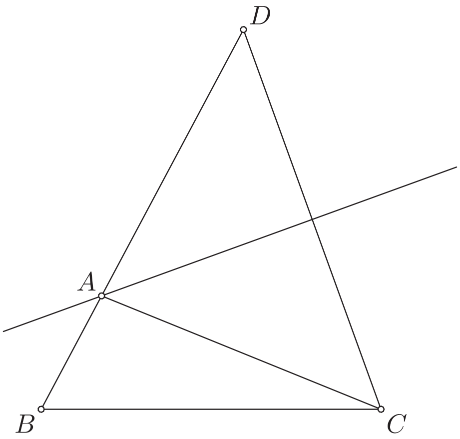
3) $\alpha, a, b+c$

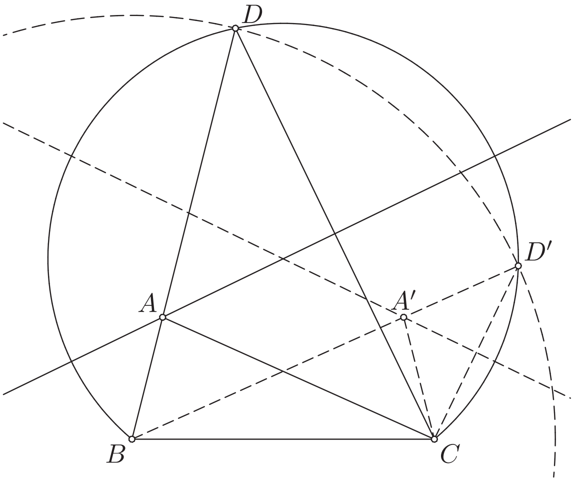
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\measuredangle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка таква да важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$. Тада је $BD = BA+AD = BA+AC = b+c$. Такође, троугао $\triangle ACD$ је једнакокраки, па је $\measuredangle ADC = \measuredangle ACD = \varphi$. Угао $\measuredangle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle ACD$. Следи да је $\alpha = \varphi + \varphi$, тј. $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, $\measuredangle ADC = \frac{\alpha}{2}$.

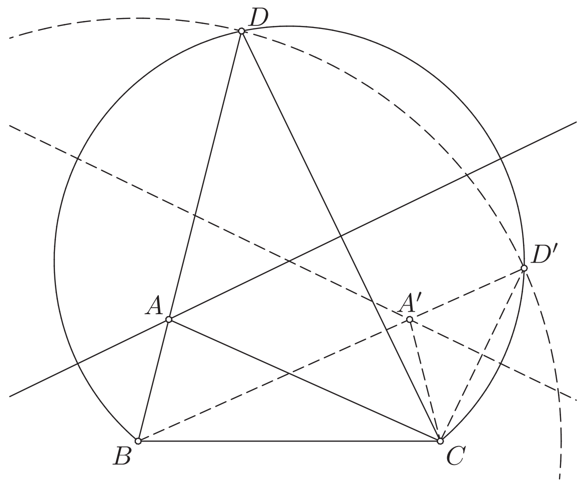
У троуглу $\triangle BCD$ је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\measuredangle BDC = \measuredangle ADC = \frac{\alpha}{2}$, па тај троугао умемо да конструишемо. Из $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$ следи да тачка A припада пресеку медијатрисе странице CD и странице BD.

Конструкција:



Конструишимо троугао $\triangle BCD$ такав да је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Конструишимо медијатрису странице CD и означимо са A њен пресек са страницом BD (дакле, да важи $\mathcal{B}(D, A, B)$).

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$. ПК је $BC = a$. Тачка A припада страници BD, па важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $BD = BA + AD$. С друге стране, тачка A припада медијатриси странице CD, па је $AD = AC$. Дакле, $BD = BA + AC$, а како је ПК $BD = b + c$, следи да је $BA + AC = b + c$. Троугао $\triangle ACD$ је једнакокрак, па је $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC$. Како је ПК $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$, следи да је $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Угао $\measuredangle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle ACD$ и $\measuredangle ADC$. Следи да је $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD + \measuredangle ADC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.



Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Ако је $b + c \leq a$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је $b + c$ збир двеју страница а a трећа страница (због неједнакости троугла), па задатак нема решења.

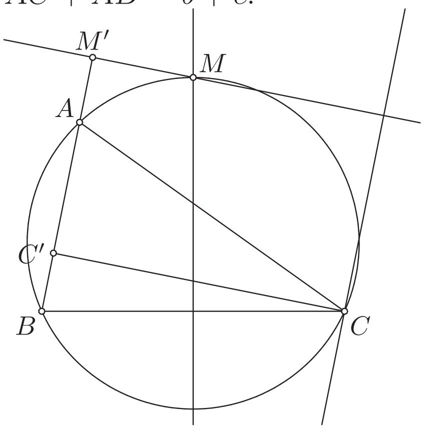
Нека је $\alpha < \pi$ и $b + c > a$. Да би постојао троугао $\triangle BCD$, потребно је да буде испуњено $BD \leq \frac{BC}{\sin \measuredangle BDC}$, односно $b + c \leq \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Нама није познато да ли је угао $\measuredangle BCD$ оштар, прав или туп. Како је $BD = b + c > a = BC$, следи да постоје два неподударна троугла $\triangle BCD$ ако је $b + c < \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, односно да је троугао $\triangle BCD$ јединствен ако је $b + c = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

Треба још проверити да ли медијатриса странице CD сече страницу BD, тј. да ли важи $\mathcal{B}(D, A, B)$. С обзиром на то да је $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, медијатриса дужи CD сигурно сече полуправу DB у некој тачки A (права нормална на једном краку оштрог угла сече други крак). Троугао $\triangle CDA$ је једнакокраки ($AC = AD$), па је $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \measuredangle BDC$. Тачка A припада дужи BD ако и само ако је $\measuredangle DCA < \measuredangle DCB$, односно ако и само ако је $\measuredangle BDC < \measuredangle DCB$. На основу неједнакости троугла, ово важи ако и само ако је $BC < DB$, тј. $a < b+c$, а ово смо претпоставили да важи. Дакле, за сваки од неподударних троуглова $\triangle BCD$ постоји тачка A, па постоје два неподударна троугла $\triangle ABC$.

Дакле, ако је $\alpha < \pi$, $b+c > a$ и $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > b+c$, постоје два неподударна решења. Ако је $\alpha < \pi$, $b+c > a$ и $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = b+c$, постоји јединствено решење до на подударност. У супротном нема решења.

4) а) $\beta, h_c, b+c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Ако је C' подножје висине из темена C, онда је $\measuredangle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC + AB = b + c$.



Нека су M, M' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, M' \ddot{-} BC$ и $MM' \perp AB$. Следи да је $\measuredangle M'BC = \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BM' = \frac{1}{2}(b+c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB, тј. правој BM', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак BC угла $\measuredangle M'BC$. Тачка M припада правој која је нормална на правој BM' у тачки M' и медијатриси дужи BC. Коначно, тачка A припада правој BM' и описаном кругу троугла $\triangle BCM$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка M припада на основу Великог задатка.

Конструкција: Конструишимо дуж $BM' = \frac{1}{2}(b+c)$. Конструишимо угао $\measuredangle M'Bq = \beta$. Конструишимо праву p која је паралелна правој BM', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак Bq угла $\measuredangle M'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C. Конструишимо медијатрису m дужи BC. Конструишимо нормалу n на правој BM' у тачки M'. У пресеку правих m и n означимо са M тачку такву да важи $M, M' \ddot{-} BC$. Конструишимо описани круг l троугла $\triangle BMC$. У пресеку круга l и праве BM' означимо тачку A (различиту од тачке B) такву да важи $A, M' \ddot{-} BC$.

