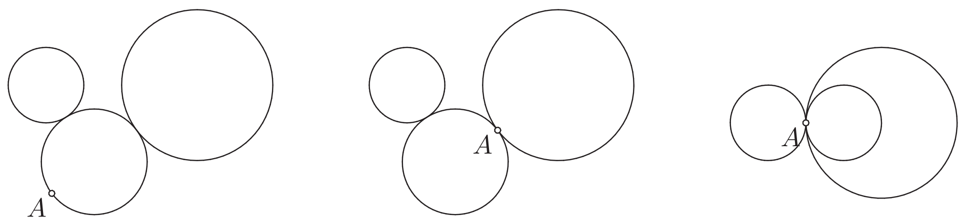
Дискусија: Ако обе тачке A, B припадају правој p, задатак нема решења. У супротном, број решења је једнак броју тангенти круга p' из тачке B', које не садрже тачку A, што може бити нула ако B' припада унутрашњости круга p', један ако $B' \in p'$ или ако B' припада спољашњости круга p' и једна од тангенти је права AB', односно два у свим осталим случајевима.

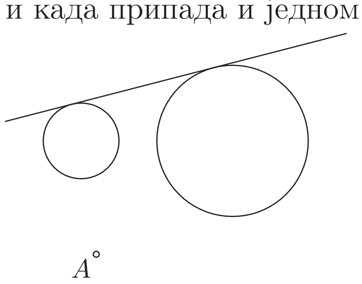
9. Конструисати круг k који садржи дату тачку A и додирује дате кругове k_1 и k_2.

Решење:

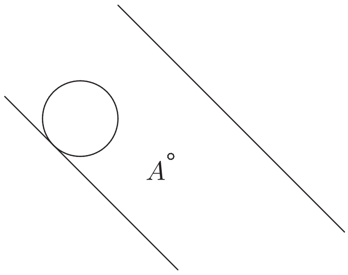
Анализа: Нека је k круг који испуњава услове задатка, тј. нека $k \ni A$ и нека k додирује кругове k_1, k_2.



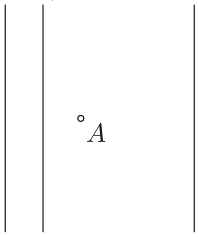
Нека је $l(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека је права k' дата са $k' = \psi_l(k \setminus \{A\})$. За праву k' важи да не садржи тачку A. Разликујемо три случаја: када тачка A не припада ни кругу k_1 ни кругу k_2, када припада тачно једном од њих (без умањења општости, кругу k_2) и када припада и једном и другом.



У првом случају су и $k_1' = \psi_l(k_1)$ и $k_2' = \psi_l(k_2)$ кругови који не садрже тачку A и додирују праву k', тј. k' је заједничка тангента кругова k_1', k_2'.



У другом случају је $k_1' = \psi_l(k_1)$ круг који не садржи тачку A и додирује праву k', тј. k' је тангента круга k_1'. Такође, $k_2' = \psi_l(k_2 \setminus \{A\})$ је права, а пошто се кругови k, k_2 додирују у тачки A, следи да је $k' \parallel k_2'$.



У трећем случају се инверзијом у односу на круг l оба круга (строго формално, без тачке A) сликају у праве које не садрже тачку A. Пошто се кругови k_1, k додирују у тачки A, на основу 1. задатка следи да важи $k_1' \parallel k'$. Исти закључак важи и за праве k_2', k', тј. важи $k_2' \parallel k'$.

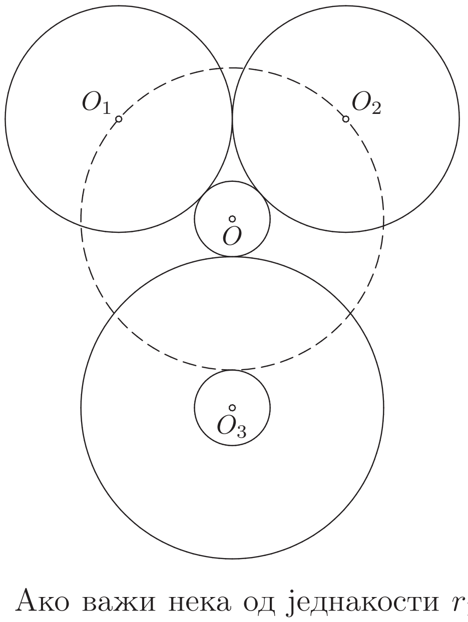
Конструкција: Конструишимо круг $l(A, \rho)$ произвољног полупречника $\rho > 0$. У зависности од тога да ли тачка A припада круговима k_1, k_2 или не, конструишимо њихове слике k_1', k_2' при инверзији ψ_l. Конструишимо праву k' која не садржи тачку A и испуњава један од следећа три услова:
1. заједничка је тангента кругова k_1', k_2', ако $A \notin k_1, k_2$.
2. паралелна је правој k_2' и тангента је круга k_1', ако $A \notin k_1$ и $A \in k_2$;
3. паралелна је правима k_1', k_2' ако $A \in k_1, k_2$;
На крају, конструишимо круг k који садржи тачку A такав да важи $k \setminus \{A\} = \psi_l(k')$.

