(овде користимо дистрибутивност „множења” у односу на сабирање вектора)

$$\begin{aligned}\iff\quad & \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} \quad = \\ = \quad & -\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

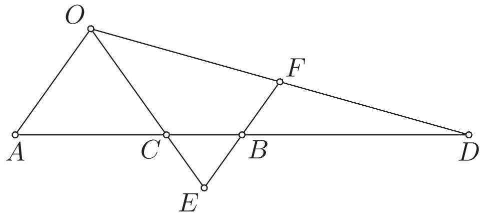
Сада искористимо да је $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$ и да за свако X, Y важи $-\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{YX}$.

$$\begin{aligned}\iff\quad & -\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB} \quad = \\ = \quad & \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iff\quad & 2OB^2=2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\\ \iff\quad & OB^2=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}\\ \iff\quad & AO^2=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}.\end{aligned}$$

12. Ако су A, B, C, D разне тачке праве p, O тачка ван те праве, E и F тачке у којима права која садржи тачку B и паралелна је OA сече OC и OD, доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff B$ је средиште EF.

Решење:



На основу Талесове теореме следи да је $AC : CB = AO : EB$, као и $AD : DB = AO : BF$, па је

$$AC : CB = AD : DB \iff AO : EB = AO : BF \iff EB = BF.$$

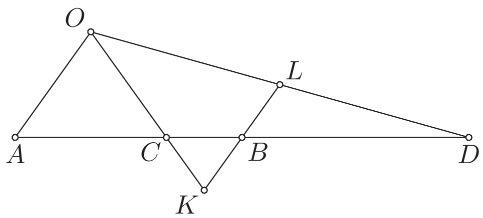
По претпоставци су A, B, C, D разне тачке праве p, па је $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD} = l\overrightarrow{AB}$, за неке $k, l \notin \{0, 1\}$, при чему је $k \neq l$. Дакле, $\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) = k\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{CB}$, па је $(1-k)\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$, односно $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{k}{1-k}$. Слично је $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{l}{1-l}$. Како је $k \neq l$, онда је $k - kl \neq l - kl$, односно $k(1-l) \neq l(1-k)$, па је $\frac{k}{1-k} \neq \frac{l}{1-l}$. Одавде следи да је $AC : CB = AD : DB$ могуће само у случају да је $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$. Дакле,

$$\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AC : CB = AD : DB \iff EB = BF.$$

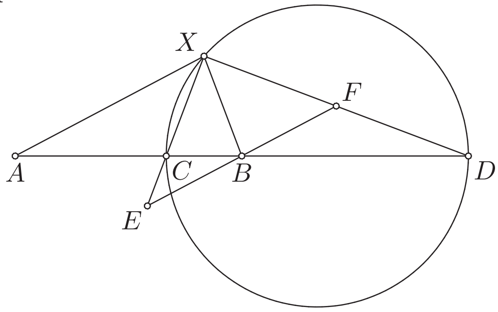
Да би ово било еквивалентно са тиме да је B средиште дужи EF, треба само проверити да ли су тачке E, F различите. Ако би било $E = F$, онда би праве OC и OD биле исте, а како се тачка O налази ван праве p која садржи C, D следило би да је $C = D$, што је у супротности с условом задатка. Дакле, $E \neq F$, па је заиста $EB = BF \iff B$ је средиште EF. Према томе, доказали смо да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff B$ је средиште EF.

13. (**Аполонијев круг**) Одредити скуп свих тачака у равни којима су растојања од двеју датих тачака сразмерна датим неподударним дужима.

Решење:

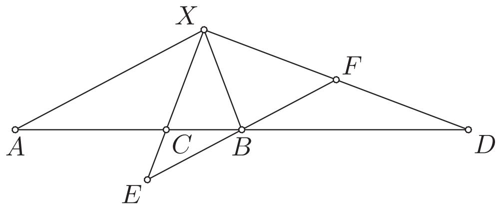


Нека су m, n две дате неподударне дужи и нека су A, B две дате тачке. Нека је O произвољна тачка ван праве AB таква да је $OA = m$, нека је p права паралелна правој OA која садржи тачку B, нека су K, L тачке праве p с разних страна тачке B такве да је $BK = BL = n$ и нека су C, D пресечне тачке правих OK, OL с правом AB. На основу Талесове теореме следи да је $AC : CB = AO : BK = m : n = AO : BL = AD : DB$, па тачке C, D припадају траженом геометријском месту l тачака X таквих да је $AX : XB = m : n$. Докажимо да је тражено ГМТ l круг k над пречником CD.



$\boxed{\supseteq}$: Нека је $X \in k$ произвољна тачка круга k. Докажимо да је $AX : XB = m : n$. Ако се тачка X поклапа с неком од тачака C, D, доказ је завршен. Нека се тачка X разликује од тачака C, D. Посматрајмо праву паралелну правој AX кроз тачку B и означимо њен пресек са правима XC, XD редом са E, F. На основу Талесове теореме је $AX : BE = AC : CB = m : n$, као и $AX : BF = AD : DB = m : n$, па следи да је $BE = BF$, тј. да је B средиште дужи EF. Троугао $\triangle EXF$ је правоугли, јер је

$\measuredangle EXF = \measuredangle CXD = \frac{\pi}{2}$ као периферијски угао над пречником CD. Како је B средиште хипотенузе EF, што је уједно и центар описаног круга тог троугла, значи да је $BE = BF = BX$, а како је $AX : BE = m : n$, следи да је $AX : XB = m : n$.



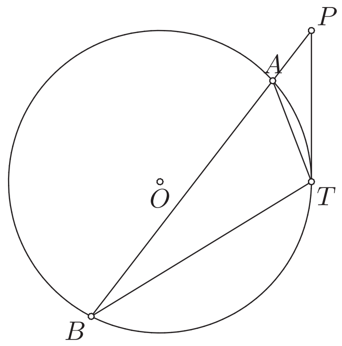
$\boxed{\subseteq}$: Нека је $X \in l$ произвољна тачка, тј. нека је X таква да је $AX : XB = m : n$ и докажимо да $X \in k$. Ако се тачка X поклапа с неком од тачака C, D (што је могуће, јер је $AC : CB = AD : DB = m : n$), доказ је завршен. Нека се тачка X разликује од тачака C, D. Посматрајмо поново праву паралелну правој AX кроз тачку B и означимо њен пресек са правима XC, XD редом са E, F. На основу Талесове теореме је $AX : BE = AC : CB = m : n$ и $AX : BF = AD : DB = m : n$, па због $AX : XB = m : n$ следи да је $BE = BF = BX$, тј. да је B центар описаног круга троугла $\triangle EXF$. Према томе, тај троугао је правоугли, тј. $\measuredangle EXF = \frac{\pi}{2}$. Пошто је $\measuredangle CXD = \measuredangle EXF$, следи да је то периферијски угао над пречником CD, тј. да X припада кругу над пречником CD, односно да $X \in k$.

Дефиниција 18. Круг k из претходног задатка зове се *Аполонијев круг*.

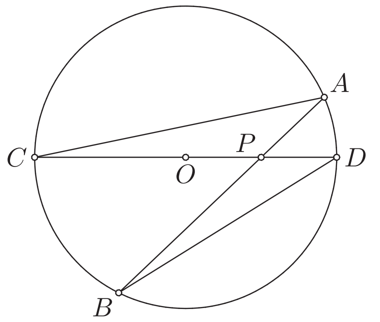
Став 3. *Нека је $k(O, r)$ круг равни α, P тачка те равни и A, B пресечне тачке круга k и произвољне праве која садржи тачку P и има заједничких тачака с кругом k (може бити и тангента, тада је $A = B$). Вредност израза $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ не зависи од избора те праве.*

Доказ: Разликујемо случајеве када је тачка P на кругу, у спољашњости круга или у његовој унутрашњости.