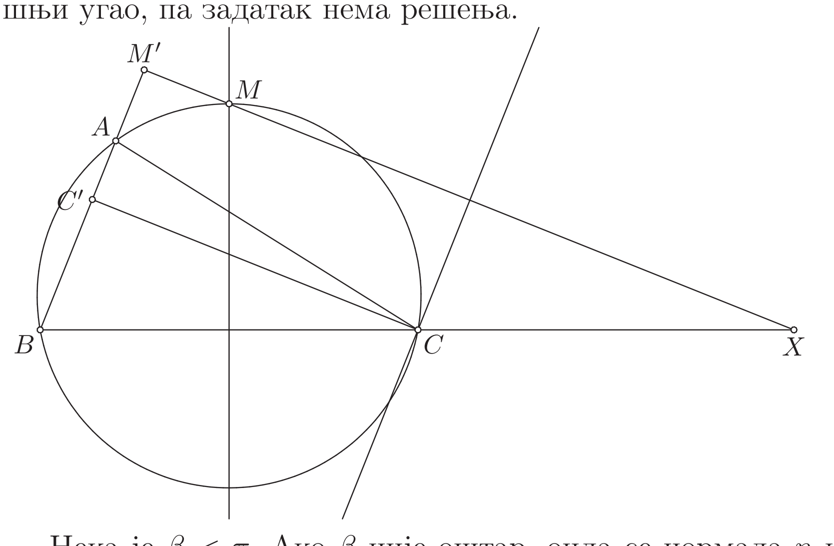
Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC = \beta$, $AC + AB = b + c$ и да је висина из темена C подударна дужи h_c.

ПК је $\measuredangle M'BC = \beta$ и $A, M' \div BC$. Следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle M'BC = \beta$.

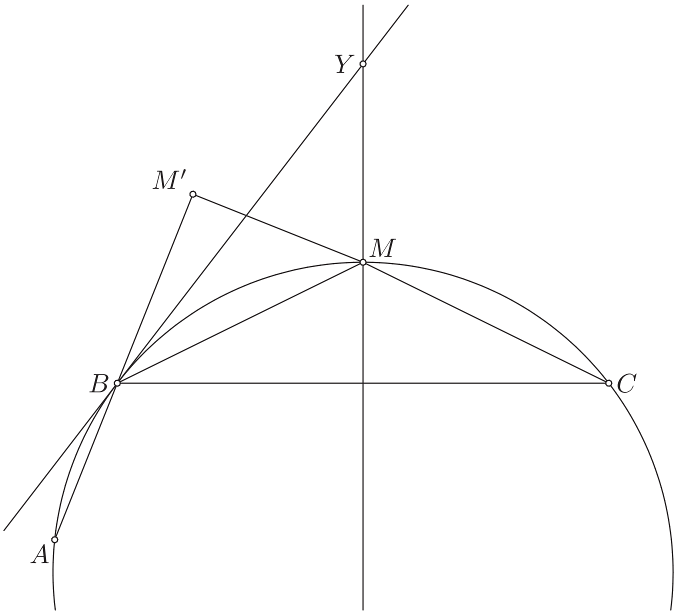
Тачка C припада правој која је паралелна правој BM', тј. правој AB и налази се на растојању h_c од ње. Ако је CC' висина из темена C, тј. ако је C' тачка на правој AB и $CC' \perp AB$, следи да је $CC' = h_c$ (дуж која је нормална на паралелним правима подударна је растојању између њих).

ПК круг l садржи тачке A, B, C, па је то описани круг троугла $\triangle ABC$. ПК тачка M припада медијатриси m странице BC и описаном кругу l троугла $\triangle ABC$. ПК важи $M, M' \div BC$ и $A, M' \div BC$, па следи да важи $A, M \div BC$. Према томе, тачка M је тачка из Великог задатка. Тачка M припада нормали n на правој BM', односно правој AB, у тачки M', па следи да је M' подножје нормале из тачке M на правој AB. Дакле, M' је тачка из Великог задатка. На основу Великог задатка је $BM' = \frac{1}{2}(AC + AB)$, а како је ПК $BM' = \frac{1}{2}(b + c)$, следи да је $\frac{1}{2}(AC + AB) = \frac{1}{2}(b + c)$, тј. да је $AC + AB = b + c$.

Дискусија: Ако је $\beta \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.



Нека је $\beta < \pi$. Ако β није оштар, онда се нормала n на правој BM' у тачки M' и полуправа BC (крак угла $\measuredangle M'BC = \measuredangle M'Bq = \beta$) не секу. Тада је испуњено $M, M' \div BC$. Ако је пак β оштар, онда се нормала n и полуправа BC секу у некој тачки X. Услов да важи $M, M' \div BC$ је $\frac{1}{2}BC < BX$. Из $\cos\beta = \frac{BM'}{BX}$ добијамо $BX = \frac{BM'}{\cos\beta}$, па услов да важи $M, M' \div BC$ гласи $\frac{1}{2}BC < \frac{BM'}{\cos\beta}$. Како је $\sin\beta = \frac{CC'}{BC} = \frac{h_c}{BC}$, следи да је $BC = \frac{h_c}{\sin\beta}$, па добијамо $\frac{h_c}{2\sin\beta} < \frac{b+c}{2\cos\beta}$, тј. $h_c < (b + c)\operatorname{tg}\beta$.

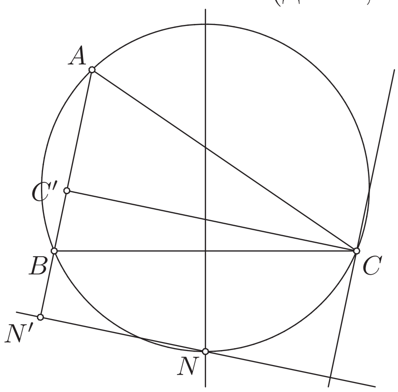


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити да се права BM' и круг l секу у тачкама A, B таквим да је $A, M' \doteq BC$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, M, M' \doteq BC$. Тада је $\measuredangle YBM$ угао између тетиве BM и тангенте t, па је подударан периферијском углу $\measuredangle BCM$ над тетивом BM. Троугао $\triangle BCM$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle MBC$ и $\measuredangle BCM$ подударни. Следи да је $\measuredangle YBM = \measuredangle BCM = \measuredangle MBC$. Услов да важи распоред $A, M' \doteq BC$ је да је угао $\measuredangle MBM'$ мањи од угла $\measuredangle MBY$, тј. од њему подударног угла $\measuredangle MBC$. Како је cos опадајућа функција на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos \measuredangle MBM' > \cos \measuredangle MBC$, тј. $\frac{BM'}{BM} > \frac{\frac{1}{2}BC}{BM}$, односно $BM' > \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b+c) > \frac{1}{2}\frac{h_c}{\sin\beta}$, тј. $h_c < (b+c)\sin\beta$. Овај услов је јачи од постојећег услова $h_c < (b+c)\operatorname{tg}\beta$ за оштре углове β, јер је $\sin\beta < \operatorname{tg}\beta$ за све $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, па је услов $h_c < (b+c)\operatorname{tg}\beta$ за оштре углове β сувишан. Такође, услов $h_c < (b+c)\sin\beta$ мора важити за све $\beta \in (0, \pi)$ да би постојало решење.