Доказ: По конструкцији је k' права која не садржи тачку A, тј. центар инверзије, па је k круг који садржи тачку A. Права која не садржи тачку A и паралелна је правој k' слика се у круг који додирује круг k у центру инверзије, тј. у тачки A, а круг који не садржи тачку A и додирује праву k' слика се у круг који не садржи тачку A и додирује круг k. Према томе, у свим претходно разматраним случајевима следи да кругови k_1, k_2 додирују круг k.

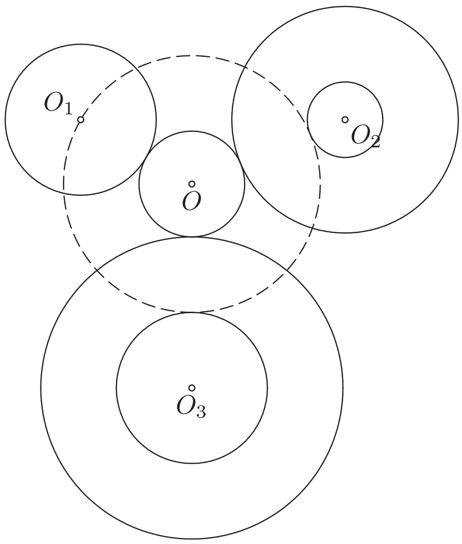
Дискусија: Број решења једнак је броју правих не садрже тачку A и испуњавају одговарајући услов из дела Конструкција. У првом случају број таквих правих може бити од нула до четири, у зависности од међусобног положаја кругова k_1', k_2' (рачунају се и заједничке спољашње и заједничке унутрашње тангенте). У другом случају број таквих правих може бити један или два, у зависности од тога да ли нека од двеју тангенти круга k_1' које су паралелне правој k_2' садржи тачку A или не. У трећем случају има беконачно много решења ако су праве k_1', k_2' паралелне, односно нема решења ако се те праве секу.

10. Конструисати круг који споља додирује три дата круга k_1, k_2, k_3.

Решење: Решење овог задатка неће бити дато као решења осталих конструктивних задатака (иако треба исписати све четири етапе, као и у осталим таквим задацима), јер ће се једноставном трансформацијом довести до неког од претходна два задатка, која знамо да решимо. Нека круг $k(O, r)$ додирује кругове $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2), k_3(O_3, r_3)$ споља. Нека је, без умањења општости, $r_1 \leq r_2, r_3$ и нека је $l(O, r+r_1)$ круг. Тада круг l садржи центар O_1 круга k_1.



Ако важи нека од једнакости $r_1 = r_2$, $r_1 = r_3$, онда круг l садржи и неку од тачака O_2, O_3. Ако садржи обе, онда је он описани круг троугла $\triangle O_1O_2O_3$. Ако садржи само једну од њих (без умањења општости, тачку O_2), онда он додирује круг $l_3(O_3, r_3-r_1)$ споља. Дакле, тада круг l садржи тачке O_1, O_2 и додирује круг l_3 споља, па се његова конструкција врши слично као у 8. задатку. Тамо је, додуше, задатак био да се конструише круг који садржи две дате тачке и додирује дату праву, а овде уместо праве треба да додирује круг споља, али се и овај задатак решава на исти начин.



Ако круг l не садржи ниједну од тачака O_2, O_3, онда додирује и круг $l_2(O_2, r_2 - r_1)$ споља и круг $l_3(O_3, r_3 - r_1)$ споља, па се његова конструкција врши исто као у претходном задатку (круг који садржи дату тачку и додирује два дата круга), с тим што се овде узимају у обзир само заједничке спољашње тангенте и то такве да су O_1, l_2', l_3' с исте стране те тангенте, иначе ће круг добијен инверзијом додиривати кругове l_2, l_3 унутра.

5 Изометријске трансформације равни

Дефиниција 24. Нека је α раван. Пресликавање $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$, такво да за сваки пар тачака (A, B) равни α важи $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$, називамо *изометријском трансформацијом* (*изометријом*) равни α.