Ако је тачка P на кругу k, онда се увек једна од тачака A, B поклапа с тачком P, па је $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 = PO^2 - r^2$ (јер је $OP = r$).



Нека је тачка P у спољашњости круга k и нека је PT тангента тог круга. Троуглови $\triangle PTA$ и $\triangle PBT$ су слични, јер је $\measuredangle TPA = \measuredangle BPT$ и $\measuredangle PTA = \measuredangle PBT$ (угао између тангенте и тетиве подударан је периферијском углу над том тетивом). Следи да је $PT : PB = PA : PT$, тј. $PA \cdot PB = PT^2$. Како је $\triangle PTO$ правоугли, на основу Питагорине теореме је $PT^2 = PO^2 - OT^2 = PO^2 - r^2$. Такође, како је P у спољашњости круга k, следи да не важи $\mathcal{B}(A, P, B)$, па на основу дефиниције 17 важи $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB = PO^2 - r^2$.



Нека је тачка P у унутрашњости круга k и нека се разликује од центра O. Посматрајмо праву PO и означимо њене пресеке с кругом k са C, D тако да важи $\mathcal{B}(C, O, P, D)$. Троуглови $\triangle PAC$ и $\triangle PDB$ су слични, јер је $\measuredangle PAC = \measuredangle BAC = \measuredangle BDC = \measuredangle BDP$ и $\measuredangle PCA = \measuredangle DCA = \measuredangle DBA = \measuredangle DBP$ (периферијски углови над истим луковима су подударни). Следи да је $PA : PD = PC : PB$, тј. $PA \cdot PB = PC \cdot PD = (PO + OC) \cdot (OD - PO) = (r + PO) \cdot (r - PO) = r^2 - PO^2$. Како је P тачка у унутрашњости круга k, следи да важи $\mathcal{B}(A, P, B)$, па на основу дефиниције 17 важи $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -PA \cdot PB = -(r^2 - PO^2) = PO^2 - r^2$.

Ако је $P = O$, онда је $PA = PB = r$ и важи $\mathcal{B}(A, P, B)$. Према томе, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -PA \cdot PB = -r^2 = PO^2 - r^2$ (јер је $PO = 0$).

Према томе, у свим случајевима је $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$, што значи да вредност тог израза не зависи од избора праве која садржи тачку P. $\square$

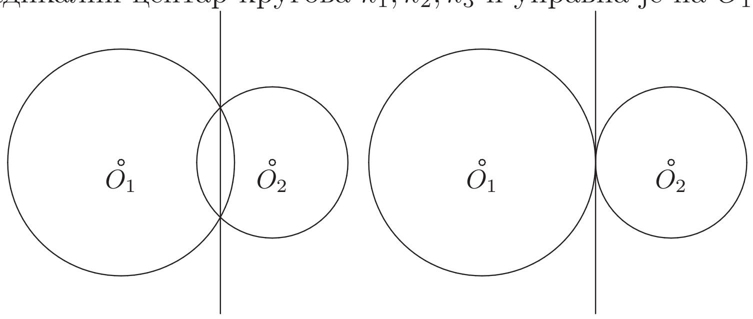
Дефиниција 19. Вредност израза $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} (= PO^2 - r^2)$ назива се *потенцијом* тачке P у односу на круг $k(O, r)$ и обележава се са $p(P, k)$.

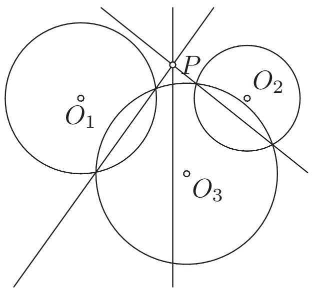
Из дефиниције је јасно да је потенција тачке P већа од нуле ако P припада спољашњости круга k, једнака нули ако припада кругу k, а мања од нуле ако припада унутрашњости круга k. Такође, најмању потенцију има тачка O и она је једнака $-r^2$.

Став 4. *Скуп свих тачака равни које имају једнаке потенције у односу на кругове $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$ је права управна на правој O_1O_2.*

Дефиниција 20. Права из претходног става назива се *потенцијалном* или *радикалном осом* кругова k_1 и k_2.

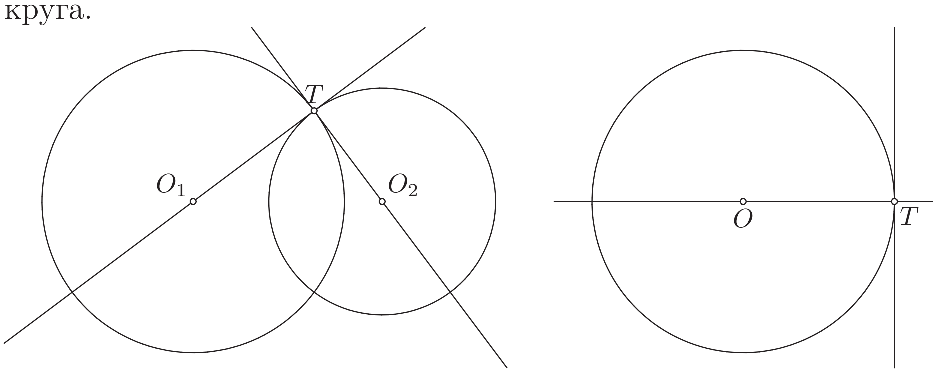
Ако имамо три круга у равни, њихове радикалне осе припадају једном прамену, а ако је у питању прамен конкурентних правих, пресечна тачка се назива *радикалним центром* тих кругова. Како конструисати радикалну осу кругова $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$? Ако се они секу у тачкама A, B, потенција тих тачака у односу на оба круга је нула, па оне припадају њиховој радикалној оси. Следи да је радикална оса управо права AB. Ако се k_1, k_2 додирују у тачки A, њена потенција у односу на оба круга је нула, па је радикална оса кругова k_1, k_2 права која садржи тачку A и управна је на O_1O_2, што је заједничка тангента кругова k_1, k_2 у њиховој додирној тачки A. Ако кругови k_1, k_2 немају заједничких тачака, онда конструишемо круг $k_3(O_3, r_3)$ такав да његов центар O_3 не припада правој O_1O_2 и да сече кругове k_1, k_2. Затим конструишемо радикалне осе кругова k_1, k_3 и кругова k_2, k_3. У њиховом пресеку налази се тачка која има једнаке потенције у односу на сва три круга, односно радикални центар кругова k_1, k_2, k_3. Радикална оса кругова k_1, k_2 је права која садржи радикални центар кругова k_1, k_2, k_3 и управна је на O_1O_2.





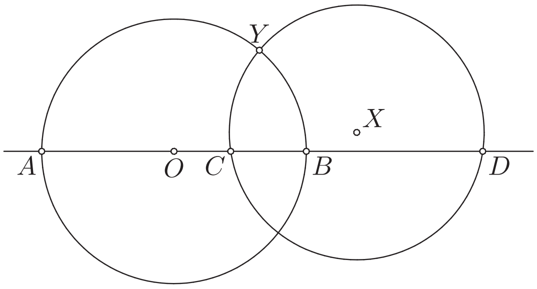
Дефиниција 21. Нека су у равни дати кругови k_1, k_2 који се секу и нека су t_1, t_2 редом тангенте тих кругова у некој од пресечних тачака. *Угао* између кругова k_1, k_2 је угао који граде тангенте t_1, t_2. Ако је $t_1 \perp t_2$, за кругове k_1, k_2 кажемо да су међусобно *нормални* (*управни, ортогонални*) и то означавамо са $k_1 \perp k_2$. Слично, ако су у равни дати права и круг који се секу, *угао* између праве и круга је угао између те праве и тангенте круга у некој од пресечних тачака, а ако су оне међусобно нормалне, онда су и тај круг и та права међусобно *нормални*.

