \notin k_1$ и $A \in k_2$;
3. паралелна је правима k_1', k_2' ако $A \in k_1, k_2$;
На крају, конструишимо круг k који садржи тачку A такав да важи $k \setminus \{A\} = \psi_l(k')$.

Доказ: По конструкцији је k' права која не садржи тачку A, тј. центар инверзије, па је k круг који садржи тачку A. Права која не садржи тачку A и паралелна је правој k' слика се у круг који додирује круг k у центру инверзије, тј. у тачки A, а круг који не садржи тачку A и додирује праву k' слика се у круг који не садржи тачку A и додирује круг k. Према томе, у свим претходно разматраним случајевима следи да кругови k_1, k_2 додирују круг k.

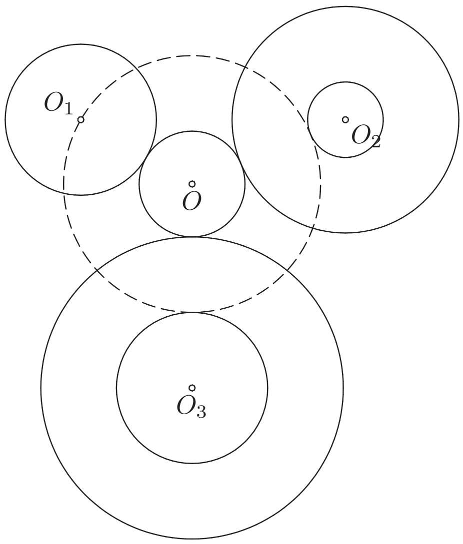
Дискусија: Број решења једнак је броју правих не садрже тачку A и испуњавају одговарајући услов из дела Конструкција. У првом случају број таквих правих може бити од нула до четири, у зависности од међусобног положаја кругова k_1', k_2' (рачунају се и заједничке спољашње и заједничке унутрашње тангенте). У другом случају број таквих правих може бити један или два, у зависности од тога да ли нека од двеју тангенти круга k_1' које су паралелне правој k_2' садржи тачку A или не. У трећем случају има беконачно много решења ако су праве k_1', k_2' паралелне, односно нема решења ако се те праве секу.

10. Конструисати круг који споља додирује три дата круга k_1, k_2, k_3.

Решење: Решење овог задатка неће бити дато као решења осталих конструктивних задатака (иако треба исписати све четири етапе, као и у осталим таквим задацима), јер ће се једноставном трансформацијом довести до неког од претходна два задатка, која знамо да решимо. Нека круг $k(O, r)$ додирује кругове $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2), k_3(O_3, r_3)$ споља. Нека је, без умањења општости, $r_1 \leq r_2, r_3$ и нека је $l(O, r+r_1)$ круг. Тада круг l садржи центар O_1 круга k_1.



Ако важи нека од једнакости $r_1 = r_2$, $r_1 = r_3$, онда круг l садржи и неку од тачака O_2, O_3. Ако садржи обе, онда је он описани круг троугла $\triangle O_1O_2O_3$. Ако садржи само једну од њих (без умањења општости, тачку O_2), онда он додирује круг $l_3(O_3, r_3 - r_1)$ споља. Дакле, тада круг l садржи тачке O_1, O_2 и додирује круг l_3 споља, па се његова конструкција врши слично као у 8. задатку. Тамо је, додуше, задатак био да се конструише круг који садржи две дате тачке и додирује дату праву, а овде уместо праве треба да додирује круг споља, али се и овај задатак решава на исти начин.



Ако круг l не садржи ниједну од тачака O_2, O_3, онда додирује и круг $l_2(O_2, r_2 - r_1)$ споља и круг $l_3(O_3, r_3 - r_1)$ споља, па се његова конструкција врши исто као у претходном задатку (круг који садржи дату тачку и додирује два дата круга), с тим што се овде узимају у обзир само заједничке спољашње тангенте и то такве да су O_1, l_2', l_3' с исте стране те тангенте, иначе ће круг добијен инверзијом додиривати кругове l_2, l_3 унутра.

5 Изометријске трансформације равни

Дефиниција 24. Нека је α раван. Пресликавање $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$, такво да за сваки пар тачака (A, B) равни α важи $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$, називамо *изометријском трансформацијом* (*изометријом*) равни α.

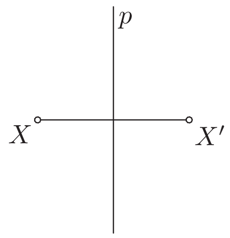
Релација подударности парова тачака је основни појам, тј. не дефинише се. Све изометрије су бијекције, сликају праве у праве (штавише, чувају распоред тачака на правој, тј. ако важи $\mathcal{B}(A, B, C)$, онда важи $\mathcal{B}(\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B), \mathfrak{I}(C))$, полуправе у полуправе, дужи у дужи, полуравни у полуравни, угаоне линије у угаоне линије, углове у углове итд. Изометрије које мењају оријентацију равни називамо *индиректним* изометријама, а оне које чувају оријентацију равни називамо *директним* изометријама. За сваке две изометрије $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$, њихова композиција $\mathfrak{J} \circ \mathfrak{I}$ је такође изометрија, и инверз $\mathfrak{I}^{-1}$ изометрије $\mathfrak{I}$ је такође изометрија. Другим речима, изометрије чине групу у односу на операцију композиције пресликавања.

Дефиниција 25. Нека су $\Phi, \Phi' \subseteq \alpha$ фигуре у равни α. Ако постоји изометрија $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$ равни α таква да важи $\Phi' = \mathfrak{I}(\Phi)$, онда кажемо да је фигура Φ *подударна* фигури Φ' и пишемо $\Phi \cong \Phi'$.

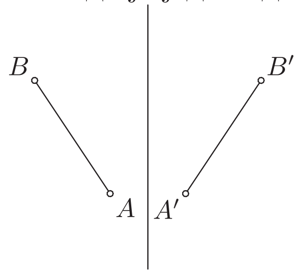
Није тешко доказати да је релација $\cong$ подударности фигура једна релација еквиваленције. Због симетричности релације чешће ћемо говорити да су фигуре *међусобно подударне*. Дужи $AB, A'B'$ су међусобно подударне ако и само ако важи $(A, B) \cong (A', B')$.

Сада ћемо видети које све изометрије равни постоје и у каквим су оне односима.

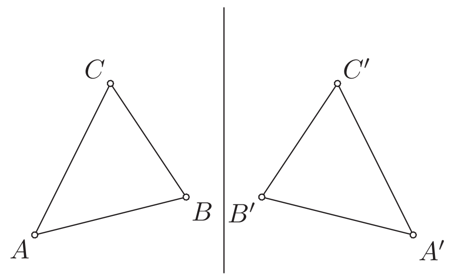
Дефиниција 26. Нека је $p \subset \alpha$ права равни α и нека је пресликавање $\mathcal{S}_p$ дато на следећи начин: ако је $X \in p$, онда је $\mathcal{S}_p(X) = X$, а иначе је $\mathcal{S}_p(X) = X'$, где је X' тачка таква да је p медијатриса дужи XX' у равни α. Онда се пресликавање $\mathcal{S}_p$ назива *осном рефлексијом* (*осном симетријом*) равни α с осом p.



Није тешко доказати да је овако дефинисано пресликавање изометрија. Слика произвољне дужи AB је дуж $A'B'$ ($A' = \mathcal{S}_p(A)$, $B' = \mathcal{S}_p(B)$) таква да је једна од њих „лик у огледалу” другој и обратно.



Шта се дешава ако двапут применимо осну рефлексију? По дефиницији се тачке праве p сликају у себе, а ако се X слика у X' такво да је p медијатриса дужи XX', онда се X' мора сликати у X. Дакле, $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathrm{Id}$, што значи да је осна рефлексија сама себи инверз, односно да је инволуција. По дефиницији се тачке осе p сликају у себе, а тачке ван осе p се не сликају у себе (да би постојала дуж чија је p медијатриса), па су једине фиксне тачке (тачке које се сликају у себе) тачке осе p.



Што се промене оријентације тиче, ако је $\triangle ABC$ позитивно оријентисан троугао, тј. ако су A, B, C тачке равни α такве да се од темена A ка темену B па затим ка темену C иде у позитивном смеру, онда је троугао $\triangle A'B'C'$, где су A', B', C' редом слике тачака A, B, C при осној рефлексији $\mathcal{S}_p$, негативно оријентисан троугао. Према томе, осна рефлексија мења оријентацију равни, па је индиректна изометрија равни.

Теорема 11. *Ако је $\mathfrak{I}$ индирек̄тна изомет̄рија равни α која има бар једну фиксну т̄ачку P, онда је $\mathfrak{I}$ осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ чија оса $p \subset \alpha$ садржи фиксну т̄ачку P.*

Теорема 12 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $p \subset \alpha$ п̄рава равни α, $\mathcal{S}_p$ осна рефлексија и $\mathfrak{I}$ п̄роизвољна изомет̄рија равни α. Ако је $p' = \mathfrak{I}(p)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}$.*

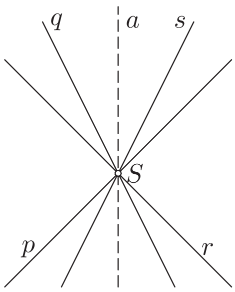
Дефиниција 27. Нека је $\Phi \subseteq \alpha$ фигура равни α. Кажемо да је права p *оса симет̄рије* фигуре Φ ако је $\mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$. Ако фигура Φ има бар једну осу симетрије, кажемо да је она *основиметрична*.

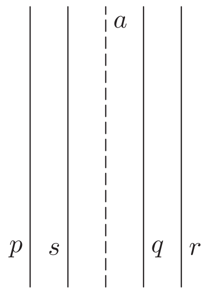
Сваку изометрију равни α можемо изразити преко осних рефлексија. Штавише, увек их можемо одабрати тако да их буде највише три.

Теорема 13. *Нека је $\mathfrak{I}$ п̄роизвољна изомет̄рија равни α. Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p$ за неку п̄раву $p \subset \alpha$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ за неке п̄раве $p, q \subset \alpha$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ за неке п̄раве $p, q, r \subset \alpha$.*

У дефиницији 14 увели смо појам прамена правих у равни. Прамен правих је у директној вези с композицијом осних рефлексија. Наиме, важи следећа важна теорема.

Теорема 14. *Нека су $p, q, r \subset \alpha$ праве равни α. Онда је композиција $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ осна рефлексија ако и само ако праве p, q, r припадају једном прамену. Штавише, тада оса те рефлексије (означимо је са s) припада том прамену и ако је права a оса симетрије пара правих p, r, тада је права a оса симетрије и пара правих q, s.*





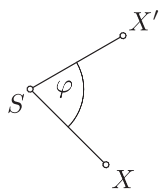
Утврдимо које још изометрије равни постоје.

Дефиниција 28. Пресликавање $\mathcal{E} : \alpha \longrightarrow \alpha$ такво да је $\mathcal{E}(X) = X$ за сваку тачку $X \in \alpha$ називамо *коинциденцијом*.

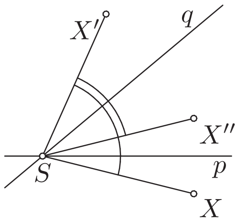
Коинциденција је, у ствари, идентичко пресликавање. Оно је тривијално изометрија, јер је $(A, B) \cong (A, B) = (\mathcal{E}(A), \mathcal{E}(B))$ за сваки пар тачака A, B. С обзиром на то да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathrm{Id} = \mathcal{E}$, имамо репрезентацију коинциденције преко производа двеју осних рефлексија. Тривијално, коинциденција је директна изометрија равни.

Теорема 15. *Ако изометрија $\mathfrak{I}$ равни α има бар три неколинеарне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α има бар две разне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$.*

Дефиниција 29. Нека је $S \in \alpha$ тачка равни α и φ оријентисани угао у тој равни. Пресликавање $\mathcal{R}_{S,\varphi} : \alpha \longrightarrow \alpha$ такво да је $\mathcal{R}_{S,\varphi}(S) = S$ и $\mathcal{R}_{S,\varphi}(X) = X'$ где је X' таква да важи $SX = SX'$ и $\measuredangle XSX' = \varphi$ (подударни су и имају исту оријентацију), за тачке $X \neq S$, назива се *ротацијом* око центра S за оријентисани угао φ.



Да бисмо разумели како ротација пресликава тачке равни α, замислимо да имамо крути штап чији један крај у центру S и који је фиксиран, а други крај је у произвољној тачки X равни α. Ротацијом штапа за оријентисани угао φ добијемо положај тачке $X' = \mathcal{R}_{S,\varphi}(X)$.



Како видети ротацију као композицију двеју осних рефлексија? Означимо са p произвољну праву равни α која садржи тачку S и са q праву равни α добијену ротацијом праве p око центра S за оријентисани угао $\frac{\varphi}{2}$. Није тешко доказати да у том случају важи $\mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Напоменимо да репрезентација ротације $\mathcal{R}_{S,\varphi}$ као $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ није јединствена, јер праве p, q можемо ротирати око центра S за произвољан угао и добити праве p', q' такве да је композиција $\mathcal{S}_{q'} \circ \mathcal{S}_{p'}$ такође једнака полазној ротацији.

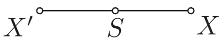
Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{S,\psi} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{R}_{S,\varphi+\psi}$, $\mathcal{R}_{S,0^\circ} = \mathcal{R}_{S,360^\circ} = \mathcal{E}$ и $\mathcal{R}_{S,\varphi}^{-1} = \mathcal{R}_{S,-\varphi}$, где је $-\varphi$ угао подударан углу φ, супротне оријентације.

Теорема 16. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α има тачно једну фиксну тачку S, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{S,\varphi}$, за неки оријентисани угао φ различит од 0° или пуног угла.*

Теорема 17 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $S \in \alpha$ тачка равни α, φ оријентисани угао у тој равни, $\mathcal{R}_{S,\varphi}$ ротација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α. Ако је $S' = \mathfrak{I}(S)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{S',\varphi}$, ако је $\mathfrak{I}$ директна, односно $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{S',-\varphi}$, ако је $\mathfrak{I}$ индиректна изометрија.*

Може се доказати да ако је φ конвексан угао различит од 0° или опруженог угла и $p' = \mathcal{R}_{S,\varphi}(p)$, онда праве p, p' заклапају углове φ и $180^\circ - \varphi$.

Специјални случај ротације јесте онај у коме је угао ротације опружени угао. Тада за тачку $X' = \mathcal{S}(X)$, где је $X \neq S$, важи да је $SX' = SX$ и $\measuredangle XSX' = 180^\circ$, тј. $\mathcal{B}(X, S, X')$. Тачка S је онда средиште дужи XX'.

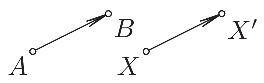


Ово пресликавање се назива *централном симетријом* и означава се са $\mathcal{S}_S$ (не употребљава се термин централна рефлексија; он се користи кад се говори о изометријама једне праве). Јасно је да важи $\mathcal{S}_S^{-1} = \mathcal{S}_S$, јер је $\mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_S = \mathcal{R}_{S,180^\circ} \circ \mathcal{R}_{S,180^\circ} = \mathcal{R}_{S,360^\circ} = \mathcal{E}$. Такође, ако је $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, онда је оријентисани угао од праве p ка правој q подударан углу $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, тј. важи $p \perp q$.

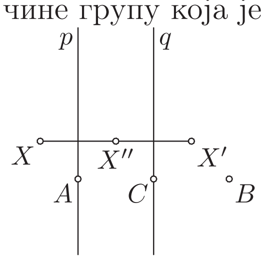
Слично појму осе симетрије неке фигуре, постоји и појам центра симетрије фигуре.

Дефиниција 30. Нека је $\Phi \subseteq \alpha$ фигура равни α. Кажемо да је тачка S *центар симетрије* фигуре Φ ако је $\mathcal{S}_S(\Phi) = \Phi$. Ако фигура Φ има бар један центар симетрије, онда је она *централносиметрична*.

Дефиниција 31. Нека је $\overrightarrow{AB}$ произвољан вектор у равни α. Пресликавање $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ дато са $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(X) = X'$, где је X' таква да је $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, назива се *транслацијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$.



Транслација не представља ништа друго него праволинијско кретање у одређеном смеру. Није тешко доказати да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$ и $\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{-\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$. Дакле, транслације (заједно са коинциденцијом) чине групу која је подгрупа групе изометрија.



Нека је p права која садржи тачку A и управна је на правој AB и нека је q права која садржи средиште C дужи AB и управна је на правој AB. Јасно, тада је $p \parallel q$. Није тешко доказати да важи $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Дакле, и транслацију видимо као композицију двеју осних рефлексија. Наравно, ово није једина репрезентација транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, тј. уместо правих p, q можемо посматрати праве p', q' које су управне на AB и налазе се на растојању $\frac{AB}{2}$, при чему је смер од праве p' ка правој q' исти као смер вектора $\overrightarrow{AB}$.

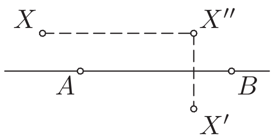
Транслација је директна изометрија. То можемо видети директно из дефиниције (померањем у правцу неког вектора не мења се оријентација равни), а можемо видети и из чињенице да се транслација представља као композиција двеју осних рефлексија. Што се тиче фиксних тачака, важи следеће. Ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, тј. ако је у питању коинциденција, све тачке равни α су фиксне, а ако је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$, онда је $X' \neq X$ за сваку тачку X равни α, тј. ниједна тачка није фиксна.

Теорема 18. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, где је $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор равни α.*

Теорема 19 (Теорема о трансмутацији). *Нека је $\overrightarrow{AB}$ произвољан вектор у равни α, $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ транслација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α. Ако је $A' = \mathfrak{I}(A)$ и $B' = \mathfrak{I}(B)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{A'B'}}$.*

Испоставља се да постоји само још један тип изометрија равни. Наиме, видели смо како изгледају изометрије равни које су композиције двеју осних рефлексија, у зависности од узајамног положаја оса тих рефлексија. На основу теореме 13 преостаје само још случај кад је изометрија равни композиција трију осних рефлексија. На основу теореме 14, ако су осе тих рефлексија праве једног прамена, композиција је поново рефлексија, а ако нису, онда је у питању следећа изометрија.

Дефиниција 32. Нека је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ ненула вектор равни α. Пресликавање $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ дато са $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ назива се *клизајућом рефлексијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$ у односу на праву AB.



Клизајућа рефлексија је, као што јој само име каже, композиција транслације („клизања”) и осне рефлексије. При томе, вектор $\overrightarrow{AB}$ мора бити паралелан оси рефлексије. Најчешће се узима онај представник вектора чије тачке припадају оси рефлексије, чиме се ознака клизајуће рефлексија значајно олакшава (није неопходно посебно означити осу и вектор). Ово је једна индиректна изометрија равни, јер је композиција директне и индиректне изометрије, те мења оријентацију равни. Такође, клизајућа рефлексија нема фиксних тачака.

Теорема 20. *Ако индиректна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$, где је $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор равни α.*

Теорема 21 (Теорема о трансмутацији). *Нека је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ ненула вектор равни α, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ клизајућа рефлексија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α. Ако је $A' = \mathfrak{I}(A)$ и $B' = \mathfrak{I}(B)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{A'B'}}$.*

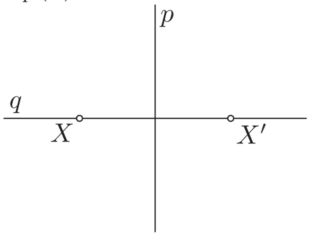
Код клизајуће рефлексије транслација и рефлексија комутирају, тј. није битно да ли ћемо прво извршити транслацију, па онда рефлексију, или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB}$. Транслација се разбија на две осне рефлексије чије су осе нормалне на AB, па следи да је клизајућа рефлексија композиција трију осних рефлексија чије осе не припадају једном прамену. Тај положај правих је веома специфичан (две су паралелне, а трећа је управна на њима). Испоставља се да је композиција трију осних рефлексија чије осе не припадају једном прамену увек клизајућа рефлексија, без обзира на међусобни њихов положај.

Што се инверза клизајуће рефлексије тиче, једноставно се види да је $\mathcal{G}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} = \left(\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}\right)^{-1} = \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}^{-1}_{AB} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{BA}}$. Дакле, клизајућа рефлексија није инволуција.

1. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.

Решење: Почетна једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$. На основу теореме 12 (теореме о трансмутацији), с обзиром на то да је $\mathcal{S}_p^{-1} = \mathcal{S}_p$, следи да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)}$, па је полазна једнакост еквивалентна с једнакошћу $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)} = \mathcal{S}_q$. Две осне рефлексије су једнаке ако и само ако су им осе исте, према томе, последња једнакост је еквивалентна са $\mathcal{S}_p(q) = q$. Доказаћемо да је $\mathcal{S}_p(q) = q$ еквивалентно са $p = q \vee p \perp q$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $p = q$. Пошто се све тачке праве p сликају у себе, следи да се и права p слика у себе, тј. да је $\mathcal{S}_p(p) = p$. Пошто је $p = q$, следи да је $\mathcal{S}_p(q) = q$.



Нека је $p \perp q$ и нека је $X \in q$ произвољна. Ако је $X \in p$, онда је $\mathcal{S}_p(X) = X \in q$. Нека $X \notin p$. Тада је $\mathcal{S}_p(X) = X'$ и p је медијатриса дужи XX'. Дакле, $p \perp XX'$. Такође, $p \perp q$ и $X \in q$, па следи да се праве XX' и q поклапају. Самим тим, $X' \in q$. Према томе, $\mathcal{S}_p(q) \subseteq q$. Пошто је $\mathcal{S}_p$ инволуција, следи да је $q \subseteq \mathcal{S}_p(q)$, па је $\mathcal{S}_p(q) = q$.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $\mathcal{S}_p(q) = q$ и $p \neq q$. Пошто је $p \neq q$, онда постоји тачка X која припада q и не припада p. Нека је $\mathcal{S}_p(X) = X'$. Тада је p медијатриса дужи XX', па је $p \perp XX'$. Такође, из $\mathcal{S}_p(q) = q$ следи да $X' \in q$, па су праве q и XX' исте. Дакле, следи да је $p \perp q$.

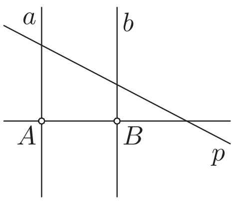
Напомена 11. Претходни задатак нам говори да две осне рефлексије комутирају ако и само ако су им осе идентичне или међусобно нормалне. Како је $(\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p^{-1} \circ \mathcal{S}_q^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, закључујемо да две осне рефлексије комутирају ако и само ако је њихова композиција инволуција. Од директних изометрија, инволуције су само коинциденција и централна симетрија, а оне се добијају управо у случајевима $p = q$ и $p \perp q$ редом.

2. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ ако и само ако су p, q, r праве једног прамена.

Решење: $\boxed{\Longleftarrow}$: Нека су p, q, r праве једног прамена. Тада је, на основу теореме 14, пресликавање $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ осна рефлексија. Дакле, $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$. Осна рефлексија је инволуција, па је $\mathcal{S}_s^{-1} = \mathcal{S}_s$. Како је $\mathcal{S}_s^{-1} = (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p^{-1} \circ \mathcal{S}_q^{-1} \circ \mathcal{S}_r^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$, следи да важи једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$.
$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Означимо $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Тада је $\mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathfrak{I}$, тј. $\mathfrak{I}$ је инволуција. Такође, $\mathfrak{I}$ је индиректна изометрија, па не може бити клизајућа рефлексија, јер клизајућа рефлексија није инволуција. Према томе, $\mathfrak{I}$ је осна рефлексија, тј. $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ је осна рефлексија. На основу теореме 14 следи да праве p, q, r припадају једном прамену, што је и требало доказати.

3. Доказати: $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B \Leftrightarrow AB \perp p$.

Решење:



Нека је a права која је нормална на правој AB у тачки A, а нека је b права која је нормална на правој AB у тачки B. Тада је $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB}$ и $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}$. Дакле,

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A & = & \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} & \text{и} \\ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B & = & \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}. & \end{array}$$

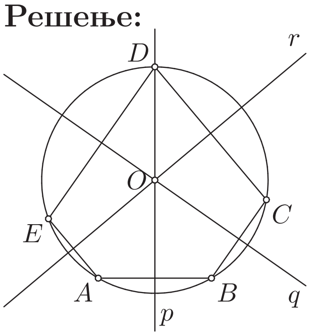
Према томе, једнакост $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}$, што важи ако и само ако важи $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b$. На основу 2. задатка, ово важи ако и само ако праве a, p, b припадају једном прамену. Пошто су a, b управне на правој AB, следи да тај прамен једино може бити прамен паралелних правих, према томе, важи $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b$ ако и само ако је $p \parallel a \parallel b$. Пошто је $a \perp AB$ и $b \perp AB$, ово је еквивалентно са $AB \perp p$, што је и требало доказати.

4. Ако нека фигура равни има тачно две осе симетрије, доказати да је она и централносиметрична.

Решење: Нека су праве p, q једине осе симетрије фигуре Φ. Тада је $\mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$ и $\mathcal{S}_q(\Phi) = \Phi$. Такође, права $\mathcal{S}_p(q)$ је оса симетрије фигуре Φ, јер је $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)}(\Phi) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$. Пошто нема других оса симетрије сем правих p, q, следи да је $\mathcal{S}_p(q) = p$ или $\mathcal{S}_p(q) = q$. Прва једнакост не може да важи, јер би тада било $q = \mathcal{S}_p(p) = p$, а праве p, q се разликују. Дакле, $\mathcal{S}_p(q) = q$. На основу првог задатка следи да је $p = q$ или $p \perp q$. Пошто није $p = q$, следи да је $p \perp q$. Нека је O пресечна тачка правих p, q. Тада је $\mathcal{S}_O(\Phi) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$, па следи да је тачка O центар симетрије фигуре Φ. Дакле, фигура Φ је централносиметрична.

5. Нека је $ABCDE$ петоугао уписан у круг такав да је $BC \parallel DE$ и $CD \parallel EA$. Доказати да D припада медијатриси странице AB.

Решење:



Нека је O центар круга и нека су p, q, r редом медијатрисе страница AB, BC, CD. Како је O једнако удаљена од свих темена петоугла (јер темена петоугла припадају кругу с центром O), следи да O припада медијатрисама p, q, r, па су то праве једног прамена. Такође, како је $q \perp BC$ и $BC \parallel DE$, следи да је $q \perp DE$, а пошто је $OD = OE$ и $O \in q$, следи да је q медијатриса и странице DE. Слично, како је $r \perp CD$ и $CD \parallel EA$, следи да је $r \perp EA$, а пошто је $OE = OA$, следи да је r медијатриса и странице EA.

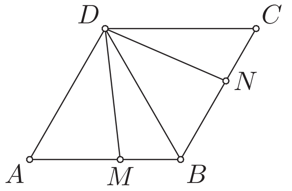
Посматрајмо изометрију $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q$. Важи да је

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(D) &= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q(D) \\
&= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r(E) \\
&= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(A) \\
&= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q(B) = \mathcal{S}_r(C) = D.
\end{aligned}$$

Такође, пошто p, q, r припадају једном прамену, на основу 2. задатка следи да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p$, па је $D = \mathfrak{I}(D) = \mathcal{S}_p(D)$. Одавде следи да $D \in p$.

6. Нека је $ABCD$ ромб такав да је $\measuredangle BAD = 60°$ и нека права p сече редом странице AB и BC у тачкама M и N тако да је збир дужи BM и BN једнак страници ромба. Доказати да је троугао DMN правилан.

Решење:

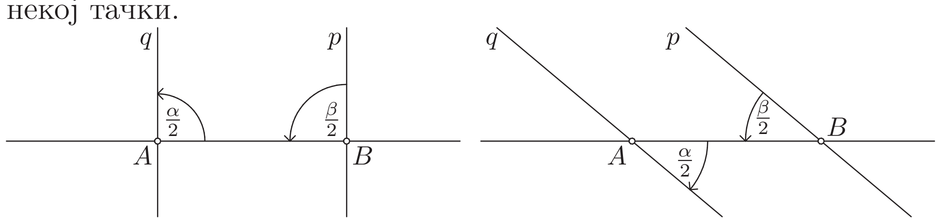


Важи $\mathcal{R}_{D,60°}(A) = B$ и $\mathcal{R}_{D,60°}(B) = C$. Дакле, ротацијом око D за $60°$ се дуж AB слика у дуж BC. Пошто је $BM + BN = AB$ и $BM = AB - AM$, па је $AB - AM + BN = AB$, следи да је $AM = BN$. Нека је $M' = \mathcal{R}_{D,60°}(M)$. Следи да важи $AM = BM'$, па следи $BN = BM'$. Тачке N, M' су између тачака B, C и на истом растојању од B, па следи да је $M' = N$, тј. да је $\mathcal{R}_{D,60°}(M) = N$. Одавде следи да је троугао $\triangle DMN$ једнакостраничан, јер је $DM = DN$ и $\measuredangle MDN = 60°$.