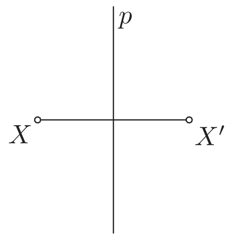
Релација подударности парова тачака је основни појам, тј. не дефинише се. Све изометрије су бијекције, сликају праве у праве (штавише, чувају распоред тачака на правој, тј. ако важи $\mathcal{B}(A, B, C)$, онда важи $\mathcal{B}(\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B), \mathfrak{I}(C))$, полуправе у полуправе, дужи у дужи, полуравни у полуравни, угаоне линије у угаоне линије, углове у углове итд. Изометрије које мењају оријентацију равни називамо *индиректним* изометријама, а оне које чувају оријентацију равни називамо *директним* изометријама. За сваке две изометрије $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$, њихова композиција $\mathfrak{J} \circ \mathfrak{I}$ је такође изометрија, и инверз $\mathfrak{I}^{-1}$ изометрије $\mathfrak{I}$ је такође изометрија. Другим речима, изометрије чине групу у односу на операцију композиције пресликавања.

Дефиниција 25. Нека су $\Phi, \Phi' \subseteq \alpha$ фигуре у равни α. Ако постоји изометрија $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$ равни α таква да важи $\Phi' = \mathfrak{I}(\Phi)$, онда кажемо да је фигура Φ *подударна* фигури Φ' и пишемо $\Phi \cong \Phi'$.

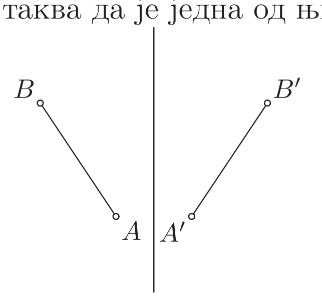
Није тешко доказати да је релација $\cong$ подударности фигура једна релација еквиваленције. Због симетричности релације чешће ћемо говорити да су фигуре *међусобно подударне*. Дужи $AB, A'B'$ су међусобно подударне ако и само ако важи $(A, B) \cong (A', B')$.

Сада ћемо видети које све изометрије равни постоје и у каквим су оне односима.

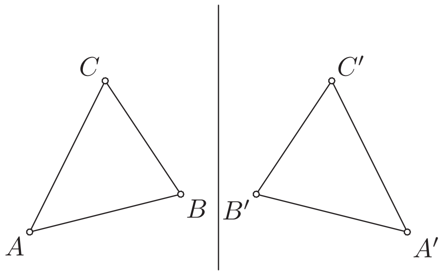
Дефиниција 26. Нека је $p \subset \alpha$ права равни α и нека је пресликавање $\mathcal{S}_p$ дато на следећи начин: ако је $X \in p$, онда је $\mathcal{S}_p(X) = X$, а иначе је $\mathcal{S}_p(X) = X'$, где је X' тачка таква да је p медијатриса дужи XX' у равни α. Онда се пресликавање $\mathcal{S}_p$ назива *осном рефлексијом* (*осном симетријом*) равни α с осом p.



Није тешко доказати да је овако дефинисано пресликавање изометрија. Слика произвољне дужи AB је дуж $A'B'$ ($A' = \mathcal{S}_p(A)$, $B' = \mathcal{S}_p(B)$) таква да је једна од њих „лик у огледалу" другој и обратно.



Шта се дешава ако двапут применимо осну рефлексију? По дефиницији се тачке праве p сликају у себе, а ако се X слика у X' такво да је p медијатриса дужи XX', онда се X' мора сликати у X. Дакле, $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathrm{Id}$, што значи да је осна рефлексија сама себи инверз, односно да је инволуција. По дефиницији се тачке осе p сликају у себе, а тачке ван осе p се не сликају у себе (да би постојала дуж чија је p медијатриса), па су једине фиксне тачке (тачке које се сликају у себе) тачке осе p.



Што се промене оријентације тиче, ако је $\triangle ABC$ позитивно оријентисан троугао, тј. ако су A, B, C тачке равни α такве да се од темена A ка темену B па затим ка темену C иде у позитивном смеру, онда је троугао $\triangle A'B'C'$, где су A', B', C' редом слике тачака A, B, C при осној рефлексији $\mathcal{S}_p$, негативно оријентисан троугао. Према томе, осна рефлексија мења оријентацију равни, па је индиректна изометрија равни.

Теорема 11. *Ако је $\mathfrak{I}$ индирек̄шна изоме̄шрија равни α која има бар једну фиксну ̄шачку P, онда је $\mathfrak{I}$ осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ чија оса $p \subset \alpha$ садржи фиксну ̄шачку P.*

Теорема 12 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $p \subset \alpha$ ̄ūрава равни α, $\mathcal{S}_p$ осна рефлексија и $\mathfrak{I}$ ̄ūроизвољна изоме̄шрија равни α. Ако је $p' = \mathfrak{I}(p)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}$.*

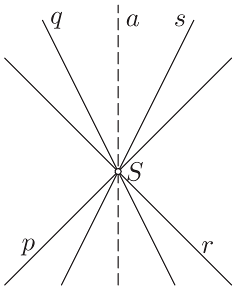
Дефиниција 27. Нека је $\Phi \subseteq \alpha$ фигура равни α. Кажемо да је права p *оса симе̄шрије* фигуре Φ ако је $\mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$. Ако фигура Φ има бар једну осу симетрије, кажемо да је она *осносиме̄шрична*.