Размотримо кад су кругови, односно круг и права, међусобно нормални. Знамо да је тангента неког круга нормална на полупречнику који садржи додирну тачку. Пошто је код нормалних кругова k_1, k_2 тангента t_1 круга k_1 у пресечној тачки T нормална на тангенти t_2 круга k_2 у тачки T и на полупречнику O_1T круга k_1, следи да је тангента t_2 заправо права O_1T, односно да тангента t_2 садржи центар O_1 круга k_1. Дакле, кругови k_1, k_2 су међусобно нормални ако и само ако се секу и тангента једног од кругова у некој од пресечних тачака садржи центар другог круга. Слично, права и круг су нормални ако и само ако права садржи центар круга.



14. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D. Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Longleftrightarrow k \perp l$.

Решење:



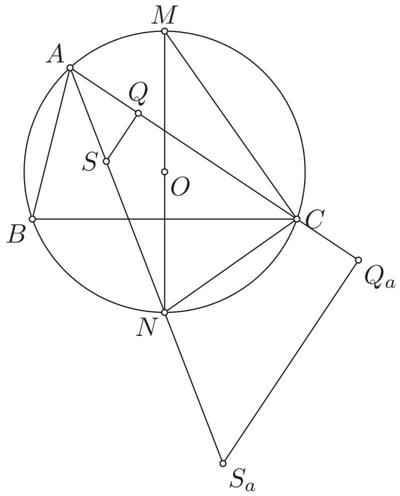
Означимо са O центар круга k. Тачка O је и средиште дужи AB јер је AB пречник круга k.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. На основу 11. задатка следи $AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = p(O, l)$. Нека је Y додирна тачка неке тангенте круга l из тачке O. Тада је $p(O, l) = OY^2$, па је $AO = OY$, тј. $Y \in k$. Према томе, кругови k и l се секу у тачки Y. Како је OY тангента круга l у тачки Y и садржи центар O круга k, следи да је $k \perp l$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $k \perp l$ и нека је Y једна од пресечних тачака тих кругова. Тада је $OY = AO$. Тангента круга l у тачки Y садржи центар O круга k, тј. OY је тангента круга l, па је $p(O, l) = OY^2$. Дакле, $AO^2 = OY^2 = p(O, l) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$, па на основу 11. задатка следи да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

15. Ако је $l(O, r)$ описани круг, $k(S, \rho)$ уписани круг и $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг који додирује страницу BC датог троугла ABC, доказати да је $OS^2 = r^2 - 2r\rho$ и $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$.

Решење:



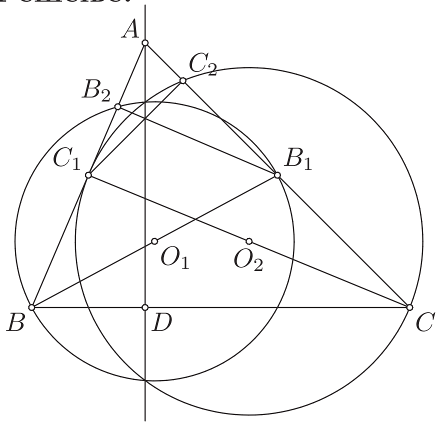
Потенције тачака S, S_a у односу на описани круг l су једнаке редом $p(S, l) = SO^2 - r^2$ и $p(S_a, l) = S_aO^2 - r^2$. Такође, ове потенције су једнаке $p(S, l) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SN} = -SA \cdot SN$ и $p(S_a, l) = \overrightarrow{S_aA} \cdot \overrightarrow{S_aN} = S_aA \cdot S_aN$. Остаје још да се израчунају $SA \cdot SN$ и $S_aA \cdot S_aN$.

Уочимо подножја нормала из тачака S, S_a на правој AC, означимо их редом са Q, Q_a и уочимо тачку M из Великог задатка. Имамо да је $\measuredangle SAQ = \measuredangle S_aAQ_a = \measuredangle NAC = \measuredangle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\measuredangle SQA$, $\measuredangle S_aQ_aA$ и $\measuredangle NCM$ прави ($\measuredangle NCM$ је периферијски над пречником NM), па је $\measuredangle SQA = \measuredangle S_aQ_aA = \measuredangle NCM$. Следи да је $\triangle ASQ \sim \triangle AS_aQ_a \sim \triangle MNC$, па је $SA : NM = SQ : NC$ и $S_aA : NM = S_aQ_a : NC$. Множењем обеју једнакости са NM и NC добијамо да је $SA \cdot NC = NM \cdot SQ$ и $S_aA \cdot NC = NM \cdot S_aQ_a$. Како је $NM = 2r$, $SQ = \rho$, $S_aQ_a = \rho_a$ и $NC = SN = S_aN$ (Велики задатак, став **6)**), следи да је $SA \cdot SN = 2r\rho$ и $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$.

Дакле, $OS^2 - r^2 = -2r\rho$ и $OS_a^2 - r^2 = 2r\rho_a$, па је $OS^2 = r^2 - 2r\rho$ и $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$, што је и требало доказати.

16. Права одређена висином AD троугла ABC представља радикалну осу кругова којима су пречници тежишне линије BB_1 и CC_1 тог троугла.

Решење:



Нека су O_1, O_2 редом средишта тежишних дужи BB_1, CC_1. Довољно је доказати да је $AD \perp O_1O_2$ и да тачка A има једнаке потенције у односу на кругове $k_1(O_1, O_1B), k_2(O_2, O_2C)$. Тачке B_1, C_1 су редом средишта страница AC, AB, па је B_1C_1 средња линија троугла $\triangle ABC$, што значи да је $B_1C_1 \parallel BC$. Према томе, BCC_1B_1 је неконвексан трапез, па је O_1O_2 његова средња линија, што значи да је $O_1O_2 \parallel BC$. С друге стране, важи $AD \perp BC$, па следи да је $AD \perp O_1O_2$.

Ако је угао $\measuredangle BAC$ прав, онда тачка A припада круговима k_1, k_2, јер је $\measuredangle BAC = \measuredangle BAB_1 = \measuredangle C_1AC$, па су то онда периферијски углови над пречницима BB_1, CC_1 тих кругова. У том случају су потенције тачке A у односу на кругове k_1, k_2 нула, па су једнаке. Нека угао $\measuredangle BAC$ није прав. Означимо са B_2 другу пресечну тачку круга k_1 и праве AB и са C_2 другу пресечну тачку круга k_2 и праве AC. Угао $\measuredangle BB_2B_1$ је периферијски над пречником BB_1 круга k_1, а угао $\measuredangle CC_2C_1$ је периферијски над пречником CC_1 круга k_2, па су то прави углови. Следи да су и углови $\measuredangle AB_2B_1, \measuredangle AC_2C_1$ прави. Дакле, троуглови $\triangle AB_2B_1, \triangle AC_2C_1$ имају два пара подударних углова (углови код темена A се поклапају и $\measuredangle AB_2B_1 = \measuredangle AC_2C_1 = 90°$), па су слични. Према томе, добијамо да је $AB_2 : AC_2 = AB_1 : AC_1$. Тачке B_1, C_1 су средишта страница AC, AB, тј. важи $AB_1 = \frac{AC}{2}, AC_1 = \frac{AB}{2}$, па је $AB_1 : AC_1 = \frac{AC}{2} : \frac{AB}{2} = AC : AB$, што значи да је $AB_2 : AC_2 = AC : AB$, тј. $AB_2 \cdot AB = AC_2 \cdot AC$. Ако је угао $\measuredangle BAC$ оштар, онда је $p(A, k_1) = AB_2 \cdot AB$ и $p(A, k_2) = AC_2 \cdot AC$, па су потенције једнаке. Ако је овај угао туп, онда је $p(A, k_1) = -AB_2 \cdot AB$ и $p(A, k_2) = -AC_2 \cdot AC$, па су и у овом случају потенције једнаке. Према томе, права AD је радикална оса кругова k_1, k_2.