Дакле, ако је $\beta < \pi$ и $h_c \geq (b+c)\sin\beta$, нема решења, а ако је $\beta < \pi$ и $h_c < (b+c)\sin\beta$, постоји јединствено решење до на подударност.

б) $\beta, h_c, b - c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је C' подножје висине из темена C. Тада је $\measuredangle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC - AB = b - c$ (дакле, мора бити $AC > AB$).



Нека су N, N' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, N' \div BC$ (због $AB < AC$) и $NN' \perp AB$. Следи да је $\measuredangle N'BC = \pi - \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB, тј. правој BN', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак BC угла $\measuredangle N'BC$. Тачка N припада правој која је нормална на правој BN' у тачки N' и медијатриси дужи BC. Коначно, тачка A припада правој BN' и описаном кругу троугла $\triangle BCN$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка N припада на основу задатка 1.9.

Конструкција: Конструишимо дуж $BN' = \frac{1}{2}(b-c)$. Конструишимо угао $\measuredangle N'Bq = \pi - \beta$. Конструишимо праву p која је паралелна правој BN', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак Bq угла $\measuredangle N'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C. Конструишимо медијатрису m дужи BC. Конструишимо нормалу n на правој BN' у тачки N'. У пресеку правих m и n означимо са N тачку такву да важи $N, N' \ddot{-} BC$. Конструишимо описани круг l троугла $\triangle BNC$. У пресеку круга l и праве BN' означимо са A тачку такву да важи $\mathcal{B}(A, B, N')$.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC = \beta$, $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$, као и да је висина из темена C подударна дужи h_c.

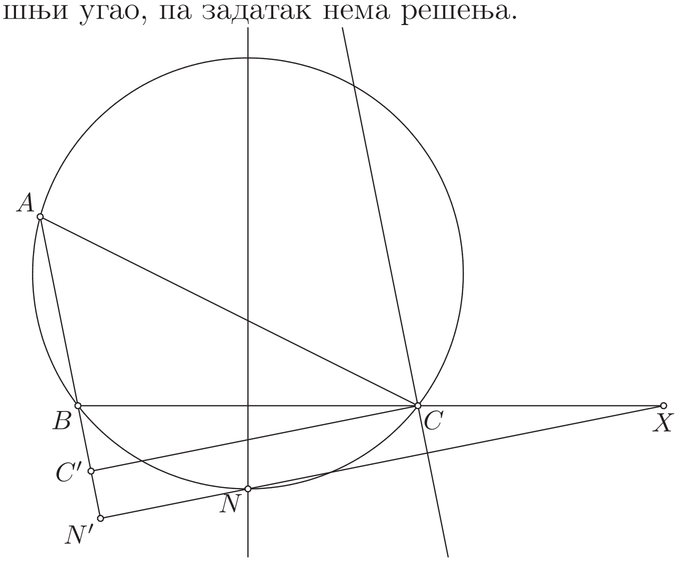
ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$ и $\measuredangle N'BC = \pi - \beta$, па је $\measuredangle ABC = \pi - \measuredangle N'BC = \pi - (\pi - \beta) = \beta$.

Тачка C припада правој која је паралелна правој BN', тј. правој AB и налази се на растојању h_c од ње. Ако је CC' висина из темена C, тј.

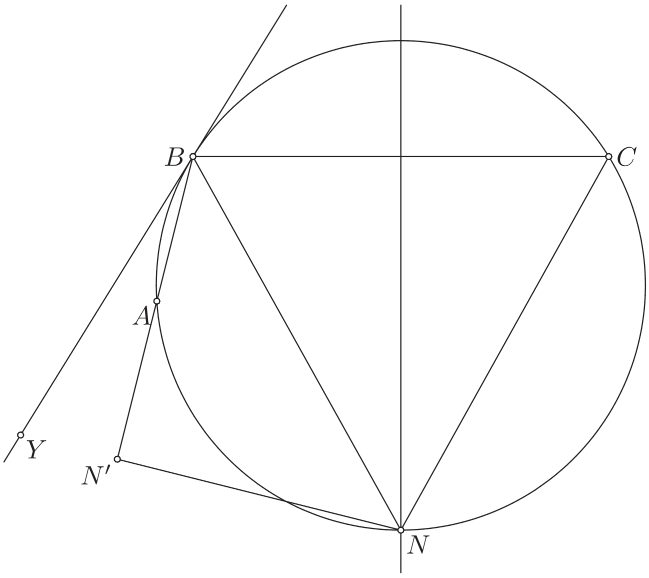
ако је C' тачка на правој AB и $CC' \perp AB$, следи да је $CC' = h_c$ (дуж која је нормална на паралелним правима подударна је растојању између њих).

Круг l садржи тачке A, B, C, па је то описани круг троугла $\triangle ABC$. Тачка N припада медијатриси m странице BC и описаном кругу l троугла $\triangle ABC$. ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$, па следи да важи $A, N' \div BC$, а како ПК важи $N, N' \mathbin{\ddot{-}} BC$, следи да важи $A, N \div BC$. Према томе, тачка N је тачка из Великог задатка. Тачка N припада нормали n на правој BN', односно правој AB, у тачки N', па следи да је N' подножје нормале из тачке N на правој AB. Дакле, N' је тачка из Великог задатка. Због $\mathcal{B}(A, B, N')$, следи да је $AN' > AB$, а на основу Великог задатка је $AN' = \frac{1}{2}(AC + AB)$ (ово важи без обзира на то да ли је $AB < AC$ или није), па следи да је $\frac{1}{2}(AC + AB) > AB$, односно $AC + AB > 2AB$, тј. $AC > AB$. Сада основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(AC - AB)$, а како је ПК $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$, следи да је $\frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2}(b - c)$, тј. да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\beta \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.



Нека је $\beta < \pi$. Ако β није туп, онда $\pi - \beta$ није оштар, па се нормала n на правој BN' у тачки N' и полуправа BC (крак угла $\measuredangle N'BC = \measuredangle N'Bq = \pi - \beta$) не секу. Тада је испуњено $N, N' \mathbin{\ddot{-}} BC$. Ако је пак β туп, тј. $\pi - \beta$ оштар, онда се нормала n и полуправа BC секу у некој тачки X. Услов да важи $N, N' \mathbin{\ddot{-}} BC$ је $\frac{1}{2}BC < BX$. Из $\cos(\pi - \beta) = \frac{BN'}{BX}$ добијамо $BX = \frac{BN'}{\cos(\pi-\beta)}$, па услов да важи $N, N' \mathbin{\ddot{-}} BC$ гласи $\frac{1}{2}BC < \frac{BN'}{\cos(\pi-\beta)}$. Како је $\sin(\pi - \beta) = \frac{CC'}{BC}$, следи да је $BC = \frac{CC'}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{h_c}{\sin(\pi-\beta)}$, па добијамо $\frac{h_c}{2\sin(\pi-\beta)} < \frac{b-c}{2\cos(\pi-\beta)}$, тј. $h_c < (b - c)\operatorname{tg}(\pi - \beta)$.