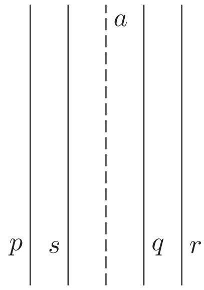
Сваку изометрију равни α можемо изразити преко осних рефлексија. Штавише, увек их можемо одабрати тако да их буде највише три.

Теорема 13. *Нека је $\mathfrak{I}$ ̄ūроизвољна изоме̄шрија равни α. Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p$ за неку ̄ūраву $p \subset \alpha$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ за неке ̄ūраве $p, q \subset \alpha$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ за неке ̄ūраве $p, q, r \subset \alpha$.*

У дефиницији 14 увели смо појам прамена правих у равни. Прамен правих је у директној вези с композицијом осних рефлексија. Наиме, важи следећа важна теорема.

Теорема 14. *Нека су $p, q, r \subset \alpha$ праве равни α. Онда је композиција $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ осна рефлексија ако и само ако праве p, q, r припадају једном прамену. Штавише, тада оса те рефлексије (означимо је са s) припада том прамену и ако је права a оса симетрије пара правих p, r, тада је права a оса симетрије и пара правих q, s.*





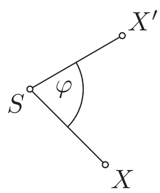
Утврдимо које још изометрије равни постоје.

Дефиниција 28. Пресликавање $\mathcal{E} : \alpha \longrightarrow \alpha$ такво да је $\mathcal{E}(X) = X$ за сваку тачку $X \in \alpha$ називамо *коинциденцијом.*

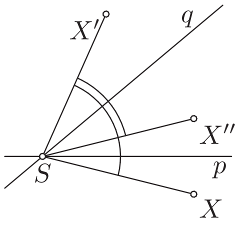
Коинциденција је, у ствари, идентичко пресликавање. Оно је тривијално изометрија, јер је $(A, B) \cong (A, B) = (\mathcal{E}(A), \mathcal{E}(B))$ за сваки пар тачака A, B. С обзиром на то да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathrm{Id} = \mathcal{E}$, имамо репрезентацију коинциденције преко производа двеју осних рефлексија. Тривијално, коинциденција је директна изометрија равни.

Теорема 15. *Ако изометрија $\mathfrak{I}$ равни α има бар три неколинеарне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α има бар две разне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$.*

Дефиниција 29. Нека је $S \in \alpha$ тачка равни α и φ оријентисани угао у тој равни. Пресликавање $\mathcal{R}_{S,\varphi} : \alpha \longrightarrow \alpha$ такво да је $\mathcal{R}_{S,\varphi}(S) = S$ и $\mathcal{R}_{S,\varphi}(X) = X'$ где је X' таква да важи $SX = SX'$ и $\measuredangle XSX' = \varphi$ (подударни су и имају исту оријентацију), за тачке $X \neq S$, назива се *ротацијом* око центра S за оријентисани угао φ.



Да бисмо разумели како ротација пресликава тачке равни α, замислимо да имамо крути штап чији један крај у центру S и који је фиксиран, а други крај је у произвољној тачки X равни α. Ротацијом штапа за оријентисани угао φ добијемо положај тачке $X' = \mathcal{R}_{S,\varphi}(X)$.



Како видети ротацију као композицију двеју осних рефлексија? Означимо са p произвољну праву равни α која садржи тачку S и са q праву равни α добијену ротацијом праве p око центра S за оријентисани угао $\frac{\varphi}{2}$. Није тешко доказати да у том случају важи $\mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Напоменимо да репрезентација ротације $\mathcal{R}_{S,\varphi}$ као $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ није јединствена, јер праве p, q можемо ротирати око центра S за произвољан угао и добити праве p', q' такве да је композиција $\mathcal{S}_{q'} \circ \mathcal{S}_{p'}$ такође једнака полазној ротацији.

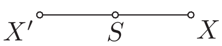
Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{S,\psi} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{R}_{S,\varphi+\psi}$, $\mathcal{R}_{S,0^\circ} = \mathcal{R}_{S,360^\circ} = \mathcal{E}$ и $\mathcal{R}_{S,\varphi}^{-1} = \mathcal{R}_{S,-\varphi}$, где је $-\varphi$ угао подударан углу φ, супротне оријентације. Такође,

Теорема 16. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α има тачно једну фиксну тачку S, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{S,\varphi}$, за неки оријентисани угао φ различит од 0° или пуног угла.*

Теорема 17 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $S \in \alpha$ тачка равни α, φ оријентисани угао у тој равни, $\mathcal{R}_{S,\varphi}$ ротација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α. Ако је $S' = \mathfrak{I}(S)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{S',\varphi}$, ако је $\mathfrak{I}$ директна, односно $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{S',-\varphi}$, ако је $\mathfrak{I}$ индиректна изометрија.*

Може се доказати да ако је φ конвексан угао различит од 0° или опруженог угла и $p' = \mathcal{R}_{S,\varphi}(p)$, онда праве p, p' заклапају углове φ и $180^\circ - \varphi$.