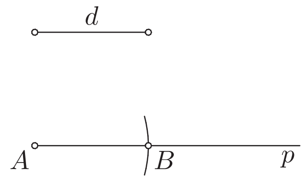
3 Конструктивни задаци

У конструктивним задацима се тражи да лењиром и шестаром конструишемо фигуру у равни која испуњава одређена својства. Наведимо основне конструкције које можемо извршити лењиром и шестаром.
Лењир: Лењиром можемо конструисати праву која садржи две дате разне тачке, затим полуправу која садржи две дате разне тачке тако да једна од њих буде њено теме као и дуж чија су темена две дате разне тачке.
Шестар: Шестаром можемо конструисати круг чији је центар дата тачка и полупречник дата дуж, као и било који лук тог круга.

Овај списак конструкција је веома сиромашан. Уколико бисмо сваку сложену конструкцију морали да сводимо на основне, решења задатака би се непотребно компликовала, па зато проширујемо списак основних конструкција списком елементарних конструкција, које ћемо сматрати познатим и нећемо их сводити на основне:
− конструкција дужи подударне датој дужи;
− конструкција угла подударног датом углу;
− конструкција медијатрисе дужи;
− проналажење средишта дужи;
− конструкција бисектрисе угла;
− конструкција правог угла и нормале из тачке на правој;
− конструкција паралелних правих (полуправих, дужи);
− конструкција тангенте датог круга из дате тачке;
− конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дата дуж види под датим углом;
− подела дате дужи на n подударних дужи, где је $n \in \mathbb{N}$ произвољан природан број;
− конструкција троугла коме су:
• странице подударне датим дужима;
• две странице и њима захваћени угао подударни датим дужима и датом углу;
• једна страница и на њој налегли углови подударни датој дужи и датим угловима;
• две странице и угао наспрам једне од њих подударни датим дужима и датом углу, при чему је познато да ли је угао наспрам друге странице оштар, прав или туп;
• једна страница, угао наспрам ње и један од углова налеглих на њој подударни датој дужи и датим угловима.

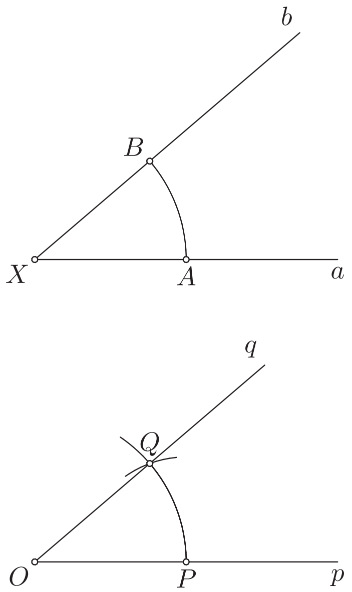
Следе детаљни описи сваке од елементарних конструкција.

Конструкција дужи подударне датој дужи



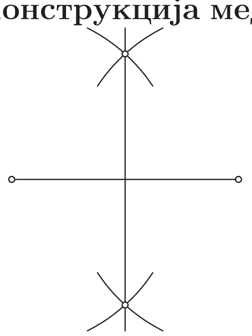
Означимо са A произвољну тачку и конструишимо произвољну полуправу Ap чије је теме тачка A. Конструишимо кружни лук с центром у тачки A чији је полупречник дуж d. У пресеку тог лука и полуправе Ap означимо тачку B и дуж AB је подударна дужи d.

Конструкција угла подударног датом углу



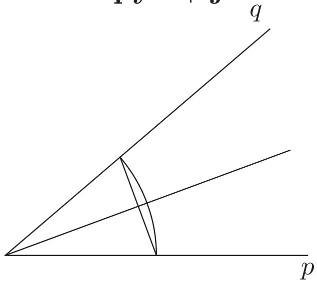
Означимо са O произвољну тачку и конструишимо произвољну полуправу Op чије је теме тачка O. Конструишимо лук l с центром у тачки O произвољног полупречника и означимо са P пресечну тачку тог лука и полуправе Op. На датом углу $\measuredangle aXb$ конструишимо лук с центром у X полупречника OP од крака Xa до крака Xb. Пресечне тачке тог лука с крацима Xa, Xb означимо редом са A, B. Конструишимо сада лук с центром у P полупречника AB и у пресеку с луком l означимо тачку Q. Конструишимо полуправу Oq с теменом O која садржи тачку Q и угао $\measuredangle pOq$ је подударан углу $\measuredangle aXb$.

Конструкција медијатрисе дужи; проналажење средишта дужи



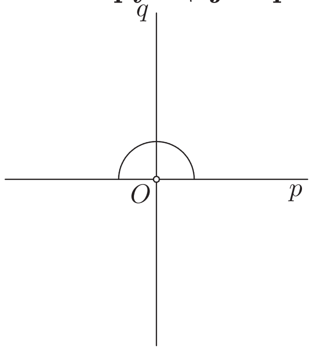
Конструишимо с обе стране праве која садржи дату дуж по један лук с центром у једном темену дужи, а потом и по један лук с центром у другом темену дужи, при чему су полупречници тих лукова подударни и већи су од половине дате дужи (да бисмо имали две пресечне тачке тих лукова). Конструишимо праву која пролази кроз те пресечне тачке и она је медијатриса те дужи. У пресеку дужи и њене медијатрисе налази се средиште те дужи.

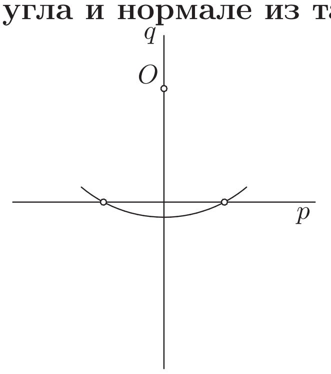
Конструкција бисектрисе угла



Конструишимо лук с центром у темену угла, произвољног полупречника, од једног до другог крака угла. Конструишимо дуж чија су темена пресечне тачке тог лука и кракова угла, конструишимо полуправу чије је теме теме угла и која припада медијатриси те дужи и она је бисектриса тог угла.

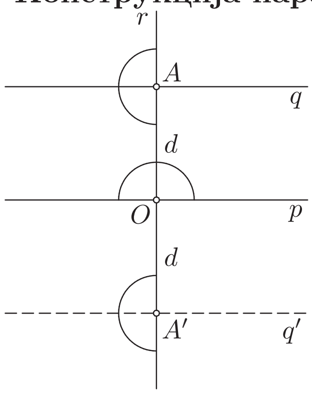
Конструкција правог угла и нормале из тачке на правој





Нека је дата права p и тачка O. Конструишимо лук с центром O довољно великог полупречника тако да пресече праву p у двема тачкама. Конструишимо медијатрису дужи чија су темена пресечне тачке тог лука и праве p и она је нормала на p из тачке O. За конструкцију правог угла довољно је конструисати бисектрису ма ког опруженог угла.