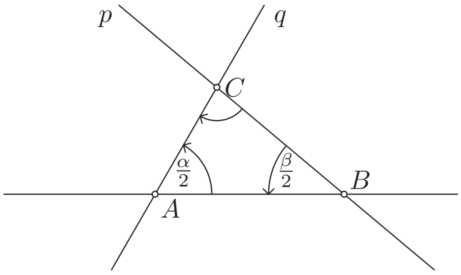
7. Одредити тип и компоненте изометрије $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$.

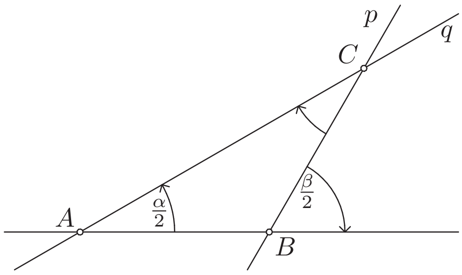
Решење: Нека су $\alpha, \beta \in [-180°, 180°]$. Ако је $A = B$, онда важи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{A,\alpha+\beta}$, ако је $\alpha + \beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, односно $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{E}$, ако је $\alpha + \beta \in \{0°, \pm 360°\}$. Претпоставимо да је $A \neq B$.

Нека је p права која садржи тачку B таква да је оријентисани угао од p ка AB једнак $\frac{\beta}{2}$ и нека је q права која садржи тачку A таква да је оријентисани угао од AB ка q једнак $\frac{\alpha}{2}$. Тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. У зависности од углова α, β, праве p, qмогу бити паралелне или се сећи у некој тачки.



Углови $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ су оштри или прави и могу бити произвољне оријентације, односно $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in [-90°, 90°]$. Ако су углови α, β исте оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ прави углови, тј. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \pm 180°$. Ако су α, β супротне оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ подударни, тј. $\frac{\alpha}{2} = -\frac{\beta}{2}$. Дакле, $p \parallel q$ ако и само ако $\alpha + \beta \in \{0°, \pm 360°\}$ и тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BC}}$, где је C подножје управне из B на правој q.





Ако $\alpha + \beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, онда се p, q секу у некој тачки C. Оријентисани угао $\measuredangle BCA$ представља оријентисани угао од праве p ка правој q. Ако су α, β исте оријентације, они су унутрашњи углови троугла $\triangle ABC$, тј. $\measuredangle BAC = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle CBA = \frac{\beta}{2}$. Угао $\measuredangle BCA$ је супротне оријентације од углова $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$, па је $-\measuredangle BCA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - 180°$ и $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{C,2\measuredangle BCA} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta-360°}$. Нека су α, β супротне оријентације и нека су α', β' неоријентисани углови подударни угловима α, β редом. Како се p и q секу, један од њих је већи од другог, јер би иначе било $p \parallel q$. Без умањења општости, нека је $\beta' > \alpha'$. Тада је угао $\frac{\beta}{2}$ спољашњи угао троугла $\triangle ABC$ и исте оријентације као угао $\measuredangle BCA$, па је $\frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \measuredangle BCA$. Према томе, $\measuredangle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, па је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{C,2\measuredangle BCA} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$.

Напомена 12. Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{R}_{S,\varphi-360°}$. Према томе, у решењу претходног задатка, у случају да $\alpha + \beta \notin \{0°, \pm 360°\}$ важи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$ и ако су α, β исте оријентације и ако су α, β супротне оријентације.

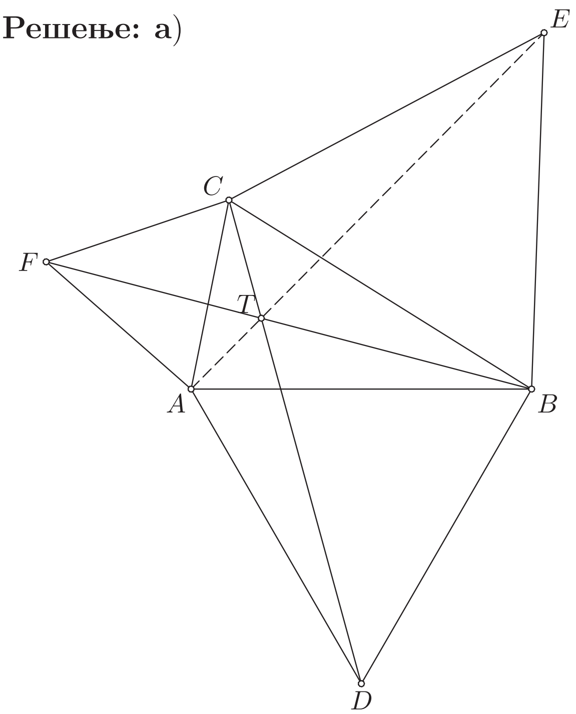
Напомена 13. Дакле, доказали смо да ако важи $\alpha + \beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, композиција ротација $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$ је ротација за угао $\alpha + \beta$, а ако важи $\alpha+\beta \in \{0°, \pm 360°\}$, онда је композиција ротација $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$ транслација ако је $A \neq B$, односно коинциденција ако је $A = B$.

8. Над ивицама оштроуглог троугла ABC у спољашњости конструисани су правилни троуглови ADB, BEC, CFA.

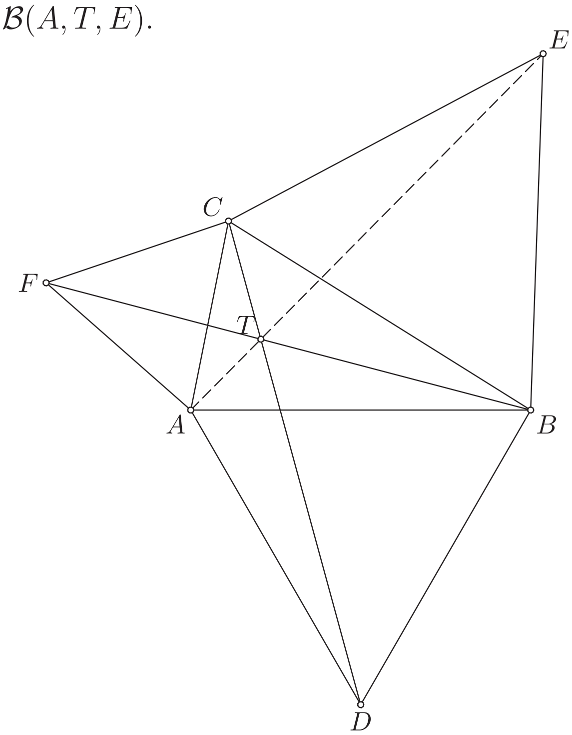
а) (**Торичелијева тачка**) Доказати да су дужи AE, BF, CD међусобно подударне и да се секу у једној тачки.

б) (**Наполеонов троугао**) Доказати да центри конструисаних троуглова чине темена правилног троугла.

Решење: а)



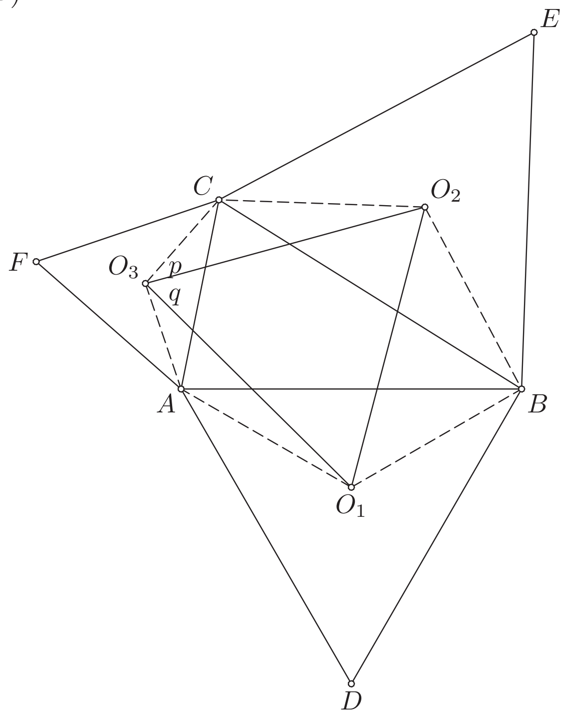
Приметимо да је $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(D) = B$ и $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(C) = F$. Према томе, следи да је $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(DC) = BF$, што значи да се дуж DC слика у дуж BF, па су ове дужи подударне. Такође, права DC се слика у праву BF и угао између њих је 60° (сетимо се да је угао између праве и њене слике при ротацији за угао φ једнак управо φ). Нека је њихов пресек тачка T. Треба доказати да тачка T припада дужима DC, BF. Како је $\measuredangle BAC < 90^\circ$, следи да је $\measuredangle DAC = \measuredangle DAB + \measuredangle BAC < 60^\circ + 90^\circ < 180^\circ$, а како је и $\measuredangle DAB = 60^\circ < 180^\circ$, онда важи $C, B \doteqdot DA$. Слично, $\measuredangle DBC < 180^\circ$, а како је и $\measuredangle DBA = 60^\circ < 180^\circ$, онда важи $C, A \doteqdot DB$. То значи да тачка C припада углу $\measuredangle ADB$, па следи да полуправа DC сече дуж AB. Другим речима, $A, B \div CD$. То значи и да полуправа CD припада углу $\measuredangle ACB$, па је $\measuredangle DCA < \measuredangle BCA < 90^\circ$ и $\measuredangle DCF < 90^\circ + 60^\circ < 180^\circ$. Следи да важи $A, F \doteqdot CD$, а како важи $A, B \div CD$, онда важи $B, F \div CD$, односно права CD сече дуж BF. Сличним поступком се доказује и да важи $C, D \div BF$, па права BF сече дуж CD. Овим је доказано да је тачка T у пресеку дужи CD, BF. Треба такође доказати да су тачке A, T, E колинеарне и да важи $\mathcal{B}(A, T, E)$. Пошто важи $\mathcal{B}(C, T, D)$, довољно је доказати да је $\measuredangle ATD = \measuredangle ETC$, јер ће тада то бити унакрсни углови, па ће важити $\mathcal{B}(A, T, E)$.



Због ротације важи $\measuredangle DTB = 60°$, па је $\measuredangle BTC = 120°$. Такође, важи $\measuredangle DAB = 60°$, па следи да су $\measuredangle DTB$ и $\measuredangle DAB$ периферијски углови над DB, тј. да је четвороугао $DBTA$ тетиван. Одавде следи да је $\measuredangle ATD = \measuredangle ABD = 60°$. Поред тога, $\measuredangle BEC = 60°$, па је $\measuredangle BTC + \measuredangle BEC = 180°$, па је и четвороугао $BECT$ тетиван. Одавде следи да је $\measuredangle ETC = \measuredangle EBC = 60°$. Дакле, $\measuredangle ATD = \measuredangle ETC$, па следи да су то унакрсни углови, па важи $\mathcal{B}(A, T, E)$, тј. да тачка T припада дужи AE.

Остаје још да се докаже да је $AE = BF = CD$. Већ смо добили $BF = CD$, па остаје да се докаже да је, нпр, $AE = BF$. Међутим, то добијамо на сличан начин као и претходну једнакост. Пошто је $\mathcal{R}_{C,60°}(F) = A$ и $\mathcal{R}_{C,60°}(B) = E$, следи да је $\mathcal{R}_{C,60°}(FB) = AE$, па су и те дужи једнаке, што је и требало доказати.

б)



Означимо центре троуглова $\triangle ADB, \triangle BEC, \triangle CFA$ редом са O_1, O_2, O_3. Посматрајмо изометрију $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ}$. Она је директна, јер је композиција трију директних изометрија. На основу напомене 13, важи $\mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ} = \mathcal{R}_{S,120^\circ+120^\circ} = \mathcal{R}_{S,240^\circ}$, за неку тачку S. На основу напомене 12, важи $\mathcal{R}_{S,240^\circ} = \mathcal{R}_{S,240^\circ-360^\circ} = \mathcal{R}_{S,-120^\circ}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{S,-120^\circ}$. Како је $120^\circ + (-120^\circ) = 0^\circ$, изометрија $\mathfrak{I}$ мора бити коинциденција или транслација. Пошто је

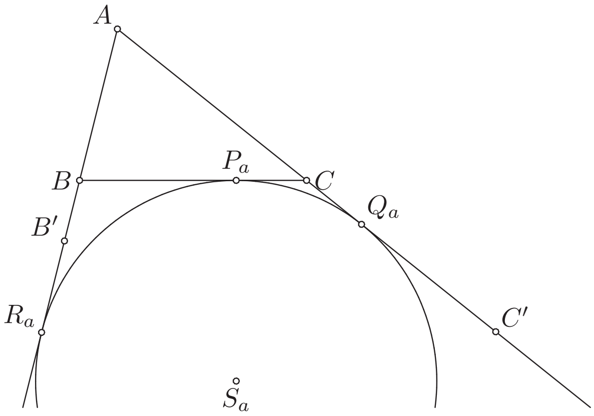
$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(C) &= \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ}(C) = \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1,120^\circ}(B) \\
&= \mathcal{R}_{O_3,120^\circ}(A) = C,
\end{aligned}$$

следи да изометрија $\mathfrak{I}$ има фиксну тачку, па не може бити транслација. Дакле, $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. То значи да је $\mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ} = \mathcal{R}^{-1}_{O_3,120^\circ} = \mathcal{R}_{O_3,-120^\circ}$. Нека је p права која садржи тачку O_2 и гради оријентисани угао $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ с правом O_1O_2 и нека је q права која садржи тачку O_1 таква да права O_1O_2 гради оријентисани угао $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ са правом q. Тада је $\mathcal{R}_{O_3,-120^\circ} = \mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Следи да тачка O_3 припада правима p, q, па је $\measuredangle O_3O_2O_1 = 60^\circ$ и $\measuredangle O_2O_1O_3 = 60^\circ$. Дакле, троугао $\triangle O_1O_2O_3$ има два угла од 60°, па је он једнакостраничан троугао, што је и требало доказати.

Дефиниција 33. Тачка T из претходног задатка назива се *Торичелијева тачка*. Троугао $\triangle O_1O_2O_3$ назива се *Наполеонов троугао*.

9. Нека је у равни $\mathbb{E}^2$ дат троугао ABC и нека су B', C' тачке правих AB и AC такве да важи $\mathcal{B}(A, B, B')$ и $\mathcal{B}(A, C, C')$. Ако је P_a тачка у којој спођа уписани круг који одговара темену A додирује страницу BC тог троугла, доказати да је $\mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}$.

Решење:



Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'}$. Видимо да је $\mathfrak{I}$ директна изометрија, јер је композиција трију директних изометрија. Да бисмо доказали да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{P_a}$, докажимо најпре да је P_a фиксна тачка изометрије $\mathfrak{I}$. Нека су Q_a, R_a тачке из Великог задатка. Тангентне дужи BP_a, BR_a су једнаке и важи $\measuredangle P_aBR_a = \measuredangle CBB'$ (оријентисани углови). Слично, важи и $AR_a = AQ_a$ и $\measuredangle R_aAQ_a = \measuredangle BAC$, као и $CQ_a = CP_a$ и $\measuredangle Q_aCP_a = \measuredangle C'CB$. Дакле,

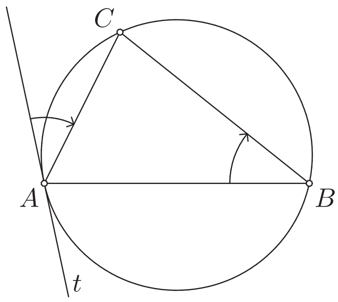
$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(P_a) &= \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'}(P_a) = \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC}(R_a)\\ &= \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB}(Q_a) = P_a,\end{aligned}$$

па следи да је P_a фиксна тачка. Дакле, $\mathfrak{I}$ није транслација, па је коинциденција или ротација око тачке P_a. Означимо $\alpha = \measuredangle BAC, \beta = \measuredangle CBA$, $\gamma = \measuredangle ACB$ (мисли се на оријентисане углове). Пошто су (оријентисани) углови $\measuredangle CBA$ и $\measuredangle CBB'$ напоредни и супротно оријентисани, следи да је $\measuredangle CBA + (-\measuredangle CBB') = 180°$, тј. да је $\measuredangle CBB' = \measuredangle CBA - 180° = \beta - 180°$. Слично, пошто су (оријентисани) углови $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle C'CB$ напоредни и супротно оријентисани, следи да је $\measuredangle ACB + (-\measuredangle C'CB) = 180°$, па је $\measuredangle C'CB = \measuredangle ACB - 180° = \gamma - 180°$.

Како је $\measuredangle BAC + \measuredangle CBB' = \alpha + \beta - 180° \notin \{0°, \pm 360°\}$, на основу напомене 13 следи да је $\mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'} = \mathcal{R}_{M,\alpha+\beta-180°}$, за неку тачку M. Оријентисани углови α, β, γ су исте оријентације, па је $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Како је $\alpha+\beta-180°+\measuredangle C'CB = \alpha+\beta-180°+\gamma-180° = \alpha+\beta+\gamma-360° = 180° - 360° = -180° \notin \{0°, \pm 360°\}$, на основу напомене 13 следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{M,\alpha+\beta-180°} = \mathcal{R}_{P_a,-180°} = \mathcal{S}_{P_a}^{-1} = \mathcal{S}_{P_a}$.

10. Нека је t тангента описаног круга троугла ABC у темену A. Доказати да важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$.

Решење:



Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$. Како је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{BC} = \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}}$ и $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{S}_{CA} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}}$, следи да је

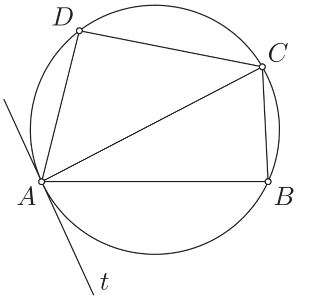
$$\begin{aligned}\mathfrak{I} &= \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \\ &= \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{R}_{B,2\measuredangle ABC} \circ \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{BA}}.\end{aligned}$$

Пошто је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$ директна изометрија и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}(B) = A$, на основу теореме 17 (теореме о трансмутацији), следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{R}_{A,2\measuredangle ABC}$. За тангенту t описаног круга троугла $\triangle ABC$ у тачки A важи да је оријентисани угао од праве t ка тетиви AC подударан периферијском углу над том тетивом, што је угао $\measuredangle ABC$, као и да су исте оријентације. Према томе, важи $\mathcal{R}_{A,2\measuredangle ABC} = \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_t$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t$, што је и требало доказати.

11. Доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

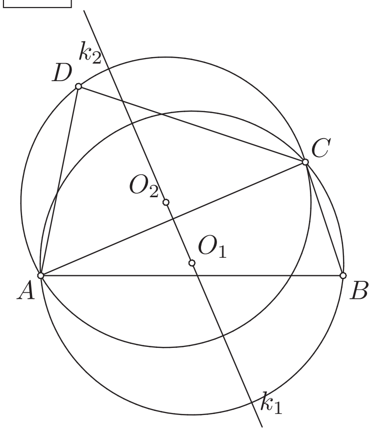
Решење: Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$. Додавање коинциденције $\mathcal{E}$ (идентичког пресликавања) у композицију не мења њену вредност, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$:



Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, k његов описани круг и t тангента круга k у тачки A. Круг k је описани круг троугла $\triangle ABC$, па је, на основу претходног задатка, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$. Такође, круг k је описани круг и троугла $\triangle ACD$, па је, на основу претходног задатка, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_t$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{E}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$:



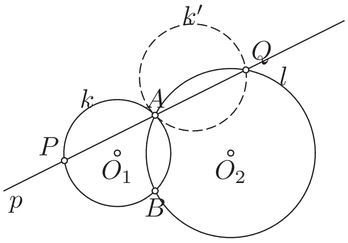
Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Нека су k_1, k_2 редом описани кругови троуглова $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, нека су O_1, O_2 редом њихови центри и нека су t_1, t_2 редом тангенте кругова k_1, k_2 у тачки A. Оба круга садрже тачке A, C, па следи да се O_1, O_2 налазе на медијатриси дужи AC. На основу претходног задатка имамо да је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{t_1}$ и $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_{t_2}$. Пошто је $\mathcal{E} = \mathfrak{I} = \mathcal{S}_{t_2} \circ \mathcal{S}_{t_1}$, следи да је $\mathcal{S}_{t_2} = \mathcal{S}_{t_1}^{-1} = \mathcal{S}_{t_1}$, па је $t_1 = t_2$, тј. тангенте t_1, t_2 се поклапају. Следи да се центри ових кругова налазе на правој n која је нормална на t_1 у тачки A. Медијатриса дужи AC и права n се разликују, јер A припада правој n, а не припада медијатриси дужи AC.

Дакле, центри O_1, O_2 се налазе на n и на медијатриси дужи AC, па како две разне праве имају највише једну заједничку тачку, следи да се O_1, O_2 поклапају. Према томе, кругови k_1, k_2 имају исти центар и оба садрже тачку A, па се и они поклапају. Следи да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

12. Дата су два круга који имају пресечну тачку A. Конструисати праву која садржи A и на којој дати кругови одсецају подударне дужи.

Решење:

Анализа: Нека је p права која испуњава услове задатка, тј. права која садржи тачку A и на којој дати кругови k, l одсецају подударне дужи.



Нека су P, Q редом пресечне тачке кругова k, l са правом p, различите од тачке A. Тада је $AP = AQ$. Ако се тачке P, Q поклапају, онда оне представљају другу пресечну тачку кругова k, l. Ако се тачке P, Q разликују, онда је A средиште дужи PQ, што значи да је $\mathcal{S}_A(P) = Q$. Посматрајмо круг $k' = \mathcal{S}_A(k)$. Пошто $P \in k$, следи да $Q = \mathcal{S}_A(P) \in k'$, па је Q пресечна тачка кругова k', l, различита од тачке A. Права p је истоветна с правом AQ.

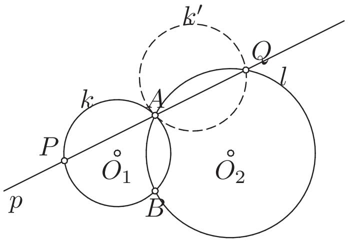
Конструкција: Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B, конструишимо праву AB.

Конструишимо круг $k' = \mathcal{S}_A(k)$ и означимо са Q пресечну тачку кругова k', l, различиту од тачке A. Конструишимо праву $p = AQ$.

Доказ: Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B, кругови k, l одсецају дуж AB на правој AB, па одсецају подударне дужи на правој AB.

Нека је $P = \mathcal{S}_A(Q)$. Тада је P пресечна тачка праве p и круга k, различита од тачке A. Заиста, тачка P припада правој AQ (тј. правој p) и припада кругу k (јер је ПК $k' = \mathcal{S}_A(k)$, па је $\mathcal{S}_A(k') = k$). Пошто је Q различита од A, онда је и P различита од A, па следи да је P пресечна тачка праве p и круга k, различита од тачке A. Како је $P = \mathcal{S}_A(Q)$, важи $AP = AQ$, па кругови k, l одсецају подударне дужи на правој p.

Дискусија:



Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B, онда је права AB једно од решења.

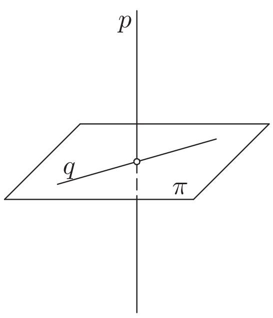
Кругови k', l имају заједничку тачку A. Ако се они поклапају, што се дешава у случају да се k, l додирују споља у тачки A и имају исте полупречнике, постоји бесконачно много решења. Ако се кругови k', l секу у двема тачкама A, Q, постоји јединствена права $p = AQ$. Тада се и кругови k, l секу (у тачкама A, B), па постоје два решења (друго решење је права AB). Ако сем тачке A кругови k', l немају заједничких тачака, задатак нема решења.

Према томе, закључак је следећи. Ако се кругови k, l секу у двема тачкама, постоје два решења. Ако се кругови k, l додирују у тачки A, решење постоји ако и само ако се кругови k, l додирују споља и имају исте полупречнике и онда има бесконачно много решења.

6 Стереометрија

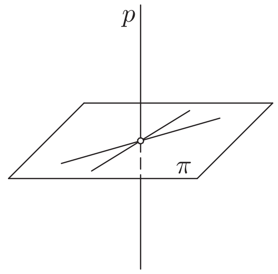
У овој области од интереса нам је еуклидска геометрија у простору. Подсетимо се појмова нормалности правих и равни, диедра, нормалности равни, триедра и мимоилазних правих, као и тврђења везаних за њих.

Дефиниција 34. Нека је π раван и p права која продире ту раван. Кажемо да је права p *управна* (*нормална, ортогонална*) на равни π (и обратно), у ознаци $p \perp \pi$ и $\pi \perp p$, ако је управна на свакој правој q равни π која садржи продорну тачку праве p и равни π.



Услов из дефиниције обично није погодан за проверу. Зато користимо следећу теорему.

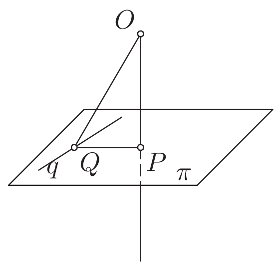
Теорема 22 (Коши)**.** *Нека је π раван и p права која продире ту раван. Ако је права p управна на двема разним правима равни π које садрже продорну тачку праве p и равни π, онда је права p управна на равни π.*



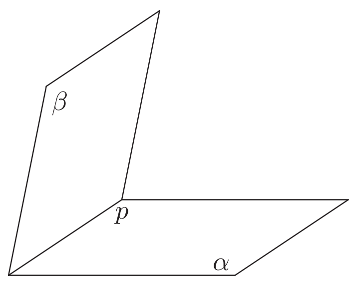
Теорема 23. *Нека је A тачка и π раван. Тада постоји јединствена права n која садржи тачку A и управна је на равни π.*

Теорема 24. *Нека је A тачка и p права. Тада постоји јединствена раван π која садржи тачку A и управна је на правој p.*

Теорема 25 (О трима нормалама)**.** *Ако је права p нормала из тачке O на равни π и продире је у тачки P, а Q подножје нормале из P на правој $q \subset \pi$, тада је $OQ \perp q$.*

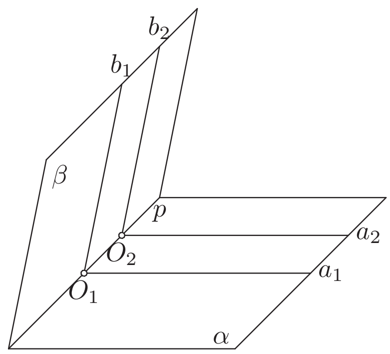


Дефиниција 35. *Диедарска површ* $\angle \alpha p \beta$ јесте унија полуравни $p\alpha$ и $p\beta$ са заједничким рубом p. Ове полуравни називамо *пљоснима* или *странама* те диедарске површи, а праву p њеном *ивицом*.



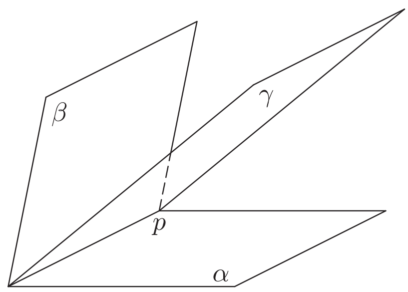
Као што угаона линија разлаже раван којој припада на две области, тако и диедарска површ разлаже простор на две области. Унију диедарске површи и неке од тих области називамо *диедром.* Један од диедара је увек конвексан (представља пресек двају полупростора чији су рубови равни које садрже пљосни диедарске површи) и означавамо га са $\measuredangle\alpha p\beta$.