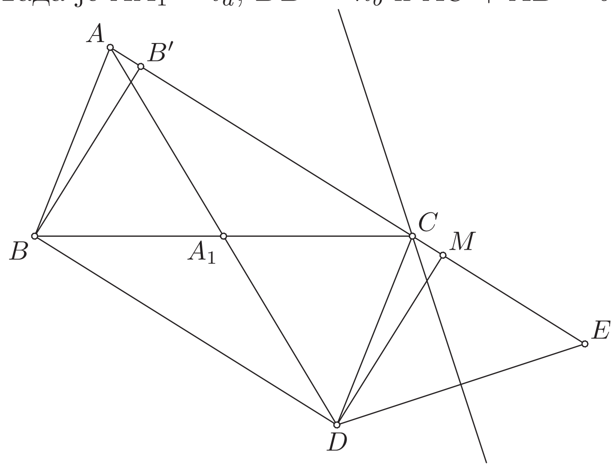


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, N, N' \doteq BC$. Тада је $\measuredangle YBN$ угао између тетиве BN и тангенте t, па је подударан периферијском углу $\measuredangle BCN$ над тетивом BN. Троугао $\triangle BCN$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle NBC$ и $\measuredangle BCN$ подударни. Следи да је $\measuredangle YBN = \measuredangle BCN = \measuredangle NBC$. Услов да важи распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$ је да је угао $\measuredangle N'BN$ већи од угла $\measuredangle YBN$, тј. од њему подударног угла $\measuredangle NBC$. Како је cos опадајућа функција на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos\measuredangle N'BN < \cos\measuredangle NBC$, тј. $\frac{BN'}{BN} < \frac{\frac{1}{2}BC}{BN}$, односно $BN' < \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b-c) < \frac{1}{2}\frac{h_c}{\sin\beta}$, тј. $(b-c)\sin\beta < h_c$ (важи $\sin(\pi-\beta) = \sin\beta$).

Према томе, ако је $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ и $(b-c)\sin\beta < h_c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Такође, ако је $\beta > \frac{\pi}{2}$ и $(b-c)\sin\beta < h_c < (b-c)\operatorname{tg}(\pi-\beta)$, задатак има јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

5) **а)** $t_a, h_b, b+c$

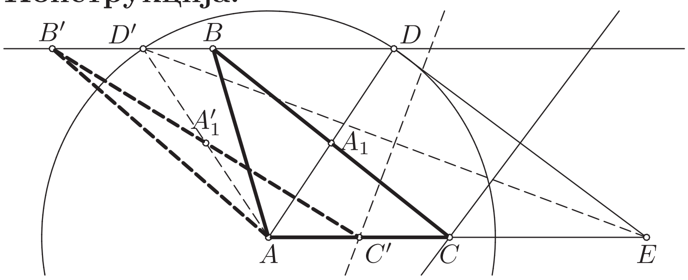
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темена B. Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1. Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1, па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $\mathcal{B}(A, C, E)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC + CE = AC + CD = AC + AB = b + c$, а како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због услова $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADE$ је $AD = 2t_a$ и $AE = b+c$, а висина DM је подударна дужи h_b. То значи да тачка D припада правој која је паралелна правој AE и налази се на растојању h_b од ње, као и да припада кругу с центром у A и полупречником $2t_a$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE. Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1, па је A_1 средиште дужи AD. Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC, па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1.

Конструкција:



Конструишимо дуж $AE = b + c$. Конструишимо праву p паралелну са AE на растојању h_b од ње. Конструишимо круг $k(A, 2t_a)$. У пресеку круга k и праве p означимо тачку D. Конструишимо симетралу дужи DE. У њеном пресеку с дужи AE означимо тачку C (дакле, $\mathcal{B}(A, C, E)$). Означимо с A_1 средиште дужи AD и са B тачку симетричну тачки C у односу на тачку A_1.

Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a, да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC + AB = b + c$.

ПК је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, па је AA_1 тежишна дуж из темена A. Такође, ПК је $AD = 2t_a$ и A_1 је средиште дужи AD, па следи да је $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1, па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је M подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. Како C припада правој AE, следи да су праве AC и AE исте, па из $AC \parallel BD$ следи да је $AE \parallel BD$. Права p садржи D и паралелна је са AE, па како и права BD садржи D и паралелна је са AE, следи да су праве p и BD исте, тј. да $B \in p$. Све тачке с праве p су на растојању h_b од праве AE, тј. од праве AC, па како је $BM \perp AC$, следи да је $BM = h_b$, што је и требало доказати.

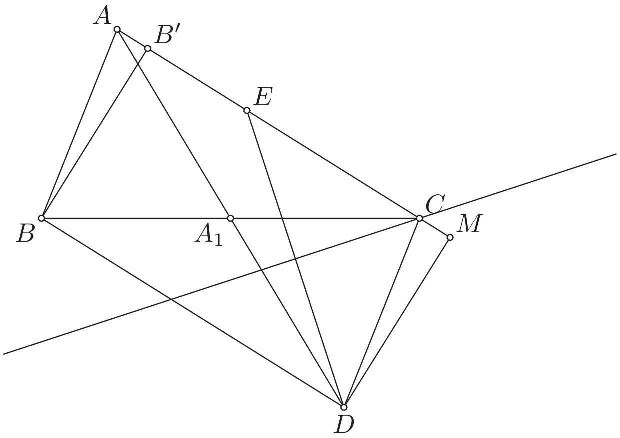
Коначно, C припада симетрали дужи DE, па је $CD = CE$, што заједно са $AB = CD$ даје $CE = AB$. По конструкцији је $\mathcal{B}(A, C, E)$, па је $AE = AC + CE = AC + AB$, а такође је по конструкцији $AE = b + c$, па следи да је $AC + AB = b + c$.

Дискусија: Да би круг $k(A, 2t_a)$ и права p имали заједничких тачака, мора бити $2t_a \geq h_b$. Заиста, права p је на растојању h_b од праве AE, што значи да за сваку тачку X са праве p важи $XA \geq h_b$. Ако је $2t_a = h_b$, онда имамо јединствену пресечну тачку D праве p и круга $k(A, 2t_a)$, а ако је $2t_a > h_b$, имамо две такве тачке D. Из Дискусије у делу **3)** овог задатка следи да симетрала странице DE троугла $\triangle ADE$ сече страницу AE у тачки C таквој да је $\mathcal{B}(A, C, E)$ ако и само ако је $AD < AE$, тј. ако и само ако је $2t_a < b + c$.

Дакле, ако је $h_b = 2t_a < b + c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Ако је $h_b < 2t_a < b + c$, задатак има два неподударна решења. У осталим случајевима задатак нема решења.

б) $t_a, h_b, b - c$

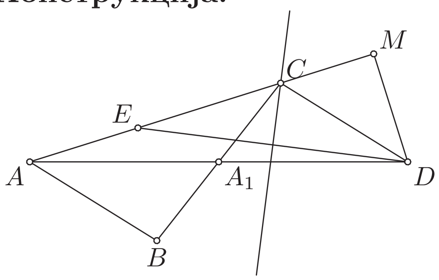
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темена B. Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC - AB = b - c$.



Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1. Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1, па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $\mathcal{B}(A, E, C)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC - CE = AC - CD = AC - AB = b - c$ и троугао $\triangle CDE$ је једнакокрак, па важи $\measuredangle CED = \measuredangle CDE$ и то су оштри углови. Следи да је $\measuredangle AED = \pi - \measuredangle CED$ туп угао, па важи распоред $\mathcal{B}(A, E, M)$. Дакле, тачка E је на страници AM таква да је $AE = b - c$. Како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADM$ је $AD = 2t_a$, $DM = h_b$ и $\measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$, па умемо да га конструишемо. Тачка E је таква да је $\mathcal{B}(A, E, M)$ и $AE = b - c$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE. Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1, па је A_1 средиште дужи AD. Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC, па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1.