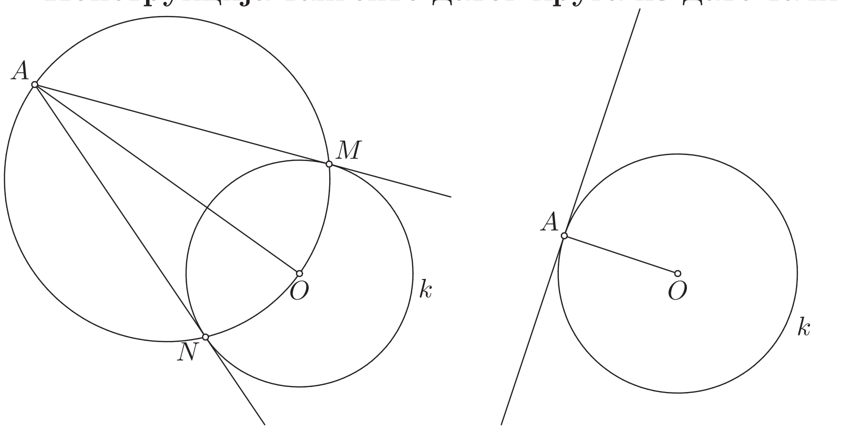
Конструкција паралелних правих



Нека је дата права p. Да бисмо конструисали праву q која је паралелна са p, конструишимо прво нормалу r на правој p у некој произвољној тачки O, а затим конструишимо нормалу q на правој r. Уколико желимо да права q буде на растојању d од праве p (d је дата дуж), конструишимо дуж OA која је подударна дужи d и конструишимо нормалу q на правој r у тачки A. Тада је $q \parallel p$ и налази се на растојању d од ње.

Приметимо да постоје две могућности за тачку A, па постоје и две могућности за праву q. Уколико нам је потребно да се одлучимо за једну од њих, наметнемо додатни услов који жељена права q треба да задовољи и он ће нам дати јединствен избор.

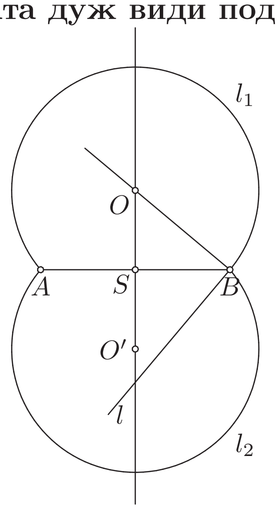
Конструкција тангенте датог круга из дате тачке



Ако је тачка A у спољашњости круга k, означимо с O центар круга k и конструишимо круг над пречником AO (центар му је средиште дужи AO и полупречник му је дуж чија су темена то средиште и тачка A). У пресеку тог круга и круга k означимо тачке M, N. Праве AM, AN су тражене тангенте.

Ако је тачка A на кругу k, онда конструишимо нормалу на полупречнику OA у тачки A.

Конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дата дуж види под датим углом

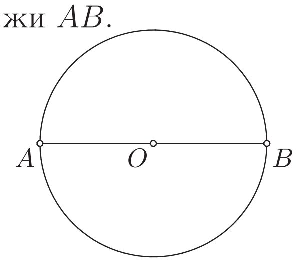


Нека је φ оштар угао, тј. нека је $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Конструишимо полуправу Bl с теменом B такву да је $\measuredangle ABl = \varphi$ и конструишимо нормалу n на полуправој Bl у тачки B. Конструишимо симетралу дужи AB и нека је њен пресек с правом n тачка O. Конструишимо лук l_1 с центром O од тачке A до тачке Bтакав да важи $l_1, O \mathrel{\ddot{-}} AB$. Нека је S средиште дужи AB. Конструишимо дуж SO' подударну дужи SO такву да важи $O, O' \div S$ и конструишимо лук l_2 с центром O' од тачке A до тачке B

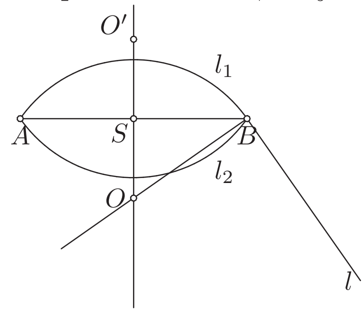
такав да важи $l_2, O' \mathbin{\ddot{-}} AB$.

Унија лукова l_1 и l_2 јесте тражено ГМТ, јер је полуправа Bl нормална на полупречнику OB круга који садржи лук l_1, па је она тангента и с тетивом AB заклапа угао φ. За произвољну тачку X с лука l_1 угао $\measuredangle AXB$ периферијски над луком $\widehat{AB}$ (који није лук l_1) и подударан је углу између тетиве AB и тангенте Bl, односно углу φ, а онда због симетрије исто важи и за лук l_2.

Напоменимо да тачка O' није пресек полуправе Bl и медијатрисе дужи AB.

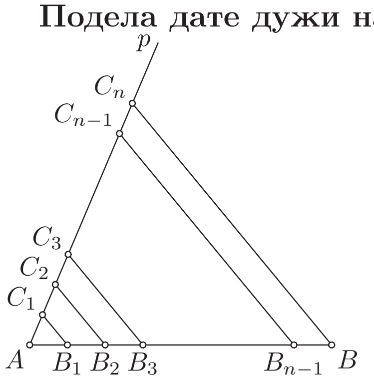


Нека је сада φ прав угао, тј. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Конструишимо круг l над пречником AB и то је тражено ГМТ (за свако $X \in l$ угао $\measuredangle AXB$ је периферијски над пречником AB, па је прав, тј. подударан је углу φ).



Коначно, ако је φ туп угао, тј. $\varphi > \frac{\pi}{2}$, конструкција иде слично као у првом случају (када је φ оштар), с тим што уместо услова $l_1, O \mathbin{\ddot{-}} AB$ и $l_2, O' \mathbin{\ddot{-}} AB$ имамо услове $l_1, O \div AB$ и $l_2, O' \div AB$.

Подела дате дужи на n подударних дужи

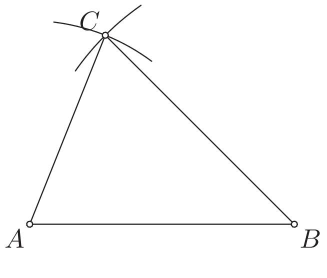


Нека је AB дата дуж. Конструишимо произвољну полуправу Ap различиту од полуправе AB такву да угао $\measuredangle BAp$ није опружен. Нека је C_1 произвољна тачка на полуправој Ap различита од тачке A и нека су $C_2, C_3, \ldots, C_n$ тачке на полуправој Ap такве да је $\mathcal{B}(A, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ и $AC_1 \cong C_1C_2 \cong C_2C_3 \cong \ldots \cong C_{n-1}C_n$. Конструишимо праву C_nB и затим конструишимо праве које садрже редом тачке $C_{n-1}, \ldots, C_2, C_1$ које су паралелне са правом C_nB. Њихове пресеке са дужи AB означимо редом са $B_{n-1}, \ldots, B_2, B_1$. Тада су на основу Талесове теореме (и њених последица) дужи $AB_1, B_1B_2, \ldots, B_{n-1}B$ међусобно подударне.

Елементарне конструкције троуглова

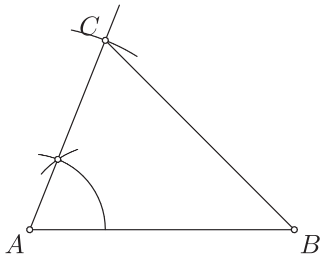
Приметимо да су увек дати они елементи троугла који се јављају у Ставовима о подударности троуглова. Разлог је што се Ставови користе да се докаже јединственост решења, односно да ако конструишемо два таква троугла (којима су одговарајући елементи дате дужи, односно дати углови), они морају бити међусобно подударни.

Конструкција троугла коме су дате странице a, b, c



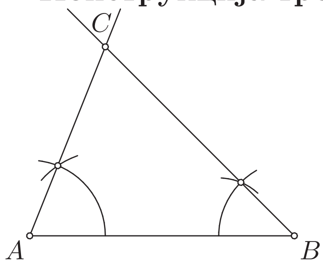
Нека су дате дужи a, b, c. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишимо лук с центром A полупречника b и лук с центром B полупречника a. У пресеку тих лукова означимо тачку C и добили смо троугао $\triangle ABC$.