Теорема 26. *Нека је $\angle\alpha p\beta$ диедарска површ и нека су γ_1, γ_2 равни које су управне на ивици p те диедарске површи. Тада те равни секу диедарску површ по угаоним линијама $\angle a_1O_1b_1, \angle a_2O_2b_2$ таквим да су углови $\measuredangle a_1O_1b_1, \measuredangle a_2O_2b_2$ међусобно подударни.*



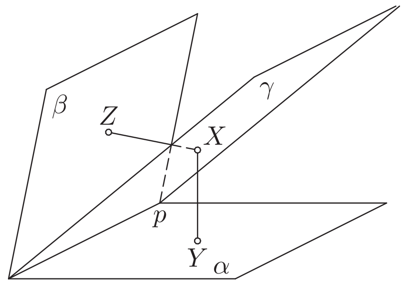
Дефиниција 36. Сваки од углова из претходне теореме назива се *нагибним углом* диедра.

Није тешко приметити да су два диедра међусобно подударна ако и само ако су такви и њихови нагибни углови.



Дефиниција 37. Нека је $\measuredangle\alpha p\beta$ диедар. Полураван $p\gamma$ с рубом p, која припада диедру $\measuredangle\alpha p\beta$ и дели га на два међусобно подударна диедра $\measuredangle\alpha p\gamma, \measuredangle\gamma p\beta$, назива се *симетралном полуравни* диедра $\measuredangle\alpha p\beta$.

Теорема 27. *Нека је $\measuredangle\alpha p\beta$ диедар. Тада је симетрална полураван диедра $\measuredangle\alpha p\beta$ скуп свих тачака X простора које припадају диедру $\measuredangle\alpha p\beta$ такве да је $XY = XZ$, где је Y подножје управне из X на полуравни $p\alpha$, а Z подножје управне из X на полуравни $p\beta$.*

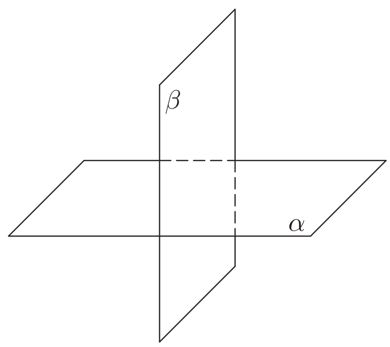


Дакле, симетрална полураван диедра је уопштење бисектрисе угла.

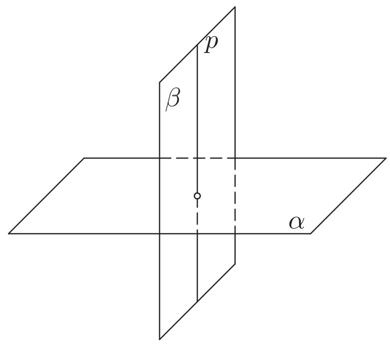
Дефиниција 38. Диедар је *прав* ако је његов нагибни угао прав.

Сличне дефиниције имамо за оштар и туп диедар.

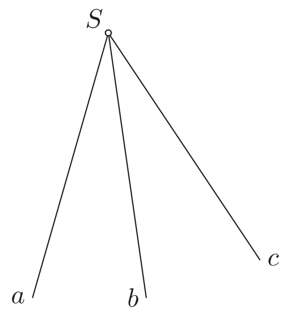
Дефиниција 39. Равни α, β су међусобно *управне* (*нормалне, ортогоналне*), у ознаци $\alpha \perp \beta$, ако садрже пљосни правог диедра.



Теорема 28. *Нека је α раван и p права управна на равни α. Тада је свака раван β, која садржи праву p, управна на равни α.*

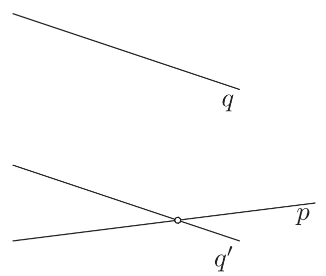


Дефиниција 40. Нека су Sa, Sb, Sc три полуправе у простору са заједничким теменом S, које не припадају истој равни. Тада скуп тачака $\measuredangle aSb \cup \measuredangle bSc \cup \measuredangle cSa$ називамо *триедарском површи*. Тачку S називамо *теменом* тог триедра, полуправе Sa, Sb, Sc његовим *ивицама*, а углове $\measuredangle aSb, \measuredangle bSc, \measuredangle cSa$ његовим *пљоснима* или *странама*.



Може се доказати да триедарска површ разлаже простор на две области, једна од којих је *унутрашњост*, а друга *спољашњост* триедарске површи. Унија триедарске површи и њене унутрашњости назива се *триедром*.

Дефиниција 41. Праве p, q називамо *мимоилазним* правима ако не постоји раван која их садржи.



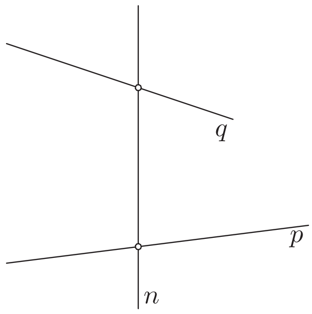
Мимоилазне праве немају заједничких тачака, јер би у супротном постојала раван која их садржи. Мимоилазне праве нису ни паралелне, јер паралелне праве припадају једној равни. *Углом* између мимоилазних правих p, q сматрамо угао између било којих двеју правих p', q' које се секу, таквих да је $p' \parallel p$ и $q' \parallel q$. Према томе, можемо извести следећи закључак.

Теорема 29. *Ако је права n управна на равни π, онда је она управна на свакој правој те равни.*

Теорема 30. *Ако је права n управна на двема непаралелним правима равни π, онда је права n управна на равни π.*

Заиста, ако је права n управна на двема непаралелним правима p, q равни π, тада је она управна на правима p', q' равни π, које садрже продорну тачку праве n и равни π и паралелне су правима p, q, а пошто праве p, q нису паралелне, онда су праве p', q' различите, па тврђење следи на основу Кошијеве теореме.

Теорема 31. *Нека су p, q мимоилазне праве. Тада постоји јединствена права n која сече праве p, q и управна је на њима.*



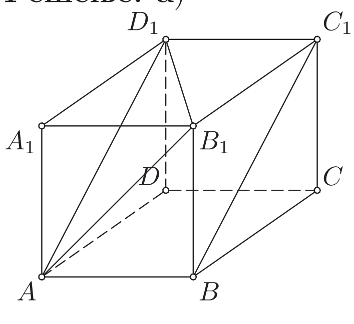
1. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Одредити угао између правих AB_1 и BC_1.

б) Одредити угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D.

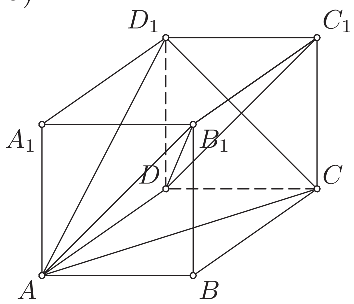
в) Доказати да је раван B_1CD_1 нормална на дуж AC_1 и дели је у размери $2:1$.

Решење: а)



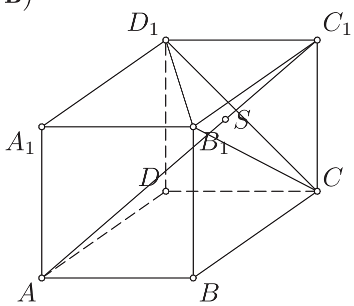
Праве AB_1 и BC_1 су мимоилазне. Како је $AD_1 \parallel BC_1$, следи да је угао између мимоилазних правих AB_1, BC_1 једнак углу између правих AB_1, AD_1. Троугао $\triangle AB_1D_1$ је једнакостраничан, јер су његове ивице међусобно подударне (све три су подударне дијагонали квадрата, који представља страну коцке), па је $\measuredangle B_1AD_1 = 60^\circ$.

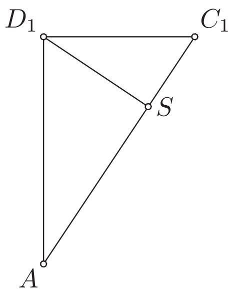
б)



Желимо да одредимо угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D. Делује да је права CD_1 управна на равни AB_1C_1D. Заиста, права CD_1 је управна на правој C_1D (дијагонале квадрата CC_1D_1D), а права B_1C_1 је управна на равни CC_1D_1D, па је управна на правој CD_1. Дакле, $CD_1 \perp C_1D$ и $CD_1 \perp B_1C_1$, па је $CD_1 \perp AB_1C_1D$. Одавде следи да је $ACD_1 \perp AB_1C_1D$, јер раван ACD_1 садржи праву CD_1 која је управна на равни AB_1C_1D.

в)



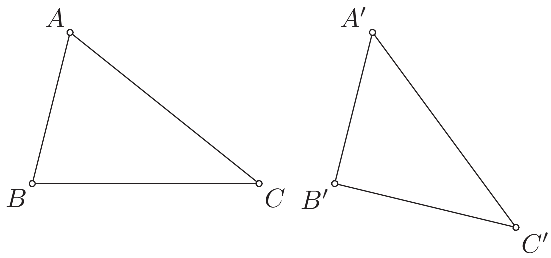


Докажимо прво да је раван B_1CD_1 нормална на дуж AC_1. Из доказа претходног дела овог задатка следи да је права CD_1 управна на равни AB_1C_1D, па је управна на правој AC_1. Дакле, $AC_1 \perp CD_1$. Такође, права B_1D_1 је управна на равни ACC_1A_1. Заиста, $B_1D_1 \perp A_1C_1$ (дијагонале квадрата $A_1B_1C_1D_1$), а пошто је $CC_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, следи да је $CC_1 \perp B_1D_1$. Дакле, $B_1D_1 \perp ACC_1A_1$, па следи да је $AC_1 \perp B_1D_1$. Према томе, из $AC_1 \perp CD_1$ и $AC_1 \perp B_1D_1$ следи да је $AC_1 \perp B_1CD_1$.

Означимо продорну тачку праве AC_1 и равни B_1CD_1 са S. Троугао $\triangle AC_1D_1$ је правоугли с правим углом код темена D_1, јер је права C_1D_1 управна на равни AA_1D_1D, па је управна и на правој AD_1. Права D_1S припада равни B_1CD_1, па следи да је $AC_1 \perp D_1S$, тј. да је D_1S висина правоуглог троугла $\triangle AC_1D_1$. Како је $\measuredangle ASD_1 = 90^\circ = \measuredangle D_1SC_1$ и $\measuredangle SAD_1$ и $\measuredangle SD_1C_1$ имају нормалне краке, па су подударни, следи да су троуглови $\triangle ASD_1$ и $\triangle D_1SC_1$ слични. Дакле, $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{AD_1}{D_1C_1}$. Ако је a ивица коцке, онда је $AD_1 = a\sqrt{2}$ и $D_1C_1 = a$, па је $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$. Следи да је $\frac{AS}{SC_1} = \frac{AS}{D_1S} \cdot \frac{SD_1}{SC_1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, тј. $AS : SC_1 = 2 : 1$, што је и требало доказати.

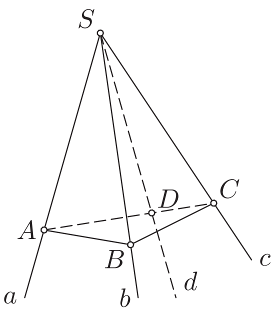
За решавање наредног задатка, потребан је следећи став.

Став 5. *Нека су* $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ *троуглови такви да је* $AB = A'B'$ *и* $AC = A'C'$. *Тада је* $BC > B'C'$ *ако и само ако је* $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$.



2. Збир два угла при врху триедра већи је од трећег. Доказати.

Решење:

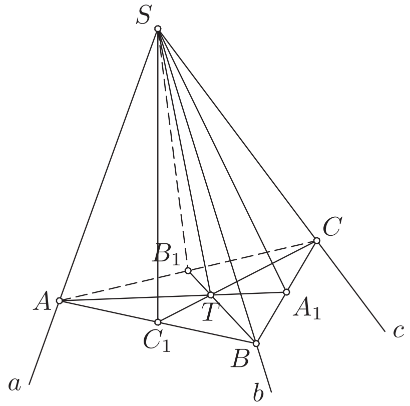


Нека је $Sabc$ триедар. Треба доказати да је $\measuredangle aSb + \measuredangle bSc > \measuredangle aSc$. Ако је $\measuredangle bSc \geq \measuredangle aSc$ неједнакост је тривијално испуњена. Претпоставимо зато да је $\measuredangle bSc < \measuredangle aSc$ и нека је Sd полуправа која припада углу $\measuredangle aSc$ таква да је $\measuredangle dSc = \measuredangle bSc$. Нека су B, C произвољне тачке полуправих Sb, Sc редом, различите од тачке S. Нека је D тачка полуправе Sd таква да је $SD = SB$ и нека је A пресечна тачка полуправе Sa и праве CD. Троуглови $\triangle SCB$ и $\triangle SCD$ су подударни, јер је $SC = SC$, $\measuredangle CSD = \measuredangle CSB$ и $SD = SB$. Следи да је $CD = CB$. Из једнакости $AC = AD+DC$, неједнакости троугла $AC < AB + BC$ и претходно добијене једнакости $DC = BC$ следи да је $AD < AB$. Троуглови $\triangle SAB$ и $\triangle SAD$ имају подударне ивице са заједничким теменом S ($SA = SA$ и $SB = SD$), па пошто је $AB > AD$, на основу става 5 следи да је $\measuredangle ASB > \measuredangle ASD$. Према томе, добијамо да важи

$$\measuredangle aSb + \measuredangle bSc = \measuredangle ASB + \measuredangle BSC > \measuredangle ASD + \measuredangle DSC = \measuredangle ASC = \measuredangle aSc.$$

3. Равни од којих је свака одређена ивицом и симетралом наспрамне стране триедра имају заједничку праву. Доказати.

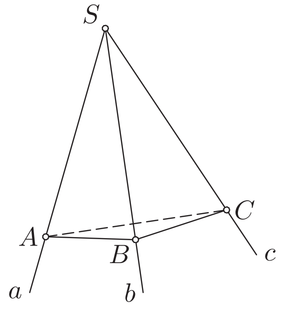
Решење:



Нека је $Sabc$ триедар. Нека A произвољна тачка полуправе Sa, која је различита од тачке S и нека су B, C редом тачке полуправих Sb, Sc такве да је $SB = SC = SA$. Тада су троуглови $\triangle SAB, \triangle SBC, \triangle SAC$ једнакокраки. Ако су C_1, A_1, B_1 редом средишта дужи AB, BC, AC, онда су полуправе SC_1, SA_1, SB_1 бисектрисе углова $\measuredangle ASB, \measuredangle BSC, \measuredangle ASC$, односно страна триедра $Sabc$. Према томе, равни које садрже ивицу триедра и симетралу наспрамне стране јесу равни SAA_1, SBB_1, SCC_1. С обзиром на то да су AA_1, BB_1, CC_1 тежишне дужи троугла $\triangle ABC$, следи да се секу у једној тачки и означимо ту тачку са T. Према томе, равни SAA_1, SBB_1, SCC_1 садрже тачке S, T, па стога садрже и праву ST. Дакле, права ST је заједничка за све три равни, што је и требало доказати.

4. Нека су углови при врху триедра једнаки редом $60°, 45°, 45°$. Доказати да је диедар наспрам највеће странице прав.

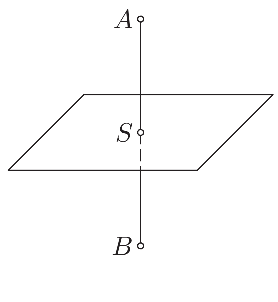
Решење:



Нека је $Sabc$ триедар такав да је $\measuredangle aSb = \measuredangle bSc = 45°$ и $\measuredangle aSc = 60°$. Треба доказати да је диедар овог триедра, чија ивица садржи полуправу Sb и чије су пљосни полуравни које садрже странице $\measuredangle aSb$ и $\measuredangle bSc$ тог триедра, прав диедар. Нека је B произвољна тачка полуправе Sb, различита од тачке S и нека су тачке A, C редом пресечне тачке полуправих Sa, Sc са равни која је у тачки B управна на полуправој Sb. Тада је $\measuredangle ABC$ нагибни угао посматраног диедра, па треба доказати да је $\measuredangle ABC = 90°$.

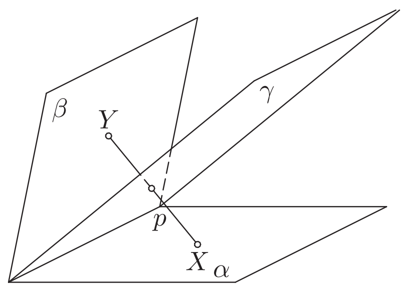
Означимо $SB = x$. Троуглови $\triangle SBA, \triangle SBC$ су једнакокрако правоугли, јер им је један од оштрих углова $45°$, па следи да је $BA = BC = x$ и $SA = SC = x\sqrt{2}$. Троугао $\triangle SAC$ је једнакостраничан, јер је $SA = SC$ и $\measuredangle ASC = 60°$. Следи да је и $AC = x\sqrt{2}$, па су странице троугла $\triangle ABC$ редом $AB = x, BC = x, AC = x\sqrt{2}$. Одавде следи да је у питању правоугли троугао, тј. да је $\measuredangle ABC = 90°$.

Дефиниција 42. Нека је AB дуж. Раван која садржи средиште S дужи AB и управна је на правој AB назива се *медијалном равни* или *симетралном равни* дужи AB.



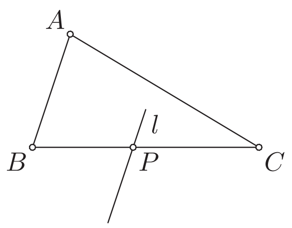
Теорема 32. *Нека је AB дуж. Скуп свих тачака X у простору таквих да важи $XA = XB$ јесте медијална раван дужи AB.*

Теорема 33. *Нека је $\measuredangle \alpha p \beta$ диедарска површ и нека је $p\gamma$ полураван с рубом p. Тада полураван $p\gamma$ припада диедру $\measuredangle \alpha p \beta$ ако и само ако за сваке две тачке X, Y које припадају пљоснима $p\alpha, p\beta$ тог диедра важи да $p\gamma$ сече дуж XY.*



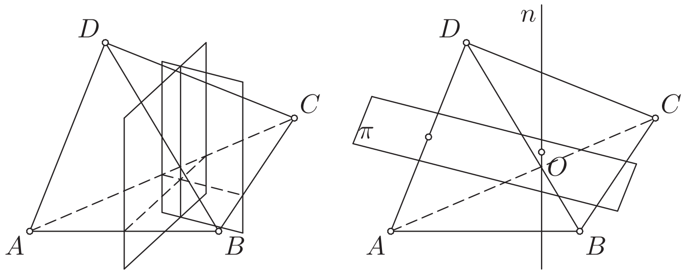
За решење наредног задатка користи се и Пашова аксиома.

Аксиома (Паш)**.** *Нека су A, B, C три неколинеарне тачке и l права равни ABC која не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да важи $\mathcal{B}(B, P, C)$. Тада она сече праву CA у тачки Q таквој да важи $\mathcal{B}(C, Q, A)$ или сече праву AB у тачки R таквој да важи $\mathcal{B}(A, R, B)$.*

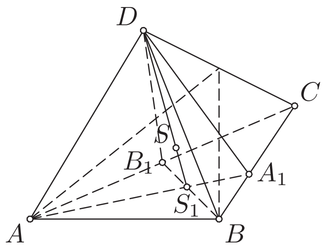


5. Доказати да се око сваког тетраедра може описати сфера, као и да се у сваки тетраедар може уписати сфера.

Решење:



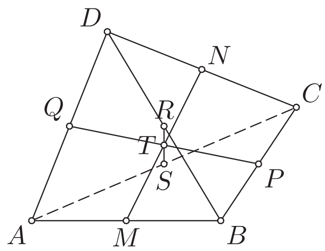
Нека је $ABCD$ тетраедар. Потребно је доказати да постоји тачка O таква да је $OA = OB = OC = OD$. На основу теореме 32, та тачка мора припадати медијалним равнима ивица AB, BC, AC, AD, BD, CD тетраедра $ABCD$. За почетак, докажимо да се медијалне равни ивица AB, AC секу. Ако се оне не би секле, биле би паралелне, па би онда праве AB, AC биле паралелне, јер су управне на паралелним равнима. Тада би тачке A, B, C биле колинеарне, што није могуће. Дакле, медијалне равни ивица AB, AC секу се по правој n. За сваку тачку X праве n важи $XA = XB$ и $XA = XC$, па следи да права n припада и медијалној равни ивице BC. На правој n треба пронаћи тачку O такву да је $OA = OD$, тј. треба проверити да ли се медијална раван π ивице AD и права n секу. Ако то не би био случај, онда би права n и раван π биле паралелне. У равни π би онда постојала права n' паралелна правој n, па пошто је $\pi \perp AD$, било би $n' \perp AD$, па и $n \perp AD$. Све праве које садрже тачку A и управне су на правој n припадају равни која садржи тачку A и управна је на правој n, што је раван ABC. Према томе, следило би да права AD припада равни ABC, тј. да су тачке A, B, C, D компланарне, што није тачно. Дакле, раван π и права n се секу у тачки O. Пошто тачка O припада равни π, следи да је $OA = OD$, а пошто припада правој n, следи да је $OA = OB = OC$, па следи да је тачка O центар описане сфере.



Центар уписане сфере је тачка S таква да је $SA' = SB' = SC' = SD'$, где су A', B', C', D' редом подножја управних из тачке S на странама BCD, ACD, ABD, ABC тетраедра $ABCD$. На основу теореме 27, таква тачка припада симетралним полуравнима диедара које чине стране тог тетраедра, па је довољно доказати да оне имају заједничку тачку. Симетрална полураван диедра чија је ивица AD и симетрална полураван диедра чија је ивица BD имају заједничку тачку D, па се секу по полуправој Dn. За сваку тачку X полуправе Dn важи $XC' = XB'$ и $XC' = XA'$, где су C', B', A' редом подножја управних из X на странама ABD, ACD, BCD тетраедра $ABCD$, па следи да полуправа Dn припада и симетралној полуравни диедра чија је ивица CD. Штавише, полуправа Dn продире раван ABC у тачки која припада унутрашњости троугла $\triangle ABC$. Заиста, на основу теореме 33, симетрална полураван диедра чија је ивица AD сече ивицу BC тетраедра $ABCD$, јер тачка B припада једној пљосни, а тачка C другој пљосни тог диедра. Означимо ту пресечну тачку са A_1. Слично, симетрална полураван диедра чија је ивица BD сече ивицу AC тетраедра $ABCD$, јер тачка A припада једној пљосни, а тачка C другој пљосни тог диедра. Означимо ту пресечну тачку са B_1. У равни ABC налазе се троугао $\triangle AA_1C$ и права BB_1 која сече праву AC у тачки B_1 таквој да важи $\mathcal{B}(A, B_1, C)$ и праву CA_1 у тачки B таквој да важи $\mathcal{B}(C, A_1, B)$. На основу Пашове аксиоме следи да се праве BB_1, AA_1 секу у тачки S_1 таквој да важи $\mathcal{B}(A, S_1, A_1)$. Слично, у равни ABC се налазе троугао $\triangle BB_1C$ и права AA_1 која сече праву BC у тачки A_1 таквој да важи $\mathcal{B}(B, A_1, C)$ и сече праву CB_1 у тачки A таквој да важи $\mathcal{B}(C, B_1, A)$. На основу Пашове аксиоме следи да се праве BB_1, AA_1 секу (тачка пресека је S_1) таквој да важи $\mathcal{B}(B, S_1, B_1)$. Дакле, тачка S_1 припада унутрашњости троугла $\triangle ABC$ и припада полуправима AA_1, BB_1, па припада и симетралним полуравнима диедара чије су ивице AD, BD. Како је полуправа Dn пресек тих симетралних полуравни, следи да $S_1 \in Dn$. Уочимо симетралну раван диедра чија је ивица AB. Тачка D припада једној, а тачка S_1 припада другој пљосни тог диедра, па на основу теореме 33 следи да та симетрална полураван сече дуж DS_1 у тачки S. Пошто тачка S припада симетралној полуравни диедра чија је ивица AB, следи да је $SD' = SC'$, где су D', C' редом подножја управних из тачке S на странама ABC, ABD, а пошто припада и полуправој Dn, важи $SA' = SB' = SC'$, где су A', B' редом подножја управних из тачке S на странама BCD, ACD, па следи да је тачка S центар уписане сфере тетраедра $ABCD$.

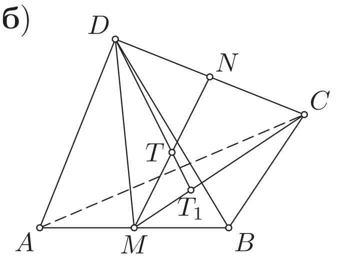
6. а) (**Тежиште тетраедра**) Дужи одређене средиштима наспрамних ивица тростране пирамиде (тетраедра) секу се у једној тачки која их полови. Доказати.
б) Доказати да тежиште тетраедра дели дужи одређене теменима и тежиштима наспрамних страна у односу $3:1$.

Решење: а)



Нека је $ABCD$ тетраедар и нека су M, N, P, Q, R, S редом средишта његових ивица AB, CD, BC, AD, BD, AC. Треба доказати да се дужи MN, PQ, RS секу у једној тачки која их све полови. Дуж MQ је средња линија троугла $\triangle ABD$, па следи да је $MQ \parallel BD$ и $MQ = \frac{1}{2}BD$. Слично, дуж PN је средња линија троугла $\triangle BCD$, па следи да је $PN \parallel BD$ и $PN = \frac{1}{2}BD$. Дакле, $MQ \parallel PN$ и $MQ = PN$, па закључујемо да су тачке M, P, N, Q компланарне и да је четвороугао $MPNQ$ паралелограм. Према томе, његове дијагонале MN, PQ имају заједничко средиште, које ћемо означити са T. Дуж PR је средња линија троугла $\triangle BCD$, па следи да је $PR \parallel CD$ и $PR = \frac{1}{2}CD$. Такође, дуж SQ је средња линија троугла $\triangle ACD$, па следи да је $SQ \parallel CD$ и $SQ = \frac{1}{2}CD$. Дакле, $PR \parallel SQ$ и $PR = SQ$, па закључујемо да су тачке P, R, Q, S компланарне и да је четвороугао $PRQS$ паралелограм. Према томе, његове дијагонале PQ, RS имају заједничко средиште. С обзиром на то да је тачка T средиште дужи PQ, а дуж има јединствено средиште, следи да је тачка T заједничко средиште дужи PQ, RS. Према томе, све три дужи имају заједничку тачку T која их полови, што је и требало доказати.

б)



Нека је T_1 тежиште троугла $\triangle ABC$. Треба доказати да важи распоред $\mathcal{B}(D, T, T_1)$ и $DT : TT_1 = 3 : 1$. Уочимо раван MCD. Та раван садржи тачку N, јер је она средиште дужи CD, па садржи и тачку T, јер је она средиште дужи MN. Такође, та раван садржи тачку T_1 јер она припада тежишној дужи CM троугла $\triangle ABC$. Да бисмо доказали колинеарност тачака D, T, T_1, применимо Менелајеву теорему на троугао $\triangle MCN$. Пошто је $\frac{\overrightarrow{MT_1}}{\overrightarrow{T_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NT}}{\overrightarrow{TM}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) \cdot \frac{1}{1} = -1$, следи да су тачке D, T, T_1 колинеарне. Применимо поново Менелајеву теорему, али сада на троугао $\triangle DT_1C$ и колинеарне тачке M, T, N. Следи да је

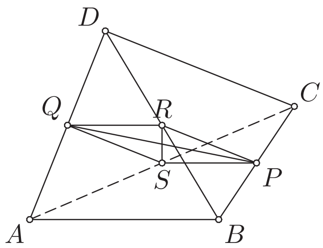
$$-1 = \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{T_1M}}{\overrightarrow{MC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{ND}} = \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1},$$

па је $\frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} = 3$. Следи да важи $\mathcal{B}(D, T, T_1)$ и $DT : TT_1 = 3 : 1$, што је и требало доказати.

Дефиниција 43. Тачка T из претходног задатка назива се *тежиште* тетраедра $ABCD$.

7. а) Две наспрамне ивице неког тетраедра су међусобно подударне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно нормалне.
б) Две наспрамне ивице тетраедра су нормалне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно подударне.