Специјални случај ротације јесте онај у коме је угао ротације опружени угао. Тада за тачку $X' = \mathcal{S}(X)$, где је $X \neq S$, важи да је $SX' = SX$ и $\measuredangle XSX' = 180^\circ$, тј. $\mathcal{B}(X, S, X')$. Тачка S је онда средиште дужи XX'.

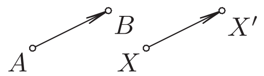


Ово пресликавање се назива *централном симетријом* и означава се са $\mathcal{S}_S$ (не употребљава се термин централна рефлексија; он се користи кад се говори о изометријама једне праве). Јасно је да важи $\mathcal{S}_S^{-1} = \mathcal{S}_S$, јер је $\mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_S = \mathcal{R}_{S,180^\circ} \circ \mathcal{R}_{S,180^\circ} = \mathcal{R}_{S,360^\circ} = \mathcal{E}$. Такође, ако је $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, онда је оријентисани угао од праве p ка правој q подударан углу $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, тј. важи $p \perp q$.

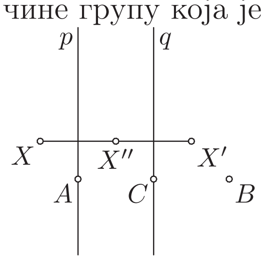
Слично појму осе симетрије неке фигуре, постоји и појам центра симетрије фигуре.

Дефиниција 30. Нека је $\Phi \subseteq \alpha$ фигура равни α. Кажемо да је тачка S *центар симетрије* фигуре Φ ако је $\mathcal{S}_S(\Phi) = \Phi$. Ако фигура Φ има бар један центар симетрије, онда је она *централносиметрична*.

Дефиниција 31. Нека је $\overrightarrow{AB}$ произвољан вектор у равни α. Пресликавање $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ дато са $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(X) = X'$, где је X' таква да је $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, назива се *транслацијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$.



Транслација не представља ништа друго него праволинијско кретање у одређеном смеру. Није тешко доказати да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$ и $\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{-\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$. Дакле, транслације (заједно са коинциденцијом) чине групу која је подгрупа групе изометрија.



Нека је p права која садржи тачку A и управна је на правој AB и нека је q права која садржи средиште C дужи AB и управна је на правој AB. Јасно, тада је $p \parallel q$. Није тешко доказати да важи $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Дакле, и транслацију видимо као композицију двеју осних рефлексија. Наравно, ово није једина репрезентација транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, тј. уместо правих p, q можемо посматрати праве p', q' које су управне на AB и налазе се на растојању $\frac{AB}{2}$, при чему је смер од праве p' ка правој q' исти као смер вектора $\overrightarrow{AB}$.

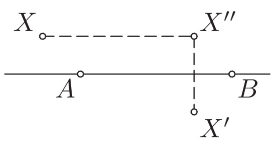
Транслација је директна изометрија. То можемо видети директно из дефиниције (померањем у правцу неког вектора не мења се оријентација равни), а можемо видети и из чињенице да се транслација представља као композиција двеју осних рефлексија. Што се тиче фиксних тачака, важи следеће. Ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, тј. ако је у питању коинциденција, све тачке равни α су фиксне, а ако је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$, онда је $X' \neq X$ за сваку тачку X равни α, тј. ниједна тачка није фиксна.

Теорема 18. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, где је $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор равни α.*

Теорема 19 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $\overrightarrow{AB}$ произвољан вектор у равни α, $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ транслација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α. Ако је $A' = \mathfrak{I}(A)$ и $B' = \mathfrak{I}(B)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{A'B'}}$.*

Испоставља се да постоји само још један тип изометрија равни. Наиме, видели смо како изгледају изометрије равни које су композиције двеју осних рефлексија, у зависности од узајамног положаја оса тих рефлексија. На основу теореме 13 преостаје само још случај кад је изометрија равни композиција трију осних рефлексија. На основу теореме 14, ако су осе тих рефлексија праве једног прамена, композиција је поново рефлексија, а ако нису, онда је у питању следећа изометрија.

Дефиниција 32. Нека је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ ненула вектор равни α. Пресликавање $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ дато са $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ назива се *клизајућом рефлексијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$ у односу на праву AB.



Клизајућа рефлексија је, као што јој само име каже, композиција транслације („клизања") и осне рефлексије. При томе, вектор $\overrightarrow{AB}$ мора бити паралелан оси рефлексије. Најчешће се узима онај представник вектора чије тачке припадају оси рефлексије, чиме се ознака клизајуће рефлексија значајно олакшава (није неопходно посебно означити осу и вектор). Ово је једна индиректна изометрија равни, јер је композиција директне и индиректне изометрије, те мења оријентацију равни. Такође, клизајућа рефлексија нема фиксних тачака.