Конструкција троугла коме су дати странице b, c и угао α



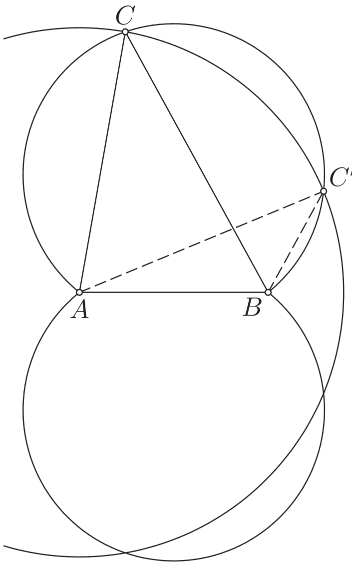
Нека су дати угао α и дужи b, c. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишемо полуправу Ap такву да је $\measuredangle BAp = \alpha$. Конструишимо лук с центром A полупречника b, у пресеку с полуправом Ap означимо тачку C и добили смо троугао $\triangle ABC$.

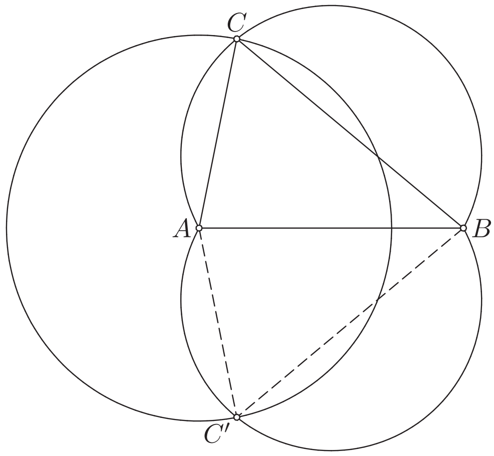
Конструкција троугла коме су дати страница c и углови α, β



Нека су дати дуж c и углови α, β. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишимо полуправу Ap такву да је $\measuredangle BAp = \alpha$ и полуправу Bq која је с исте стране праве AB с које је и полуправа Ap и за коју важи $\measuredangle ABq = \beta$. У пресеку тих полуправих означимо тачку C и добили смо троугао $\triangle ABC$.

Конструкција троугла коме су дати странице b, c и угао γ

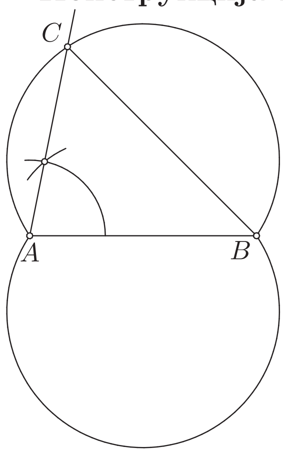




Нека су дати угао γ и дужи b, c и нека је познато да ли је угао β оштар, прав или туп. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишимо ГМТ l из којих се дуж AB види под углом γ. Конструишимо круг $k(A, b)$. У пресеку круга k и ГМТ l означимо са C ону тачку за коју је угао $\measuredangle ABC$ оштар ако је β оштар, прав ако је β прав, односно туп ако је β туп. Тако добијамо троугао $\triangle ABC$.

Ако није познато да ли је угао β оштар, прав или туп, онда могу постојати два неподударна троугла $\triangle ABC$ таквих да је $AB = c$, $\measuredangle BAC = \alpha$ и $AC = b$. Ако је $AC \leq AB$, добијена решења биће међусобно подударна (тада се каже да је решење јединствено до на подударност). Ако је $AC > AB$, број међусобно неподударних решења биће једнак броју пресечних тачака крупа $k(A, b)$ и једног од лукова ГМТ l (дакле, постојаће два неподударна решења ако се они секу у двема разним тачкама, постојаће јединствено решење до на подударност ако се они додирују, тј. секу у једној тачки, а неће бити решења ако они немају пресечних тачака).

Конструкција троугла коме су дати страница c и углови α, γ



Нека су дати дуж c и углови α, γ. Конструишимо дуж AB која је подударна дужи c. Конструишимо ГМТ l из којих се дуж AB види под углом γ. Конструишимо полуправу Ap такву да је $\measuredangle BAp = \alpha$. У њеном пресеку са ГМТ l означимо са C тачку која није тачка A и добијамо троугао $\triangle ABC$.

Постоји још елементарних конструкција. Неке од њих ћемо навести у решењима задатака. Сада ћемо изучити етапе у решавању задатака из конструкција. Те етапе су Анализа, Конструкција, Доказ и Дискусија.

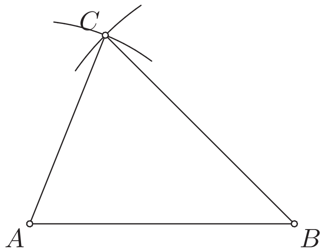
Анализа је етапа конструктивног задатка у којој се претпостави да имамо решен задатак, тј. да имамо конструисану фигуру која испуњава услове задатка P. Затим тражимо нове услове Q које та фигура задовољава помоћу којих се она може лакше конструисати. Услове Q изводимо из услова P, па дакле доказујемо и $P \Rightarrow Q$.

Конструкција је етапа у којој применом коначно много основних и елементарних конструкција описујемо како треба конструисати фигуру која задовољава услове Q које смо извели из задатих услова P током Анализе.

С обзиром на то да је наш задатак био да конструишемо фигуру која задовољава услове P, а ми смо у етапи Конструкција конструисали фигуру која задовољава услове Q, сада морамо доказати да тако конструисана фигура заиста задовољава почетне услове задатка, тј. услове P. Према томе, у етапи **Доказ** доказујемо $Q \Rightarrow P$. Све што смо навели у етапи Конструкција сматрамо да важи „по конструкцији” (ПК).

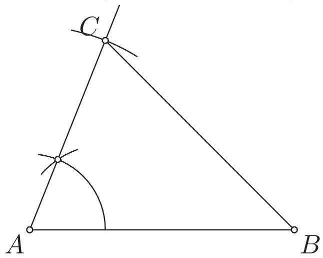
Коначно, у етапи **Дискусија** испитујемо колико постоји фигура које задовољавају услове задатка у зависности од њих. Испитајмо под којим је условима могуће извршити елементарне конструкције троуглова.

Троугао коме су дате странице a, b, c



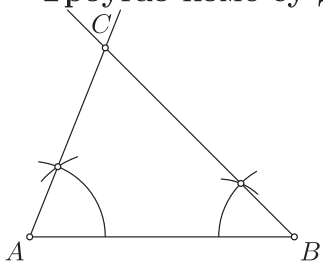
Ако су дате странице a, b, c, неопходно је да се лукови $l_1(A, b)$ и $l_2(B, a)$ секу у тачки ван дужи AB, што се дешава ако се одговарајући кругови секу у двема тачкама. Услов за ово је да је $|a - b| < AB < a + b$, што је познатије као неједнакост троугла за његове странице. Дакле, ако је $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, постоји јединствено решење до на подударност, а у супротном нема решења.

Троугао коме су дати странице b, c и угао α



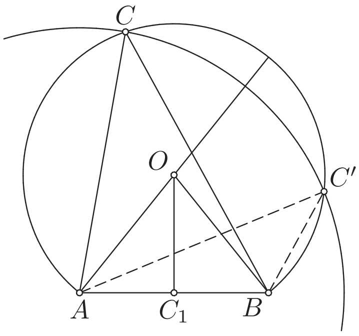
Ако су дати угао α и странице b, c, конструкција троугла је увек могућа и решење је јединствено до на подударност.