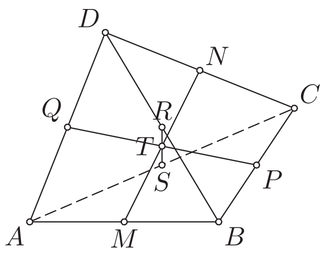
Решење:



Нека је $ABCD$ тетраедар и нека су P, Q, R, S редом средишта ивица BC, AD, BD, AC.
а) Треба доказати да важи $AB = CD$ ако и само ако важи $PQ \perp RS$. Дуж SP је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $SP \parallel AB$ и $SP = \frac{1}{2}AB$. Такође, дуж QR је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $QR \parallel AB$ и $QR = \frac{1}{2}AB$. Према томе, $SP \parallel QR$ и $SP = QR$, па су тачке P, R, Q, S компланарне и четвороугао $PRQS$ је паралелограм. Такође, PR је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $PR \parallel CD$ и $PR = \frac{1}{2}CD$.
$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $AB = CD$. Онда је $SP = PR$, па је $PRQS$ ромб. Ромбу су дијагонале међусобно нормалне, па је $PQ \perp RS$.
$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $PQ \perp RS$. Паралелограму $PRQS$ су дијагонале PQ, RS међусобно нормалне, па је $PRQS$ ромб. Следи да је $SP = PR$, па је и $AB = CD$.
б) Треба доказати да важи $AB \perp CD$ ако и само ако важи $PQ = RS$. Из претходног дела задатка имамо да је $PRQS$ паралелограм, као и да је $SP \parallel AB$ и $PR \parallel CD$.
$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $AB \perp CD$. Онда је $SP \perp PR$, па је $PRQS$ правоугаоник. Правоугаонику су дијагонале међусобно подударне, па је $PQ = RS$.
$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $PQ = RS$. Паралелограму $PRQS$ су дијагонале PQ, RS међусобно подударне, па је $PRQS$ правоугаоник. Следи да је $SP \perp PR$, па је и $AB \perp CD$.

8. Доказати да је права одређена средиштима страница AC и BD тетраедра $ABCD$ уједно и њихова заједничка нормала ако и само ако је $AB = CD$ и $AD = BC$.

Решење:



Нека су M, N, P, Q, R, S редом средишта ивица AB, CD, BC, AD, BD, AC тетраедра $ABCD$.

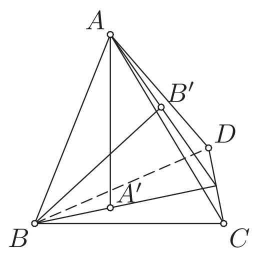
$\boxed{\Longrightarrow}$: Претпоставимо да је RS заједничка нормала страница AC и BD. Пошто важи $PN \parallel BD$ и $MP \parallel AC$ (средње линије одговарајућих троуглова), следи да је $RS \perp PN, MP$, па је RS управна на равни паралелограма $MPNQ$. Према томе, RS је управна на MN, PQ, па су паралелограми $MSNR$ и $PRQS$ ромбови. Следи да је $MS = MR$ и $PS = PR$. Пошто је $MS = \frac{1}{2}BC$, $MR = \frac{1}{2}AD$, добијамо $BC = AD$, а пошто је $PS = \frac{1}{2}AB$, $PR = \frac{1}{2}CD$, следи да је $AB = CD$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Обрнуто, претпоставимо да је $AB = CD$ и $BC = AD$. Тада је $MS = MR$ и $PS = PR$. Следи да су паралелограми $MSNR$ и $PRQS$ ромбови, па је $MN \perp RS$ и $PQ \perp RS$. Дакле, RS је управна на правима MN, PQ равни $MNPQ$, па је управна на тој равни. Специјално, RS је управна на MP, PN. Пошто је $MP \parallel AC$ и $PN \parallel BD$, следи да је $RS \perp AC$ и $RS \perp BD$, односно да је RS заједничка нормала страница AC, BD.

Дефиниција 44. Тетраедар $ABCD$ је *ортогоналан* ако важи $AB \perp CD$, $BC \perp AD, AC \perp BD$.

9. Висине AA' и BB' тетраедра $ABCD$ се секу ако и само ако је $AB \perp CD$. Доказати.

Решење:

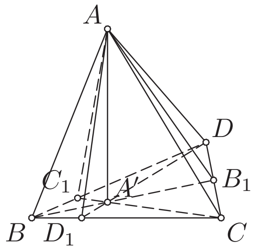


$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека се висине AA', BB' секу. Тада постоји раван π која их садржи. Висина AA' је управна на равни BCD, па је $AA' \perp CD$, а висина BB' је управна на равни ACD, па је $BB' \perp CD$. Према томе, $CD \perp \pi$, па је CD управна на свакој правој равни π. Специјално, управна је на правој AB, тј. важи $CD \perp AB$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Обратно, нека је $AB \perp CD$. Нека је π раван која садржи тачке A, A', B. Висина AA' је управна на равни BCD, па је управна и на CD. Следи да је CD управна на равни која садржи праве AA', AB, тј. на равни π. Висина BB' је управна на равни ACD, па је управна на правој CD. Пошто је π раван која садржи тачку B и управна је на правој CD, следи да висина BB' мора припадати равни π, јер све праве које садрже тачку B и управне су на правој CD припадају равни π. Према томе, висине AA', BB' припадају равни π. Оне не могу бити паралелне, јер би тада равни BCD, ACD, које су управне на њима, биле паралелне, па би се поклапале, што би значило да су тачке A, B, C, D компланарне, а то није тачно. Према томе, висине AA', BB' припадају једној равни и нису паралелне, па следи да се секу.

10. Доказати да подножја висина из темена тетраедра представљају ортоцентре наспрамних пљосни ако и само ако је тетраедар ортогоналан.

Решење:



Нека је A' подножје висине из темена A на пљосни BCD.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је A' ортоцентар троугла $\triangle BCD$. Тада је $BA' \perp CD$, а пошто је и $AA' \perp CD$, следи да је права CD управна на равни која садржи тачке A, A', B. Према томе, следи да је CD управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој AB. Слично, $DA' \perp BC$, а пошто је и $AA' \perp BC$, следи да је права BC управна на равни која садржи тачке A, A', D. Према томе, следи да је BC управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој AD. Такође, $CA' \perp BD$, а пошто је и $AA' \perp BD$, следи да је права BD управна на равни која садржи тачке A, A', C. Према томе, следи да је BD управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој AC. Дакле, доказали смо да важи $AB \perp CD, BC \perp AD, AC \perp BD$, па је тетраедар $ABCD$ ортогоналан.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Обрнуто, претпоставимо да је тетраедар $ABCD$ ортогоналан. Тада је $AB \perp CD$, $BC \perp AD$, $AC \perp BD$. Права AA' је управна на равни BCD, па следи да је $AA' \perp BC, CD, BD$. Дакле, имамо да је права BC управна на правима AA', AD па је управна на равни која их садржи и на свакој правој те равни, па специјално на правој DA'. Према томе, права DA' је висина троугла $\triangle BCD$. Слично, права CD управна на правима AA', AB па је управна на равни која их садржи и на свакој правој те равни, па специјално на правој BA'. Према томе, права BA' је висина троугла $\triangle BCD$. Висине DA', BA' троугла $\triangle BCD$ секу се у тачки A', па следи да је тачка A' ортоцентар тог троугла, што је и требало доказати.

7 Изометријске трансформације простора

Дефиниција 45. Нека је $\mathbf{S}$ простор. Пресликавање $\mathfrak{I} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$, такво да за сваки пар тачака (A, B) простора $\mathbf{S}$ важи $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$, називамо *изометријском трансформацијом* (*изометријом*) простора $\mathbf{S}$.

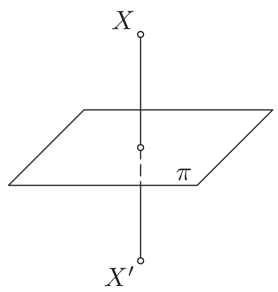
Све изометрије простора су бијекције. Изометрије простора сликају праве у праве и чувају распоред тачака на правој, сликају полуправе у полуправе, дужи у дужи, угаоне линије у угаоне линије, углове у углове, полуравни у полуравни, равни у равни, полупросторе у полупросторе, диедарске површи у диедарске површи, диедре у диедре итд. Изометрије простора које мењају оријентацију простора називамо *индиректним* изометријама, а оне које чувају оријентацију простора називамо *директним* изометријама. За сваке две изометрије $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$, њихова композиција $\mathfrak{J} \circ \mathfrak{I}$ је такође изометрија, и инверз $\mathfrak{I}^{-1}$ изометрије $\mathfrak{I}$ је такође изометрија.

Дефиниција 46. Нека су $\Phi, \Phi' \subseteq \mathbf{S}$ фигуре у простору $\mathbf{S}$. Ако постоји изометрија $\mathfrak{I} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ простора $\mathbf{S}$ таква да важи $\Phi' = \mathfrak{I}(\Phi)$, онда кажемо да је фигура Φ *подударна* фигури Φ' и пишемо $\Phi \cong \Phi'$.

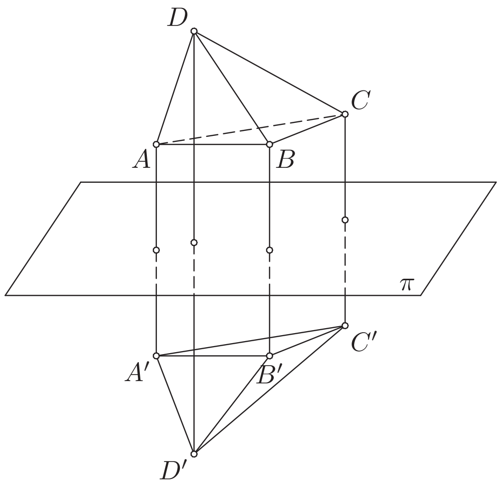
Релација $\cong$ подударности фигура је релација еквиваленције. Због симетричности релације чешће ћемо говорити да су фигуре *међусобно подударне*.

Класификацију изометрија равни започели смо дефинисањем осне рефлексије. Изометрија простора која представља природно уопштење осне рефлексије равни јесте раванска рефлексија.

Дефиниција 47. Нека је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ и нека је пресликавање $\mathcal{S}_\pi$ дато на следећи начин: ако је $X \in \pi$, онда је $\mathcal{S}_\pi(X) = X$, а иначе је $\mathcal{S}_\pi(X) = X'$, где је X' тачка таква да је π медијална раван дужи XX'. Онда се пресликавање $\mathcal{S}_\pi$ назива *раванском рефлексијом* (*раванском симетријом*) простора $\mathbf{S}$ с равни рефлексије (огледалом) π.



Није тешко доказати да $\mathcal{S}_\pi$ јесте изометрија простора. Раванска рефлексија је пресликавање које слика као „лик у огледалу”. Ако двапут применимо раванску рефлексију, по дефиницији се тачке равни π сликају у себе, а ако се X слика у X' такво да је π медијална раван дужи XX', онда се X' мора сликати у X. Дакле, $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \mathrm{Id}$, што значи да је раванска рефлексија сама себи инверз, односно да је инволуција. По дефиницији се тачке огледала π сликају у себе, а тачке ван огледала π се не сликају у себе (да би постојала дуж чија је π медијална раван), па су једине фиксне тачке (тачке које се сликају у себе) тачке огледала π.



Нека је $ABCD$ позитивно оријентисан тетраедар, тј. нека су A, B, C, D тачке простора $\mathbf{S}$ такве да када се у равни троугла $\triangle ABC$ прстима десне руке иде од темена A ка темену B па затим ка темену C, палац показује на онај полупростор с рубом ABC у којем се налази теме D. Ако су A', B', C', D' редом слике тачака A, B, C, D при раванској рефлексији $\mathcal{S}_\pi$, онда је тетраедар $A'B'C'D'$ негативно оријентисан, односно ако се у равни троугла $\triangle A'B'C'$ прстима десне руке иде од темена A' ка темену B' па затим ка темену C', палац показује на онај полупростор с рубом $A'B'C'$ у којем се не налази теме D'. Према томе, раванска рефлексија мења оријентацију простора, па је она индиректна изометрија простора.

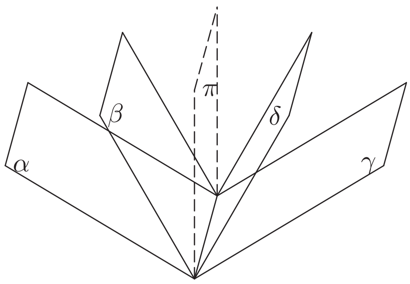
Теорема 34. *Ако је $\mathfrak{I}$ индиректна изометрија простора $\mathbf{S}$ која има бар две разне фиксне тачке P, Q, онда је $\mathfrak{I}$ раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ чије огледало $\pi \subset \mathbf{S}$ садржи фиксне тачке P, Q.*

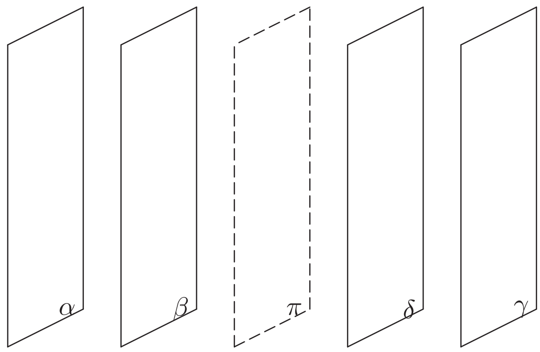
Теорема 35 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$, $\mathcal{S}_\pi$ раванска рефлексија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Ако је $\pi' = \mathfrak{I}(\pi)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\pi'}$.*

Сваку изометрију простора $\mathbf{S}$ можемо изразити преко раванских рефлексија. Штавише, увек их можемо одабрати тако да их буде највише четири.

Теорема 36. *Нека је $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\alpha$ за неку раван $\alpha \subset \mathbf{S}$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ за неке равни $\alpha, \beta \subset \mathbf{S}$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ за неке равни $\alpha, \beta, \gamma \subset \mathbf{S}$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ за неке равни $\alpha, \beta, \gamma, \delta \subset \mathbf{S}$.*

Као што постоји појам прамена правих у равни, тако постоји и појам прамена равни у простору. Постоје две врсте праменова равни у простору. Ако је $p \subset \mathbf{S}$ права у простору, скуп свих равни које садрже праву p чини прамен равни, који се назива *коаксијални прамен равни*. Ако је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван у простору, скуп свих равни које су паралелне равни π (укључујући и раван π) чини прамен равни, који се назива *паралелни прамен равни*. Што се везе између праменова равни и раванских рефлексија тиче, важи следећа теорема.





Теорема 37. *Нека су $\alpha, \beta, \gamma \subset \mathbf{S}$ равни простора $\mathbf{S}$. Онда је композиција $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ раванска рефлексија ако и само ако равни α, β, γ припадају једном прамену. Штавише, тада раван те рефлексије (означимо је са δ) припада том прамену и ако је раван π таква да су равни α, γ симетричне у односу на π, тада су и равни β, δ симетричне у односу на π.*

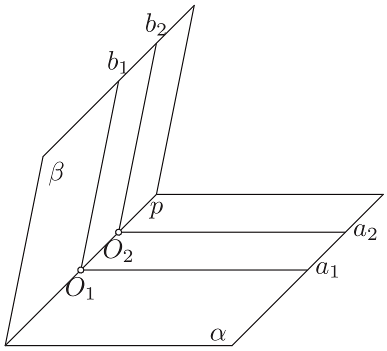
Утврдимо које још изометрије простора постоје.

Дефиниција 48. Пресликавање $\mathcal{E} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{E}(X) = X$ за сваку тачку $X \in \mathbf{S}$ називамо *коинциденцијом*.

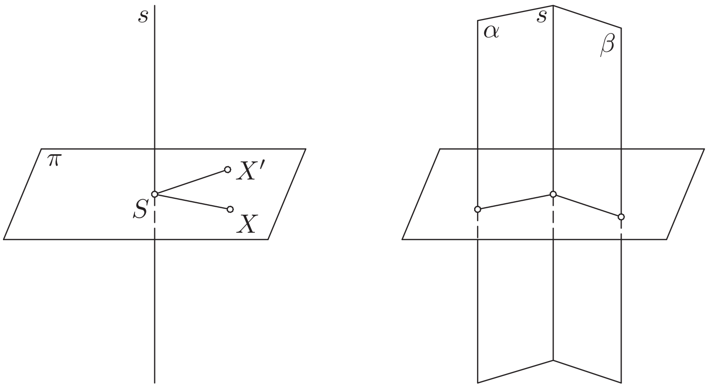
Коинциденција је, наравно, идентичко пресликавање. С обзиром на то да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \mathrm{Id} = \mathcal{E}$, имамо репрезентацију коинциденције преко производа двеју раванских рефлексија. Коинциденција је директна изометрија простора.

Теорема 38. *Ако изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ има бар четири некомпланарне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ има бар три неколинеарне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$.*

Нека је $\alpha p \beta$ диедар и нека су γ_1, γ_2 равни које су управне на правој p редом у тачкама O_1, O_2. Нека су O_1a_1, O_2a_2 редом пресечне полуправе равни γ_1, γ_2 и пљосни $p\alpha$ и нека су O_1b_1, O_2b_2 редом пресечне полуправе равни γ_1, γ_2 и пљосни $p\beta$. На основу теореме 26, углови $\measuredangle a_1O_1b_1, \measuredangle a_2O_2b_2$ су подударни. Ако је диедар $\alpha p \beta$ оријентисан, онда су и углови $\measuredangle a_1O_1b_1$, $\measuredangle a_2O_2b_2$ оријентисани и имају исту оријентацију, која је одређена оријентацијом диедра. Сходно томе, за оријентисани угао $\varphi = \measuredangle a_1O_1b_1 = \measuredangle a_2O_2b_2$ говорићемо да је оријентисани угао у равни нормалној на p.



Дефиниција 49. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$ и φ оријентисани угао у равни нормалној на s. Пресликавање $\mathcal{R}_{s,\varphi} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{R}_{s,\varphi}(X) = X$ за $X \in s$ и $\mathcal{R}_{s,\varphi}(X) = X'$ где је X' тачка равни π, која садржи X и нормална је на s у тачки S, таква да важи $SX = SX'$ и $\measuredangle XSX' = \varphi$ (подударни су и имају исту оријентацију), за тачке $X \notin s$, назива се *осном ротацијом* око осе s за оријентисани угао φ.



Осна ротација је уопштење ротације равни. Нека је $\alpha s \beta$ оријентисани диедар, чији је оријентисани нагибни угао једнак половини оријентисаног угла φ. Ако су α', β' редом равни које садрже пљосни $s\alpha, s\beta$ тог диедра, онда је $\mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$. Равни α', β' можемо ротирати око осе s за произвољан угао и добити равни α'', β'' такве да је композиција $\mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha''}$

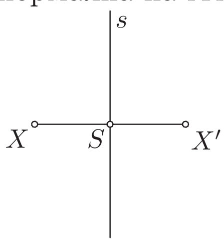
такође једнака полазној осној ротацији. Дакле, ако су α'', β'' произвољне равни такве да је $\alpha'' \cap \beta'' = s$ и $\measuredangle(\alpha'', \beta'') = \frac{\varphi}{2}$ (оријентисани углови), онда је $\mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha''}$. Пошто је композиција двеју индиректних изометрија простора, осна ротација је директна изометрија простора.

Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{s,\psi} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{s,\varphi+\psi}$, $\mathcal{R}_{s,0^\circ} = \mathcal{R}_{s,360^\circ} = \mathcal{E}$ и $\mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{S,-\varphi}$, где је $-\varphi$ угао подударан углу φ, супротне оријентације. Ако је $\mathcal{R}_{s,\varphi} \neq \mathcal{E}$, све фиксне тачке осне ротације $\mathcal{R}_{s,\varphi}$ припадају оси s.

Теорема 39. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$, која није коинциденција, има бар једну фиксну тачку S, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{s,\varphi}$, чија оса $s \subset \mathbf{S}$ садржи фиксну тачку S.*

Теорема 40 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, φ оријентисани угао у равни нормалној на s, $\mathcal{R}_{s,\varphi}$ осна ротација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Нека је $s' = \mathfrak{I}(s)$ и $\varphi' = \mathfrak{I}(\varphi)$ оријентисани угао у равни нормалној на s'. Тада је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{s',\varphi'}$.*

Ако је угао ротације опружен, онда за тачку $X' = \mathcal{R}_{s,180^\circ}(X)$, где $X \notin s$, важи да је $SX' = SX$ и $\measuredangle XSX' = 180^\circ$, где је S тачка пресека праве s и равни која садржи X и нормална је на s. Другим речима, важи $SX = SX'$ и $\mathcal{B}(X, S, X')$, па је S средиште дужи XX'. Права s је нормална на XX' и садржи S, па је (једна од) симетрала дужи XX'.



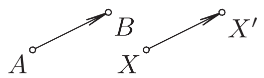
Дефиниција 50. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права у простору $\mathbf{S}$. Пресликавање $\mathcal{S}_s : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{S}_s(X) = X$ за $X \in s$ и $\mathcal{S}_s(X) = X'$, где је X' таква да је s симетрала дужи XX', назива се *осном симетријом* простора $\mathbf{S}$ с осом s.

Дакле, $\mathcal{S}_s = \mathcal{R}_{s,180^\circ}$. Јасно је да је $\mathcal{S}_s^{-1} = \mathcal{S}_s$, тј. да је осна симетрија инволуција. Такође, ако је $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, онда је оријентисани угао од равни α ка равни β подударан углу $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, тј. важи $\alpha \perp \beta$.

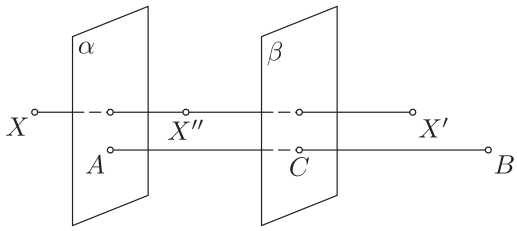
Потребно је на овом месту нагласити да осна симетрија простора и осна симетрија равни не представљају исти тип пресликавања, иако имају сличне дефиниције. Осна симетрија равни је дефинисана само за тачке те равни, а осна симетрија простора је дефинисана за све тачке простора.

Такође, природно уопштење осне симетрије равни јесте раванска симетрија простора, а осна симетрија простора је специјалан случај осне ротације простора, која је природно уопштење ротације равни. Треба имати на уму и то да је осна симетрија простора директна изометрија простора, док је осна симетрија равни индиректна изометрија равни, као и да се оријентација простора одређује помоћу оријентисаних тетраедара, а оријентација равни помоћу оријентисаних троуглова.

Дефиниција 51. Нека је $\overrightarrow{AB}$ вектор. Пресликавање $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ дато са $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(X) = X'$, где је X' таква да је $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, назива се *транслацијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$.



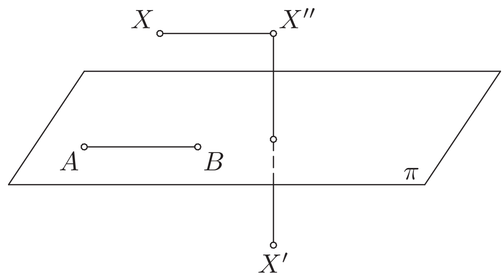
Транслација простора је природно уопштење транслације равни и има исте особине као транслација равни. То је директна изометрија простора која нема фиксних тачака (ако је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$). Обрнуто не важи, јер у простору постоје директне изометрије које нису транслације и немају фиксних тачака. Композиција транслација за $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ је транслација за $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, а инверз транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ је транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$.



Нека је α раван која садржи тачку A и управна је на правој AB и нека је β раван која садржи средиште C дужи AB и управна је на правој AB. Тада важи $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Дакле, и транслацију видимо као композицију двеју раванских рефлексија, слично као што смо транслацију у равни видели као композицију осних рефлексија. Наравно, ово није једина репрезентација транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ помоћу раванских рефлексија, јер уместо равни α, β можемо посматрати равни α', β' које су управне на AB и налазе се на растојању $\frac{AB}{2}$, при чему је смер од равни α' ка равни β' исти као смер вектора $\overrightarrow{AB}$.

Теорема 41 (Теорема о трансмутацији). *Нека су $A, B \in \mathbf{S}$ тачке простора $\mathbf{S}$, $\overrightarrow{AB}$ вектор простора $\mathbf{S}$, $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ транслација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија. Ако су $A' = \mathfrak{I}(A), B' = \mathfrak{I}(B)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{A'B'}}$.*

Дефиниција 52. Нека је π раван простора $\mathbf{S}$ и $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ ненула вектор простора $\mathbf{S}$ паралелан равни π. Пресликавање $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ дато са $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ назива се *клизајућом рефлексијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$ у односу на раван π.



Клизајућа рефлексија простора је природно уопштење клизајуће рефлексије равни. Вектор $\overrightarrow{AB}$ мора бити паралелан равни рефлексије. Она је индиректна изометрија простора, јер је композиција директне и индиректне изометрије, те мења оријентацију простора. Такође, клизајућа рефлексија нема фиксних тачака.

Теорема 42. *Ако индиректна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}}$, где је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ и $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор простора $\mathbf{S}$ паралелан равни π.*

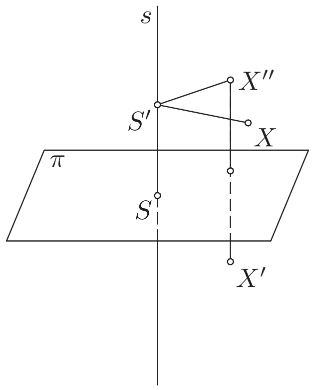
Код клизајуће рефлексије простора транслација и рефлексија комутирају, тј. није битно да ли ћемо прво извршити транслацију, па онда рефлексију, или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_\pi$. Како се транслација разбија на композицију двеју раванских рефлексија чија су огледала нормална на AB и раван π је паралелна са AB, следи да је клизајућа рефлексија композиција трију раванских рефлексија чија огледала не припадају једном прамену.

Теорема 43 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$, $\overrightarrow{AB}$ ненула вектор паралелан равни π, $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}}$ клизајућа рефлексија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Ако је $A' = \mathfrak{I}(A)$, $B' = \mathfrak{I}(B)$, $\pi' = \mathfrak{I}(\pi)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{G}_{\pi',\overrightarrow{A'B'}}$.*

Што се инверза клизајуће рефлексије тиче, једноставно се види да је $\mathcal{G}^{-1}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \left(\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}\right)^{-1} = \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}^{-1}_\pi = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BA}}$. Дакле, клизајућа рефлексија није инволуција.

Поред клизајуће рефлексије, постоји још један тип изометрија простора које се могу разложити на композицију трију раванских рефлексија чија огледала не припадају једном прамену.

Дефиниција 53. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ таква да је $s \perp \pi$ и φ оријентисани угао равни π различит од 0° и пуног угла. Пресликавање $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ дато са $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\varphi}$ назива се *осноротационом рефлексијом.*



Не постоји изометрија равни чије је уопштење осноротациона рефлексија. Како јој само име каже, ова изометрија је композиција осне ротације и раванске рефлексије. Индиректна је, има тачно једну фиксну тачку и то продорну тачку S праве s и равни π.

Теорема 44. *Ако индиректна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ има тачно једну фиксну тачку S, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{s,\varphi,\pi}$, где је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ која садржи фиксну тачку S, $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$ нормална на равни π у тачки S и φ оријентисани угао равни π различит од 0° и пуног угла.*

Код осноротационе рефлексије ротација и рефлексија комутирају, тј. небитно је да ли ћемо прво вршити ротацију па рефлексију или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{s,\varphi} \circ \mathcal{S}_\pi$. Ротација се разбија на композицију двеју раванских рефлексија чија се огледала секу по оси ротације, па како је та оса нормална на равни π, следи да је осноротациона рефлексија композиција трију раванских рефлексија чија огледала не припадају једном прамену.