Теорема 20. *Ако индиректна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$, где је $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор равни α.*

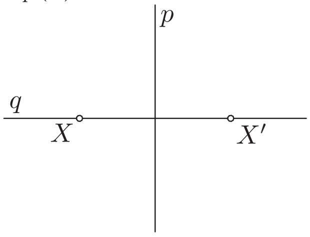
Теорема 21 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ ненула вектор равни α, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ клизајућа рефлексија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α. Ако је $A' = \mathfrak{I}(A)$ и $B' = \mathfrak{I}(B)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{A'B'}}$.*

Код клизајуће рефлексије транслација и рефлексија комутирају, тј. није битно да ли ћемо прво извршити транслацију, па онда рефлексију, или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB}$. Транслација се разбија на две осне рефлексије чије су осе нормалне на AB, па следи да је клизајућа рефлексија композиција трију осних рефлексија чије осе не припадају једном прамену. Тај положај правих је веома специфичан (две су паралелне, а трећа је управна на њима). Испоставља се да је композиција трију осних рефлексија чије осе не припадају једном прамену увек клизајућа рефлексија, без обзира на међусобни њихов положај.

Што се инверза клизајуће рефлексије тиче, једноставно се види да је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}^{-1} = \left(\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}\right)^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}^{-1} \circ \mathcal{S}_{AB}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{BA}}$. Дакле, клизајућа рефлексија није инволуција.

1. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.

Решење: Почетна једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$. На основу теореме 12 (теореме о трансмутацији), с обзиром на то да је $\mathcal{S}_p^{-1} = \mathcal{S}_p$, следи да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)}$, па је полазна једнакост еквивалентна с једнакошћу $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)} = \mathcal{S}_q$. Две осне рефлексије су једнаке ако и само ако су им осе исте, према томе, последња једнакост је еквивалентна са $\mathcal{S}_p(q) = q$. Доказаћемо да је $\mathcal{S}_p(q) = q$ еквивалентно са $p = q \vee p \perp q$.
$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $p = q$. Пошто се све тачке праве p сликају у себе, следи да се и права p слика у себе, тј. да је $\mathcal{S}_p(p) = p$. Пошто је $p = q$, следи да је $\mathcal{S}_p(q) = q$.



Нека је $p \perp q$ и нека је $X \in q$ произвољна. Ако је $X \in p$, онда је $\mathcal{S}_p(X) = X \in q$. Нека $X \notin p$. Тада је $\mathcal{S}_p(X) = X'$ и p је медијатриса дужи XX'. Дакле, $p \perp XX'$. Такође, $p \perp q$ и $X \in q$, па следи да се праве XX' и q поклапају. Самим тим, $X' \in q$. Према томе, $\mathcal{S}_p(q) \subseteq q$. Пошто је $\mathcal{S}_p$ инволуција, следи да је $q \subseteq \mathcal{S}_p(q)$, па је $\mathcal{S}_p(q) = q$.
$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $\mathcal{S}_p(q) = q$ и $p \neq q$. Пошто је $p \neq q$, онда постоји тачка X која припада q и не припада p. Нека је $\mathcal{S}_p(X) = X'$. Тада је p медијатриса дужи XX', па је $p \perp XX'$. Такође, из $\mathcal{S}_p(q) = q$ следи да $X' \in q$, па су праве q и XX' исте. Дакле, следи да је $p \perp q$.

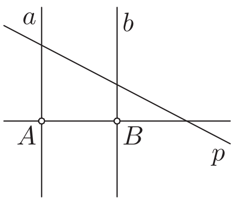
Напомена 11. Претходни задатак нам говори да две осне рефлексије комутирају ако и само ако су им осе идентичне или међусобно нормалне. Како је $(\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p^{-1} \circ \mathcal{S}_q^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, закључујемо да две осне рефлексије комутирају ако и само ако је њихова композиција инволуција. Од директних изометрија, инволуције су само коинциденција и централна симетрија, а оне се добијају управо у случајевима $p = q$ и $p \perp q$ редом.

2. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ ако и само ако су p, q, r праве једног прамена.

Решење: $\boxed{\Longleftarrow}$: Нека су p, q, r праве једног прамена. Тада је, на основу теореме 14, пресликавање $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ осна рефлексија. Дакле, $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$. Осна рефлексија је инволуција, па је $\mathcal{S}_s^{-1} = \mathcal{S}_s$. Како је $\mathcal{S}_s^{-1} = (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p^{-1} \circ \mathcal{S}_q^{-1} \circ \mathcal{S}_r^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$, следи да важи једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$.
$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Означимо $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Тада је $\mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathfrak{I}$, тј. $\mathfrak{I}$ је инволуција. Такође, $\mathfrak{I}$ је индиректна изометрија, па не може бити клизајућа рефлексија, јер клизајућа рефлексија није инволуција. Према томе, $\mathfrak{I}$ је осна рефлексија, тј. $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ је осна рефлексија. На основу теореме 14 следи да праве p, q, r припадају једном прамену, што је и требало доказати.