Троугао коме су дати страница c и углови α, β



Ако су дати дуж c и углови α, β, неопходно је да се краци Ap, Bq углова $\measuredangle BAp, \measuredangle ABq$ секу. Ово је тачно ако и само ако је $\alpha + \beta < \pi$, јер ако је $\alpha + \beta = \pi$, ови краци припадају паралелним правима, а ако је $\alpha + \beta > \pi$, праве које садрже ове краке се секу са супротне стране праве AB од оне где се ови краци налазе. Дакле, ако је $\alpha + \beta < \pi$, постоји јединствено решење до на подударност, а у супротном нема решења.

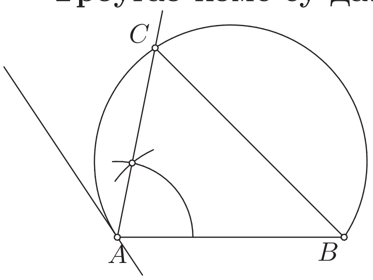
Троугао коме су дати странице b, c и угао γ



Ако су дате странице b, c и угао γ, при чему је познато да ли је угао β оштар, прав или туп, неопходно је да ГМТ l из којих се дуж AB види под углом γ и круг $k(A, b)$ имају заједничких тачака. Ово је тачно ако и само ако полупречник круга k није већи од пречника кругова који одређују ГМТ l. Ради једноставости, посматрајмо све само у једној од двеју полуравни с рубом AB. У њој се налази један од два лука који чине l.

Нека је O центар круга коме припада лук l и нека је C_1 средиште странице AB. Угао $\measuredangle AOB$ је централни угао над луком $\widehat{AB}$ (супротним од лука l), па је двапут већи од периферијског угла над истим луком. Како је l ГМТ из којих се дуж AB види под углом γ, следи да је $\measuredangle AOB = 2\gamma$. Троугао $\triangle ABO$ је једнакокрак, па је OC_1 симетрала угла $\measuredangle AOB$, што значи да је $\measuredangle AOC_1 = \frac{1}{2}\measuredangle AOB = \gamma$. Како је $\sin\measuredangle AOC_1 = \frac{AC_1}{AO}$, следи да је $\sin\gamma = \frac{\frac{1}{2}AB}{AO}$, па је $\sin\gamma = \frac{c}{2AO}$. Дакле, $2AO = \frac{c}{\sin\gamma}$ је пречник круга који садржи лук l, па следи да је услов постојања решења $b \leq \frac{c}{\sin\gamma}$.

Троугао коме су дати страница c и углови α, γ



Коначно, ако су дати дуж c и углови α, γ, услов постојања решења јесте да је угао $\measuredangle BAC$ мањи од угла који тангента t на кругу који садржи лук ГМТ l гради са тетивом AB (посматрамо, поново, све у једној од двеју полуравни с рубом AB). Угао који тангента t гради с тетивом AB суплементан је периферијском углу на ГМТ l, тј. једнак је $\pi - \gamma$. Дакле, мора бити $\alpha < \pi - \gamma$, односно $\alpha + \gamma < \pi$. У том случају постоји јединствено решење до на подударност.

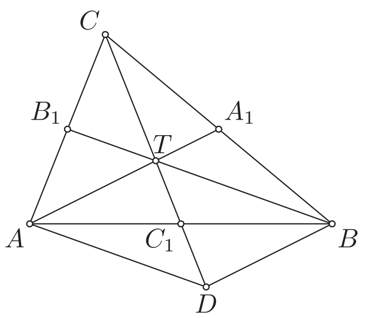
Напомена 8. Као што се може приметити, у дискусији под којим су условима могуће елементарне конструкције троуглова коришћене су тригонометријске функције. Надаље ће етапа Дискусија у задацима из конструкија бити једино место где сме да се користи тригонометрија, јер нам једино тригонометријске функције дају везу између дужи и углова која нам је потребна да бисмо одредили постојање и број неподударних решења. Дакле, у Анализи, Конструкцији и Доказу, као и у било ком задатку који није из конструкција, тригонометрија **не сме** да се користи.

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи:

1) t_a, t_b, t_c;	**7)** $\beta-\gamma, l_a, \rho$;
2) β, γ, p;	**8)** $\alpha, b-c, \rho_a$;
3) $\alpha, a, b+c$;	**9)** a, ρ_b, ρ_c;
4) $\beta, h_c, b\pm c$;	**10)** α, ρ, ρ_a;
5) $t_a, h_b, b\pm c$;	**11)** $b-c, h_a, \rho$.
6) $\beta-\gamma, b, c$;	

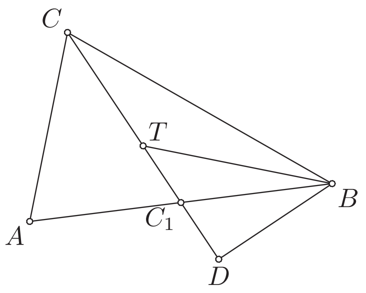
Решење: 1) t_a, t_b, t_c

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који задовољава услове задатка. Нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB. Тада су тежишне дужи AA_1, BB_1, CC_1 редом подударне датим дужима t_a, t_b, t_c.



Нека је T пресек тежишних дужи AA_1, BB_1, CC_1, тј. тежиште троугла $\triangle ABC$ и нека је тачка D симетрична тачки T у односу на тачку C_1. Тачка C_1 је заједничко средиште дужи TD и AB, па је четвороугао $ADBT$ паралелограм. Следи да је $AD \parallel BT$ и $AD = BT = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}t_b$, као и $BD \parallel AT$ и $BD = AT = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}t_a$. Такође, имамо да важи $TD = TC_1 + C_1D = 2TC_1 = 2\cdot\frac{1}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c$. У троуглу $\triangle TDB$ имамо да је $TD = \frac{2}{3}t_c$, $DB = \frac{2}{3}t_a$ и $BT = \frac{2}{3}t_b$, па тај троугао умемо да конструишемо. Тачка C_1 је средиште дужи TD и AB, па је тачка A симетрична тачки B у односу на тачку C_1. Такође, како је $CT = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c = TD$, следи да је тачка T средиште дужи CD, као и да је тачка C симетрична тачки D у односу на тачку T.

Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle TDB$ такав да је $TD = \frac{2}{3}t_c$, $DB = \frac{2}{3}t_a$, $BT = \frac{2}{3}t_b$. Означимо са C_1 средиште дужи TD, са A тачку симетричну тачки B у односу на тачку C_1 и са C тачку симетричну тачки D у односу на тачку T.



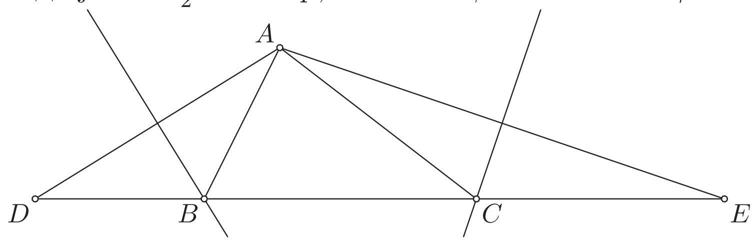
Доказ: Докажимо да овако конструисани троугао $\triangle ABC$ задовољава услове задатка. По конструкцији је C_1 средиште дужи AB. Означимо са A_1, B_1 редом средишта страница BC, CA. Треба доказати да су тежишне дужи AA_1, BB_1, CC_1 редом подударне дужима t_a, t_b, t_c. ПК је C_1 средиште дужи TD, па је $\mathcal{B}(T, C_1, D)$ и $TC_1 = C_1D$, а T је ПК средиште дужи CD, па следи $\mathcal{B}(C, T, D)$ и $CT = TD = TC_1 + C_1D = 2TC_1$. Дакле, важи распоред $\mathcal{B}(C, T, C_1, D)$ и $CT : TC_1 = 2TC_1 : TC_1 = 2 : 1$, па је T тежиште троугла $\triangle ABC$. Следи да је $AT = \frac{2}{3}AA_1$, $BT = \frac{2}{3}BB_1$ и $CT = \frac{2}{3}CC_1$. ПК је $BT = \frac{2}{3}t_b$ и $CT = TD = \frac{2}{3}t_c$, па следи да је $\frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}t_b$ и $\frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c$. Дакле, важи $BB_1 = t_b$ и $CC_1 = t_c$. Остаје још да докажемо да је $AA_1 = t_a$. Како је ПК C_1 заједничко средиште дужи AB и TD, следи да је четвороугао $ADBT$ паралелограм, па је $AT = BD$. ПК је $BD = \frac{2}{3}t_a$, а како је $AT = \frac{2}{3}AA_1$, следи да је $\frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}t_a$, тј. $AA_1 = t_a$.