Теорема 45 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, $\pi \subset \mathbf{S}$ раван нормална на правој s, φ оријентисани угао у равни π, $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi}$ осноротациона рефлексија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Нека су $s' = \mathfrak{I}(s)$, $\pi' = \mathfrak{I}(\pi)$ и $\varphi' = \mathfrak{I}(\varphi)$ оријентисани угао у равни π'. Тада је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{s',\varphi',\pi'}$.*

Што се инверза осноротационе рефлексије тиче, једноставно се види да важи $\mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi,\pi} = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\varphi})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi} \circ \mathcal{S}^{-1}_\pi = \mathcal{R}_{s,-\varphi} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,-\varphi,\pi}$. Посебно је занимљив случај када је угао ротације једнак опруженом углу. Тада је $\mathcal{R}_{s,180^\circ,\pi} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\pi$. Ако је S пресечна тачка праве s и равни π, X

произвољна тачка различита од S и X' њена слика при овој изометрији, није тешко доказати да је тада $SX = SX'$ и $\mathcal{B}(X, S, X')$. Другим речима, S је средиште дужи XX'. Овакво пресликавање назива се *централном симетријом.*

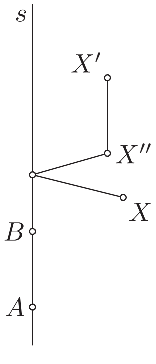
Дефиниција 54. Нека је $S \in \mathbf{S}$ тачка у простору $\mathbf{S}$. Пресликавање $\mathcal{S}_S : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{S}_S(S) = S$ и $\mathcal{S}_S(X) = X'$, где је $X' \in \mathbf{S}$ тачка таква да је S средиште дужи XX', за $X \neq S$, назива се *централна симетрија* простора $\mathbf{S}$.

Занимљиво је приметити да се код централне симетрије $\mathcal{S}_S$ за праву s и раван π могу одабрати било која права и раван које су међусобно нормалне у тачки S. Како је $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, где је $\alpha \cap \beta = s$ и $\alpha \perp \beta$, следи да је $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Пошто је $s \perp \pi$, а свака раван која садржи s је такође нормална на равни π, следи да је $\alpha \perp \pi$ и $\beta \perp \pi$. Дакле, централна симетрија се може разложити на композицију трију раванских рефлексија чија су огледала три међусобно нормалне равни које садрже центар симетрије. Пошто раванске рефлексије, чија су огледала нормалне равни, комутирају, следи да је поредак рефлексија које чине централну симетрију небитан, јер сваке две комутирају. Централна симетрија простора је индиректна изометрија простора и инволуција је, тј. важи $\mathcal{S}_S^{-1} = \mathcal{S}_S$.

Теорема 46 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $S \in \mathbf{S}$ тачка у простору $\mathbf{S}$, $\mathcal{S}_S$ централна симетрија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Ако је $S' = \mathfrak{I}(S)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{S}_S \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_{S'}$.*

Преостало је још да видимо типове изометрија простора које се могу разложити на композицију четири раванске рефлексије. Испоставља се да постоји само један такав тип изометрија.

Дефиниција 55. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, φ оријентисани угао у равни нормалној на s, различит од $0°$ и пуног угла и $\overrightarrow{AB}$ ненула вектор паралелан правој s. Пресликавање $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ које је дато са $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi}$ назива се *завојним кретањем.*



Завојно кретање је директна изометрија, јер је композиција двеју директних изометрија (ротације и транслације). Она нема фиксних тачака. Ротација се може разложити на композицију двеју раванских рефлексија чија се огледала секу по правој s, а транслација на композицију двеју раванских рефлексија чија су огледала нормална на $AB \parallel s$, па се завојно кретање може разложити на композицију четири раванске рефлексије. Код завојног кретања транслација и ротација комутирају, тј. важи $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{s,\varphi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$.

Теорема 47 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, φ оријентисани угао у равни нормалној на s различит од $0°$ и пуног угла, $\overrightarrow{AB}$ ненула вектор паралелан правој s, $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}}$ завојно кретање и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Нека је $s' = \mathfrak{I}(s)$, $A' = \mathfrak{I}(A)$, $B' = \mathfrak{I}(B)$ и $\varphi' = \mathfrak{I}(\varphi)$ оријентисани угао у равни нормалној на s'. Тада је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{Z}_{s',\varphi',\overrightarrow{A'B'}}$.*

Што се инверза завојног кретања тиче, једноставно се види да важи $\mathcal{Z}^{-1}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} = (\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi} \circ \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{R}_{s,-\varphi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} = \mathcal{Z}_{s,-\varphi,\overrightarrow{BA}}$. Посебно је занимљив случај када је угао ротације једнак опруженом углу. Тада је $\mathcal{Z}_{AB,180°,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$. Ово пресликавање назива се *завојним полуобртајем* и означава се са $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{AB}}$ (да би се поједноставило означавање, сматра се да је одабран представник вектора $\overrightarrow{AB}$ такав да тачке A, B припадају правој s).

1. Ако су A, B, C три тачке равни π, доказати да важи $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi$.

Решење: Како је $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_\pi$, $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_\pi$, $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{S}_\pi$, следи да је

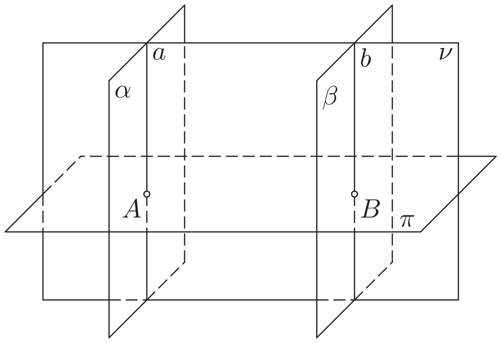
$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} &= \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} \\
&= \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \\
&= \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi.
\end{aligned}$$

2. Доказати $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi \Leftrightarrow O \in \pi$.

Решење: Почетна једнакост $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi^{-1} = \mathcal{S}_O$. На основу теореме о трансмутацији следи да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_\pi(O)}$, па је полазна једнакост еквивалентна једакости $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_\pi(O)} = \mathcal{S}_O$. Две централне симетрије су једнаке ако и само ако су им центри исти, према томе, последња једнакост је еквивалентна са $\mathcal{S}_\pi(O) = O$. Све фиксне тачке раванске рефлексије налазе се на њеном огледалу, па је $\mathcal{S}_\pi(O) = O$ ако и само ако $O \in \pi$, што је и требало доказати.

3. Доказати да је композиција непарног броја централних симетрија простора поново централна симетрија.

Решење: Да бисмо утврдили шта представља композиција непарног броја централних симетрија, одредимо прво шта представља композиција двеју централних симетрија, тј. шта је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$. Претпоставимо најпре да је $A \neq B$.



Нека је AB права која садржи тачке A, B и π нека раван која садржи праву AB. Нека је a права која садржи тачку A и нормална је на равни π и нека је b права која садржи тачку B и нормална је на равни π. Тада је $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_\pi$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Праве a, b су нормалне на равни π, па су паралелне и постоји раван ν која их садржи. Нека је α раван која садржи праву a и нормална је на равни ν и нека је β раван која садржи праву b и нормална је на равни ν. Тада је $\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\nu$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Како је по конструкцији права a нормална на равни π, онда је права a нормална и на правој AB те равни π. Ако је a' права нормална на правој a у тачки A која припада равни α, онда је угао између правих a', AB нагибни угао диедра који граде равни α, ν, што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, $AB \perp a, a'$, па је $AB \perp \alpha$. Слично је и $AB \perp \beta$, па је $\alpha \parallel \beta$ и $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$. Овиме је доказано да је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$.

Ако је $A = B$, онда је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, па је и $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. Како је централна симетрија инволуција, тј. важи $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{E} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{0}}$, следи да и у случају $A = B$ можемо писати да је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$.

Користићемо принцип математичке индукције. Доказујемо тврђење: за сваки природан број n и за произвољне тачке $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ простора $\mathbf{S}$ пресликавање $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија.

База индукције ($n = 1$): За произвољну тачку A_1 простора $\mathbf{S}$ пресликавање $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија, па тврђење важи за $n = 1$.

Индуктивна хипотеза: Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n. То значи да је композиција произвољне $2n - 1$ централне симетрије поново централна симетрија.

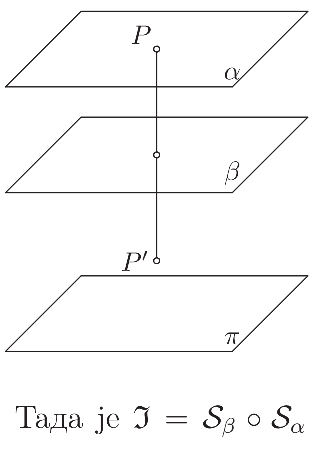
Индуктивни корак: Како је $2(n+1)-1=2n+2-1=2n+1$, треба доказати да је композиција произвољне $2n+1$ централне симетрије поново централна симетрија. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ произвољне тачке простора $\mathbf{S}$ и нека је $\mathfrak{I}=\mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$. Потребно је доказати да је $\mathfrak{I}$ централна симетрија. Према индуктивној хипотези, пресликавање $\mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија, тј. $\mathcal{S}_B$, за неку тачку B. Према томе, $\mathfrak{I}=\mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n}} \circ \mathcal{S}_B=\mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA_{2n}}}$. Нека је тачка C таква да је $\overrightarrow{CA_{2n+1}}=\overrightarrow{BA_{2n}}$. Тада је $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA_{2n}}}=\mathcal{T}_{2\overrightarrow{CA_{2n+1}}}$, па је $\mathfrak{I}=\mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{CA_{2n+1}}}=\mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_C=\mathcal{S}_C$, тј. пресликавање $\mathfrak{I}$ је централна симетрија.

На основу принципа математичке индукције, за сваки природан број n и произвољне тачке $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ простора $\mathbf{S}$ важи да је пресликавање $\mathfrak{I}=\mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ централна симетрија. Другим речима, композиција непарног броја централних симетрија је централна симетрија, што је и требало доказати.

4. Одредити тип изометрије $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$.

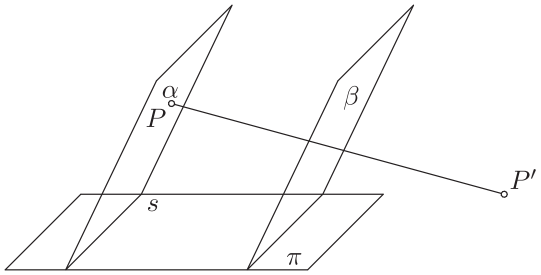
Решење: Нека је α раван која садржи тачку P и нормална је на PP' и нека је β раван која садржи средиште дужи PP' и нормална је на њој. Тада је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}=\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, па је $\mathfrak{I}=\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi=\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$. Разликујемо два случаја:

1° Равни α, β, π припадају једном прамену. Пошто су равни α, β међусобно паралелне (јер су нормалне на PP'), овај случај се остварује ако је $\pi \perp PP'$.

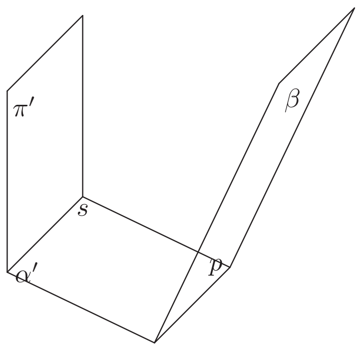


Тада је $\mathfrak{I}=\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi=\mathcal{S}_\gamma$, за неку раван γ тог прамена, тј. за неку раван γ нормалну на PP'. Дакле, у овом случају је $\mathfrak{I}$ раванска рефлексија.

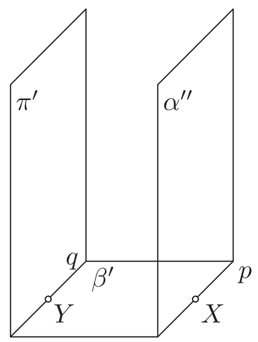
2° Равни α, β, π не припадају једном прамену, тј. $\pi \not\perp PP'$.



Нека је $s = \alpha \cap \pi$ пресечна права равни α, π (она постоји јер ове равни нису паралелне). Тада је $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,2\measuredangle(\pi,\alpha)}$. Нека су α', π' равни које се секу по правој s и оријентисани угао диедра који граде равни π', α' је исти као оријентисани угао диедра који граде равни π, α, при чему је $\alpha' \perp \beta$. Тада је $\mathcal{R}_{s,2\measuredangle(\pi,\alpha)} = \mathcal{S}_{\alpha'} \circ \mathcal{S}_{\pi'}$. Одавде следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'} \circ \mathcal{S}_{\pi'}$.



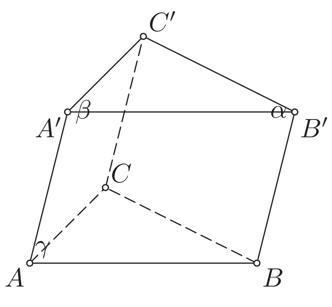
Равни α', β су нормалне, па се секу по правој $p = \alpha' \cap \beta$. Следи да важи $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{S}_p$. Нека су α'', β' равни које се секу по правој p и међусобно су нормалне, при чему је $\beta' \perp \pi'$. Тада је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha''}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha''} \circ \mathcal{S}_{\pi'}$. При томе, ниједна тачка праве s не припада равни β (јер су α, β паралелне), па следи да ниједна тачка праве s не припада правој p. Како праве s, p припадају равни α', а немају заједничких тачака, следи да су оне паралелне, па су паралелне и права p и раван π'.



Нека је q пресечна права равни β', π'. Како ниједна тачка праве p не припада равни π', онда не припада ни правој q, а пошто праве p, q припадају равни β', следи да су оне паралелне. Ако је X произвољна тачка са праве p и Y подножје нормале из X на правој q, онда је XY нормална и на правој p. Ако је p' права нормална на p у тачки X која припада равни α'', онда је угао између правих p', XY нагибни угао диедра који граде равни α'', β', што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, XY је нормална на правима p, p' равни α'' па је нормална на равни α''. Слично се добија и да је XY нормална на равни π'. Према томе, $\alpha'' \parallel \pi'$ и $\mathcal{S}_{\alpha''} \circ \mathcal{S}_{\pi'} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}}$. Вектор $\overrightarrow{YX}$ је паралелан равни β', па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}} = \mathcal{G}_{\beta', 2\overrightarrow{YX}}$, што значи да је $\mathfrak{I}$ клизајућа рефлексија.

5. Доказати да је композиција три раванске рефлексије којима су основе одређене бочним пљоснима тростране призме $ABCA'B'C'$ клизајућа рефлексија тог простора.

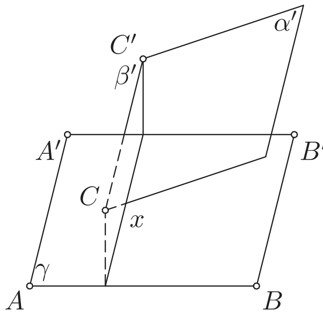
Решење:



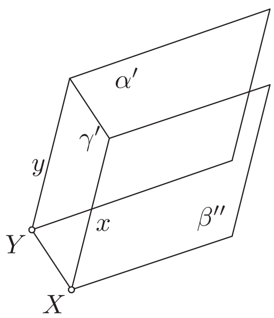
Нека је α раван $BB'C'C$, β раван $AA'C'C$ и γ раван $AA'B'B$. Потребно је доказати да је изометрија $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ клизајућа рефлексија.

Пошто је $CC' = \alpha \cap \beta$, следи да је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{R}_{CC', 2\measuredangle(\alpha,\beta)}$. Нека су α', β' равни такве да је $\alpha' \cap \beta' = CC'$ и оријентисани угао диедра који граде равни α', β' једнак оријентисаном углу диедра који граде равни α, β, при чему је $\beta' \perp \gamma$. Тада је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{R}_{CC', 2\measuredangle(\alpha,\beta)} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$, па је

$\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$.



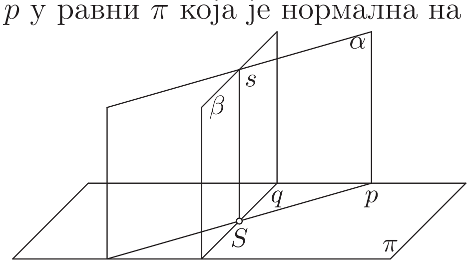
Равни β', γ су нормалне, па се секу по правој $x = \beta' \cap \gamma$. Следи да је $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_{\beta'} = \mathcal{S}_x$. Нека су β'', γ' равни које се секу по правој x и међусобно су нормалне, при чему је $\gamma' \perp \alpha'$. Тада је $\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_{\beta''}$. Према томе, следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$. Права CC' је паралелна равни γ ($CC' \parallel AA'$ као бочне ивице призме $ABCA'B'C'$, а права AA' припада равни γ), па ниједна тачка са праве CC' не припада равни γ, па самим тим ни правој x. Како праве CC', x припадају равни β', следи да су оне паралелне, па су паралелне и права x и раван α'.



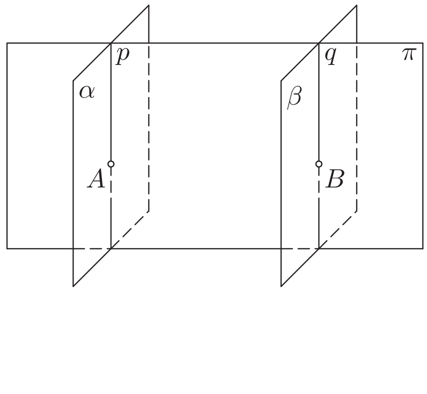
Нека је y пресечна права равни α', γ'. Како ниједна тачка праве x не припада равни α', онда не припада ни правој y, а пошто праве x, y припадају равни γ', следи да су оне паралелне. Ако је X произвољна тачка са праве x и Y подножје нормале из X на правој y, онда је XY нормална и на правој x. Ако је p права нормална на x у тачки X која припада равни β'', онда је угао између правих p, XY нагибни угао диедра који граде равни β'', γ', што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, XY је нормална на правима x, p равни β'' па је нормална на равни β''. Слично се добија и да је XY нормална на равни α'. Према томе, $\alpha' \parallel \beta''$ и $\mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}}$. Вектор $\overrightarrow{YX}$ је паралелан равни γ', па закључујемо да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}} = \mathcal{G}_{\gamma', 2\overrightarrow{YX}}$, што значи да је $\mathfrak{I}$ клизајућа рефлексија.

6. Одредити тип и компоненте изометрије која представља композицију двеју осних рефлексија $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ еуклидског простора, у зависности од узајамног положаја правих p и q.

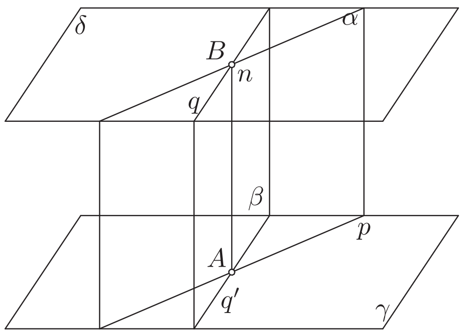
Решење: Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$. Две праве у простору могу припадати истој равни и тада се поклапају, секу у једној тачки или су паралелне, а ако не постоји раван која их садржи, онда су оне мимоилазне.
1° Праве p, q се поклапају. Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{E}$.
2° Праве p, q се секу у тачки S. Нека је π раван која садржи праве p, q, нека је s права која садржи тачку S и нормална је на равни π, нека је α раван која садржи праве s, p и нека је β раван која садржи праве s, q. За сваку од равни α, β важи да садржи праву s која је нормална на равни π, па важи $\alpha, \beta \perp \pi$. Следи да је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$ и да је $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{R}_{s, 2\measuredangle(\beta,\alpha)}$. Оријентисани угао диедра чије су пљосни β, α једнак је оријентисаном углу између правих q, p у равни π која је нормална на s, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{s, 2\measuredangle(q,p)}$.



3° Праве p, q су паралелне. Нека је π раван која садржи праве p, q, α раван која садржи p и нормална је на равни π и β раван која садржи q и нормална је на равни π. Тада је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$ и $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta$. Нека је A произвољна тачка праве p и B подножје нормале из тачке A на правој q. Пошто су p, q паралелне, следи да је AB нормална и на правој p. Ако је p' нормала у тачки A на правој p која припада равни α, онда је угао између правих p', AB нагибни угао диедра који граде α, π, што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, $AB \perp \alpha$, а слично је и $AB \perp \beta$, што значи да су равни α, β паралелне и да је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}}$.

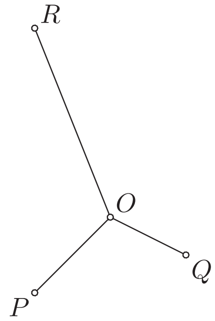


4° Праве p, q су мимоилазне. Тада постоји њихова јединствена заједничка нормала n која их сече редом у тачкама A, B. Нека је α раван која садржи праве p, n, β раван која садржи праве q, n, γ раван која садржи A и нормална је на правој n, а δ раван која садржи B и нормална је на правој n. Равни α, γ се секу по правој p, а пошто раван α садржи праву n која је нормална на равни γ, следи да је $\alpha \perp \gamma$. Према томе, $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\gamma$. Слично, равни β, δ се секу по правој q, а пошто раван β садржи праву n која је нормална на равни δ, следи да је $\beta \perp \delta$. Према томе, $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\delta$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\delta$. Раван β садржи праву n која је нормална на равни γ, па је $\beta \perp \gamma$. Следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta$. Нека је q' пресечна права равни β, γ. Тада је $q' \parallel q$ (обе праве припадају равни β, а пошто је $n \perp \gamma$, онда је $n \perp q'$, а важи и $n \perp q$), па је угао између мимоилазних правих q, p исти као угао између правих q', p. Равни α, β се секу по правој n и оријентисани угао диедра чије су пљосни β, α једнак је оријентисаном углу између правих q', p у равни γ која је нормална на n, па је $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{R}_{n, 2\measuredangle(q', p)}$. Можемо рећи да је и оријентисани угао између мимоилазних правих q, p једнак оријентисаном углу између правих q', p. Такође, равни γ, δ су нормалне на правој n, па је $\gamma \parallel \delta$. Следи да је $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{n, 2\measuredangle(q,p)} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}} = \mathcal{Z}_{n, 2\measuredangle(q,p), 2\overrightarrow{BA}}$.



7. Нека су OP, OQ, OR три међусобно нормалне дужи простора. Доказати да је композиција $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$ транслација.

Решење:



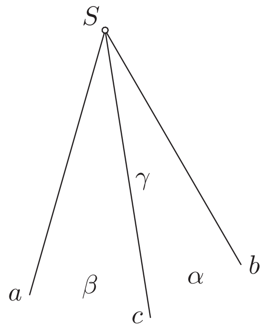
Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$. Пошто важи да је $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}} = \mathcal{S}_{OP} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}}$, $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{OQ}$ и $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} = \mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OR}}$, следи да је

$$\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{OQ} \circ \mathcal{S}_{OP} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}}.$$

Композиција транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}}$ је транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}}$, а на основу претходног задатка је $\mathcal{S}_{OQ} \circ \mathcal{S}_{OP}$ ротација око праве која је у тачки O нормална на OP, OQ, што је права OR, за двоструки угао који заклапају праве OP, OQ, што је опружени угао, јер су праве OP, OQ међусобно нормалне. Дакле, $\mathcal{S}_{OQ} \circ \mathcal{S}_{OP} = \mathcal{S}_{OR}$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}}$. На основу теореме о трансмутацији је $\mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{S}_{OR}$ транслација, па је $\mathfrak{I}$ композиција те транслације и транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}}$, што значи да је $\mathfrak{I}$ транслација.

8. Доказати да је у еуклидском простору композиција састављена од три раванске рефлексије којима су основе одређене пљоснима триедра осноротациона рефлексија.

Решење: Нека је α раван која садржи пљосан Sbc, β раван која садржи пљосан Sac и γ раван која садржи пљосан Sab триедра $Sabc$. Потребно је доказати да је изометрија $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ осноротациона рефлексија.



Изометрија $\mathfrak{I}$ је индиректна, јер је композиција трију индиректних изометрија. Како тачка S припада свим трима равнима α, β, γ, следи

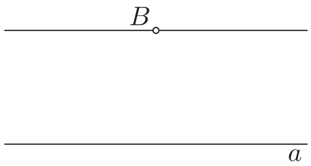
$$\mathfrak{I}(S) = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(S) = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta(S) = \mathcal{S}_\gamma(S) = S,$$

па је S фиксна тачка изометрије $\mathfrak{I}$. Према томе, $\mathfrak{I}$ није клизајућа рефлексија. Претпоставимо да је $\mathfrak{I}$ раванска рефлексија. На основу теореме 37, онда равни α, β, γ припадају једном прамену. Како се равни α, β секу по правој која садржи ивицу Sc триедра $Sabc$, тај прамен мора бити коаксијални прамен равни, те онда раван γ такође садржи ту праву, па и ивицу Sc. Међутим, како раван γ садржи ивице Sa, Sb, следи да све ивице триедра $Sabc$ припадају равни γ, што није могуће. Дакле, $\mathfrak{I}$ не може бити раванска рефлексија, па мора бити осноротациона рефлексија.

8 Хиперболичка геометрија

До сад смо изучавали еуклидску геометрију, која је заснована на 5 група аксиома (инциденције, распореда, подударности, непрекидности и паралелности). Без аксиоме паралелности се може доказати да за сваку праву a и тачку B која јој не припада важи да у њима одређеној равни постоји бар једна права која садржи тачку B, а с правом a нема заједничких тачака. Аксиома паралелности одређује број таквих правих.

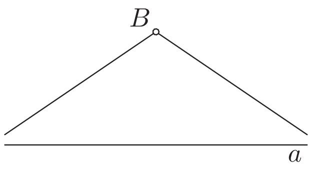
Аксиома (Плејфер)**.** *Постоје права a и тачка B која јој не припада такве да у њима одређеној равни не постоји више од једне праве која садржи тачку B, а с правом a нема заједничких тачака.*



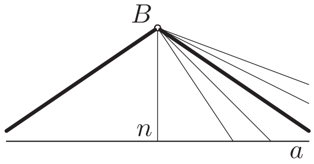
Може се доказати да ако постоје права a и тачка B с овом особином, онда свака права и тачка која јој не припада имају ову особину. Према томе, у еуклидској геометрији за сваку праву a и тачку B која јој не припада важи да у њима одређеној равни постоји јединствена права која садржи B и паралелна је са a.

Ова аксиома је еквивалентна петом постулату из Еуклидових Елемената. Он је скоро две хиљаде година окупирао највеће математичке умове. Еуклидска геометрија је сматрана за једину „исправну” геометрију и многи су покушавали да докажу да је пети Еуклидов постулат последица осталих аксиома и постулата из Елемената. У терминима аксиома на којима се данас заснива еуклидска геометрија, сматрало се да је Плејферова аксиома последица аксиома из осталих група. Међутим, испоставило се да то није тачно и да је Плејферова аксиома независна од осталих. Према томе, сасвим је исправно посматрати геометрију у којој поред аксиома прве четири групе важи и следећа аксиома.

Аксиома (Лобачевски)**.** *Постоје права a и тачка B која јој не припада такве да у њима одређеној равни постоји више од једне праве која садржи тачку B, а с правом a нема заједничких тачака.*



Може се доказати да ако постоје права a и тачка B с овом особином, онда свака права и тачка која јој не припада имају ову особину. Дакле, ако усвојимо ову аксиому, онда за сваку праву a и тачку B која јој не припада важи да у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже тачку B и немају заједничких тачака с правом a. Геометрија заснована на овој аксиоми назива се *хиперболичком геометријом*.



Приметимо да овде није употребљен израз „паралелне”, као што је то био случај у еуклидској геометрији. Разлог томе је што нећемо сваке две дисјунктне праве једне равни звати паралелним, већ само оне које испуњавају одређено својство. Наиме, нека је a права и B тачка која јој не припада. У њима одређеној равни, посматрајмо све полуправе чије је теме тачка B. Неке од тих полуправих секу праву a, а неке је не секу. Нека је n нормала из тачке B на правој a. У свакој од двеју полуравни на које права n дели ту раван могуће је скуп свих полуправих с теменом B поделити на подскуп оних које секу a и подскуп оних које је не секу. При томе, свака полуправа припада тачно једном од тих скупова и не постоји ниједна права из једног подскупа која се налази „између” неких двеју из другог подскупа, односно, не постоји полуправа која не сече a, а припада конвексном углу који граде неке две полуправе које секу праву a, као ни полуправа која сече a, а припада конвексном углу који граде неке две које не секу праву a. На основу аксиома непрекидности и њених последица следи да у свакој од полуравни на које права n дели раван постоји тачно једна полуправа која је **гранична**, тј. која се налази на граници између оних које секу и оних које не секу праву a. Те две граничне полуправе не секу праву a и њих називамо *паралелним* правој a, а тако називамо и праве које садрже те полуправе. Све остале праве које не секу праву a су *хиперпаралелне* правој a.