3. Доказати: $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B \Leftrightarrow AB \perp p$.

Решење:



Нека је a права која је нормална на правој AB у тачки A, а нека је b права која је нормална на правој AB у тачки B. Тада је $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB}$ и $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}$. Дакле,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A &= \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} \qquad \text{и} \\ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B &= \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}. \end{aligned}$$

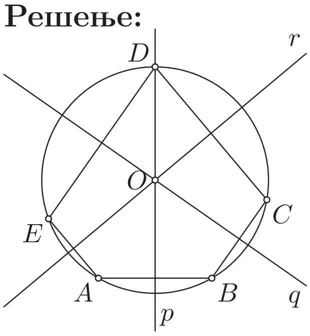
Према томе, једнакост $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}$, што важи ако и само ако важи $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b$. На основу 2. задатка, ово важи ако и само ако праве a, p, b припадају једном прамену. Пошто су a, b управне на правој AB, следи да тај прамен једино може бити прамен паралелних правих, према томе, важи $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b$ ако и само ако је $p \parallel a \parallel b$. Пошто је $a \perp AB$ и $b \perp AB$, ово је еквивалентно са $AB \perp p$, што је и требало доказати.

4. Ако нека фигура равни има тачно две осе симетрије, доказати да је она и централносиметрична.

Решење: Нека су праве p, q једине осе симетрије фигуре Φ. Тада је $\mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$ и $\mathcal{S}_q(\Phi) = \Phi$. Takoђe, права $\mathcal{S}_p(q)$ је оса симетрије фигуре Φ, јер је $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)}(\Phi) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$. Пошто нема других оса симетрије сем правих p, q, следи да је $\mathcal{S}_p(q) = p$ или $\mathcal{S}_p(q) = q$. Прва једнакост не може да важи, јер би тада било $q = \mathcal{S}_p(p) = p$, а праве p, q се разликују. Дакле, $\mathcal{S}_p(q) = q$. На основу првог задатка следи да је $p = q$ или $p \perp q$. Пошто није $p = q$, следи да је $p \perp q$. Нека је O пресечна тачка правих p, q. Тада је $\mathcal{S}_O(\Phi) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$, па следи да је тачка O центар симетрије фигуре Φ. Дакле, фигура Φ је централносиметрична.

5. Нека је $ABCDE$ петоугао уписан у круг такав да је $BC \parallel DE$ и $CD \parallel EA$. Доказати да D припада медијатриси странице AB.

Решење:



Нека је O центар круга и нека су p, q, r редом медијатрисе страница AB, BC, CD. Како је O једнако удаљена од свих темена петоугла (јер темена петоугла припадају кругу с центром O), следи да O припада медијатрисама p, q, r, па су то праве једног прамена. Takoђe, како је $q \perp BC$ и $BC \parallel DE$, следи да је $q \perp DE$, а пошто је $OD = OE$ и $O \in q$, следи да је q медијатриса и странице DE. Слично, како је $r \perp CD$ и $CD \parallel EA$, следи да је $r \perp EA$, а пошто је $OE = OA$, следи да је r медијатриса и странице EA.

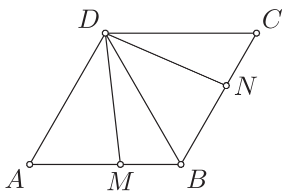
Посматрајмо изометрију $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q$. Важи да је

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(D) &= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q(D) \\
&= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r(E) \\
&= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(A) \\
&= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q(B) = \mathcal{S}_r(C) = D.
\end{aligned}$$

Takoђe, пошто p, q, r припадају једном прамену, на основу 2. задатка следи да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p$, па је $D = \mathfrak{I}(D) = \mathcal{S}_p(D)$. Одавде следи да $D \in p$.

6. Нека је $ABCD$ ромб такав да је $\measuredangle BAD = 60°$ и нека права p сече редом странице AB и BC у тачкама M и N тако да је збир дужи BM и BN једнак страници ромба. Доказати да је троугао DMN правилан.