Конструкција:



Конструишимо троугао $\triangle ADM$ такав је $AD = 2t_a$, $DM = h_b$ и $\measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$. На дужи AM означимо тачку E такву да је $AE = b - c$ (дакле, $\mathcal{B}(A, E, M)$). Конструишимо симетралу дужи ED и означимо са C њен пресек са правом AE тако да важи $\mathcal{B}(A, E, C)$. Означимо с A_1 средиште дужи AD и означимо са B тачку симетричну тачки C у односу на тачку A_1.

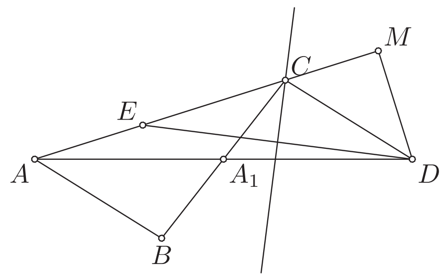
Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a, да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$.

ПК је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, па је AA_1 тежишна дуж из темена A. Такође, ПК је $AD = 2t_a$ и A_1 је средиште дужи AD, следи да је $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1, па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је B' подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. ПК је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AM$, а како су A, C, M колинеарне, следи да је $BB' \perp AM$, па важи $BB' \parallel DM$. Ово заједно са $AC \parallel BD$ и чињеницом да су праве $B'M$ и AC исте јер су тачке A, B', M, C колинеарне, следи да је $BD \parallel B'M$, па је четвороугао $BB'MD$ паралелограм (штавише правоугаоник, јер је $BB' \perp B'M$), што значи да је $BB' = DM$. ПК је $DM = h_b$, па је $BB' = h_b$.

Коначно, C припада симетрали дужи DE, па је $CD = CE$, што заједно са $AB = CD$ даје $CE = AB$. ПК је $\mathcal{B}(A, E, C)$, па је $AC > CE$, односно $AC > AB$. Такође, важи $AE = AC - CE = AC - AB$, а ПК је $AE = b - c$, па следи да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Да би троугао $\triangle ADM$ могао да се конструише, мора бити $AD > DM$ (јер је AD хипотенуза, а DM је катета правоуглог троугла $\triangle ADM$), тј. мора бити $2t_a > h_b$. Даље, да би било $\mathcal{B}(A, E, M)$, мора бити $AE < AM$. Из Питагорине теореме следи да је $AD^2 = AM^2 + DM^2$, па је $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{(2t_a)^2 - h_b^2} = \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$. Дакле, како је $AE = b - c$, добијамо услов $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$.

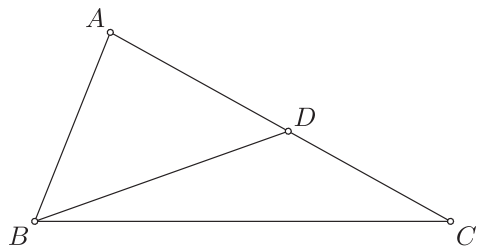


Остаје још да проверимо да ли је испуњено $\mathcal{B}(A, E, C)$. Угао $\measuredangle MED$ је оштар, јер је један од углова правоуглог троугла $\triangle MED$ који није прав ($\measuredangle EMD = \measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$ јер важи $\mathcal{B}(A, E, M)$). Следи да симетрала дужи ED сече крак EM оштрог угла $\measuredangle MED$ у тачки C таквој да важи $M, C \doteq E$, па како важи $A, M \div E$, следи да важи $A, C \div E$, тј. $\mathcal{B}(A, E, C)$.

Према томе, ако је $2t_a > h_b$ и $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

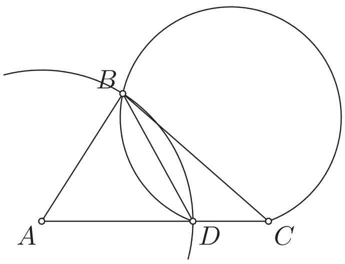
6) $\beta - \gamma, b, c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и важи $AC = b$, $AB = c$ и $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.



Како је наспрам већег угла већа страница, следи да је $AC > AB$, тј. да је $b > c$. Нека је D тачка таква да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = AB$. Тада је троугао $\triangle ABD$ једнакокрак, па је $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = \frac{\pi - \measuredangle BAC}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$. С друге стране, угао $\measuredangle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle CBD = \varphi$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA = \gamma$. Дакле, $\frac{\beta+\gamma}{2} = \varphi + \gamma$, па је $\varphi = \frac{\beta+\gamma}{2} - \gamma = \frac{\beta+\gamma-2\gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$ Дакле, $\measuredangle CBD = \frac{\beta-\gamma}{2}$, тј. дуж CD се из тачке B види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$.

Конструкција:



Конструишимо дуж $AC = b$. Означимо тачку D такву да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = c$. Конструишимо један од лукова ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$ и означимо га са l. Конструишимо круг $k(A, AD)$. Означимо са B ону пресечну тачку круга k и лука l која није тачка D.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и да је $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$, као и да је $AC = b$ и $AB = c$.

ПК је $AC = b$. Тачка B припада кругу $k(A, AD)$ и ПК је $AD = c$, па је $AB = AD = c$. ПК је $\mathcal{B}(A, D, C)$, па је $AC > AD$. Због $AD = AB$ следи да је $AC > AB$, па је и $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$. Тачка B припада луку l ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$, па следи да је $\measuredangle CBD = \frac{\beta-\gamma}{2}$. С друге стране, троугао $\triangle ABD$ је једнакокрак, па је $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = \frac{\pi - \measuredangle BAD}{2}$, а угао $\measuredangle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова, тј. $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD + \measuredangle BCD$. Због распореда $\mathcal{B}(A, D, C)$ је $\measuredangle BAD = \measuredangle BAC$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA$. Следи да је

$$\begin{aligned}
\measuredangle CBD &= \measuredangle ADB - \measuredangle BCD = \frac{\pi - \measuredangle BAD}{2} - \measuredangle BCD \\
&= \frac{\pi - \measuredangle BAC}{2} - \measuredangle BCA = \frac{\measuredangle ABC + \measuredangle ACB}{2} - \measuredangle BCA \\
&= \frac{\measuredangle ABC + \measuredangle ACB - 2\measuredangle BCA}{2} = \frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2}.
\end{aligned}$$

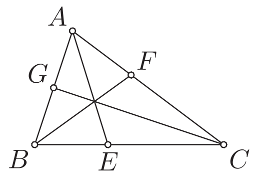
Дакле, важи $\frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$, па следи да је $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $b \leq c$ или $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.

Нека је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$. Све што треба проверити јесте да ли круг k и лук l осим тачке D имају још заједничких тачака. Круг k и лук l се секу само у тачки D ако и само ако центар O лука l припада дужи CD или важи $l, O \div CD$, што важи ако и само ако је угао под којим се са лука l види дуж CD прав или туп, односно ако и само ако је $\frac{\beta-\gamma}{2} \geq \frac{\pi}{2}$, тј. $\beta - \gamma \geq \pi$, што није тачно.

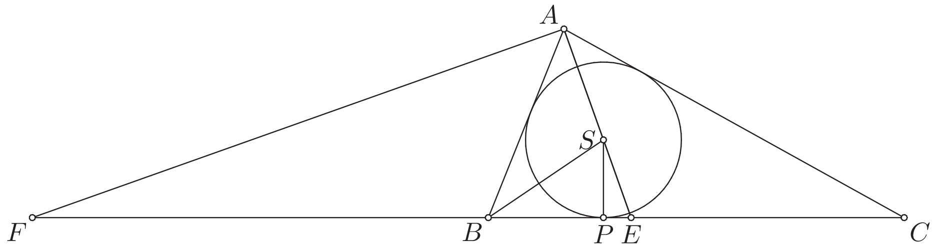
Дакле, ако је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$, онда задатак има јединствено решење до на подударност, а у осталим случајевима нема решења.