Оваква дефиниција паралелности уводи се и у еуклидској геометрији, а главну разлику између еуклидске и хиперболичке геометрије чини то што у еуклидској геометрији полуправе које су паралелне правој a припадају **једној правој**, а у хиперболичкој геометрији ове полуправе припадају **двема разним правима**.

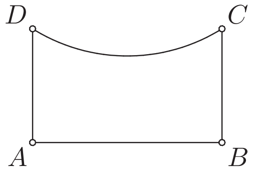
Хиперболичка геометрија има доста сличности с еуклидском геометријом, јер деле четири групе аксиома. Све теореме еуклидске геометрије, које се могу доказати без коришћења Плејферове аксиоме и њених последица, важе и у хиперболичкој геометрији. Примери оваквих теорема су Ставови о подударности троуглова (наведени у глави 1), постојање јединствене праве једне равни која садржи дату тачку и управна је на датој правој, Кошијева теорема о нормалности праве и равни, постојање јединствене праве у простору која садржи дату тачку и управна је на датој равни итд. Исто тако, теореме еуклидске геометрије, које се не могу доказати без коришћења Плејферове аксиоме и њених последица, не важе у хиперболичкој геометрији. Примере оваквих теорема видећемо кроз задатке, а за сада наведимо неке кључне ствари које важе у хиперболичкој геометрији.

1. Збир углова троугла је мањи од $180°$.
2. Збир углова простог, равног четвороугла је мањи $360°$.
3. Постоји права у равни нормална на једном краку оштрог угла која не сече његов други крак.
4. Централни угао је већи од двоструког одговарајућег периферијског угла.
5. Постоји троугао око којег се не може описати круг.

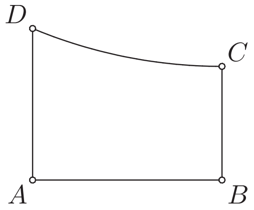
Збир углова у троуглу може бити било који угао мањи од $180°$, односно није исти за све троуглове. Исти закључак важи и за просте, равне четвороуглове.

Пошто паралелност нема исти смисао као у еуклидској геометрији, немамо паралелограм, нити тврђења везана за паралелограм. Пошто је збир углова сваког простог, равног четвороугла мањи од $360°$, не постоји четвороугао с четири права угла, па не постоји ни правоугаоник. У намери да докажу Плејферову аксиому на основу аксиома осталих група, математичари Ђ. Ђ. Сакери и J. Х. Ламберт посматрали су одређене врсте четвороуглова и покушавали су да докажу да они морају бити правоугаоници. Наведимо дефиниције ових четвороуглова.

Дефиниција 56. Нека је $ABCD$ четвороугао у равни такав да важи $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = 90°$ и $AD = BC$. Овакав четвороугао назива се *Сакеријевим четвороуглом.* Страница AB назива се *основицом* Сакеријевог четвороугла, страница CD назива се *противосновицом*, а подударне странице AD, BC називају се *бочним страницама* Сакеријевог четвороугла.



Дефиниција 57. Нека је $ABCD$ четвороугао који има три права угла. Овакав четвороугао назива се *Ламбертовим четвороуглом.* Ако су углови $\measuredangle DAB, \measuredangle ABC, \measuredangle BCD$ прави, онда су странице AB, BC *основне странице* Ламбертовог четвороугла $ABCD$.



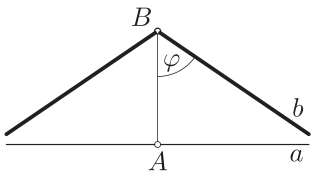
У еуклидској геометрији су Сакеријеви и Ламбертови четвороуглови правоугаоници. У хиперболичкој геометрији не постоје правоугаоници.

У хиперболичкој геометрији важи свих пет ставова о подударности троуглова. Испоставља се да постоји још један став о подударности троуглова.

Став 6 (УУУ). *Нека су дати троуглови* $\triangle ABC$ *и* $\triangle A'B'C'$. *Ако важи* $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, *онда следи да је* $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Последица. *У хиперболичкој геометрији сличност је исто што и подударност.*

Према томе, у хиперболичкој геометрији не важе ни Талесова теорема ни њене последице.



Вратимо се аксиоми Лобачевског и дефиницији паралелности правих. Нека је a права и B тачка која јој не припада. Нека је A подножје нормале из тачке B на правој a, Bb једна од двеју полуправих с теменом B које су паралелне правој a и $\measuredangle ABb = \varphi$. Пошто је полуправа Bb гранична полуправа, која у полуравни с рубом BA која садржи полуправу Bb раздваја полуправе с теменом B које секу праву a од оних које је не секу, следи да било која полуправа с теменом B, која припада углу $\measuredangle ABb$, сече праву a. Дакле, ако је полуправа Bp таква да је $\measuredangle ABp < \varphi$, онда Bp сече a, а ако је $\varphi < \measuredangle ABp < \pi$, онда Bp не сече a, али није ни паралелна правој a. Угао φ се назива *углом паралелности* тачке B у односу на праву a.

Угао паралелности је, наравно, могуће дефинисати и у еуклидској геометрији. Међутим, у еуклидској геометрији је угао паралелности увек прав, па није претерано занимљив за разматрање. За разлику од еуклидске геометрије, у хиперболичкој геометрији је угао паралелности увек оштар. Није тешко доказати да угао паралелности зависи само од дужине дужи AB. Зато је могуће дефинисати функцију $\Pi : (0, +\infty) \longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, која слика дужи у одговарајуће углове паралелности. Дакле, $\Pi(AB) = \varphi$. Ова функција назива се *функцијом Лобачевскоī*. Она је непрекидна, строго опадајућа и важи $\lim\limits_{x\to 0+} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to +\infty} \Pi(x) = 0$. Пошто је строго опадајућа, постоји њен инверз Π^{-1}. У задацима ћемо сматрати да су функције Π, Π^{-1} познате.

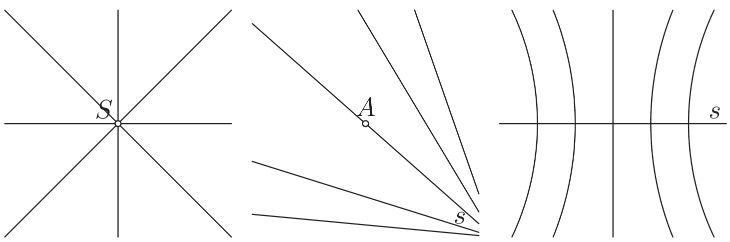
Што се тиче хиперпаралелности, важи следећа теорема.

Теорема 48. *Две ūраве у равни су хиūерūаралелне ако и само ако ūостоји ūрава n која је уūравна на обема. Ако ūаква ūрава ūостоји, она је јединсūвена.*

Ако би постојале две заједничке нормале хиперпаралелних правих, њихове пресечне тачке са тим правима биле би темена правоугаоника (четвороугла који има четири права угла), а правоугаоник не постоји у хиперболичкој геометрији.

Споменимо још који типови праменова правих постоје у равни хиперболичке геометрије.

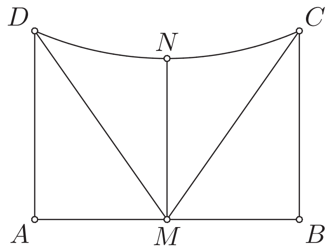
Дефиниција 58. 1. Скуп свих правих једне равни које садрже неку тачку S те равни чине *елиūūички ūрамен*, тј. *ūрамен конкуренūних ūравих*. Тачка S је *средишūе* тог прамена.
2. Скуп свих правих једне равни које су паралелне некој полуправој As те равни, заједно са правом која садржи ту полуправу, чине *ūараболички ūрамен*, тј. *ūрамен ūаралелних ūравих* (у истом смеру).
3. Скуп свих правих једне равни које су управне на некој правој s те равни чине *хиūерболички ūрамен*, тј. *ūрамен хиūерūаралелних ūравих* које имају исту заједничку нормалу s. Права s је *основица* тог прамена.



Нека је $\mathcal{X}$ прамен правих у равни и X произвољна тачка те равни која није средиште елиптичког прамена (ако је $\mathcal{X}$ елиптички прамен). *Еūицикл* је скуп тачака у равни које су осносиметричне тачки X у односу на праве прамена $\mathcal{X}$. Ако је $\mathcal{X}$ елиптички прамен са средиштем S, епицикл је *круг* са *средиштем* (*центром*) S и *полупречником* SX. Ако је $\mathcal{X}$ параболички прамен, епицикл је *орицикл*. Ако је $\mathcal{X}$ хиперболички прамен с основицом s, епицикл је скуп свих тачака Y у полуравни sX таквих да је $YY' = XX'$, где су Y', X' редом подножја нормала из Y, X на правој s. Тај епицикл је *еквидистанта* с *основицом* s и *висином* h.

1. Праве одређене основицом и противосновицом Сакеријевог четвороугла су хиперпаралелне. Доказати.

Решење: Нека су M, N редом средишта основице AB и противосновице CD Сакеријевог четвороугла $ABCD$. Докажимо да је MN заједничка нормала правих AB, CD, одакле ће следити да су ове праве хиперпаралелне.

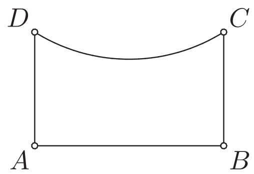


Посматрајмо троуглове $\triangle AMD, \triangle BMC$. Пошто је $AM = MB$ (јер је M средиште AB), $\measuredangle DAM = \measuredangle CBM = 90^\circ$ и $AD = BC$ (јер је $ABCD$ Сакеријев четвороугао), на основу става СУС следи да су ови троуглови подударни. Дакле, следи да је $MD = MC$, $\measuredangle DMA = \measuredangle CMB = \varphi$ и $\measuredangle MDA = \measuredangle MCB = \psi$. Посматрајмо сада троуглове $\triangle DNM, \triangle CNM$. Пошто је $DN = CN$ (јер је N средиште CD), $DM = CM$ (добијено из претходне подударности) и $NM = NM$, следи да су ови троуглови подударни. Према томе, одавде следи да је $\measuredangle MDN = \measuredangle MCN = \theta$, $\measuredangle DMN = \measuredangle CMN = \eta$ и $\measuredangle MND = \measuredangle MNC = \alpha$. Даље, следи да је $\measuredangle ADC = \measuredangle ADM + \measuredangle MDN = \psi + \theta = \measuredangle BCM + \measuredangle MCN = \measuredangle BCD$ и да је $\measuredangle AMN = \measuredangle AMD + \measuredangle DMN = \varphi + \eta = \measuredangle BMC + \measuredangle CMN = \measuredangle BMN = \beta$. Пошто је $180^\circ = \measuredangle AMB = \measuredangle AMN + \measuredangle BMN = \beta + \beta = 2\beta$, онда је $\beta = 90^\circ$, па је $MN \perp AB$. Такође, пошто је $180^\circ = \measuredangle DNM + \measuredangle CNM = \alpha + \alpha = 2\alpha$, онда је $\alpha = 90^\circ$, па је $MN \perp CD$. Дакле, MN је заједничка нормала правих AB, CD, што значи да су оне хиперпаралелне.

Теорема 49. *Права која садржи средишта основице и противосновице Сакеријевог четвороугла је њихова заједничка нормала.*

2. Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су подударни и оштри. Доказати.

Решење:

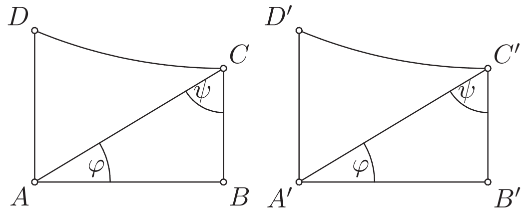


У претходном задатку смо доказали да је $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD = \gamma$. Дакле, углови на противосновици су подударни. Претпоставимо супротно, да су ови углови прави или тупи, тј. да је $\gamma \geq 90°$. Тада за збир углова четвороугла $ABCD$ важи $\measuredangle DAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCD + \measuredangle ADC = 90° + 90° + \gamma + \gamma \geq 180° + 2 \cdot 90° = 360°$, што је у контрадикцији с чињеницом да је збир углова простог, равног четвороугла мањи од $360°$. Дакле, претпоставка да је $\gamma \geq 90°$ није тачна, па је $\gamma < 90°$, што значи да су углови на противосновици подударни и оштри.

3. Доказати да су два Ламбертова четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са оштрим угловима D и D' подударна ако је:

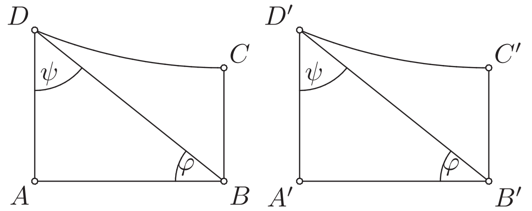
а) $AB = A'B',\ BC = B'C'$; **г)** $AD = A'D',\ CD = C'D'$;
б) $AB = A'B',\ AD = A'D'$; **д)** $AD = A'D',\ \measuredangle D = \measuredangle D'$;
в) $AD = A'D',\ BC = B'C'$; **ђ)** $AB = A'B',\ \measuredangle D = \measuredangle D'$.

Решење: Нека су $ABCD, A'B'C'D'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена D, D'.
а) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$



Нека је $AB = A'B', BC = B'C'$. Како је и $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Према томе, $AC = A'C'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C' = \varphi$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A' = \psi$. Углови $\measuredangle DAB, \measuredangle D'A'B'$ су прави, па следи да је $\measuredangle DAC = 90° - \varphi = \measuredangle D'A'C'$. Слично, $\measuredangle DCA = 90° - \psi = \measuredangle D'C'A'$. Дакле, према ставу УСУ следи да је $\triangle DAC \cong \triangle D'A'C'$, па је $AD = A'D'$, $CD = C'D'$ и $\measuredangle ADC = \measuredangle A'D'C'$. Према томе, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне странице и углове, па су и они међусобно подударни.

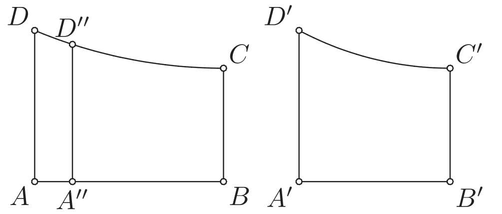
б) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$



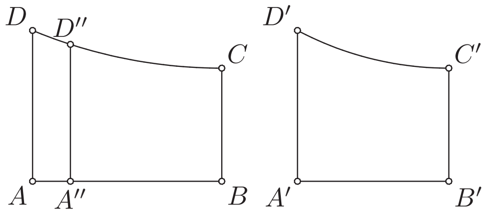
Нека је $AB = A'B', AD = A'D'$. Како је и $\measuredangle BAD = \measuredangle B'A'D'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$. Према томе, $BD = B'D'$, $\measuredangle ABD = \measuredangle A'B'D' = \varphi$ и $\measuredangle ADB = \measuredangle A'D'B' = \psi$. Углови $\measuredangle ABC, \measuredangle A'B'C'$ су прави, па следи да је $\measuredangle DBC = 90^\circ - \varphi = \measuredangle D'B'C'$. Такође, $\measuredangle BCD = \measuredangle B'C'D'$ (прави углови), па према ставу УУС следи $\triangle BCD \cong \triangle B'C'D'$. Дакле, следи да је $BC = B'C'$, $CD = C'D'$ и $\measuredangle BDC = \measuredangle B'D'C' = \theta$. Како је $\measuredangle ADC = \psi + \theta = \measuredangle A'D'C'$, следи да су четвороугловима $ABCD, A'B'C'D'$ подударне све странице и углови, па су и они међусобно подударни.

Напомена 14. Додатно, доказали смо да ако су $ABCD, A'B'C'D'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена D, D' такви да је $BC = B'C', CD = C'D'$, онда су они међусобно подударни. Заиста, ако променимо имена тачкама A, B, C, D у P, N, M, Q и A', B', C', D' у P', N', M', Q', онда су $MNPQ, M'N'P'Q'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена Q, Q' такви да је $MN = M'N', MQ = M'Q'$, па је, на основу претходног, $MNPQ \cong M'N'P'Q'$. С обзиром на то да су $MNPQ, M'N'P'Q'$ друга имена за четвороуглове $ABCD, A'B'C'D'$, следи да је $ABCD \cong A'B'C'D'$.

в) $AD = A'D'$, $BC = B'C'$



Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка A'' таква да је $A''B = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки A''. Права n сече дуж CD. Заиста, права n сече дуж AB у тачки A'' и не сече дуж BC, зато што су n и BC хиперпаралелне (AB им је заједничка нормала), па на основу Пашове аксиоме n сече дуж AC. Пошто n не сече ни дуж AD, зато што су n и AD хиперпаралелне (AB им је заједничка нормала), на основу Пашове аксиоме n сече дуж CD у некој тачки D''.

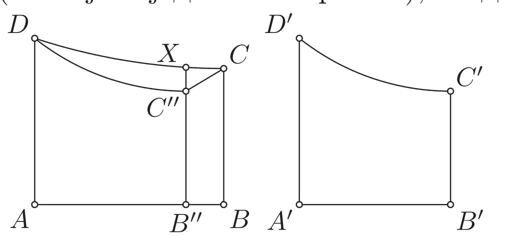


Четвороугао $A''BCD''$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D'' и важи $A''B = A'B'$ и $BC = B'C'$. На основу дела **а)** следи да је $A''BCD'' \cong A'B'C'D'$, па је $A''D'' = A'D' = AD$. Следи да је четвороугао $AA''D''D$ Сакеријев, па су углови $\measuredangle ADD'', \measuredangle DD''A''$ на противосновици DD'' оштри. Међутим, и угао $\measuredangle A''D''C$ је оштар, па је $180^\circ = \measuredangle DD''C = \measuredangle DD''A'' + \measuredangle A''D''C < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

г) $AD = A'D'$, $CD = C'D'$

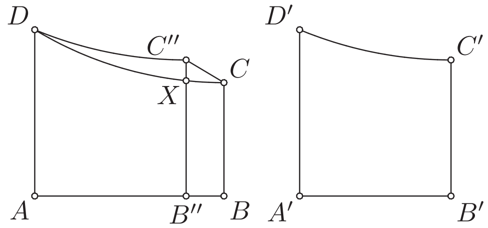
Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки B'' и нека је C'' подножје нормале из D на правој n. Како су AB, DC'' хиперпаралелне (n им је заједничка нормала), следи да важи $D, C'' \underset{\cdot\cdot}{-} AB$.



Четвороугао $AB''C''D$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D и важи $AB'' = A'B', AD = A'D'$, па на основу дела **б)** следи да су четвороуглови $AB''C''D, A'B'C'D'$ подударни. Дакле, $DC'' = D'C' = DC$. Слично као малопре, на основу Пашове аксиоме права n сече најпре дуж AC, а затим и дуж CD у некој тачки X. Важи $D, X \underset{\cdot\cdot}{-} AB$, па због $D, C'' \underset{\cdot\cdot}{-} AB$, следи да важи $X, C'' \underset{\cdot\cdot}{-} AB$. Тачка X је различита од тачке C'', јер би у супротном због $DC'' = DC$ тачке C, C'' биле идентичне, што значи да би из тачке C постојале две различите нормале на правој AB (праве n и CB). Према томе, важи $\mathcal{B}(B'', C'', X)$ или $\mathcal{B}(B'', X, C'')$.

Нека је $\mathcal{B}(B'', C'', X)$. Како полуправа $C''X$ сече дуж CD, следи да она припада углу $\measuredangle DC''C$. Угао $\measuredangle DC''X$ је прав, па следи да је угао $\measuredangle DC''C$ туп. Међутим, троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови

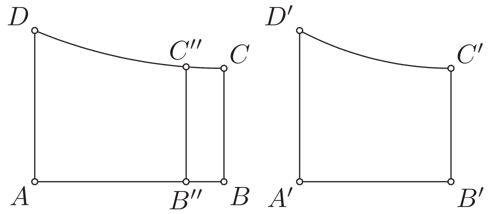
$\measuredangle DC''C, \measuredangle DCC''$ подударни и оштри. Дакле, угао $\measuredangle DC''C$ је истовремено и оштар и туп, што је немогуће.



Нека је $\mathcal{B}(B'', X, C'')$. Како полуправа $C''X$ сече дуж CD, следи да она припада углу $\measuredangle DC''C$. Угао $\measuredangle DC''B''$ је прав, па следи да је угао $\measuredangle DC''C$ туп. Међутим, троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle DC''C, \measuredangle DCC''$ подударни и оштри. Дакле, угао $\measuredangle DC''C$ је истовремено и оштар и туп, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', AD = A'D'$, на основу дела **б)** следи да су они међусобно подударни.

д) $AD = A'D'$, $\measuredangle D = \measuredangle D'$

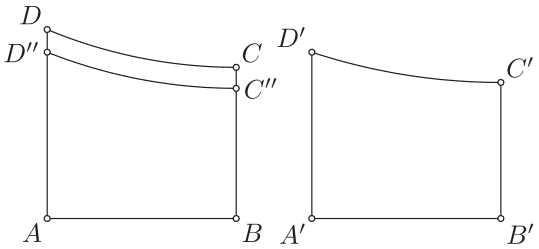


Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки B'' и нека је C'' подножје нормале из тачке D на правој n.

Четвороугао $AB''C''D$ је Ламбертов с оштрим углом код темена D и важи $AB'' = A'B', AD = A'D'$. На основу дела **б)** следи да су четвороуглови $AB''C''D, A'B'C'D'$ подударни, па је $\measuredangle ADC'' = \measuredangle A'D'C'$, а по претпоставци, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне углове код темена D, D', па је $\measuredangle ADC'' = \measuredangle ADC$. Према томе, тачка C'' припада правој CD, па четвороугао $B''BCC''$ има четири права угла, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', AD = A'D'$, на основу дела **б)** следи да су они међусобно подударни.

ђ) $AB = A'B'$, $\measuredangle D = \measuredangle D'$



Претпоставимо да је $AD \neq A'D'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AD > A'D'$. На дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D'$. Нека је C'' подножје нормале из D'' на правој BC.

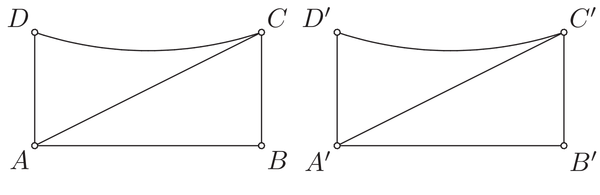
Четвороугао $ABC''D''$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D'' и важи $AB = A'B', AD'' = A'D'$. На основу дела **б)** следи да су четвороуглови $ABC''D'', A'B'C'D'$ подударни, па је $\measuredangle AD''C'' = \measuredangle A'D'C' = \varphi$, па је $\measuredangle C''D''D = 180° - \varphi$. По претпоставци, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне углове код темена D, D', па је $\measuredangle D''DC = \varphi$. Дакле, збир углова четвороугла $D''C''CD$ је $180° - \varphi + 90° + 90° + \varphi = 360°$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AD \neq A'D'$ је погрешна, па је $AD = A'D'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', AD = A'D'$, на основу дела **б)** следи да су они међусобно подударни.

4. Доказати да су два Сакеријева четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са основама AB и $A'B'$ подударна ако је:

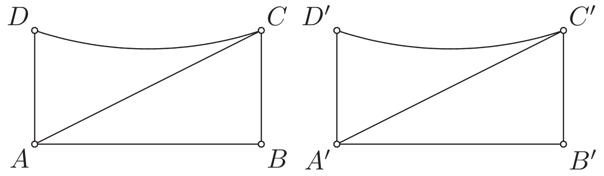
а) $AB = A'B',\ BC = B'C'$;
б) $AB = A'B',\ CD = C'D'$;
в) $BC = B'C',\ CD = C'D'$;
г) $AB = A'B',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$;
д) $BC = B'C',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$;
ђ) $CD = C'D',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$.

Решење: а) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$



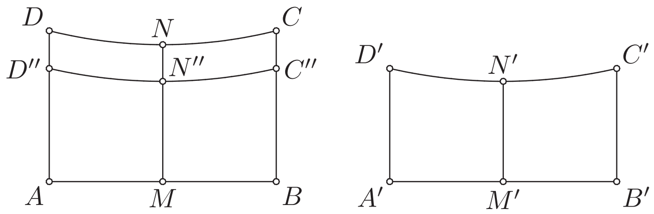
Нека је $AB = A'B', BC = B'C'$. Како је и $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Према томе, $AC = A'C'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C' = \varphi$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A' = \psi$. Углови $\measuredangle DAB, \measuredangle D'A'B'$ су прави, па следи да је $\measuredangle DAC = 90° - \varphi = \measuredangle D'A'C'$. Такође, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ су Сакеријеви, па је $AD = BC$

и $A'D' = B'C'$, па важи $AD = A'D'$. Дакле, према ставу СУС следи да је $\triangle DAC \cong \triangle D'A'C'$, па следи да је $CD = C'D'$, $\measuredangle ADC = \measuredangle A'D'C'$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle A'C'D' = \theta$. Према томе, $\measuredangle BCD = \psi + \theta = \measuredangle B'C'D'$, па четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне странице и углове. Следи да су они међусобно подударни.



б) $AB = A'B'$, $CD = C'D'$

Претпоставимо да је $BC \neq B'C'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $BC > B'C'$. Тада на дужи BC постоји тачка C'' таква да је $BC'' = B'C'$. Пошто је $AD = BC$ и $A'D' = B'C'$, на дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D'$.

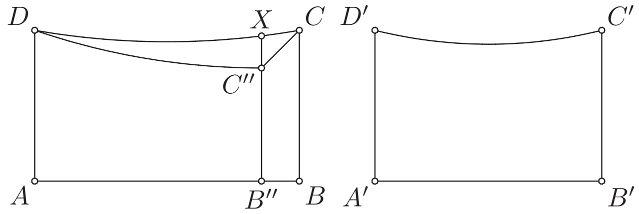


Четвороуглови $ABC''D'', A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB, A'B'$ такви да је $AB = A'B', BC'' = B'C'$, па су на основу дела **а)** ови четвороуглови подударни. Следи да је $C''D'' = C'D' = CD$. Нека су M, N, N'' редом средишта страница $AB, CD, C''D''$. Права MN је заједничка нормала правих AB, CD, а права MN'' је заједничка нормала правих $AB, C''D''$. Пошто у тачки M постоји јединствена нормала на правој AB, следи да су тачке M, N, N'' колинеарне, па је NN'' заједничка нормала правих $CD, C''D''$. Четвороугао $N''NDD''$ је Сакеријев, јер је $N''D'' = \frac{1}{2}C''D'' = \frac{1}{2}CD = ND$ и $D''N'', DN \perp N''N$, па су углови $\measuredangle NDD'', \measuredangle N''D''D$ подударни и оштри. Међутим, и угао $\measuredangle AD''N''$ је оштар, па је $180^\circ = \measuredangle AD''N'' + \measuredangle N''D''D < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $BC \neq B'C'$ је погрешна, па је $BC = B'C'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

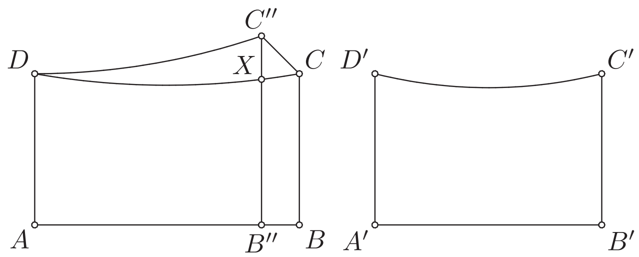
в) $BC = B'C'$, $CD = C'D'$

Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n права која је у тачки B'' нормална на AB и нека је C'' тачка праве n таква да је $D, C'' \doteq AB$ и $B''C'' = B'C'$.