Решење:

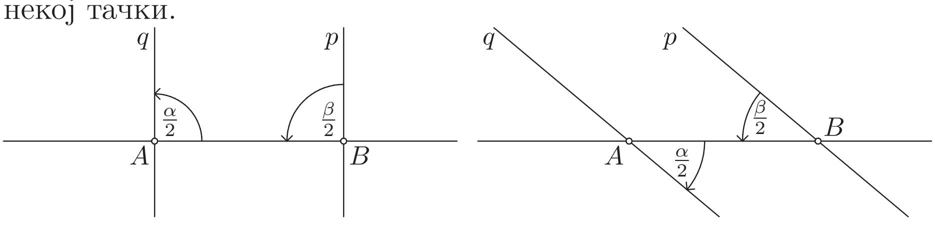


Важи $\mathcal{R}_{D,60°}(A) = B$ и $\mathcal{R}_{D,60°}(B) = C$. Дакле, ротацијом око D за $60°$ се дуж AB слика у дуж BC. Пошто је $BM + BN = AB$ и $BM = AB - AM$, па је $AB - AM + BN = AB$, следи да је $AM = BN$. Нека је $M' = \mathcal{R}_{D,60°}(M)$. Следи да важи $AM = BM'$, па следи $BN = BM'$. Тачке N, M' су између тачака B, C и на истом растојању од B, па следи да је $M' = N$, тј. да је $\mathcal{R}_{D,60°}(M) = N$. Одавде следи да је троугао $\triangle DMN$ једнакостраничан, јер је $DM = DN$ и $\measuredangle MDN = 60°$.

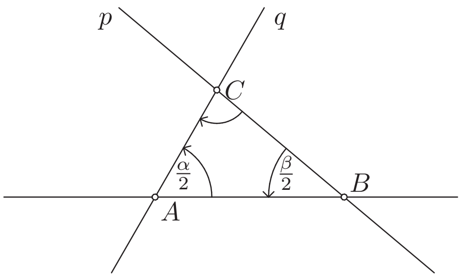
7. Одредити тип и компоненте изометрије $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$.

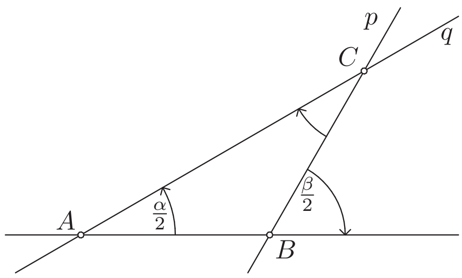
Решење: Нека су $\alpha, \beta \in [-180°, 180°]$. Ако је $A = B$, онда важи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{A,\alpha+\beta}$, ако је $\alpha + \beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, односно $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{E}$, ако је $\alpha + \beta \in \{0°, \pm 360°\}$. Претпоставимо да је $A \neq B$.

Нека је p права која садржи тачку B таква да је оријентисани угао од p ка AB једнак $\frac{\beta}{2}$ и нека је q права која садржи тачку A таква да је оријентисани угао од AB ка q једнак $\frac{\alpha}{2}$. Тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. У зависности од углова α, β, праве p, q могу бити паралелне или се сећи у некој тачки.



Углови $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ су оштри или прави и могу бити произвољне оријентације, односно $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in [-90°, 90°]$. Ако су углови α, β исте оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ прави углови, тј. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \pm 180°$. Ако су α, β супротне оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ подударни, тј. $\frac{\alpha}{2} = -\frac{\beta}{2}$. Дакле, $p \parallel q$ ако и само ако $\alpha + \beta \in \{0°, \pm 360°\}$ и тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BC}}$, где је C подножје управне из B на правој q.





Ако $\alpha+\beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, онда се p, q секу у некој тачки C. Оријентисани угао $\measuredangle BCA$ представља оријентисани угао од праве p ка правој q. Ако су α, β исте оријентације, они су унутрашњи углови троугла $\triangle ABC$, тј. $\measuredangle BAC = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle CBA = \frac{\beta}{2}$. Угао $\measuredangle BCA$ је супротне оријентације од углова $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$, па је $-\measuredangle BCA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - 180°$ и $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{C,2\measuredangle BCA} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta-360°}$. Нека су α, β супротне оријентације и нека су α', β' неоријентисани углови подударни угловима α, β редом. Како се p и q секу, један од њих је већи од другог, јер би иначе било $p \parallel q$. Без умањења општости, нека је $\beta' > \alpha'$. Тада је угао $\frac{\beta}{2}$ спољашњи угао троугла $\triangle ABC$ и исте оријентације као угао $\measuredangle BCA$, па је $\frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \measuredangle BCA$. Према томе, $\measuredangle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, па је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{C,2\measuredangle BCA} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$.

Напомена 12. Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{R}_{S,\varphi-360°}$. Према томе, у решењу претходног задатка, у случају да $\alpha+\beta \notin \{0°, \pm 360°\}$ важи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$ и ако су α, β исте оријентације и ако су α, β супротне оријентације.

Напомена 13. Дакле, доказали смо да ако важи $\alpha+\beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, композиција ротација $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$ је ротација за угао $\alpha+\beta$, а ако важи $\alpha+\beta \in \{0°, \pm 360°\}$, онда је композиција ротација $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$ транслација ако је $A \neq B$, односно коинциденција ако је $A = B$.