Дефиниција 22. Нека је $\triangle ABC$ троугао и нека су E, F, G редом пресечне тачке бисектриса унутрашњих углова код темена A, B, C и наспрамних страница BC, CA, AB. Дужи AE, BF, CG зову се *одсечци бисектриса унутрашњих углова* и означавају се редом са l_a, l_b, l_c.



7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$. Нека је S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$, нека је E пресечна тачка симетрале угла $\measuredangle BAC$ и странице BC и нека је P подножје нормале из тачке S на страници BC. Следи да је $AE = l_a$ и $SP = \rho$.

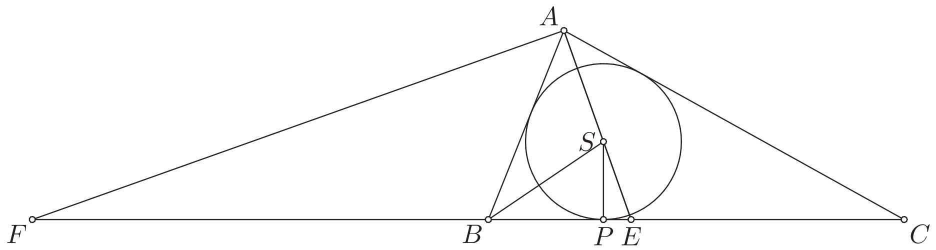


Из $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ следи да је $AC > AB$, па постоји пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A и праве BC. Означимо је са F. Тада важи распоред тачака $\mathcal{B}(F, B, E, C)$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle AFB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle AFB$ и $\measuredangle FAB$, а угао $\measuredangle FAE$ је прав, јер је то угао између симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$. Следи да је $\measuredangle FAB = \measuredangle FAE - \measuredangle BAE = \frac{\pi}{2} - \frac{\measuredangle BAC}{2}$, па је $\measuredangle ABC = \measuredangle AFB + \measuredangle FAB = \measuredangle AFB + \frac{\pi}{2} - \frac{\measuredangle BAC}{2}$. Дакле, $\measuredangle AFB = \measuredangle ABC - \frac{\pi}{2} + \frac{\measuredangle BAC}{2} = \frac{2\measuredangle ABC - \measuredangle BAC - \measuredangle ABC - \measuredangle ACB + \measuredangle BAC}{2} = \frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle AFE$ је $AE = l_a$, $\measuredangle AFE = \measuredangle AFB = \frac{\beta-\gamma}{2}$ и $\measuredangle FAE = \frac{\pi}{2}$, па тај троугао умемо да конструишемо. Како је P подножје нормале из тачке S на страници BC, тј. на правој FE и важи $SP = \rho$, следи да тачка S припада правој p која је паралелна са FE и налази се на растојању ρ од ње. При томе важи $A, S \ddot{-} BC$, тј. $A, S \ddot{-} FE$, па важи и $A, p \ddot{-} FE$. Уписани круг $k(S, \rho)$ додирује странице AB и AC, па су праве AB и AC тангенте из тачке A на уписаном кругу k троугла $\triangle ABC$. Тачке B, C су у пресеку тих тангенти и праве FE тако да важи распоред тачака $\mathcal{B}(F, B, E, C)$.

Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle AFE$ такав да је $AE = l_a$, $\measuredangle AFE = \frac{\beta-\gamma}{2}$ и $\measuredangle FAE = \frac{\pi}{2}$. Конструишимо праву p паралелну са FE која се налази на растојању ρ од ње и за коју важи $A, p \div FE$. У пресеку праве p и дужи AE означимо тачку S (дакле, важи $\mathcal{B}(A, S, E)$). Конструишимо круг $k(S, \rho)$ и конструишимо тангенте из тачке A на кругу k. У пресеку тих тангенти и праве FE означимо тачке B, C тако да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и да је $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$, затим да је одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A подударан дужи l_a и да је полупречник уписаног круга подударан дужи ρ.



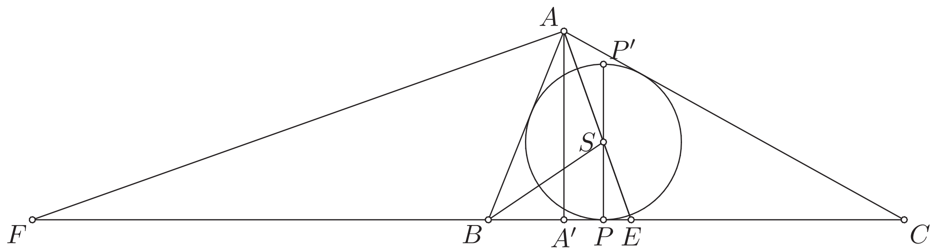
Тачка S је ПК на растојању ρ од праве FE, тј. од праве BC, па како је ПК k круг с центром у S и полупречником ρ, следи да је BC тангента круга k. ПК тачке B, C припадају тангентама круга k из тачке A, па су праве AB, AC тангенте круга k. ПК важи распоред $\mathcal{B}(B, E, C)$, па полуправа AE припада углу $\measuredangle BAC$. При томе, за тачку S са ње важи да је растојање од крака AB тог угла подударно дужи ρ, као и растојање од крака AC тог угла (јер круг $k(S, \rho)$ додирује праве AB и AC), па је полуправа AE бисектриса угла $\measuredangle BAC$. Према томе, круг k је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је споља уписани круг који додирује страницу BC (у Великом задатку означен са $k_a(S_a, \rho_a)$). Како важи $\mathcal{B}(A, S, E)$, закључујемо да је k уписани круг троугла $\triangle ABC$, па је његов полупречник ρ, што је и требало доказати,

Такође, како је полуправа AE бисектриса унутрашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$, следи да је E тачка у пресеку те бисектрисе и странице BC, па је AE одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A, а ПК је та дуж подударна дужи l_a.

Како је $\measuredangle FAE = \frac{\pi}{2}$, следи да је AF бисектриса спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ (јер је нормална на бисектриси AE унутрашњег угла код темена A). Угао $\measuredangle AEF$ је оштар (јер је угао правоуглог троугла $\triangle AFE$ који није прав угао) и он је спољашњи угао троугла $\triangle AEC$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\measuredangle EAC = \frac{\measuredangle BAC}{2}$ и $\measuredangle ACE = \measuredangle ACB$. Дакле, $\frac{\measuredangle BAC}{2} + \measuredangle ACB < \frac{\pi}{2}$, па следи да је и $\measuredangle BAC + 2\measuredangle ACB < \pi = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB$, тј. $\measuredangle ACB < \measuredangle ABC$.

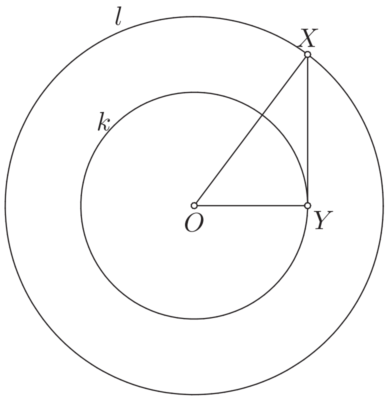
У делу Анализа је доказано да је тада $\measuredangle AFB = \frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2}$, а како ПК важи $\mathcal{B}(F, B, E)$ и $\measuredangle AFE = \frac{\beta-\gamma}{2}$, следи да је $\measuredangle AFB = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Према томе, $\frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$, тј. $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.