Четвороуглови $AB''C''D, A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB'', A'B'$, такви да је $AB'' = A'B', B''C'' = B'C'$, па су на основу дела **а)** ови четвороуглови подударни. Следи да је $C''D = C'D' = CD$. Права n сече дуж CD. Заиста, права n сече дуж AB у тачки B'' и не сече BC (јер су n, BC хиперпаралелне), па на основу Пашове аксиоме, права n сече дуж AC. Пошто n не сече ни дуж AD (јер су n, AD хиперпаралелне), на основу Пашове аксиоме n сече дуж CD у некој тачки X. Дакле, важи $D, X \doteq AB$, па пошто важи $D, C'' \doteq AB$, следи да важи $X, C'' \doteq AB$. Тачка X се разликује од тачке C'', јер би се у супротном због $DC'' = DC$ тачке C'', C поклапале, па би из те тачке постојале две различите нормале на правој AB. Према томе, важи $\mathcal{B}(B'', C'', X)$ или $\mathcal{B}(B'', X, C'')$.

Нека важи $\mathcal{B}(B'', C'', X)$. Троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle DC''C$ и $\measuredangle DCC''$ подударни и оштри. Четвороуглови $B''BCC''$ и $AB''C''D$ су Сакеријеви, јер су $AD, B''C'', BC \perp AB$ и $AD = BC = B'C' = B''C''$, па су углови $\measuredangle B''C''C, \measuredangle B''C''D$ оштри. Следи да је $360° = \measuredangle DC''C + \measuredangle CC''B'' + \measuredangle B''C''D < 90° + 90° + 90° = 270°$, што је немогуће.

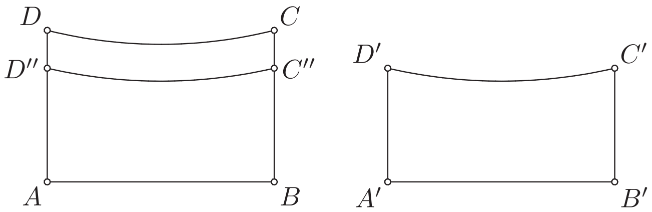


Нека важи $\mathcal{B}(B'', X, C'')$. Троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle DC''C$ и $\measuredangle DCC''$ подударни и оштри. Четвороугао $B''BCC''$ је Сакеријев, јер је $B''C'' = B'C' = BC$ и $B''C'', BC \perp B''B$, па су углови $\measuredangle B''C''C$ и $\measuredangle BCC''$ подударни и оштри. Међутим, онда следи да је $\measuredangle DC''C > \measuredangle B''C''C = \measuredangle BCC'' > \measuredangle DCC'' = \measuredangle DC''C$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

г) $AB = A'B'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$

Претпоставимо да је $BC \neq B'C'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $BC > B'C'$. Тада на дужи BC постоји тачка C'' таква да је $BC'' = B'C'$ и на дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D' = B'C'$.

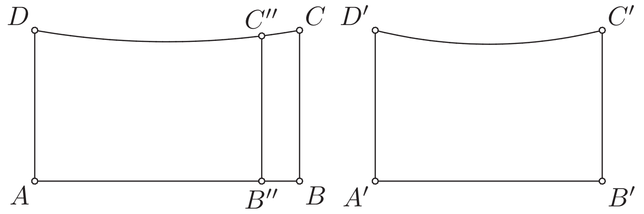


Четвороуглови $ABC''D'', A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB, A'B'$ такви да је $AB = A'B', BC'' = B'C'$, па су на основу дела **а)** ови четвороуглови подударни. Следи да је $\measuredangle D''C''B = \measuredangle D'C'B' = \measuredangle DCB$, па је $\measuredangle D''C''C = \pi - \measuredangle DCB$. Слично је и $\measuredangle C''D''D = \pi - \measuredangle DCB$. Међутим, збир углова четвороугла $D''C''CD$ је $\measuredangle DD''C'' + \measuredangle D''C''C + \measuredangle C''CD + \measuredangle CDD'' = 2(\pi - \measuredangle DCB) + 2\measuredangle DCB = 2\pi$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $BC \neq B'C'$ је погрешна, па је $BC = B'C'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

д) $BC = B'C'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$

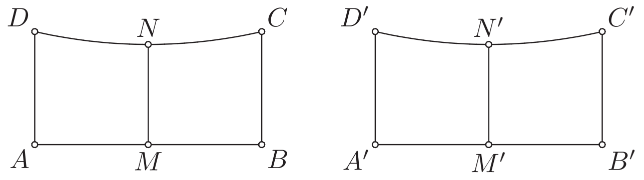
Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки B'' и нека је C'' тачка нормале n таква да је $C, C'' \doteq AB$ и $B''C'' = B'C' = BC$.



Четвороуглови $AB''C''D, A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB'', A'B'$ такви да је $AB'' = A'B', B''C'' = B'C'$, па су на основу дела **а)** ови четвороуглови подударни. Такође, углови код темена D, D' четвороуглова $ABCD, A'B'C'D'$ су подударни, па следи да је $\measuredangle ADC'' = \measuredangle A'D'C' = \measuredangle ADC$. Дакле, тачка C'' припада дужи DC. Међутим, и четвороугао $B''BCC''$ је Сакеријев, па је $\measuredangle B''C''C = \measuredangle BCC'' = \measuredangle BCD = \measuredangle B''C''D$. Ови углови су оштри, јер су углови на противосновици Сакеријевог четвороугла оштри. Међутим, како су напоредни углови $\measuredangle DC''B''$, $\measuredangle B''C''C$ подударни, следи да су то прави углови, па су ови углови истовремено и оштри и прави, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

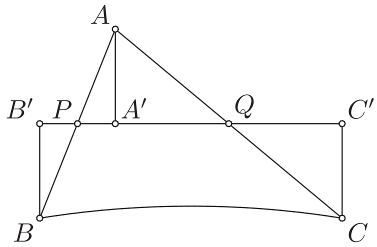
ђ) $CD = C'D'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$



Нека су M, N и M', N' средишта страница AB, CD и $A'B', C'D'$ четвороуглова $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Тада су $NMBC, N'M'B'C'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена C, C' и важи $NC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}D'C' = N'C'$ и $\measuredangle C = \measuredangle C'$. На основу дела **д)** претходног задатка следи да су четвороуглови $NMBC, N'M'B'C'$ подударни. Одавде следи да је $BC = B'C'$, па на основу дела **д)** овог задатка следи да су четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ подударни.

5. Ако су тачке P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC, доказати да су праве BC и PQ међу собом хиперпаралелне.

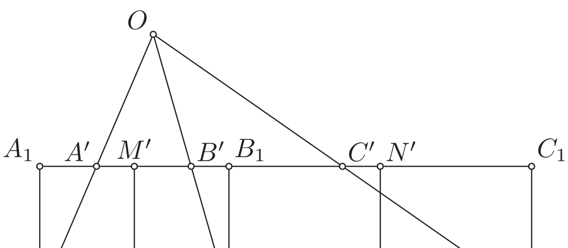
Решење:



Нека су A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ. За троуглове $\triangle BPB'$ и $\triangle APA'$ важи $BP = AP$, $\measuredangle BPB' = \measuredangle APA'$ као унакрсни углови и $\measuredangle BB'P = \measuredangle AA'P = 90°$, па су ови троуглови подударни. Следи да је $BB' = AA'$. Слично, троуглови $\triangle AQA'$ и $\triangle CQC'$ су подударни, јер је $AQ = CQ$, $\measuredangle AQA' = \measuredangle CQC'$ као унакрсни углови и $\measuredangle AA'Q = \measuredangle CC'Q = 90°$. Следи да је $AA' = CC'$, па имамо да је $BB' = CC'$. Како је $BB', CC' \perp B'C'$, следи да је четвороугао $B'BCC'$ Сакеријев, па су његова основица $B'C'$ и противосновица BC хиперпаралелне, на основу 1. задатка. Дакле, праве PQ и BC су хиперпаралелне.

6. Ако су A, B, C три разне тачке неке праве l и O тачка изван те праве, доказати да средишта A', B', C' дужи OA, OB, OC не припадају једној правој.

Решење:

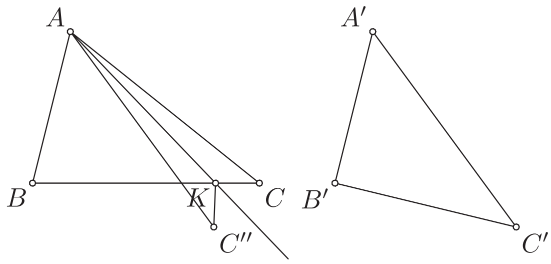


Претпоставимо да тачке A', B', C' припадају правој l'. Нека су A_1, B_1, C_1 редом подножја нормала из A, B, C на правој l'. На основу претходног задатка, четвороуглови A_1ABB_1, B_1BCC_1 су Сакеријеви, па ако са M, N означимо средишта страница AB, BC, а са M', N' средишта страница A_1B_1, B_1C_1, на основу теореме 49 следи да су MM', NN' нормалне на правима l, l'. Међутим, то није могуће, јер је онда збир углова простог, равног четвороугла $MNN'M'$ једнак $4 \cdot 90° = 360°$.

Дакле, претпоставка да тачке A', B', C' припадају једној правој је погрешна, па тачке A', B', C' не припадају једној правој.

Подсетимо се става 5, који је наведен у глави 6. Овај став важи и у еуклидској и у хиперболичкој геометрији.

Став 5. *Нека су $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ троуглови такви да је $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$. Тада је $BC > B'C'$ ако и само ако је $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$.*



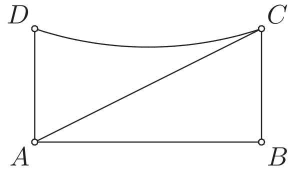
Доказ: $\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$. Означимо са C'' тачку такву да је $AC'' = A'C' = AC$ и $\measuredangle BAC'' = \measuredangle B'A'C'$. На основу става СУС важи $\triangle ABC'' \cong \triangle A'B'C'$, па је $BC'' = B'C'$. Пошто је $\measuredangle BAC'' < \measuredangle BAC$, полуправа AC'' сече дуж BC. Ако је пресечна тачка управо тачка C'', очигледно се добија да је $BC > BC'' = B'C'$. Претпоставимо зато да тачка C'' не припада правој BC.

Означимо са K пресечну тачку бисектрисе угла $\measuredangle C''AC$ и дужи BC. На основу става СУС важи $\triangle AKC \cong \triangle AKC''$ ($AK = AK$, $AC = AC''$ и $\measuredangle CAK = \measuredangle C''AK$ јер је AK бисектриса угла $\measuredangle C''AC$), па је $CK = C''K$. Закључујемо да је $BC = BK + KC = BK + KC'' > BC'' = B'C'$, на основу неједнакости троугла.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $BC > B'C'$. Не може бити $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, јер би на основу става СУС било $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, па због тога и $BC = B'C'$. Такође, не може бити ни $\measuredangle BAC < \measuredangle B'A'C'$, јер би, на основу смера $\boxed{\Longleftarrow}$ било $B'C' > BC$. Према томе, мора бити $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$. $\square$

7. Доказати да је у Сакеријевом четвороуглу противосновица већа од основице.

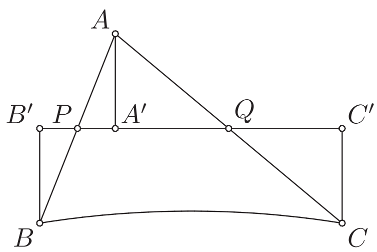
Решење:



Посматрајмо троуглове $\triangle ACB$ и $\triangle CAD$. Пошто важи $CB = AD$ и $AC = CA$, на основу става 5 треба установити у каквом су односу углови $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle CAD$. Како важи да је $\measuredangle BAC + \measuredangle CAD = \measuredangle BAD = 90°$ и $\measuredangle BAC + \measuredangle ACB + \measuredangle CBA < 180°$, следи да је $\measuredangle CAD = 90° - \measuredangle BAC$ и $\measuredangle ACB < 180° - 90° - \measuredangle BAC = 90° - \measuredangle BAC$. Дакле, $\measuredangle ACB < \measuredangle CAD$, па према ставу 5 следи да је $AB < CD$, тј. да је основица Сакеријевог четвороугла мања од његове противосновице.

8. Ако су P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC, доказати да је $PQ < \frac{1}{2}BC$.

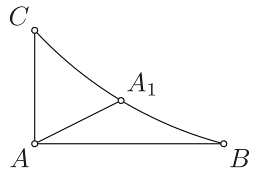
Решење:



Нека су, као у 5. задатку, A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ. У 5. задатку смо доказали да је $B'BCC'$ Сакеријев четвороугао с основицом $B'C'$ и противосновицом BC. На основу 7. задатка следи да је $BC > B'C'$. Такође, у 5. задатку смо доказали да је $\triangle BPB' \cong \triangle APA'$ и $\triangle AQA' \cong \triangle CQC'$, па је $B'P = A'P$ и $A'Q = C'Q$. Следи да је $B'C' = B'P + PA' + A'Q + QC' = 2PA' + 2A'Q = 2PQ$, па је $PQ = \frac{1}{2}B'C' < \frac{1}{2}BC$.

9. Нека је A_1 средиште хипотенузе BC правоуглог троугла ABC. Доказати да је дуж AA_1 мања од половине хипотенузе.

Решење:



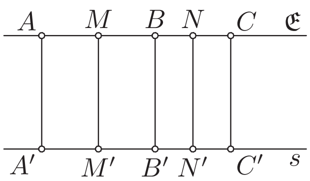
Претпоставимо да је $AA_1 \geq \frac{1}{2}BC$. Тада је $AA_1 \geq A_1B$, па је на основу неједнакости троугла $\measuredangle ABA_1 \geq \measuredangle BAA_1$. Такође, тада је $AA_1 \geq A_1C$, па је на основу неједнакости троугла $\measuredangle ACA_1 \geq \measuredangle CAA_1$. Према томе, следи да је $\measuredangle ABA_1 + \measuredangle ACA_1 \geq \measuredangle BAA_1 + \measuredangle CAA_1 = \measuredangle BAC = 90^\circ$. Међутим, $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 90^\circ + \measuredangle ABA_1 + \measuredangle ACA_1 \geq 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, што је немогуће, јер је у хиперболичкој геометрији збир углова троугла мањи од 180°.

Дакле, претпоставка да је $AA_1 \geq \frac{1}{2}BC$ је погрешна, па је $AA_1 < \frac{1}{2}BC$, тј. дуж AA_1 је мања од половине хипотенузе.

Напомена 15. Овим је доказано да ако постоји центар описаног круга правоуглог троугла $\triangle ABC$, онда он није средиште његове хипотенузе.

10. Ако је висина еквидистанте већа од нуле тада та еквидистанта није права. Доказати.

Решење:

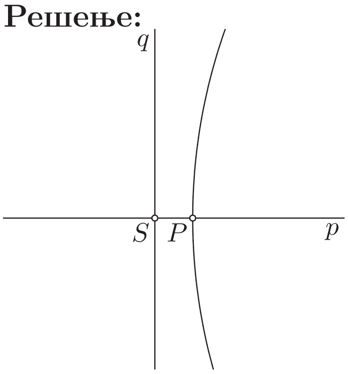


Претпоставимо да је еквидистанта $\mathfrak{E}$, чија је основица права s и висина h већа од нуле, права. Нека су A, B, C произвољне тачке еквидистанте $\mathfrak{E}$ и A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на основици s те еквидистанте. Тада је $AA' = BB' = CC' = h$, па су четвороуглови $A'B'BA, B'C'CB$ Сакеријеви. На основу теореме 49, ако са M, N редом означимо средишта страница AB, BC и са M', N' редом средишта страница $A'B', B'C'$, следи да су праве MM', NN' нормалне на правима $s, \mathfrak{E}$. Међутим, тада је збир углова простог, равног четвороугла $MNN'M'$ једнак $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$, што је немогуће.

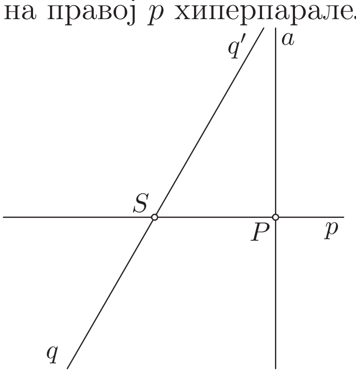
Дакле, претпоставка да је еквидистанта $\mathfrak{E}$, чија је висина већа од нуле, права, није тачна, па еквидистанта $\mathfrak{E}$, чија је висина већа од нуле, није права.

11. Праве p и q секу се у тачки S. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p.

Решење:



Ако су праве p, q међусобно нормалне, онда је свака права нормална на правој p хиперпаралелна правој q, па тражена права a не постоји.

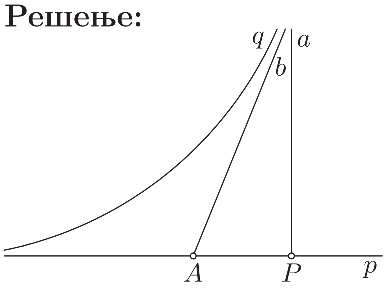


Нека се p, q секу у тачки S и нека нису међусобно нормалне. Претпоставимо да је права a нормална на правој p у тачки P и да је паралелна правој q у одређеном смеру. Нека је Sq' она полуправа праве q с теменом S која је паралелна правој a. По дефиницији, угао $\measuredangle PSq'$ је угао паралелности тачке S у односу на праву a, тј. важи $\measuredangle PSq' = \Pi(SP)$, односно $SP = \Pi^{-1}(\measuredangle PSq')$. Угао $\measuredangle PSq'$ је оштар угао који граде праве p, q.

Нека је са φ означен оштар угао који граде праве p, q. Конструише се дуж $d = \Pi^{-1}(\varphi)$. Затим се на правој p означе тачке P_1, P_2 такве да је $SP_1 = SP_2 = d$, а затим се конструишу нормале a_1, a_2 на правој p у тачкама P_1, P_2.

12. Праве p и q су паралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p.

Решење:

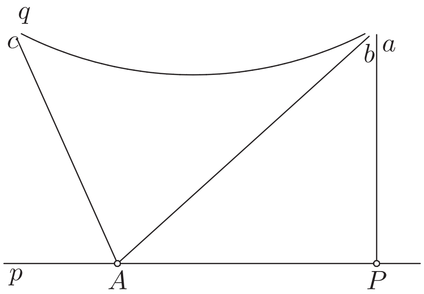


Претпоставимо да је права a нормална на правој p у тачки P и да је паралелна правој q у одређеном смеру. Нека је A произвољна тачка праве p и нека је Ab полуправа с теменом A која је паралелна правима q, a (и није садржана у правој p). Ако се тачке A, P поклапају, онда права a садржи полуправу Ab, па је $Ab \perp p$. Ако се не поклапају, онда је $AP = \Pi^{-1}(\measuredangle PAb)$.

На правој p се означи произвољна тачка A. Затим се конструише полуправа Ab која је паралелна правој q и није садржана у правој p. Ако важи $Ab \perp p$, онда се са a означи права која садржи полуправу Ab. Ако важи $Ab \not\perp p$, онда је један од углова који полуправа Ab гради с правом p оштар, а други је туп. Означимо са φ онај који је оштар. Нека је $d = \Pi^{-1}(\varphi)$. Са P се означи тачка праве p таква да је $AP = d$ и да је $\measuredangle PAb = \varphi$, односно да полуправа AP буде она полуправа која с полуправом Ab гради оштар угао φ. Затим се конструише нормала a на правој p у тачки P.

13. Праве p и q су хиперпаралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p.

Решење:

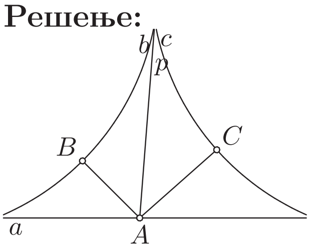


Претпоставимо да је права a нормална на правој p у тачки P и да је паралелна правој q у одређеном смеру. Нека је A произвољна тачка праве p и нека је Ab полуправа с теменом A која је паралелна правима q, a. Ако се тачке A, P поклапају, онда права a садржи полуправу Ab, па је $Ab \perp p$. Ако се не поклапају, онда је $AP = \Pi^{-1}(\measuredangle PAb)$.

На правој p се означи произвољна тачка A и конструишу се полуправе Ab, Ac с теменом A које су паралелне правој q. Ако важи $Ab \perp p$, онда се са a_1 означи права која садржи полуправу Ab. Ако важи $Ab \not\perp p$, онда је један од углова који полуправа Ab гради с правом p оштар, а други је туп. Означимо са φ онај који је оштар. Нека је $d_1 = \Pi^{-1}(\varphi)$. Са P_1 се означи тачка праве p таква да је $AP_1 = d_1$ и да је $\measuredangle P_1Ab = \varphi$, односно да полуправа AP_1 буде она полуправа која с полуправом Ab гради оштар угао φ. Затим се конструише нормала a_1 на правој p у тачки P_1. Аналоган поступак се примењује и за полуправу Ac. Ако важи $Ac \perp p$, онда се са a_2 означи права која садржи полуправу Ac. Ако важи $Ac \not\perp p$, онда је један од углова који полуправа Ac гради с правом p оштар, а други је туп. Означимо са ψ онај који је оштар. Нека је $d_2 = \Pi^{-1}(\psi)$. Са P_2 се означи тачка праве p таква да је $AP_2 = d_2$ и да је $\measuredangle P_2Ac = \psi$, односно да полуправа AP_2 буде она полуправа која с полуправом Ac гради оштар угао ψ. Затим се конструише нормала a_2 на правој p у тачки P_2.

14. Нека су a, b и c међусобно паралелне праве, али не све у истом смеру. Нека су b' и c' управне из тачке A праве a на правама b и c. Одредити угао између правих b' и c'.

Решење:



Нека је Ap полуправа с теменом A која је паралелна правима b, c и нека су B, C редом подножја нормала из тачке A на правима b, c.

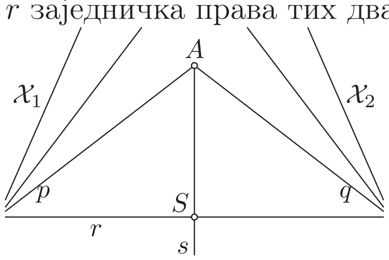
По дефиницији, углови које полуправа Ap и она полуправа праве a с теменом A, која је паралелна правој b, заклапају с полуправом AB јесу углови паралелности за дужину BA (јер су оне паралелне правој b из тачке A), па су међусобно подударни. Означимо их са φ.

Такође, по дефиницији, углови које полуправа Ap и она полуправа праве a с теменом A, која је паралелна правој c, заклапају с полуправом AC јесу углови паралелности за дужину CA (јер су оне паралелне правој c из тачке A), па су међусобно подударни. Означимо их са ψ.

Угао између правих b', c' је $\measuredangle BAC = \varphi + \psi$, а пошто је $180^\circ = \varphi + \varphi + \psi + \psi = 2(\varphi + \psi)$, следи да је $\varphi + \psi = 90^\circ$. Према томе, праве b', c' су међусобно нормалне.

15. Два разна параболичка прамена имају заједничку праву. Доказати.

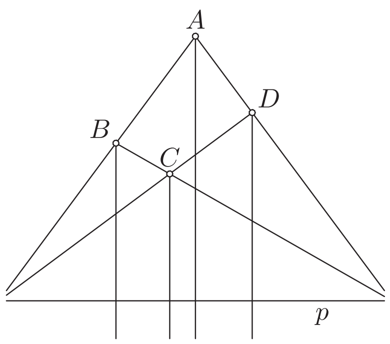
Решење: Нека су $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ два разна параболичка прамена. Нека је A произвољна тачка у равни и нека је Ap полуправа која је паралелна свим правима прамена $\mathcal{X}_1$ и Aq полуправа која је паралелна свим правима прамена $\mathcal{X}_2$. Ако полуправе Ap, Aq припадају једној правој r, онда је права r заједничка права тих двају праменова.



Ако полуправе Ap, Aq не припадају једној правој, нека је онда полуправа As бисектриса угла $\measuredangle pAq$, S тачка бисектрисе As таква да је $AS = \Pi^{-1}(\measuredangle sAp)$ и r права која садржи S и нормална је на As. Како је $\measuredangle SAp = \Pi(SA)$ угао паралелности тачке A у односу на праву r, следи да је r паралелна полуправој Ap, па припада прамену $\mathcal{X}_1$. Како је As бисектриса угла $\measuredangle pAq$, следи да је $\measuredangle sAp = \measuredangle sAq$, па је $\measuredangle sAq = \Pi(SA)$, што значи да је права r паралелна и полуправој Aq. Следи да права r припада прамену $\mathcal{X}_2$, па је права r заједничка права тих двају праменова.

16. Нека су A, B, C, D тачке такве да су редом полуправе AB и DC, односно BC и AD паралелне. Доказати да су симетрале унутрашњих углова код темена A и C и спољашњих углова код темена B и D праве истог прамена.

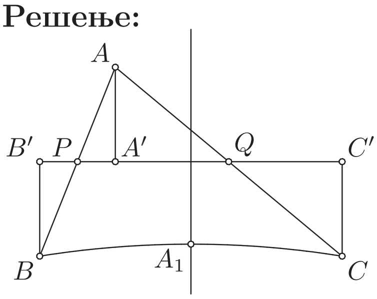
Решење:



Нека је $\mathcal{X}_1$ прамен правих које су паралелне полуправима AB, DC и нека је $\mathcal{X}_2$ прамен правих које су паралелне полуправима BC, AD. Праменови $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ су параболички, па на основу претходног задатка они имају заједничку праву p. Краци спољашњег угла код темена B су полуправе с теменом B паралелне правој p, па следи да је симетрала тог угла нормална на правој p. Такође, краци спољашњег угла код темена D су полуправе с теменом D које су паралелне правој p, па следи да је симетрала тог угла нормална на правој p. Полуправе AB, AD с теменом A су паралелне правој p, па је симетрала угла $\measuredangle BAD$ (унутрашњег угла код темена A) нормална на правој p. Коначно, угао унакрсан углу $\measuredangle BCD$ (унутрашњем углу код темена C) има краке који су полуправе с теменом C паралелне правој p, па је његова симетрала (која је уједно и симетрала унутрашњег угла код темена C) нормална на правој p. Дакле, све четири симетрале су нормалне на правој p, те припадају хиперболичком прамену правих чија је основица права p.

17. Доказати да за три неколинеарне тачке A, B, C важи
$\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC)$.

Решење:



Нека су, као у 5. задатку, P, Q средишта страница AB, AC троугла $\triangle ABC$ и нека су A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је m њена медијатриса. У 5. задатку смо доказали да је четвороугао $C'B'BC$ Сакеријев, па је медијатриса његове противосновице BC нормална на $B'C'$. Како је полуправа BB' хиперпаралелна медијатриси m, јер им је права $B'C'$ заједничка управна, по дефиницији угла паралелности следи да је $\Pi(A_1B) < \measuredangle A_1BB'$. Дакле, $\Pi\left(\frac{BC}{2}\right) < \measuredangle CBB'$. Треба још само израчунати угао $\measuredangle CBB'$.

Јасно је да је $\measuredangle CBB' = \measuredangle CBP + \measuredangle PBB'$ и $\measuredangle CBB' = \measuredangle BCC' = \measuredangle BCQ + \measuredangle QCC'$. У 5. задатку смо доказали да је $\measuredangle PBB' = \measuredangle PAA'$ и $\measuredangle QCC' = \measuredangle QAA'$. Следи да је

$$\begin{aligned} 2\measuredangle CBB' &= \measuredangle CBB' + \measuredangle BCC' = \measuredangle CBA + \measuredangle PAA' + \measuredangle BCA + \measuredangle QAA' \\ &= \measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC, \end{aligned}$$

па је $\measuredangle CBB' = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC)$. Према томе, важи да је $\Pi\left(\frac{BC}{2}\right) < \frac{1}{2}(\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC)$.