Дискусија: Ако је $\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b \leq \frac{2}{3}t_c$ или $\frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c \leq \frac{2}{3}t_a$ или $\frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a \leq \frac{2}{3}t_b$, односно $t_a + t_b \leq t_c$ или $t_b + t_c \leq t_a$ или $t_c + t_a \leq t_b$, онда не постоји троугао $\triangle TDB$, па самим тим не постоји ни троугао $\triangle ABC$. Дакле, у овом случају нема решења.

Ако је $t_a + t_b > t_c$, $t_b + t_c > t_a$ и $t_c + t_a > t_b$, онда је троугао $\triangle TDB$ одређен јединствено до на подударност (каква год два различита троугла $\triangle TDB$ конструисали, они ће бити подударни на основу става ССС). Како троугао $\triangle TDB$ једнозначно одређује троугао $\triangle ABC$ (и обратно), следи да је и троугао $\triangle ABC$ одређен јединствено до на подударност. Према томе, у овом случају постоји јединствено решење до на подударност.

2) β, γ, p

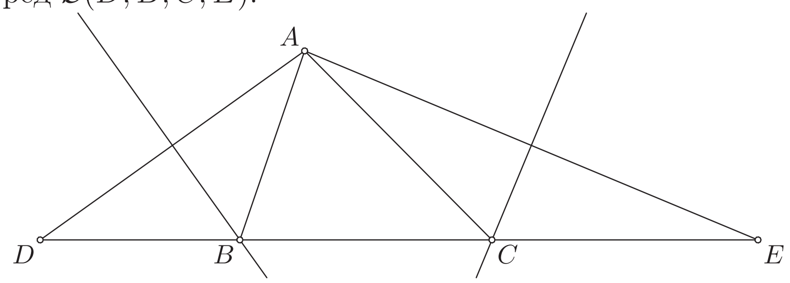
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\frac{BC+CA+AB}{2} = p$, $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle BCA = \gamma$.



Нека су D, E тачке на правој BC такве да је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$, $DB = AB$ и $CE = AC$. Тада је $DE = AB + BC + CA = 2p$. Троугао $\triangle ABD$ је једнакокраки, јер је $AB = DB$, па следи да је $\measuredangle ADB = \measuredangle DAB = \varphi$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао тог троугла, па је он једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle ADB$ и $\measuredangle DAB$. Дакле, $\beta = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па следи да је $\varphi = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle ADB = \frac{\beta}{2}$. Слично се доказује да је $\measuredangle AEC = \frac{\gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle ADE$ важи да је $DE = 2p$, $\measuredangle ADE = \measuredangle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle AED = \measuredangle AEC = \frac{\gamma}{2}$, па тај троугао умемо да конструишемо. Како је $DB = AB$, следи да тачка B припада медијатриси дужи DA. Слично, из $CE = AC$ следи да тачка C припада медијатриси дужи AE.

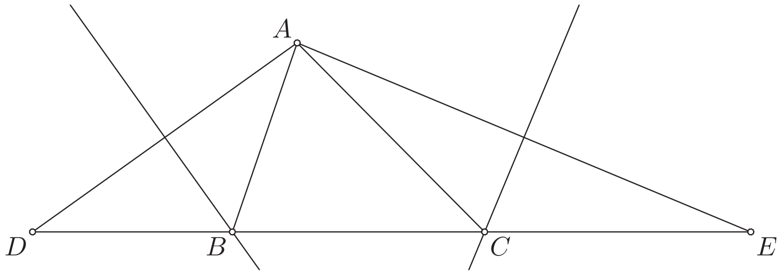
Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle ADE$ такав да је $DE = 2p$, $\measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$, $\measuredangle AED = \frac{\gamma}{2}$. Конструишимо медијатрисе дужи AD и AE и означимо редом њихове пресеке с дужи DE са B, C тако да важи распоред $\mathcal{B}(D, B, C, E)$.



Доказ: Треба доказати да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$, да је $\measuredangle ABC = \beta$ и да је $\measuredangle BCA = \gamma$. ПК је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$, па је $DE = DB + BC + CE$. Тачка B припада медијатриси дужи AD, па је $DB = AB$, а тачка C припада медијатриси дужи AE, па је $EC = AC$. Следи да је $DE = AB + BC + AC$. Такође, ПК је $DE = 2p$, па следи да је $AB + BC + AC = 2p$, односно да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$.

Из $DB = AB$ следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па имамо да је $\measuredangle DAB = \measuredangle ADB$. ПК важи да је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$ и $\measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$, па је

$\measuredangle ADB = \measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle ADB$. Дакле, $\measuredangle ABC = \measuredangle DAB + \measuredangle ADB = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$. Слично се доказује и да је $\measuredangle BCA = \gamma$.



Дискусија: Ако је $\beta + \gamma \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме су то унутрашњи углови, па задатак нема решења.

Нека је $\beta+\gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2} < \pi$, па постоји јединствен троугао $\triangle ADE$ до на подударност. Да ли медијатрисе страница AD и AE секу страницу DE редом у тачкама B, C тако да важи $\mathcal{B}(D, B, C, E)$? Угао $\measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AD, која је нормална на краку DA тога угла, сече његов други крак. Дакле, тачка B постоји и важи $B, E \mathrel{\ddot{-}} D$. Нама је потребно да важи распоред $\mathcal{B}(D, B, E)$, а то је тачно ако је $\measuredangle DAB < \measuredangle DAE$. Како је $\measuredangle DAB = \measuredangle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle DAE = \pi - \measuredangle ADE - \measuredangle AED = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, следи да важи $\mathcal{B}(D, B, E)$ ако испуњено $\frac{\beta}{2} < \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, односно $\beta + \frac{\gamma}{2} < \pi$, што је испуњено, јер је $\beta + \gamma < \pi$. Треба још проверити да ли медијатриса странице AE сече EB у тачки C таквој да важи $\mathcal{B}(B, C, E)$, јер ће онда важити распоред $\mathcal{B}(D, B, C, E)$.

Угао $\measuredangle AEB = \measuredangle AED = \frac{\gamma}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AE, која је нормална на краку EA тога угла, сече његов други крак EB у тачки C таквој да је $B, C \mathrel{\ddot{-}} E$. При томе важи распоред $\mathcal{B}(E, C, B)$ ако је $\measuredangle EAC < \measuredangle EAB$. Како је $\measuredangle EAC = \measuredangle AEC = \frac{\gamma}{2}$ и $\measuredangle EAB = \pi - \measuredangle ABE - \measuredangle AEB = \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, следи да је $\mathcal{B}(E, C, B)$ испуњен ако је $\frac{\gamma}{2} < \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, односно ако је $\beta + \gamma < \pi$.

Дакле, ако је $\beta + \gamma < \pi$, постоји јединствено решење до на подударност.