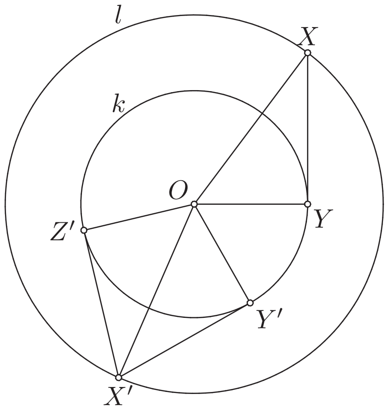
Нека је $\beta - \gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta-\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$, па постоји троугао $\triangle AFE$ и јединствен је до на подударност. Нека је A' подножје висине из темена A у троуглу $\triangle AFE$. Тада углови $\measuredangle A'AE$ и $\measuredangle AFE = \frac{\beta-\gamma}{2}$ имају нормалне краке, па је $\measuredangle A'AE = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Да би важило $\mathcal{B}(A, S, E)$, да би се тачка A налазила у спољашњости круга $k(S, \rho)$ и да би тангенте круга k из тачке A секле праву FE у тачкама B, C таквим да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$, потребно је и довољно да висина AA' буде већа од пречника круга k, тј. да важи $AA' > 2\rho$. Из правоуглог троугла $\triangle AA'E$ имамо $\cos\measuredangle A'AE = \frac{AA'}{AE} = \frac{AA'}{l_a}$, тј. да је $AA' = l_a \cos\measuredangle A'AE = l_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$. Према томе, услов је $l_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} > 2\rho$. Према томе, ако је $\beta - \gamma < \pi$ и $l_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} > 2\rho$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима, задатак нема решења.

Конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дати круг види под датим углом



Нека је $k(O,r)$ дати круг и φ дати угао. Нека је $Y \in k$ произвољна и нека је X таква да троугао $\triangle OXY$ задовољава $\measuredangle OYX = \frac{\pi}{2}$ и $\measuredangle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Конструишимо затим круг $l(O, OX)$ и то је тражено ГМТ.

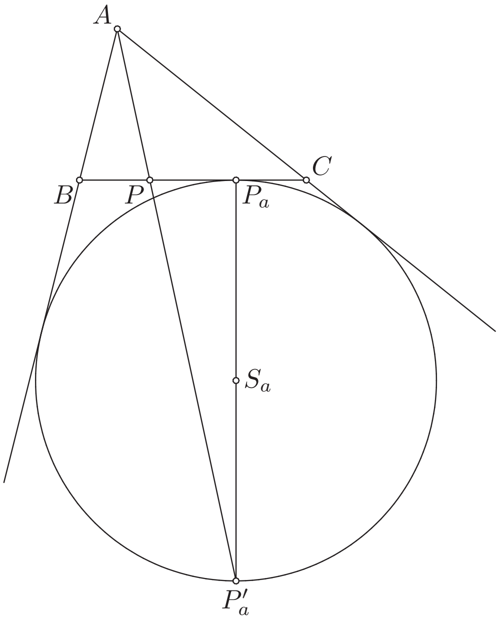
Покажимо да за сваку тачку X' са круга l важи да припада траженом ГМТ. Нека су Y', Z' додирне тачке тангенти круга k из тачке X'. Потребно је доказати да је $\measuredangle Y'X'Z' = \varphi$. Троуглови $\triangle X'OY'$ и $\triangle XOY$ задовољавају да је $X'O = XO$, $OY' = OY$ и $\measuredangle X'Y'O = \frac{\pi}{2} = \measuredangle XYO$, а углови $\measuredangle OX'Y'$ и $\measuredangle OXY$ су оба оштра (правоугли троуглови имају по један прав и два оштра угла). На основу става ССУ следи да је $\triangle X'OY' \cong \triangle XOY$, па је $\measuredangle OX'Y' = \measuredangle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Слично је и $\triangle X'OZ' \cong \triangle XOY$, па је $\measuredangle OX'Z' = \measuredangle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Следи да је $\measuredangle Y'X'Z' = \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi$.



Напомена 9. Ова конструкција је помоћна конструкција и уколико се користи у неком другом задатку, потребно је исписати њене кораке у етапи Конструкција (могу се навести одвојено од осталих корака, с назнаком да се ради о помоћној конструкцији). Није потребно доказивати да се из сваке тачке конструисаног круга дати круг види под датим углом.

8) $\alpha, b-c, \rho_a$

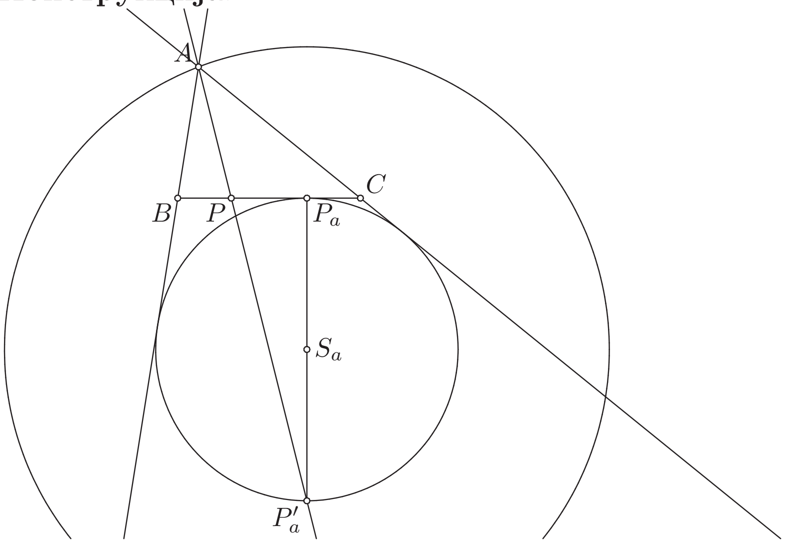
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $AC - AB = b - c$ и полупречник спођа уписаног круга наспрам темена A је подударан дужи ρ_a.



Нека су P, S_a, P_a, P'_a тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка следи да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, као и $PP_a = b - c$.

У троуглу $\triangle PP_aP'_a$ је $PP_a = b - c$, $\measuredangle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$, па тај троугао умемо да конструишемо. Тачка S_a је средиште странице $P_aP'_a$ и можемо конструисати круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Тачка A припада правој PP'_a тако да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и из тачке A се круг k_a види под углом α. Тачке B, C су пресечне тачке тангенти круга k_a из тачке A и праве PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Конструкција:

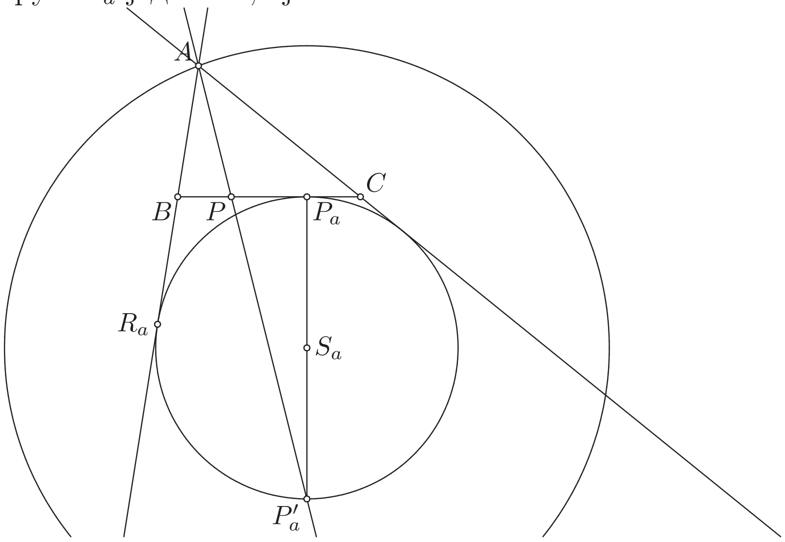


Конструишимо троугао $\triangle PP_aP'_a$ такав да је $PP_a = b-c$, $\measuredangle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$. Означимо са S_a средиште странице $P_aP'_a$ и конструишимо круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Конструишимо ГМТ l из којих се круг k_a види под углом α. Означимо са A пресечну тачку ГМТ l и праве PP'_a такву да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$. Конструишимо тангенте круга k_a из тачке A и означимо са B, C њихове пресеке са правом PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle BAC = \alpha$, $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$, као и да је полупречник спољашњег уписаног круга наспрам темена A подударан дужи ρ_a.