18. Ако је у равни Лобачевског дат троугао ABC код кога је $\measuredangle C$ прав, тј. $\measuredangle C = R$, затим $\measuredangle A = \Pi(a')$, $\measuredangle B = \Pi(b')$, $BC = a$ и $AB = c$, доказати да је:

а) $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$;

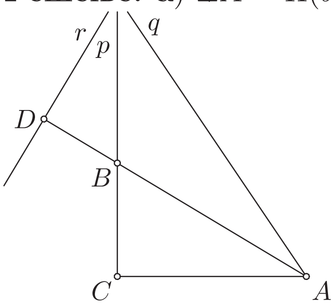
б) $\measuredangle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & \text{, за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c) & \text{, за } b' > c \end{cases}$;

в) $\measuredangle A = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')\big] & \text{, за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)\big] & \text{, за } b' > c \end{cases}$;

г) $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')\big] & \text{, за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b' - c) - \Pi(b' + c)\big] & \text{, за } b' > c \end{cases}$;

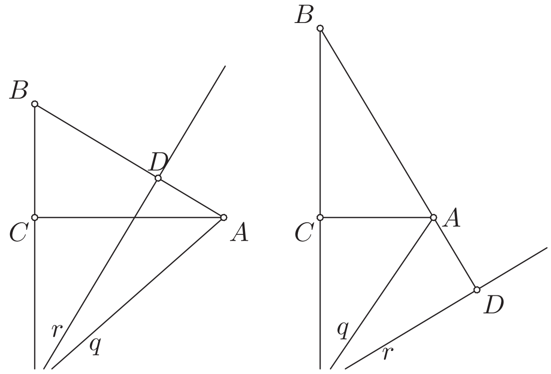
д) $\Pi(a' - b) + \Pi(a + b') = R, \quad \Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = R.$

Решење: **а)** $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$



Означимо полуправу CB још са Cp. Нека је Aq полуправа с теменом A која је паралелна полуправој Cp. Тада је $\measuredangle CAq = \Pi(CA) = \Pi(b)$. Нека је r права управна на правој AB која је паралелна полуправима Cp, Aq (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка) и нека је D пресечна тачка правих r, AB. По дефиницији угла паралелности је $\measuredangle DBp = \Pi(DB)$, а како су углови $\measuredangle DBp$ и $\measuredangle ABC$ унакрсни, следи да је $\measuredangle B = \Pi(DB)$, односно да је $DB = b'$. Како је $AD = AB + BD = c + b'$, следи да је $\measuredangle DAq = \Pi(DA) = \Pi(c + b')$. Коначно, следи да је $\measuredangle A = \measuredangle CAq - \measuredangle DAq = \Pi(b) - \Pi(c + b')$.

б) $\measuredangle A = \begin{cases} \Pi(c-b') - \Pi(b) & \text{, за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b'-c), & \text{за } b' > c \end{cases}$



Нека је Aq полуправа с теменом A која је паралелна полуправој BC. Тада је $\measuredangle CAq = \Pi(CA) = \Pi(b)$. Нека је r права нормална на правој BA која је паралелна полуправима BC, Aq (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је D пресечна тачка правих r, BA. Тада је, по дефиницији угла паралелности, $\measuredangle DBC = \Pi(DB)$. Како је $\measuredangle DBC = \measuredangle ABC$, следи да је $DB = b'$.

Ако је $b' < c$, онда важи $\mathcal{B}(B, D, A)$, па је $DA = BA - BD = c - b'$. Следи да је $\measuredangle DAq = \Pi(DA) = \Pi(c - b')$, па је $\measuredangle A = \measuredangle DAq - \measuredangle CAq = \Pi(c - b') - \Pi(b)$.

Ако је $b' > c$, онда важи $\mathcal{B}(B, A, D)$, па је $DA = DB - AB = b' - c$. Следи да је $\measuredangle DAq = \Pi(DA) = \Pi(b' - c)$. Како је $2R = \measuredangle DAB = \measuredangle DAq + \measuredangle CAq + \measuredangle CAB = \Pi(b' - c) + \Pi(b) + \measuredangle A$, следи да је $\measuredangle A = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$.

в) $\measuredangle A = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c-b') - \Pi(c+b')\big] & \text{, за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b'+c) + \Pi(b'-c)\big], & \text{за } b' > c \end{cases}$

Ако је $b' < c$, онда је $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b') = \Pi(c - b') - \Pi(b)$, па је $2\measuredangle A = \Pi(c - b') - \Pi(c + b')$, тј. $\measuredangle A = \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')]$.

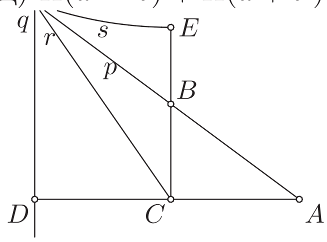
Ако је $b' > c$, онда је $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(b' + c) = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$, па је $2\measuredangle A = 2R - \Pi(b' + c) - \Pi(b' - c)$, тј. $\measuredangle A = R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)]$.

г) $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c+b') + \Pi(c-b')\big] & \text{, за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b'-c) - \Pi(b'+c)\big], & \text{за } b' > c \end{cases}$

Ако је $b' < c$, онда је $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b') = \Pi(c - b') - \Pi(b)$, па је $2\Pi(b) = \Pi(c + b') + \Pi(c - b')$, тј. $\Pi(b) = \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')]$.

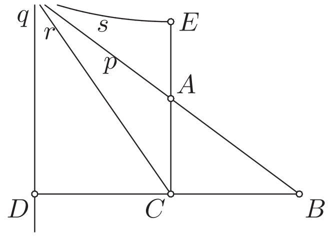
Ако је $b' > c$, онда је $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(b' + c) = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$, па је $2\Pi(b) = 2R - \Pi(b' - c) + \Pi(b' + c)$, тј. $\Pi(b) = R - \frac{1}{2}[\Pi(b' - c) - \Pi(b' + c)]$.

д) $\Pi(a'-b)+\Pi(a+b')=R, \quad \Pi(b'-a)+\Pi(b+a')=R$



Означимо полуправу AB још са Ap. Нека је q права која је нормална на правој AC и паралелна полуправој Ap (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је D пресечна тачка правих q, AC. Како нормала CB сече полуправу Ap (у тачки B), следи да важи $\mathcal{B}(A,C,D)$. Тада је $\Pi(DA) = \measuredangle DAp = \measuredangle CAB$, па је $DA = a'$. Следи да је $DC = DA - CA = a' - b$.

Нека је Cr полуправа с теменом C која је паралелна полуправој Ap и правој q. Тада је $\measuredangle DCr = \Pi(DC) = \Pi(a'-b)$. Нека је s права нормална на правој CB која је паралелна полуправима Ap, Cr (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је E пресечна тачка правих CB, s. Како је $\measuredangle EBp$ угао паралелности, он мора бити оштар, па важи $\mathcal{B}(C,B,E)$ и $\Pi(EB) = \measuredangle EBp = \measuredangle CBA$, тј. $EB = b'$. Дакле, $EC = EB + BC = b' + a$. Како је Cr паралелна са s, следи да је $\measuredangle ECr = \Pi(EC) = \Pi(a+b')$. Коначно, како је $\measuredangle DCE = R$, следи да је $R = \measuredangle DCr + \measuredangle ECr = \Pi(a'-b) + \Pi(a+b')$.



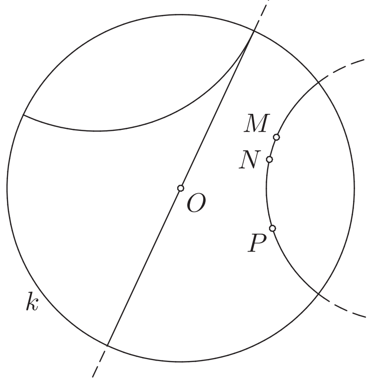
Потпуно аналогно се добија да важи $R = \Pi(b'-a) + \Pi(b+a')$.

9 Поенкареов диск модел

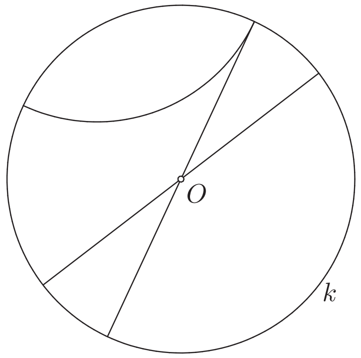
Када се заснива нека математичка теорија (нпр. еуклидска или хиперболичка геометрија), полази се од основних појмова, а односи међу њима се исказују аксиомама. Основни појмови било које теорије су апстрактни. Да би неки конкретни објекти могли бити реализација основних појмова неке теорије, неопходно је установити да ли такви објекти задовољавају све аксиоме те теорије. Уколико је одговор потврдан, за те конкретне објекте се каже да представљају *модел* те теорије.

Основни појмови геометрије (и еуклидске и хиперболичке) јесу непразан скуп **S**, који се зове простор и чији су елементи тачке, две врсте подскупова простора **S**, који се зову праве и равни, као и релације $\mathcal{B}$ и $\cong$. При томе је релација $\mathcal{B}$ тернарна над скупом тачака, а релација $\cong$ је бинарна над скупом уређених парова тачака. Модел еуклидске геометрије је неки непразан скуп с јасно назначеним подскуповима који су праве и равни и јасно дефинисаним релацијама $\mathcal{B}$ и $\cong$, уколико задовољавају све аксиоме инциденције, распореда, подударности и непрекидности, као и Плејферову аксиому. У овом поглављу нас интересује скуп који представља модел равни хиперболичке геометрије, при чему сматрамо да нам је дат неки модел еуклидске равни. Такав модел хиперболичке геометрије ћемо називати h–раван и све појмове назначаваћемо префиксом h.

Нека је k произвољан круг еуклидске равни и нека је O његов центар. Круг k се назива *апсолутом*, а његова унутрашњост (отворени диск) представља једну h–раван. Сама апсолута није у оквиру модела, тј. није део h–равни и сматра се да су на њој бесконачно далеке тачке. Тачке тог отвореног диска називамо h–тачкама. Отворене пречнике апсолуте, односно отворене тетиве круга k које садрже његов центар, као и отворене кружне лукове кругова који су управни на апсолути, чије су крајње тачке на апсолути, називамо h–правима. Дакле, h–праве су делови еуклидских правих ако садрже центар апсолуте, односно делови еуклидских кругова који су управни на апсолути, ако не садрже центар апсолуте. Може се доказати да су испуњене све аксиоме инциденције које се тичу равни.

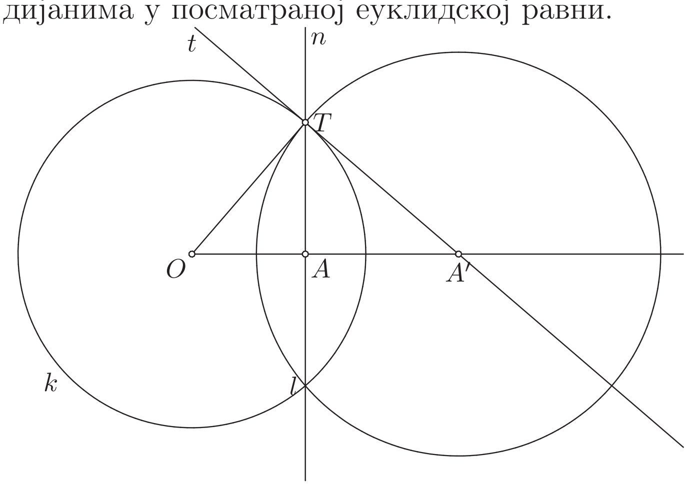


Ако две разне h–тачке припадају h–правој која је део еуклидске праве, онда еуклидска дуж која их спаја представља уједно и h–дуж. Ако две разне h–тачке M, P припадају h–правој која је део еуклидског круга, онда краћи лук $\widehat{MP}$ тог круга представља h–дуж MP. Три h–тачке M, N, P су у релацији h–између, тј. важи $\mathcal{B}_h(M, N, P)$, ако h–тачка N припада отвореној h–дужи MP. Може се доказати да су испуњене све аксиоме распореда. Помоћу релације h–између дефинисани су и појмови h–полуправих, h–углова, h–троуглова итд. Из аксиома непрекидности за еуклидске праве и њихових последица за еуклидски круг следи да важе аксиоме непрекидности за h–праве. Може се доказати да у h–равни постоје h–права и h–тачка која јој не припада такве да постоји више од једне h–праве која садржи ту h–тачку, а с том h–правом нема заједничких тачака. Према томе, испуњена је и аксиома Лобачевског. Две h–праве су h–паралелне ако се додирују у тачки која припада апсолути. Ако су две h–праве дисјунктне и нису h–паралелне, онда су оне h–хиперпаралелне.



Преостаје још да се дефинише h–подударност парова h–тачака. За то је довољно дефинисати пресликавања h–равни у себе (пресликавања која сликају унутрашњост апсолуте k у себе) које ће представљати h–изометрије. Као што знамо, свака изометрија равни (било еуклидске, било хиперболичке) може се представити као композиција највише трију осних рефлексија, па је довољно дефинисати осне рефлексије h–равни, тј. h–рефлексије. Ако је h–права p део еуклидске праве (означимо је такође са p), дефинишимо h–рефлексију $\mathcal{S}_p^h$ као рестрикцију еуклидске осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ на тачке h–равни, односно на унутрашњост апсолуте k. Ако је, пак, h–права p део еуклидског круга (означимо га такође са p), дефинишимо h–рефлексију $\mathcal{S}_p^h$ као рестрикцију еуклидске инверзије ψ_p на тачке h–равни, односно на унутрашњост апсолуте k. Ово је сасвим природна дефиниција, јер је инверзија, на неки начин, рефлексија у односу на круг. Парови тачака (A,B), (C,D) су h–подударни, односно важи $(A,B) \overset{h}{\cong} (C,D)$, ако постоји коначно много h–рефлексија $\mathcal{S}_{p_1}^h, \dots, \mathcal{S}_{p_n}^h$ таквих да је $C = \mathcal{S}_{p_n}^h \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{p_1}^h(A)$ и $D = \mathcal{S}_{p_n}^h \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{p_1}^h(B)$. Може се доказати да су испуњене све аксиоме подударности, према томе, имамо један модел хиперболичке равни, који се назива *Поенкареовим диск моделом.*

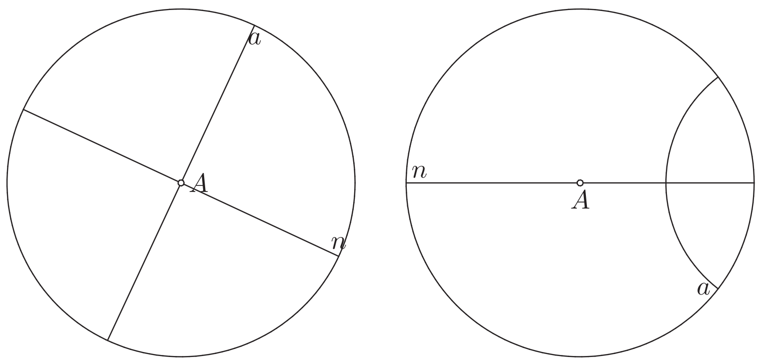
Што се мере дужи тиче, h–дужина h–дужи није једнака еуклидској дужини одговарајуће еуклидске дужи или еуклидског кружног лука. Пошто еуклидске осне рефлексије и еуклидске инверзије чувају еуклидске углове између кривих, следи да су два h–угла h–подударна ако и само ако су углови које граде одговарајући еуклидски кругови или еуклидске праве међусобно подударни. Није тешко доказати да је h–угао између неких h–правих прав ако и само ако је одговарајући угао између еуклидских кругова или еуклидских правих такође прав, па се h–мера h–углова у степенима или радијанима поклапа с мером углова у степенима или радијанима у посматраној еуклидској равни.



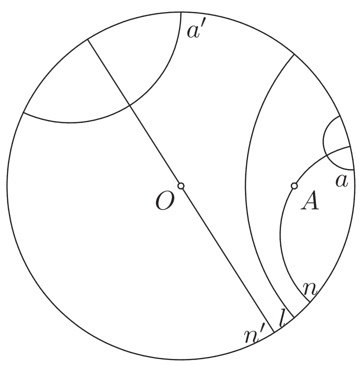
Веома је корисна чињеница да су h–праве које садрже центар апсолуте делови еуклидских правих, па је веома значајно за произвољну тачку A пронаћи h–изометрију која је слика у центар апсолуте O. Довољно је наћи h–рефлексију, јер знамо да нађемо слике тачака, еуклидских правих и еуклидских кругова при еуклидским рефлексијама и еуклидским инверзијама. Конструишимо еуклидску нормалу n на OA у тачки A, означимо једну од њених пресечних тачака са апсолутом са T и конструишимо тангенту t на апсолути k у тачки T. Њен пресек с полуправом OA означимо са A'. Круг $l(A', A'T)$ има особину да му центар припада тангенти апсолуте k, па је ортогоналан на апсолути, што значи да је његов пресек с унутрашњошћу апсолуте h–права, коју ћемо исто означити са l. Троуглови $\triangle A'AT, \triangle A'TO$ имају заједнички угао код темена A' и подударне праве углове $\measuredangle A'AT, \measuredangle A'TO$, па су слични. Следи да је $\frac{A'A}{A'T} = \frac{A'T}{A'O}$, тј. да је $A'A \cdot A'O = A'T^2$, па је $\psi_l(A) = O$, што значи да је и $\mathcal{S}_l^h(A) = O$, Овиме је одређена h–права l таква да се h–рефлексијом $\mathcal{S}_l^h$ h–тачка A слика у центар апсолуте O. Ова конструкција нам је веома важна, јер ће се користити у већини задатака.

1. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h-права a и h-тачка A. Одредити h-праву n која садржи тачку A и управна је на праву a.

Решење:



1° Нека се h–тачка A поклапа с центром апсолуте. Тада h–права n коју треба да конструишемо садржи центар апсолуте, па је део еуклидске праве. Потребно је да она буде управна на h–правој a, па ако је h–права a део еуклидске праве, конструишимо еуклидску праву која садржи тачку A и нормална је на правој која садржи h–праву a, а ако је h–права a део еуклидског круга, конструишимо еуклидску праву која садржи тачку A и нормална је на кругу који садржи h–праву a, тј. еуклидску праву која садржи тачку A и центар круга који садржи h–праву a.

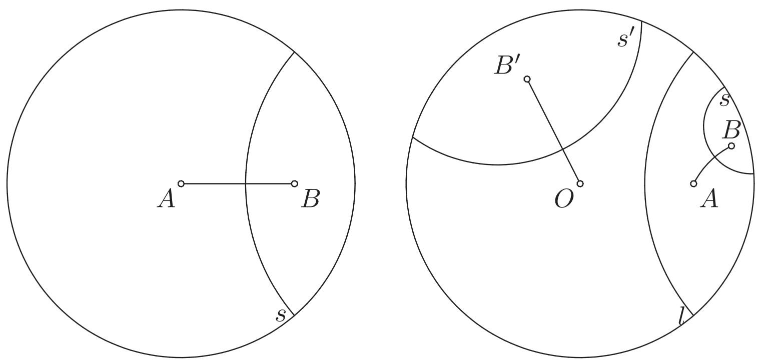


2° Нека се h–тачка A разликује од центра апсолуте O. Конструишимо h–праву l такву да се h–рефлексијом у односу на њу h–тачка A слика у центар апсолуте O (конструкција је описана у уводном делу). Конструишимо h–праву a' која је слика h–праве a при h–рефлексији у односу на h–праву l (слика еуклидске праве или круга при еуклидској инверзији). Дакле, h–рефлексијом у односу на h–праву l пресликали смо h–тачку A у центар апсолуте O и h–праву a у h–праву a' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h–праву n'

која садржи h–тачку O и управна је на h–правој a', као у првом случају. Пошто су h–рефлексије инволуције, поновном применом h–рефлексије у односу на h–праву l се h–тачка O и h–права a' сликају редом у h–тачку A и h–праву a, а пошто су h–рефлексије уједно и h–изометрије, применом h–рефлексије у односу на h–праву l се h–права n' слика у h–праву n која садржи h–тачку A и нормална је на h–правој a.

2. У Поенкареовом диск моделу дате су h-тачке A и B. Одредити h-симетралу дужи AB.

Решење: 1° Нека се једна од h–тачака A, B поклапа с центром апсолуте (нека је то, без умањења општости, h–тачка A). У уводном делу смо видели како се конструише h–права s таква да се h–рефлексијом у односу на њу h–тачка B слика у центар апсолуте A. Но, приметимо да је та h–права s управо h–симетрала h–дужи AB, те управо њу треба конструисати.

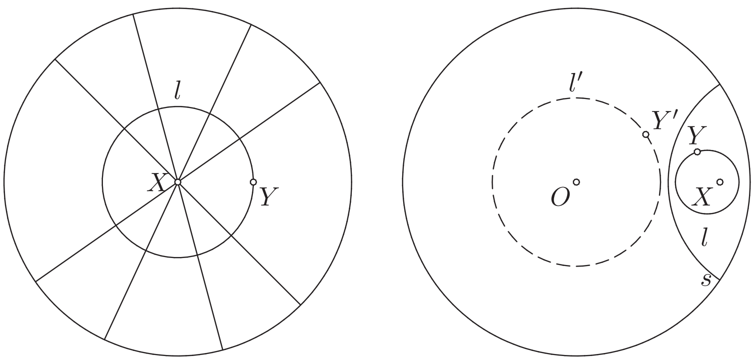


2° Нека се h–тачке A, B разликују од центра апсолуте O. Конструишимо h–симетралу l h–дужи OA и означимо са B' слику h–тачке B при h–рефлексији у односу на h–праву l (слика тачке при еуклидској инверзији). Дакле, h–рефлексијом у односу на h–праву l пресликали смо h–тачке A, B у центар апсолуте O и h–тачку B' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h–симетралу s' h–дужи OB'. Поновном применом h–рефлексије у односу на h–праву l сликамо h–тачке O, B' у h–тачке A, B, а h–симетралу s' h–дужи OB' у h–симетралу s h–дужи AB.

3. У Поенкареовом диск моделу дате су тачке X и Y. Конструисати h-круг l са центром у тачки X који садржи тачку Y.

Решење: Ако је $\mathcal{X}$ елиптички прамен правих са средиштем X, онда је круг с центром X, који садржи тачку Y, епицикл одређен праменом $\mathcal{X}$ и тачком Y, тј. скуп свих тачака које се од тачке Y добијају осним рефлексијама у односу на праве прамена $\mathcal{X}$.

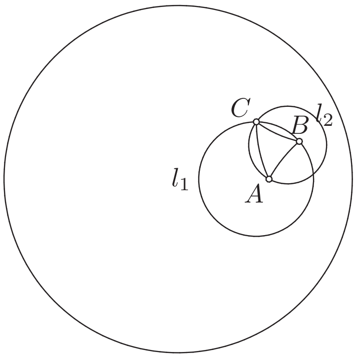
1° Нека се h–тачка X поклапа с центром апсолуте. Тада су h–праве елиптичког прамена $\mathcal{X}$ с h–средиштем X делови еуклидских правих, па су h–рефлексије одређене h–правима прамена $\mathcal{X}$ рестрикције еуклидских осних рефлексија. Тачке h–круга l се добијају h–рефлексијама h–тачке Y у односу на h–праве прамена $\mathcal{X}$, тј. еуклидским осним рефлексијама у односу на еуклидске праве прамена $\mathcal{X}$, па следи да се h–круг l поклапа с еуклидским кругом $l(X, XY)$.



2° Нека се h–тачка X разликује од центра апсолуте O. Конструишимо h–симетралу s h–дужи OX и затим означимо са Y' слику h–тачке Y при h–рефлексији у односу на h–праву s. Дакле, h–рефлексијом у односу на h–праву s пресликали смо h–тачке X, Y у центар апсолуте O и h–тачку Y' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h–круг l' с h–центром O који садржи h–тачку Y'. Поновном применом h–рефлексије у односу на h–праву s сликамо h–тачке O, Y' у h–тачке X, Y, а h–круг l' у h–круг l с h–центром X који садржи h–тачку Y.

4. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h-тачке A и B. Конструисати h-тачку C такву да је h-троугао ABC правилан.

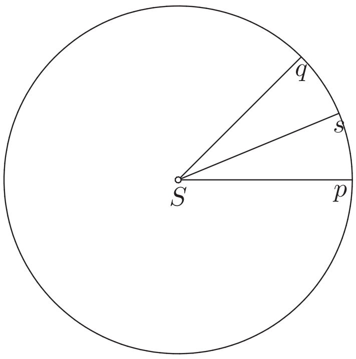
Решење:

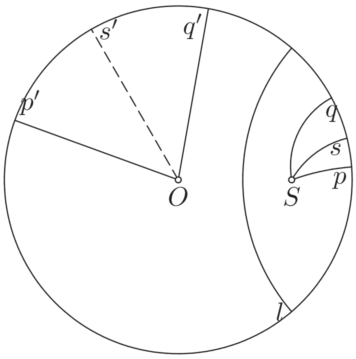


Искористимо решење претходног задатка и конструишимо h–круг l_1 с h–центром A који садржи h–тачку B и h–круг l_2 с h–центром B који садржи h–тачку A. Једну од пресечних h–тачака h–кругова l_1, l_2 означимо са C. Тада је h–троугао $\triangle ABC$ правилан, јер h–тачка C припада h–кругу l_1, па важи $AC \overset{h}{\cong} AB$, а пошто припада и кругу l_2, важи $BC \overset{h}{\cong} BA$ (у питању је h–подударност h–дужи).

5. У Поенкареовом диск моделу дате су две праве које се секу. Одредити h-бисектрису угла којег одређују.

Решење: Означимо са S пресек датих h–правих p, q.
1° Нека се h–тачка S поклапа с центром апсолуте. Тада су h–праве p, q делови еуклидских правих и h–угао $\measuredangle pSq$ се поклапа с еуклидским углом $\measuredangle pSq$. Бисектриса угла је полуправа која припада том углу таква да се осном рефлексијом у односу на праву која је садржи један крак тог угла слика у други и обрнуто. Ако је Ss еуклидска бисектриса еуклидског угла $\measuredangle pSq$, онда се еуклидском осном рефлексијом у односу на праву која је садржи крак Sp слика у крак Sq и обрнуто. Како h–рефлексија у односу на h–праву која садржи бисектрису Ss делује исто као и еуклидска осна рефлексија, следи да се и h–рефлексијом у односу на h–праву која садржи Ss h–крак Sp слика у h–крак Sq и обрнуто, односно да је h–полуправа Ss тражена h–бисектриса.

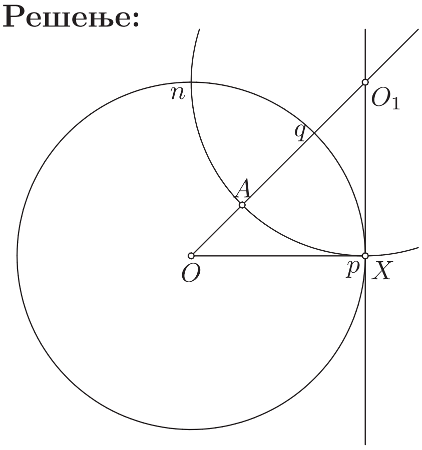




2° Претпоставимо сада да се h–тачка S разликује од центра апсолуте O. Конструишимо h–симетралу l h–дужи OS и означимо са p', q' слике h–правих p, q при h–рефлексији у односу на h–праву l. Дакле, свели смо проблем на претходни, који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h–бисектрису Os' h–угла $\measuredangle p'Oq'$. Поновном применом h–рефлексије у односу на h–праву l сликамо h–праве p', q' у h–праве p, q, а h–бисектрису Os' h–угла $\measuredangle p'Oq'$ у h–бисектрису Ss h–угла $\measuredangle pSq$.

6. У Поенкареовом диск моделу конструисати h-дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.

Решење:



Потребан нам је h–угао $\frac{R}{2}$, па конструишимо h–угао $\measuredangle pOq$ такав да му теме буде центар апсолуте (тада су му краци делови еуклидских правих). Да бисмо добили h–дуж h–мере $\Pi^{-1}\left(\frac{R}{2}\right)$, потребна нам је h–права која је управна на једном h–краку тог h–угла (нпр. Oq), а h–паралелна с његовим другим h–краком (нпр. Op). Та h–права не може садржати центар апсолуте, јер онда неће бити паралелна ни са једном краком угла, па следи да мора припадати еуклидском кругу чији се (еуклидски) центар налази на еуклидској правој која садржи крак Oq. Тај еуклидски круг мора садржати тачку X у пресеку апсолуте и полуправе Op, да би h–права коју он садржи била h–паралелна с h–краком Op. Такође, тај круг мора бити управан на апсолути у тачки X, па следи да његов центар припада тангенти апсолуте у тачки X. Дакле, центар O_1 тог круга налази се у пресеку те тангенте и (еуклидске) полуправе Oq, па конструишимо круг $n(O_1, O_1X)$. Означимо са A h–тачку у пресеку h–праве n и h–крака Oq. Тада је OA h–дуж која је, по дефиницији функције Лобачевског, h–мере $\Pi^{-1}(\measuredangle AOp) = \Pi^{-1}(\measuredangle pOq) = \Pi^{-1}\left(\frac{R}{2}\right)$.