Тачке B, C припадају тангентама круга k_a из тачке A, па су праве AB, AC тангенте круга k_a. ПК је S_a средиште $P_aP'_a$ и $\measuredangle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$, па следи да је $PP_a \perp P_aS_a$. ПК је $P_aP'_a = 2\rho_a$, па следи да је $S_aP_a = \frac{1}{2}P_aP'_a = \frac{1}{2}2\rho_a = \rho_a$, тј. S_aP_a је полупречник круга $k_a(S_a, \rho_a)$. Дакле, права PP_a је нормална на полупречнику круга k_a, па је она тангента тог круга. Штавише, како је $S_aP_a = \rho_a$, следи да је тачка P_a додирна тачка круга k_a и праве PP_a. Како ПК тачке B, C припадају правој PP_a и важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, следи да је права BC исто што и права PP_a и да тачка P_a припада дужи BC, па круг k_a додирује страницу BC троугла $\triangle ABC$. Дакле, круг k_a је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је спољашњи уписани круг наспрам темена A. Како ПК важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и $P \in BC$, следи да важи $A, P'_a \div BC$. Такође, S_a је средиште $P_aP'_a$ и $P_a \in BC$, па следи да важи $P'_a, S_a \doteq BC$. Према томе, важи $A, S_a \div BC$, па је k_a спољашњи уписани круг који додирује страницу BC. Овим смо доказали и да је полупречник спољашњег уписаног круга наспрам темена A троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ_a.

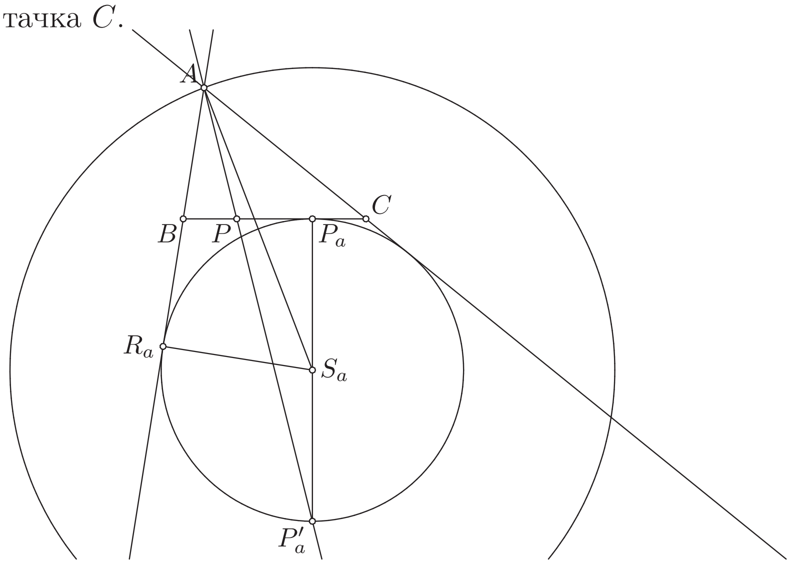
ПК је l ГМТ из којих се круг $k_a(S_a, \rho_a)$ види под углом α. Како тачка A припада ГМТ l, следи да је угао $\measuredangle BAC$ који граде тангенте AB, AC круга k_a једнак α, тј. $\measuredangle BAC = \alpha$.



Тачке S_a, P_a су редом центар спољa уписаног круга наспрам темена A и додирна тачка тог круга и странице BC. Тачка S_a је средиште дужи $P_aP'_a$, па је тачка P'_a дијаметрално супротна тачки P_a. На основу Великог задатка, став **1)**, следи да су теме A, додирна тачка уписаног круга и странице BC и тачка P'_a колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве AP'_a и странице BC тачка P, следи да је тачка P додирна тачка уписаног круга и странице BC. Нека је R_a додирна тачка спољa уписаног круга k_a и праве AB. На основу Великог задатка је дуж AR_a подударна полуобиму троугла $\triangle ABC$, $BP_a = BR_a = AR_a - AB$ и $BP = AR_a - AC$. Како важи распоред $\mathcal{B}(B, P, P_a)$ следи да је $BP_a > BP$, па је $AR_a - AB > AR_a - AC$, тј. $AC > AB$. На основу Великог задатка је $PP_a = AC - AB$, а како је ПК $PP_a = b - c$, следи да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

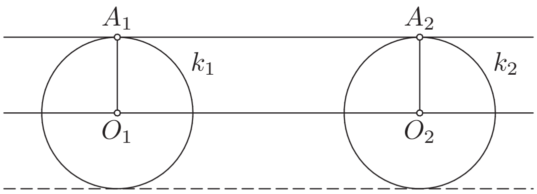
Нека је $\alpha < \pi$. Постоји троугао $\triangle PP_aP'_a$ и јединствен је до на подударност, па постоји и јединствено средиште S_a странице $P_aP'_a$. Полупречник S_aA круга l (ГМТ из којих се круг k_a види под углом α) је већи од ρ_a, па је тачка P'_a у унутрашњости круга l. Следи да права PP'_a сече круг l у двема тачкама, при чему је једна с исте стране тачке P'_a као тачка P, а друга је са супротне стране. Тачка A је она за коју важи $A, P \doteqdot P'_a$, а да би важило $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ (пошто може важити и $\mathcal{B}(P, A, P'_a)$), мора важити $S_aA > S_aP$, тј. и тачка P мора бити унутар круга l. Из Питагорине теореме је $S_aP^2 = S_aP_a^2 + P_aP^2 = \rho_a^2 + (b-c)^2$, па је $S_aP = \sqrt{\rho_a^2 + (b-c)^2}$. У правоуглом троуглу $\triangle AS_aR_a$ је S_aA хипотенуза, а катета S_aR_a наспрам угла $\measuredangle S_aAR_a = \frac{\alpha}{2}$ је подударна са полупречником ρ_a круга k_a, па је $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_a}{S_aA}$, тј. $S_aA = \frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Дакле, имамо услов $\frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b-c)^2}$. Тачка A је у спољашњости круга k_a, услов $\mathcal{B}(A, P, P_a')$ обезбеђује да тангенте круга k_a из тачке A секу праву PP_a тако да се тачке P, P_a налазе између тих пресечних тачака. Према томе, $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ служи томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка B, а која је тачка C.



Према томе, ако је $\alpha < \pi$ и $\frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b-c)^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима задатак нема решења.

Конструкција заједничких спољашњих тангенти два круга

Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дати кругови.



Ако је $r_1 = r_2$, конструишимо праву t која је паралелна са правом O_1O_2 и налази се на растојању $r_1 (= r_2)$ од ње.